Séminaire Lotharingien de Combinatoire

Mitwitz,
Sept. 1984

Nombres de Genocchi et pics de cycles

par Dominique DUMONT

(Résumé)

Rappel : Les nombres de Genocchi peuvent être définis par le Triangle de Seidel (1877, figure ci-contre), dans lequel tout nombre est somme du nombre situé "avant" lui dans le sens des flêches et du nombre situé au-dessus de lui. La suite du bord droit (1, 1, 3, 17, ...) est celle des nombres de Genocchi G_{2n} et la suite de la colonne de gauche (1, 1, 2, 8, 56, ...) est celle des "nombres de Genocchi médians" H_{2n+1}. On a la fonction génératrice suivante :

$$\begin{array}{llllll}
 & 1 & & & & \\
 & 1 & & & & \\
\rightarrow & 1 & 1 & & & \\
 & 2 & 1 & \leftarrow & & \\
\rightarrow & 2 & 3 & 3 & & \\
 & 8 & 6 & 3 & \leftarrow & \\
\rightarrow & 8 & 14 & 17 & 17 & \\
 & 56 & 48 & 34 & 17 & \leftarrow \\
\rightarrow & 56 & 104 & 138 & 155 & 155 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

(cf. [3], [6])

$x.tg(x/2) = x^2/2! + x^4/4! + 3x^6/6! + 17x^8/8! + \ldots$

mais on n'a hélas rien d'aussi simple pour les "médians" H_{2n+1}.

* *

Le but de notre article est d'étudier la suite de polynomes en trois variables $G_n(x,y,z)$ définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} G_1(x,y,z) = z \\ G_{2n}(x,y,z) = xy\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right) G_{2n-1}(x,y,z) \\ G_{2n+1}(x,y,z) = z\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right) G_{2n}(x,y,z). \end{cases}$$

Nous établissons de façon combinatoire les identités suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2 x\, t^n}{\prod_{k=1}^n (1-k^2(x-1)t)} = \sum_{n\geq 1} G_{2n}(x,1,1)\, t^n$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2\, t^n}{\prod_{k=1}^n (1-k(k+1)(z-1)t)} = \sum_{n\geq 1} G_{2n}(1,1,z)\, t^n$$

ainsi que deux identités analogues dans le cas impair. En posant x=0 dans la première on obtient l'identité de Riordan & Stein sur les nombres de Genocchi ([5], [1]), et en posant z=0 dans la seconde on obtient l'identité analogue démontrée par Barsky pour les nombres de Genocchi médians [1]. Par conséquent, on a :

$$G_{2n-1}(0,1,1) = G_{2n}$$

$$G_{2n}(1,1,0) = H_{2n+1}.$$

(En fait c'est l'identité analogue dans le cas impair qui nous fournit la première. Si on pose x=0 dans le polynome $G_{2n}(x,1,1)/x$, on obtient G_{2n+2} d'après l'identité de Riordan et Stein)

D'autre part nous montrons, toujours de façon combinatoire, les développements suivants en fractions continues :

$$\cfrac{x}{1-\cfrac{yt}{1-\cfrac{xt}{1-\cfrac{4yt}{1-\cfrac{4xt}{\ddots\, 1-\cfrac{n^2yt}{1-\cfrac{n^2xt}{\ddots}}}}}}} = \sum_{n\geqslant 0} G_{2n}(x,y,0)\, t^n \qquad (\text{où } G_0 = x)$$

$$\cfrac{z}{1-\cfrac{yt}{1-\cfrac{2zt}{1-\cfrac{4yt}{1-\cfrac{6zt}{\ddots\, 1-\cfrac{n^2yt}{1-\cfrac{n(n+1)zt}{\ddots}}}}}}} = \sum_{n\geqslant 0} G_{2n+1}(0,y,z)\, t^n$$

En posant respectivement $x=y=1$ et $y=z=1$ dans ces développements, on obtient les fractions continues pour les H_{2n+1} d'une part, pour les G_{2n} d'autre part, qu'on démontre à partir de leurs interprétations en termes de "pistolets alternants" (Dumont & Viennot 1980, Viennot 1981)[3],[7].

