PLUSIEURS FAMILLES DE NOMBRES RECONSTITUÉES À PARTIR D'ATOMES COMMUNS

Yves POUPARD
Université de Paris I

PRESENTATION

Nous avons pour objectif d'énoncer une série de propositions indiquant comment calculer chacun des termes d'une douzaine de familles classiques de nombres au moyen de sommations partielles adéquates de termes d'une même autre famille numérique.

Pour définir celle-ci et pouvoir formuler nos propositions, nous avons besoin d'introduire au préalable et à tire auxiliaire une famille de suites que nous appelons "de Catalan".

Dans une première partie nous définissons ces suites de Catalan puis nous apprenons à associer à chacune d'elles l'un des nombres qui par sommation permettent de reconstituer les diverses familles que nous considérons.

Dans la deuxième partie, nous énonçons notre série de propositions. (Pour la plupart, nous indiquons aussi, entre parenthèses, le nombre des termes de la somme correspondante, ce qui fournit l'occasion de mentionner encore quelques familles de nombres elles aussi assez classiques).

Enfin, dans une troisième et dernière partie, nous indiquons brièvement comment on pourrait procéder pour justifier ces propositions.

1- SUITES DE CATALAN ET NOMBRES ASSOCIES

1-1 Suites de Catalan

Soit n un entier naturel strictement positif.

Nous appelons suite de Catalan d'ordre n toute suite $R=(r_0,r_1,\dots,r_n)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$r_i \in \mathbb{N}$ pour tout i de 0 à n .

$$\sum_{i=0}^{n} r_i = n$$

$$\sum_{i=0}^{j} r_i \geq j+1 \qquad \text{pour tout } j \text{ de } 0 \text{ à } n-1 \quad .$$

On peut vérifier que cette dernière condition peut être remplacée par la condition équivalente :

$$\sum_{i=0}^{j} r_i - j \geq r_j \quad \text{pour tout } j \text{ de } 0 \text{ à } n \quad .$$

(on a en particulier $r_0 \geq 1$ et $r_n = 0$).

Nous désignons par $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des suites de Catalan d'ordre n .

La raison du choix de cette appellation est que le cardinal de $\mathcal{C}_n$ est égal au nombre de Catalan C_n (1) :

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{(2n)_{n-1}}{n!} \quad ,$$

où, selon la notation dite "de Vandermonde",

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, on a $(x)_0 = 1$

et $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $(x)_p = \prod_{i=1}^{p} (x-i+1)$.

Pour s'en assurer, il suffit de remarquer que l'on peut définir très simplement une bijection de $\mathcal{C}_n$ dans l'ensemble $\mathcal{P}_n$ des ponts de portée n (c'est-à-dire des chemins surdiagonaux joignant dans le plan cartésien le point (0,0) au point (n,n) en 2n étapes : n étapes verticales et

---

(1) Cf. [1] T.1 p. 95-96.

n étapes horizontales) en mettant en correspondance la suite $R = (r_0, r_1, \ldots, r_n) \in \mathcal{C}_n$ et le pont $P \in \mathcal{P}_n$ dont, pour tout i de 0 à n, le nombre d'étapes sur la verticale d'abscisse i est égal à r_i .

1-2 Nombre associé à une telle suite

A toute suite $R = (r_0, r_1, \ldots, r_n) \in \mathcal{C}_n$ nous associons l'entier positif N(R) défini comme suit :

$$N(R) = \prod_{j=0}^{n-1} \binom{\sum_{i=0}^{j} r_i - j}{r_j}$$

ou, ce qui, après simplifications, revient au même :

$$N(R) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\sum_{i=0}^{j} r_i - j}{r_j!} \right)$$

2- ENONCES DES PROPOSITIONS

2-1 Proposition (1-0)

$$\sum_{R \in \mathcal{C}_n} N(R) = n! = \operatorname{card} \Pi_n ,$$

où Π_n désigne l'ensemble des permutations des entiers de 1 à n .

2-2 Proposition (1-1)

Soit $\mathcal{C}_n^{1,k}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_n$ constitué des suites de $\mathcal{C}_n$ dont le premier terme est égal à k (avec $1 \leq k \leq n$).

$$\sum_{R \in \mathcal{C}_n^{1,k}} N(R) = |\sigma(n,k)| ,$$

où $\sigma(n,k) = (-1)^{n-k} |\sigma(n,k)|$ est un nombre de Stirling de 1ère espèce.

