G. Kreweras (Paris)

Abzählung gewisser Pfade in der $\mathbb{Z}^2$-Ebene

Die abgezählte Pfade sind Brücken mit Spanne n oder n-Brücken, d.h. (2n)-buchstabige Wörter aus dem Alphabet $\{a,b\}$, in welchen beide Buchstaben genau n Mal benutzt werden und das i-te b nie vor dem i-ten a vorkommt. Es is wohlbekannt, dass die Gesamtanzahl solcher n-Brücken die Catalan-Zahl $\binom{2n}{n}/(n+1)$ ist. Weiterhin lassen sich die n-Brücken mit h "Doppelanstiegen" (d.h. 2 hintereinanderliegenden a) auch klassischerweise abzählen ; ihre Anzahl ist die Narayana-Zahl $\frac{1}{n}\binom{n}{h}\binom{n}{h+1}$.

In einer Brücke wird jegliche maximale Sequenz von a (bzw. b) als Sprung (bzw. Absatz) benannt. Sprünge und Absätze werden als <u>lang</u> bezeichnet wenn sie aus mindestens 2 Buchstaben entstehen. Wir interessieren uns für die n-Brücken mit h Doppelanstiegen, i langen Sprüngen und j langen Absätzen (mit Ausschluss vom Endabsatz), und beweisen, dass die Anzahl solcher Brücken gleich $\frac{1}{h}\binom{h}{i}\binom{h}{j}\binom{n-h-1}{i-1}\binom{n-h}{j+1}$ ist.

Die Summierung diesen Ausdrucks für einen bestimmten Wert k von i+j ergibt eine Funktion B(n,h,k) von drei Argumenten ($n \in \mathbb{N}$, h und $k \in \{0,1,\ldots,n-1\}$), welche bemerkenswerte Eigenschaften hat. Insbesondere ergeben beide Summen $\sum_h B(n,h,k)$ und $\sum_k B(n,h,k)$ dieselbe (symmetrische) Narayana-Verteilung, obwohl die Summanden keine Symmetrie darbieten. Beispielshalber zeigen wir nachstehend die entsprechende Tabellen für n = 5 und 6 :

n = 5	k= 0	1	2	3	4	
h = 0	1					1
1		4	6			10
2		3	9	7	1	20
3		2	5	3		10
4		1				
	1	10	20	10	1	42

n = 6	k= 0	1	2	3	4	5	
h = 0	1						1
1		5	10				15
2		4	18	22	6		50
3		3	15	11	9	1	50
4		2	7	6			15
5		1					1
	1	15	50	50	15	1	132