Ces formules sont tout-à-fait analogues au développement en fraction continue de la transformée de Laplace du cosinus elliptique cn,[4] et donnent à penser que les polynomes $G_n(x,y,z)$ jouent pour les nombres de Genocchi le rôle que jouent les polynomes de Schett pour les nombres sécants et tangents[2].

D'autre part, nous montrons que les coefficients des polynomes $G_n(x,y,z)$ comptent les pics de cycle pairs et impairs sur les permutations "bipartites", en convenant d'appeler ainsi les permutations p pour lequelles i et p(i) sont toujours de parités opposées (sauf, dans le cas impair, pour p(2n+1) qui est impair). D'où un nouveau rapprochement avec les polynomes de Schett (Dumont, 1981)[2]

Il reste encore à identifier la fonction génératrice des polynomes $G_n(x,y,z)$: fonction elliptique, ou transcendante d'une autre espèce ?

* * *

[1] D. Barsky, Congruences pour les nombres de Genocchi de deuxième espèce, Séminaire du Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique, 1980-81, t.34, 01-013.

[2] D.Dumont, Une approche combinatoire des fonctions elliptiques de Jacobi, Adv. in Math. 41 (1981), 1-39.

[3] D.Dumont & G.Viennot, the Seidel generation of Gen. numbers Ann. Disc.Math (1980)

[4] P.Flajolet, Combinatorial aspects of continued fractions, Disc.Math. 32 (1980)

[5] Riordan & Stein, Proof of a conjecture on Gen.numbers, Disc.Math.5 (1973)

[6] L.Seidel, Sitzungsberichte der Münchener Akad. (1877), 157-187

[7] G.Viennot, Interprétations combinatoires des nombres d'Euler et de Genocchi, Séminaire de Théorie des Nombres, Bordeaux (1981), exp.n°11.

Entscheidbare Varietäten von aperiodischen Monoiden

R. König, Erlangen

Eine Varietät von endlichen Monoiden (=M-Varietät) ist eine Klasse von endlichen Monoiden, die abgeschlossen ist unter Bildung von

- Untermonoiden
- Quotienten
- endlichen direkten Produkten.

Beispiele für M-Varietäten sind:

- die triviale M-Varietät $\underline{I} = \{\{1\}\}$
- die Klasse aller endlichen Monoide = $\underline{M}$
- die Klasse aller endlichen Gruppen = $\underline{G}$
- die Klasse aller aperiodischen (= endlich und gruppenfrei) Monoide = $\underline{A}$.

Ersetzt man in obiger Definition "Monoid" durch "Halbgruppe", so erhält man den Begriff der S-Varietät.

Eine M-Varietät (S-Varietät) $\underline{V}$ heißt entscheidbar, wenn für jedes endliche Monoid (Halbgruppe) M entscheidbar ist, ob $M \in \underline{V}$ gilt oder nicht.

Es ist klar, daß für entscheidbare M-Varietäten $\underline{U}$ und $\underline{V}$ auch $\underline{U} \cap \underline{V}$ entscheidbar ist. Für die von $\underline{U}$ und $\underline{V}$ erzeugte M-Varietät $\underline{U} \vee \underline{V}$ gilt zunächst nur: $\underline{U} \vee \underline{V}$ ist rekursiv aufzählbar. $\underline{U} \vee \underline{V}$ ist nämlich erzeugt von den direkten Produkten $U \times V$ mit $U \in \underline{U}$, $V \in \underline{V}$ [E] und eine Auflistung aller $\underline{U} \vee \underline{V}$-Monoide erhält man, indem man für jedes $U \in \underline{U}$ und jedes $V \in \underline{V}$ alle Quotienten von Untermonoiden von $U \times V$ auflistet.

Dieser Artikel ist ein Versuch, Bedingungen für $\underline{U}$ und $\underline{V}$ zu finden, so daß $\underline{U} \vee \underline{V}$ entscheidbar wird.

Daher ist es notwendig, zunächst zu studieren, wie man Varietäten beschreiben kann:

Jede M-Varietät (S-Varietät) $\underline{V}$ ist schließlich definiert durch eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Gleichungen, d.h. ein endliches Monoid (Halbgruppe) M gehört genau dann zu $\underline{V}$, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für alle $n \geq k$ die Gleichungen g_n in M gelten [E] .