On sait que $|\sigma(n,k)|$ indique, par exemple, le nombre des permutations de Π_n présentant k "points saillants supérieurs" (Resp. inférieurs)[1].

(Le cardinal de $\mathcal{C}_n^{1,k}$ est égal au nombre de Delannoy $\alpha(n,k)$:

$$\alpha(n,k) = \frac{k(2n-k-1)_{n-1}}{n!} \quad .)$$

2-3 Proposition (1-2)

Soit $\mathcal{C}_n^{2,k}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_n$ constitué des suites de $\mathcal{C}_n$ dont le nombre de termes nuls est égal à k (avec $1 \leqslant k \leqslant n$)

$$\sum_{R \in \mathcal{C}_n^{2,k}} N(R) = A(n,k) \ ,$$

où $A(n,k)$ ($= A(n,n+1-k)$) est le nombre eulérien donnant par exemple le nombre des permutations de Π_n présentant k-1 "descentes" (Resp. k-1 "montées")[2].

(Le cardinal de $\mathcal{C}_n^{2,k}$ est égal au nombre de Narayana $\beta(n,k)$:

$$\beta(n,k) = \beta(n,n+1-k)$$
$$= \frac{(n)_{k-1}\ (n-1)_{k-1}}{k!\ (k-1)!} \quad .)$$

2-4 Proposition (1-3)

Soit $\mathcal{C}_n^{3,s}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_n$ constitué des suites de $\mathcal{C}_n$ qui sont telles que $\sum_{i=0}^{n} i\, r_i = s$ (avec $0 \leqslant s \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$)

(1) Cf. [1] T.2 p. 100.

(2) Cf. [1] T.2 p. 83-84.

$$\sum_{R \in \mathcal{C}_n^{3,s}} N(R) = b(n,s) ,$$

où $b(n,s)$ désigne le nombre des permutations de Π_n présentant s inversions(1).

2-5 Proposition (2-0)

Soit $\mathcal{C}'_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_n$ constitué des suites de $\mathcal{C}_n$ qui sont telles que pour tout i non nul on ait $r_i \in \{0,1\}$.

$$\sum_{R \in \mathcal{C}'_n} N(R) = \varpi(n) ,$$

où $\varpi(n)$ est le nombre de Bell donnant le nombre des partitions d'un ensemble de cardinal n(2).

(Le cardinal de $\mathcal{C}'_n$ est égal à 2^{n-1}).

2-6 Proposition (2-1)

Soit $\mathcal{C}'^k_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}'_n$ constitué des suites de $\mathcal{C}'_n$ dont le premier terme est égal à k ou, condition équivalente pour les suites de $\mathcal{C}'_n$, dont le nombre de termes nuls est égal à k (avec $1 \leq k \leq n$).

$$(\Rightarrow \mathcal{C}'^k_n = \mathcal{C}'_n \cap \mathcal{C}^{1,k}_n = \mathcal{C}'_n \cap \mathcal{C}^{2,k}_n).$$

$$\sum_{R \in \mathcal{C}'^k_n} N(R) = S(n,k) ,$$

où $S(n,k)$ est le nombre de Stirling de $2^{\text{ième}}$ espèce donnant le nombre des

(1) Cf. [1] T.2 p. 79.

(2) Cf. [1] T.2 p. 45.

partitions en k classes d'un ensemble de cardinal n [1].

(Le cardinal de $\mathcal{C}_n^{'k}$ est égal à $\binom{n-1}{k-1}$).

2-7 Proposition (2-1')

$$\sum_{R \in \mathcal{C}_n^{'k}} [N(R)]^2 = T(n,k) ,$$

où T(n,k) est un nombre "factoriel central" [2].

2-8 Proposition (3-0)

Soit $\mathcal{C}_n''$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_n$ constitué des suites de $\mathcal{C}_n$ qui sont telles que, pour tout i, on ait $r_i \in \{0,1,2\}$.

$$\sum_{R \in \mathcal{C}_n''} N(R) = A_{n+1} ,$$

où A_n est le nombre d'André (ou d'Euler, selon la terminologie adoptée) donnant, par exemple, le nombre des permutations de Π_n qui sont "alternées montantes" (Resp. "alternées descendantes")[3].

(Le cardinal de $\mathcal{C}_n''$ est égal au nombre de Motzkin M_n :

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} M_{n-i} M_{i-2} \quad \text{avec} \quad M_{-1} = M_0 = 1 \quad).$$

(1) Cf. [1] T.2 p. 38.

(2) Cf. [2] p. 10.

(3) Cf. [1] T.2 p. 101.

