PUNKT-STABILE INZIDENZSTRUKTUREN UND STOCHASTISCHE MATRIZEN

von

Karl Erich Wolff

Es wird gezeigt, daß die im HOFFMAN-Theorem (über zusammenhängende punkt-stabile Inzidenzstrukturen) und die im Ergodensatz auftretenden Projektionsmatrizen die Matrizen der "Kern-Projektion" auf den Eigenraum des PERRON-FROBENIUS-Eigenwertes sind.

1. Punkt-stabile Inzidenzstrukturen (PSI)

Eine Inzidenzstruktur mit $v \times b$-Inzidenzmatrix A und Verbindungsmatrix $N = AA^T$ heißt *punkt-stabil*, falls für eine natürliche Zahl α $NJ = \alpha J$ ist, wobei J die $v \times v$-Matrix ist mit $J_{k\ell} = 1$ für $1 \leq k,\ell \leq v$.

Sowohl 1-Pläne als auch (r,λ)-Pläne sind punkt-stabil [6,7,3].

SATZ 1: (HOFFMAN-Theorem [6])

a) Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{J}$ mit Verbindungsmatrix N ist zusammenhängend und punkt-stabil (ZPSI) genau dann, wenn ein reelles Polynom $f(X)$ existiert mit $f(N) = J$.

b) Ist $\mathcal{J}$ eine ZPSI(α), so existiert genau ein Polynom $h(X)$ minimalen Grades mit $h(N) = J$, nämlich das HOFFMAN-Polynom

$$h(X) = v \prod_{\rho < \alpha} \frac{X - \rho}{\alpha - \rho}$$

(dabei durchläuft ρ alle Eigenwerte von N , die kleiner sind als der PERRON-FROBENIUS-Eigenwert α von N).

Satz 1 verallgemeinert die Charakterisierung der zusammenhängenden regulären Graphen von HOFFMAN [2].

2. Irrfahrten auf Inzidenzstrukturen

Für jede Inzidenzstruktur $\mathcal{J} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ mit $v \times v$-Verbindungsmatrix $N = ([i,j])$,

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{v} [i,j] \quad \text{und} \quad S_{ij} = \frac{[i,j]}{\alpha_i}$$

ist die $v \times v$-Matrix $S = (S_{ij})$ stochastisch.

Interpretation: Irrfahrt auf $\mathcal{J}$

Ein Betrunkener wählt nach Verlassen der Kneipe i jeden der α_i i-Pfade (i,B,j) der Länge 1 $(iIB,\ jIB)$ mit derselben Wahrscheinlichkeit. Dann ist S_{ij} die Übergangswahrscheinlichkeit von i nach j.

Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit nach langer Irrfahrt ergibt sich bei zusammenhängender Inzidenzstruktur (nach Anwendung des PERRON-FROBENIUS-Theorems für primitive Matrizen [5], S.1) aus dem Ergodensatz (s.[1])

$$(1) \qquad \lim_{k\to\infty} S^k = \frac{1}{\sum_{i=1}^{v} \alpha_i} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_v \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_v \end{pmatrix} .$$

Ist $\mathcal{J}$ eine ZPSI(α), so ergibt sich daher mit Satz 1 (und E als Einheitsmatrix)

$$(2) \qquad \lim_{k\to\infty} S^k = \frac{1}{v} J = \prod_{\rho<\alpha} \frac{N - \rho E}{\alpha - \rho} = \prod_{\sigma<1} \frac{S - \sigma E}{1 - \sigma} .$$

Im folgenden Abschnitt zeigen wir, daß sowohl die im Satz 1 als auch die im Ergodensatz auftretenden Projektionsmatrizen die Matrizen der "Kern-Projektion" auf den Eigenraum des PERRON-FROBENIUS-Eigenwertes von N bzw. S sind. Außerdem erhalten wir in Satz 3 die Gleichung

$$(3) \qquad \lim_{k\to\infty} S^k = \prod_{\sigma<1} \frac{S - \sigma E}{1 - \sigma}$$

unter allgemeineren Voraussetzungen als in (2).