Beispielsweise ist

- $\underline{I}$ definiert durch $x = y$
- $\underline{M}$ definiert durch $x = x$
- $\underline{G}$ definiert durch $x^{n!} = 1$ $(n=1,2,3,\ldots)$
- $\underline{A}$ definiert durch $x^{n+1} = x^n$ $(n=1,2,3,\ldots)$

Wenn das System $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Eigenschaft hat, daß in jeder Halbgruppe M mit g_n auch g_{n+1} gilt, dann kann man die Frage "$M \in \underline{V}$?" entscheiden, falls man die zunächst unbeschränkte Suche nach k durch eine von M effektiv abhängige Zahl beschränken kann. Die Gültigkeit der Gleichung g_n in der endlichen Halbgruppe M ist nämlich entscheidbar. Auf diese Weise erhält man:

- $\underline{A}$ ist entscheidbar
- $\underline{G}$ ist entscheidbar.

Die effektive Schranke für k ist dabei jeweils $|M|$.

Eine andere Möglichkeit zur Beschreibung von M-Varietäten ist die folgende:
Für jedes endliche Alphabet Σ und jede natürliche Zahl n sei $\rho_{n,\Sigma}$ eine Kongruenzrelation auf Σ^*, so daß gilt: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jeden Morphismus $f\colon \Gamma^* \to \Sigma^*$ ist $\rho_{n,\Gamma} \subseteq f \circ \rho_{n,\Sigma} \circ f^{-1}$.
Dann ist jedes $\rho_{n,\Sigma}$ vollinvariant und o.B.d.A. kann man voraussetzen, daß außerdem

$$\forall n,\Sigma \quad \rho_{n+1,\Sigma} \subseteq \rho_{n,\Sigma} \qquad (\text{ersetze } \rho_n \text{ durch } \bigvee_{k \geq n} \rho_k)$$

Dann bildet die Klasse aller $\Sigma^*/_\rho$, wobei Σ ein endliches Alphabet und ρ eine endliche Kongruenzrelation auf Σ^* ist mit

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad \rho_{k,\Sigma} \subseteq \rho ,$$

eine M-Varietät. [K1].

(Eine Beschreibung der S-Varietäten erhält man, wenn man überall Σ^*, Γ^* durch Σ^+, Γ^+ ersetzt.)

Beispiel: Wenn $\underline{V}$ durch die Gleichungen g_n ($n \in \mathbb{N}$) schließlich definiert ist, dann erhält man ein solches System, indem man definiert:

$\rho_{k,\Sigma}$ ist die von der Gleichung g_k auf Σ^* erzeugte vollinvariante Kongruenzrelation.

Es sei nun $S_{k,\Sigma}$ ein endliches, effektiv konstruierbares Erzeugendensystem von $\rho_{k,\Sigma}$. Um zu entscheiden, ob ein vorgegebenes Monoid M zu der durch das System der $\rho_{k,\Sigma}$ definierten M-Varietät $\underline{V}$ gehört, sind k und Σ zu finden, für die gilt:

- $M \cong \Sigma^*/_\rho$
- $S_{k,\Sigma} \subseteq \rho$.

Diese beiden Bedingungen lassen sich auch ausdrücken durch

- Σ ist Erzeugendensystem von M
- $(u,v) \in S_{k,\Sigma} \Rightarrow u = v$ in M

Da M endlich ist, ist auf jeden Fall $\Sigma = M$ (als Menge) ein Erzeugendensystem für M, so daß also die zweite Bedingung wesentlich ist.

Diese Methode kann man beispielsweise verwenden, um die M-Varietät $\underline{R}$ der $\mathcal{R}$-trivialen Monoide zu entscheiden.

[$\underline{R} = \{M \mid M$ endliches Monoid, $\forall a,b \in M \; aM = bM \Rightarrow a = b\}$]

Theorem 1 [K2] :

Es sei

$A_{0,\Sigma} = \{\Lambda\}$ für alle endlichen Alphabete Σ

$A_{k,\emptyset} = \{\Lambda\}$ für alle $k \geq 0$

$A_{k,\Sigma} = \{\Lambda\} \cup \bigcup_{\sigma\in\Sigma} A_{k,\Sigma\setminus\sigma} \cdot \sigma \cdot A_{k-1,\Sigma}$ für alle $k > 0$, $\Sigma \neq \emptyset$.