2-9 Proposition (3-2)

Soit $\mathcal{C}_n^{''k}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_n^{''}$ constitué des suites de $\mathcal{C}_n^{''}$ dont le nombre de termes nuls est égal à k (avec ici $1 \leqslant k \leqslant 1 + [\frac{n}{2}]$)

$(\Rightarrow \mathcal{C}_n^{''k} = \mathcal{C}_n^{''} \cap \mathcal{C}_n^{2,k})$

$$\sum_{R \in \mathcal{C}_n^{''k}} N(R) = J_{n+1}^k ,$$

où J_n^k est un nombre de Carlitz.

(Le cardinal de $\mathcal{C}_n^{''k}$ est égal à $\dfrac{(n)_{n-k}}{(k-1)!(n+2-2k)!}$) .

2-10 Proposition (3-4)

Soit $\mathcal{C}_{n,i}^{''}$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_n^{''}$ constitué des suites de $\mathcal{C}_n^{''}$ qui sont telles que l'on ait $r_i \in \{0,1\}$ (avec $0 \leqslant i \leqslant n$).

$$\sum_{R \in \mathcal{C}_{n,i}^{''}} N(R) = E_{n+2}^{i+2} ,$$

où E_n^i est le nombre d'Entringer indiquant par exemple le nombre des permutations de Π_n qui sont "alternées descendantes" et dont le premier terme est égal à i (avec $2 \leqslant i \leqslant n$).

2-11 Proposition (4-0)

Soit $\mathcal{C}_{2p-1}^{'''}$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$) le sous-ensemble de $\mathcal{C}_{2p-1}$ constitué des suites de $\mathcal{C}_{2p-1}$ qui sont telles que, pour tout j de 0 à p-1, on ait $r_{2j} \geqslant 1$ et $r_{2j+1} = 0$.

$$\sum_{R \in \mathcal{G}'''_{2p-1}} N(R) = |G_{2p}| \quad ,$$

où $G_{2p} = (-1)^p |G_{2p}|$ est un nombre de Genocchi[1] .

(Le cardinal de $\mathcal{G}'''_{2p-1}$ est égal au nombre de Catalan C_{p-1}).

2.12 Proposition (4.1)

Soit $\mathcal{G}'''^{k}_{2p-1}$ le sous-ensemble de $\mathcal{G}'''_{2p-1}$ constitué des suites de $\mathcal{G}'''_{2p-1}$ dont le premier terme est égal à k (avec ici, compte tenu de la définition de $\mathcal{G}'''_{2p-1}$, k=1 pour p=1 et, pour $p \geq 2$, $2 \leq k \leq p$).

$$\sum_{R \in \mathcal{G}'''^{k}_{2p-1}} N(R) = B_{p-1,k} \quad ,$$

où $B_{p,k}$ est un "nombre de Gandhi modifié"[2].

(Le cardinal de $\mathcal{G}'''^{k}_{2p-1}$ est égal au nombre de Delannoy $\alpha(p-1,k-1)$).

3- INDICATIONS POUR LES DEMONSTRATIONS

Convenons d'appeler arbre hiérarchique construit sur l'ensemble $[0;n]$ des n+1 entiers de 0 à n , le graphe de toute application τ de $[1;n]$ vers $[0;n-1]$ qui est telle que, pour tout i de 1 à n, on ait $\tau(i) \leq i-1$ ($\Rightarrow \tau(1) = 0$) , et de désigner par $\mathcal{T}_n$ l'ensemble de ces arbres.

Il est trivial que le cardinal de $\mathcal{T}_n$ est égal à n! (En effet on a Card $\mathcal{T}_1 = 1$ et pour $n \geq 2$, Card $\mathcal{T}_n = n$. Card $\mathcal{T}_{n-1}$).

---

(1) Cf. [2] p. 9 .

(2) Cf. [2] p. 27.

Considérons un arbre de $\mathcal{T}_n$ et l'application τ dont il est le graphe ; posons $\mathcal{R}_i = \tau^{-1}\{i\}$ pour tout i de 0 à n-1,

et $\mathcal{R}_n = \emptyset$

puis $r_i = \text{card } \mathcal{R}_i$ pour tout i de 0 à n, et appelons type de cet arbre la suite $R = (r_0, r_1, \ldots, r_n)$.

$\mathcal{R}_i$ est donc l'ensemble, éventuellement vide, des sommets antécédents du sommet i et r_i désigne ainsi le nombre des antécédents de i.
Les ensembles $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1, \ldots, \mathcal{R}_n$ constituant une pseudo-partition de

$[1 ; n]$, on a : $\sum\limits_{i=0}^{n} r_i = n$.

