Ein maßtheoretisches max-flow Problem

von Konrad Jacobs in Erlangen

Sei X ein kompakter metrischer Raum und Ω ein kompakter metrischer Raum von Pfaden in X, sowie P ein Maßkern von Ω nach X, derart, daß für jedes $0 \leq f \in C(X, \mathbb{R})$ die Funktion Pf unterhalbstetig auf Ω ist. Maße μ auf Ω heißen auch Flüsse, Maße c auf X heißen auch Kapazität(sbeschränkung)en. Interpretation: ein auf Pfad $\omega \in \Omega$ die Wüste X durchwanderndes Schaf frißt aus dem gemäß c vorhandenen Weidegras den Anteil $P(\omega,.)$. Wir stellen in Verallgemeinerung des klassischen Netzwerk-Fluß-Problems von Ford-Fulkerson das folgende

> max-flow-Problem: Man maximiere die Stärke $\mu 1 = \mu(\Omega)$ des Flusses μ unter der Nebenbedingung
>
> $$\mu P \leq c.$$

Das zugehörige duale Problem lautet:

> Man minimiere cf durch Wahl von $0 \leq f \in C(X, \mathbb{R})$ unter der Nebenbedingung
>
> $$1 \leq Pf$$

Man leitet dann sofort folgende Ungleichungskette ab:

$$\max_{\mu P \leq c} \mu 1 \leq \max_{\mu P \leq c} \inf_{1 \leq Pf} \mu P f$$

$$\leq \inf_{1 \leq Pf} \max_{\mu P \leq c} \mu P f$$

$$\leq \inf_{1 \leq Pf} cf$$

Durch Anwendung des Satzes von Hahn-Banach hat H. Kellerer (München) gezeigt, daß hier überall Gleichheit gilt:

(1) $$\max_{\mu P \leq c} \mu 1 = \inf_{1 \leq Pf} cf$$

(Brief vom 16.11.1984 an den Verf.) Interpretiert man die $0 \leq f \in C(X, \mathbb{R})$ mit $1 \leq Pf$ als Schnitte, so ist (1) das Analogon zum Ford-Fulkerson'schen max-flow-min-cut-theorem in der gegenwärtigen Situation. In einem Spezialfall hat der Verf. ein Approximationstheorem bewiesen, nach dem man das obige max-flow-Problem näherungsweise mittels endlicher Netzwerke lösen kann (Jacobs [1984]). Die folgenden Probleme sind u.a. Gegenstand weiterer Untersuchungen in Erlangen:

1) Ersetzbarkeit von "inf" durch "min" in (1), nach passender Abänderung der Wahlmöglichkeiten für die f.

2) Ausdehnung des Approximationstheorems auf den allgemeinen Fall.

3) Analoga zum klassischen Markierungsalgorithmus im maßtheoretischen Fall.

[1984] Jacobs, K., A measure-theoretical max-flow problem, Part II: Approximation, Bull.Math.Acad.Sinica (Taipei) 12 (1984), 71-79.

K. Jacobs

Konrad Jacobs (Erlangen)