Für ein endliches Monoid M mit $|M| = k$ und erzeugendem System Σ gilt dann:

$$M \in \underline{R} \Leftrightarrow ((u,v) \in S_{k,\Sigma} \Rightarrow u = v \text{ in } M)$$

$$\text{wobei } S_{k,\Sigma} = \{(u\sigma,u) \mid u \in A_{k,\Sigma}, \sigma \in \Sigma, u\sigma \notin A_{k,\Sigma}\}$$

Im Beweis benötigt man Kongruenzrelationen $\rho_k (k \geq 0)$ auf Σ^*, die jeweils erzeugt sind von den Mengen

$$R_{k,\Sigma} = \{(u\sigma,u) \mid u \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma, u = u_1 \dots u_k, \alpha(u_1) \supseteq \dots \supseteq \alpha(u_k) \supseteq \alpha(\sigma)\}$$

Dabei ist α der Morphismus von Σ^* in die Boolesche Algebra 2^Σ (aufgefaßt als Monoid bzgl. $\cup$), der erzeugt wird durch die Abbildung $\sigma \mapsto \{\sigma\}$. Verlängert man diesen Morphismus durch β zu α'

$$\alpha' : \Sigma^* \xrightarrow{\alpha} 2^\Sigma \xrightarrow{\beta} 2$$

in die Boolesche Algebra 2, ($\sigma \xmapsto{\beta} 1$ für alle $\sigma \in \Sigma$) so kann man in der Definition von $R_{k,\Sigma}$ α durch α' ersetzen und erhält Mengen R'_k . Die davon erzeugten Kongruenzrelationen ρ'_k sind verträglich mit allen $f \in \text{End}(\Sigma^+)$ und definieren daher eine S-Varietät (nicht M-Varietät) $\underline{K}$, die S-Varietät der umgekehrt definiten Halbgruppen [E]. Man erhält als

<u>Korollar:</u> Die Mengen $S'_{k,\Sigma} = \{(u\sigma,u) \mid u \in \Sigma^k, \sigma \in \Sigma\}$

sind endliche, konfluente, noethersche Reduktionssysteme und es gilt:

Eine Halbgruppe S mit $|S| = k$ liegt genau dann in $\underline{K}$, wenn $(u,v) \in S'_{k,\Sigma} \Rightarrow u = v$ in S.

Dabei ist Σ ein Erzeugendensystem für S.

Vertauscht man in allen Definitionen rechts und links, so erhält man aus

$$\begin{array}{lcl} \underline{R} & \dashrightarrow & \underline{L} \\ A_{k,\Sigma} & \dashrightarrow & B_{k,\Sigma} \\ S_{k,\Sigma} & \dashrightarrow & T_{k,\Sigma} \\ R_{k,\Sigma} & \dashrightarrow & L_{k,\Sigma} \\ R'_{k,\Sigma} & \dashrightarrow & L'_{k,\Sigma} \\ \rho'_k & \dashrightarrow & \lambda'_k \\ S'_{k,\Sigma} & \dashrightarrow & T'_{k,\Sigma} \\ \underline{K} & \dashrightarrow & \underline{K}^r \end{array}$$

$S'_{k,\Sigma}$ und $T'_{k,\Sigma}$ lassen sich kombinieren zu

$$M'_{k,\Sigma} = \{(u\sigma v, uv) \mid u,v \in \Sigma^k, \sigma \in \Sigma\}.$$

$\mu'_{k,\Sigma}$ sei die von dieser Menge auf Σ^+ erzeugte Kongruenzrelation und $\underline{\check{K}}$ die von den $\mu'_{k,\Sigma}$ erzeugte S-Varietät.