Et, en raison de la définition de l'application τ , pour tout j de

0 à n-1 , on a aussi : $\mathcal{R}_j \subset \mathcal{S}_{n,j}$, avec $\mathcal{S}_{n,j} = [j+1 ; n] \setminus \bigcup\limits_{i=j+1}^{n} \mathcal{R}_i$.

Nous notons que l'on a :

$$\text{card } \mathcal{S}_{n,j} = n-j - \sum_{i=j+1}^{n} r_i$$

$$= \sum_{i=0}^{j} r_i - j$$

et par conséquent, pour tout j de 0 à n, on a aussi :

$$\sum_{i=0}^{j} r_i - j \geqslant r_j \quad .$$

Il en résulte que R est une suite de Catalan d'ordre n et que le nombre d'arbres appartenant à $\mathcal{T}_n$ ayant pour type une suite donnée R de $\mathcal{C}_n$ est N(R).

Toutes nos propositions en découlent car tout nombre de chacune des familles considérées peut être interprété comme le cardinal d'un ensemble d'arbres hiérarchiques caractérisable par des conditions portant uniquement sur les types respectifs de ces arbres.

Il est trivial que la proposition (1-0) provient de ce que l'on a card $\mathcal{T}_n = n!$

Les propositions (1-1), (1-2) et (1-3) procèdent respectivement de ce que $|\sigma(n,k)|$ est aussi le nombre des arbres de $\mathcal{T}_n$ pour lesquels le sommet 0 a k antécédents, $A(n,k)$ le nombre des arbres de $\mathcal{T}_n$ qui ont k sommets pendants (sommets sans antécédent) et $\hat{b}(n,s)$ le nombre des arbres de $\mathcal{T}_n$ qui

sont tels que $\sum_{i=0}^{n} i\, r_i = s$.

On peut chaque fois s'en assurer soit en construisant une bijection appropriée de Π_n sur $\mathcal{T}_n$ soit, plus expéditivement, en raisonnant par récurrence.

Les propositions (2-0) et (2-1) reposent sur le fait qu'à chaque partition de l'ensemble [1 ; n] en k classes on peut faire correspondre un arbre "taillé en candélabre" construit comme suit : les éléments de chacune des k classes étant préalablement rangés par ordre croissant, chacun des k sommets éléments minimaux d'une classe a pour conséquent le sommet 0 et chacun des n-k autres sommets a pour conséquent le sommet de la même classe qui le précède dans l'ordre croissant : les k éléments maximaux et eux seuls sont donc sommets pendants et hormis 0 qui a k antécédents tous les autres sommets ont ainsi un et un seul antécédent.

Soulignons enfin que la justification de la proposition (2-1') repose sur une interprétation énumérative des nombres factoriels centraux donnée par D. DUMONT [2],
celle des propositions (3-0) et (3-2) sur les interprétations des nombres d'André (ou nombres d'Euler) et de Carlitz liées à l'un des complexes d'André introduits par D. FOATA et M.P. SCHUTZENBERGER [3],
celle de la proposition (3-4) sur une interprétation des nombres d'Entringer trouvée par Christiane POUPARD [4],
celle des propositions (4-0) et (4-1) sur des interprétations des nombres de Genocchi et de Gandhi dues, elles aussi, à D. DUMONT [2].

Bibliographie sommaire :

[1] L. COMTET, Analyse combinatoire, P.U.F., 1970.

[2] D. DUMONT, Propriétés géométriques des nombres de Genocchi. Thèse 3è cycle, Université Louis-Pasteur - Strasbourg I, 1973.

[3] D. FOATA et M.P. SCHUTZENBERGER, Nombres d'Euler et permutations alternantes, University of Florida, Gainesville,1971 partiellement repris dans "A survey of Combinatorial Theory, North-Holland Publishing Company, 1973.

[4] C. POUPARD, Sur deux significations énumératives d'une même loi de répartition des nombres d'André. Disc. Math. 38 (1982), 265-271.

et aussi :

[5] J. RIORDAN, Forests of Label - Increasing Trees. (in "Journal of Graph Theory, Vol. 3, 127-133, John Wiley & sons, 1979).

[6] J. FRANÇON ET G. VIENNOT, Permutations selon leurs pics, creux, doubles montées et doubles descentes,nombres d'Euler et nombres de Genocchi. (IRIA - Séminaire de septembre 1979 à Sophia-Antipolis).