3. Die Kern-Projektion

Sei C eine reelle $n\times n$-Matrix. Das Minimalpolynom $m(X)$ von C sei dargestellt als Produkt von Potenzen seiner irreduziblen Faktoren $p_i(X)$

$$m(X) = p_1(X)^{s_1} \cdot p_2(X)^{s_2} \cdots p_\ell(X)^{s_\ell} \quad \text{und es sei}$$

$$K_i = \operatorname{Kern}(p_i(X)^{s_i}) \qquad \text{für} \quad 1 \leq i \leq \ell .$$

Dann gilt:

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^{\ell} K_i \quad .$$

Für jedes $\vec{v} = \sum_{i=1}^{\ell} \vec{v}_i \quad , \quad \vec{v}_i \in K_i$ sei

$$r(\vec{v}) = \vec{v}_1 \quad .$$

Die Projektion $r : \mathbb{R}^n \to K_1$ nennen wir die *Kern-Projektion auf* K_1 .

P sei die Matrix von r (bzgl. der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$).

Dann gilt offenbar:

(4) $\quad P^2 = P \quad , \quad PC = CP \quad , \quad \operatorname{Rang} P = \dim K_1 \quad .$

Wir betrachten nun die Kern-Projektion auf einen Eigenraum von C

Sei ρ_1 ein reeller Eigenwert von C ,

$R(\rho_1) = \{ \vec{v} \mid C\,\vec{v} = \rho_1 \vec{v} \}$ der Rechtseigenraum,

$L(\rho_1) = \{ \vec{v} \mid C^T\vec{v} = \rho_1 \vec{v} \}$ der Linkseigenraum von ρ_1 .

SATZ 2:

Wenn $K_1 = R(\rho_1)$ ist, so gilt:

a) $\quad CP = \rho_1 P \quad .$

b) Wenn $C = S$ stochastisch und $\rho_1 = 1$ ist, so ist

$$P = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} S^i \qquad \text{und}$$

$$P = \lim_{k\to\infty} S^k \qquad , \text{ falls } S \textit{ gut } \text{ist (d.h. 1 der}$$

einzige komplexe Eigenwert von S vom Betrag 1 ist).

c) Wenn $R(\rho_1)$ eindimensional ist, etwa $R(\rho_1) = [\vec{x}]$,
so ist auch $L(\rho_1)$ eindimensional, etwa $L(\rho_1) = [\vec{y}]$, und

$$P = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}^T}{\vec{y}^T \cdot \vec{x}} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & \cdots & x_n y_n \end{pmatrix} .$$

d) Wenn C diagonalisierbar ist, so gilt ([4], S.271 f)

$$P = \prod_{\rho_1 \neq \rho} \frac{C - \rho E}{\rho_1 - \rho} .$$

Bemerkungen:

1) Teil b) erhält man mit (4) und a) aus dem Ergodensatz [1].
2) Teil c) ergibt sich aus $PC = \rho_1 P = CP$.
3) Die Voraussetzung von c) ist insbesondere erfüllt für den PERRON-FROBENIUS-Eigenwert ρ_1 einer unzerlegbaren nichtnegativen Matrix C . Beispiele:
   (3.1) Die Aussage (1) erhält man aus b) und c) mit $x^T = (1,\ldots,1)$, $y^T = (\alpha_1,\ldots,\alpha_v)$. (S ist gut, da mit N auch S primitiv ist [5].)
   (3.2) Ist $\mathcal{J}$ eine ZPSI(α), so liefert b),c) und d) ohne Verwendung von Satz 1 die Aussage (2), also auch die HOFFMAN-Gleichung $h(N) = J$.

Allgemeiner als in (2) erhält man nun aus b) und d) den

<u>SATZ 3</u>:

Für jede diagonalisierbare gute stochastische Matrix S gilt:

$$\lim_{k \to \infty} S^k = \prod_{\sigma < 1} \frac{S - \sigma E}{1 - \sigma} .$$

LITERATUR:

[1] FRITZ, F.-J., HUPPERT, B., WILLEMS, W.: Stochastische Matrizen , Springer 1979

[2] HOFFMAN, A.J.: On the polynomial of a graph Amer. Math. Monthly 70, 30-36 (1963).

[3] NEUMAIER, A., WOLFF, K.E.: Inequalities for point stable designs , Ann. Discrete Math. 18, 653-660 (1983).

[4] PEASE, M.C.: Methods of matrix algebra , Acad. Press 1965

[5] SENETA, E.: Non-negative matrices George Allen and Unwin Ltd., London 1973.

[6] WOLFF, K.E.: Punkt-stabile und semi-partial-geometrische Inzidenzstrukturen , Mitt.math.Sem. Gießen 121,(1976).

[7] WOLFF, K.E.: Uniqueness of the rank polynomials of point stable designs , MZ 175, 261-266 (1980).

Karl Erich Wolff
Fachbereich MN
Fachhochschule Darmstadt
Schöfferstr. 3
6100 DARMSTADT