<u>Theorem 2</u>: $\underline{\check{K}} = \underline{K} \vee \underline{K}^r$

Beweis: Wegen $M'_{k,\Sigma} \subseteq \rho'_{k,\Sigma} \cap \lambda'_{k,\Sigma}$ gilt

$$\underline{K} \subseteq \underline{\check{K}} \quad \text{und} \quad \underline{K}^r \subseteq \underline{K}$$

Umgekehrt gilt auch $\rho'_{2k} \cap \lambda'_{2k} \subseteq \mu'_k$:

Sei nämlich $(u,v) \in \rho'_{2k} \cap \lambda'_{2k}$, d.h.

$$u = xu_1 = u_2 y$$

$$v = xv_1 = v_2 y \quad \text{mit } |x| = |y| = k$$

Für ρ'_{2k} (und λ'_{2k}) gilt: $u \neq v$ und $(u,v) \in \rho'_{2k}$ impliziert $|u|, |v| \geq 2k$.
Sei daher $|u|, |v| \geq 2k$. Dann überschneiden sich x und y in obiger Darstellung weder in u noch in v und es folgt $(u,v) \in \mu'_k$.

Da M'_k wieder ein konfluentes, noethersches Reduktionssystem ist, folgt:

$\underline{K}$ ist entscheidbar.

(Das wußte man schon vorher, z.B. aufgrund einer Beschreibung durch Gleichungen).

In ähnlicher Weise wie aus ρ'_k und λ'_k μ'_k entsteht, kann man zu ρ_k und λ_k eine Kongruenzrelation μ_k definieren. $\underline{V}$ sei die von diesen μ_k erzeugte M-Varietät. Analog zu obigem Theorem sollte sich beweisen lassen:

$$\underline{V} = \underline{R} \vee \underline{L} .$$

Die Vermutung wird gestützt durch folgende Beobachtungen:

- $\underline{V}$ ist entscheidbar [K2]
- das System der irreduziblen Wörter bezüglich μ_k wird beschrieben durch eine Bimaschine, die durch Kombination

des rechts-sequentiellen Übersetzers für ρ_k mit dem links-sequentiellen Übersetzer für λ_k entsteht [K2] .

- Es sei γ_k die von

$$H_k = \{(uvw,uw) \mid u=u_1 \dots u_k, w=w_k \dots w_1, \alpha(v) \subseteq \alpha(u_1) = \dots = \alpha(u_k) = \alpha(w_1) = \dots = \alpha(w_k)\}$$

erzeugte Kongruenzrelation und $\underline{H}$ die von den γ_k definierte M-Varietät. (In [B-F] heißt diese M-Varietät $\underline{G}$)

Dann gilt [B] :

$$\underline{V} \subsetneqq \underline{H}$$

Die einseitigen Analoga zu γ_k definieren $\underline{R}$ bzw. $\underline{L}$ [B-F].

$\underline{V}$ ist also eine "kleinere" Verallgemeinerung von $\underline{R}$ und $\underline{L}$.

Aus [B-F] ergibt sich das folgende

<u>Theorem</u> 3 $\underline{H}$ ist entscheidbar.

Beweis: H_k ist ein noethersches, konfluentes Reduktionssystem und γ_k hat endlichen Index. Es gibt eine effektiv bestimmbare Zahl l, sodaß jedes irreduzible Wort bezüglich H_k höchstens die Länge l hat [B-F] .

Also ist ein Repräsentantensystem I_k konstruierbar, indem man jedes $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \leq l$ mit Hilfe von H_k reduziert. Bezeichne mit irr(w) das zu $w \in \Sigma^*$ gehörige irreduzible Wort und mit

$$\overline{H}_{k,\Sigma} = \{(u\sigma, irr(u\sigma)) \mid u \in I_k, \sigma \in \Sigma, u\sigma \notin I_k\}$$

Dann gilt für $M = \Sigma^*/_\rho$, $|M| = k$:

$$M \in \underline{H} \iff \forall (u,v) \in \overline{H}_{k,\Sigma} \quad u = v \text{ in } M .$$

Literatur

[B] Baader, F.: Einige Teilvarietäten der Klasse der aperiodischen Monoide und die zugehörigen E-Varietäten. Studienarbeit IMMD (1984)

[B-F] Brzozowski-Fich: A characterization of a dot-depth two analogue of generalized definite languages. ICALP (1979)

[E] Eilenberg, S.: Automata, languages and machines AP (1976)

[K1] König, R.: Beiträge zur Theorie der formalen Sprachen. IMMD Arbeitsbericht 16/2 (1983)

[K2] König, R.: Reduction algorithms for some classes of aperiodic monoids. Eingereicht