

Énumération et Codage des cartes et  
Hypercartes planaires pointées

Didier ARQUÈS

Résumé

Le premier exposé "Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes et hypercartes planaires pointées" aborde le problème du dénombrement des cartes et hypercartes planaires pointées.

A l'aide de deux décompositions géométriques différentes, on détermine deux relations fonctionnelles dont la série génératrice, en variables commutatives, des cartes (resp. hypercartes) planaires pointées est solution. On en déduit alors des résultats de dénombrement.

Le second exposé, "Bijections entre cartes planaires et arbres bien étiquetés" présente différentes techniques d'étiquetage des cartes et hypercartes planaires pointées permettant de les mettre en bijection respectivement avec les arbres bien et très bien étiquetés pointés. L'introduction de la notion de fraction multicontinue naturellement associée à ces familles d'arbres permet alors de retrouver certains résultats du premier exposé.

## Exposé 1

### Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes et hypercartes planaires pointées

---

#### Introduction

L'étude des cartes planaires pointées et en particulier leur énumération ont utilisé essentiellement deux techniques:

La première consiste à établir une bijection entre les cartes planaires pointées et une autre famille d'objets que l'on sait dénombrer ; cette méthode est celle utilisée par W.T. Tutte pour la première obtention du dénombrement des cartes planaires pointées dans [17]. Une telle méthode est également utilisée par A.B. Lehman (cf. [15]), R. Cori et B. Vauquelin (cf. [10]).

La seconde consiste à étudier la série génératrice des cartes planaires pointées (et en particulier à rechercher une équation fonctionnelle dont elle soit unique solution). Cette méthode également initiée par W.T. Tutte dans le cas commutatif (cf. [18]), a été ensuite développée dans le cadre non commutatif par R. Cori et J. Richard (cf. [9]). Ces deux articles aboutissent, le premier dans le cadre commutatif, le second dans le cadre non commutatif, à la même relation fonctionnelle.

Au paragraphe II, est rappelée l'idée géométrique de W.T. Tutte (contracter ou supprimer une arête) qui conduit à l'obtention de cette première relation fonctionnelle (cf. [18]), et est à l'origine de nombreux travaux sur les cartes planaires et non planaires (cf. [16], [20], ...).

Parallèlement, une nouvelle décomposition géométrique des cartes planaires pointées est exposée ; elle consiste à contracter tout un "paquet" d'arêtes. On décompose ainsi une carte planaire pointée en "son bord" et en sa "carte intérieure". On en déduit une nouvelle relation fonctionnelle dont la série génératrice commutative des cartes planaires pointées est unique solution. Cette deuxième relation fonctionnelle diffère dans sa forme de la première, en ce qu'elle

présente une composition de fonctions dont les deux arguments invoquent la série génératrice recherchée. Ces deux équations apparaissent comme cas particuliers d'une relation fonctionnelle plus générale. Associées, elles permettent de déterminer très simplement la série génératrice recherchée, de décompter les cartes planaires pointées en fonction du nombre d'arêtes, ainsi qu'en fonction du nombre de sommets et du nombre de faces.

Le paragraphe III traite ces problèmes de dénombrements. Il étudie également la notion de carte interne introduite au paragraphe II. On définit les cartes ayant au plus  $i$  niveaux intérieurs, appelées cartes d'ordre  $i$ . Les cartes d'ordre 0 sont bien connues et dénombrées sous le nom de cartes simples (cf. [7]). On énumère dans ce paragraphe les cartes d'ordre 1, et on y établit les relations fonctionnelles dont les cartes d'ordre  $i$  sont solutions. On y indique enfin le lien entre ces cartes et certaines familles d'arbres bien étiquetés (cf. [10] et également le deuxième exposé).

Le paragraphe IV applique aux hypercartes planaires pointées, les idées introduites aux paragraphes II et III.

Le paragraphe I rappelle les principales définitions concernant les cartes planaires.

## I - Définitions et notations

Nous rappelons dans ce paragraphe les principales définitions utilisées dans la suite.

### I.1. Définition

. Une carte planaire est une représentation de la sphère de  $\mathbb{R}^3$  comme union d'un nombre fini d'ensembles disjoints appelés cellules. Elles sont de trois types

1 - les sommets qui sont des points.

2 - les arêtes qui sont des arcs simples ouverts de Jordan dont les extrémités (confondues ou non) sont des sommets.

3 - les faces qui sont des domaines simplement connexes dont les frontières sont des réunions de sommets et d'arêtes.

. Deux cellules sont dites incidentes si l'une est dans la frontière de l'autre.

. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes. (Une boucle, arête dont les extrémités sont confondues, est comptée pour deux dans le degré de son extrémité).

. Une arête est un isthme si elle est incidente à une seule face.

. Le degré d'une face est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes, les isthmes étant comptés deux fois.

I.2. On appelle brin une arête orientée de la carte planaire et on note  $B$  leur ensemble. On associe à tout brin, de façon évidente, son sommet initial, son sommet final, et l'arête qui constitue son support.

. On définit la permutation  $\alpha$  sur  $B$  qui à tout brin associe son brin opposé.  $\alpha$  est une involution sans point fixe dont les cycles sont bijectivement associés aux arêtes de la carte.

. On note  $\sigma$  la permutation sur  $B$  qui à tout brin  $b$  associe le premier brin rencontré en tournant autour du sommet initial de  $b$  dans le sens positif choisi sur la sphère. Les cycles de  $\sigma$  sont bijectivement associés aux sommets de la carte.

. On note  $\bar{\sigma}$  la permutation  $\sigma \circ \alpha$  sur  $B$ . Les cycles de  $\bar{\sigma}$  sont les circuits orientés constituant les frontières des faces topologiques de la carte. Les cycles de  $\bar{\sigma}$  sont donc bijectivement associés aux faces de la carte.

Dans la suite, un sommet (resp. arête, face) sera, suivant le contexte, soit l'objet topologique défini au 1, soit le cycle pour  $\sigma$  (resp.  $\alpha$ ,  $\bar{\sigma}$ ) qui lui est associé par les définitions ci-dessus. Le degré précédemment défini d'une cellule est alors égal au nombre de brins du cycle qui lui est associé.

. Pour  $b$  dans  $B$  et  $\tau$  permutation sur  $B$ , on note  $\tau^*(b)$  le cycle pour  $\tau$  engendré par  $b$ .

Si  $A$  est inclus dans  $B$  et si  $b$  est dans  $A$ , alors

$\tau|_A^*(b)$  est le premier brin dans  $A$  parmi  $\tau(b)$ ,  $\tau^2(b)$ , ... .

. Une carte planaire est dite pointée si un brin  $\tilde{b}$  est choisi.  $\tilde{b}$  est appelé le brin pointé de la carte, et son sommet initial  $\tilde{s}$  est appelé le sommet pointé de la carte.

On appelle alors face extérieure de la carte, la face  $\bar{\sigma}^*(\tilde{b})$  engendrée par le brin pointé  $\tilde{b}$ . La carte réduite à un sommet est également dite pointée bien qu'elle ne contienne aucun brin.

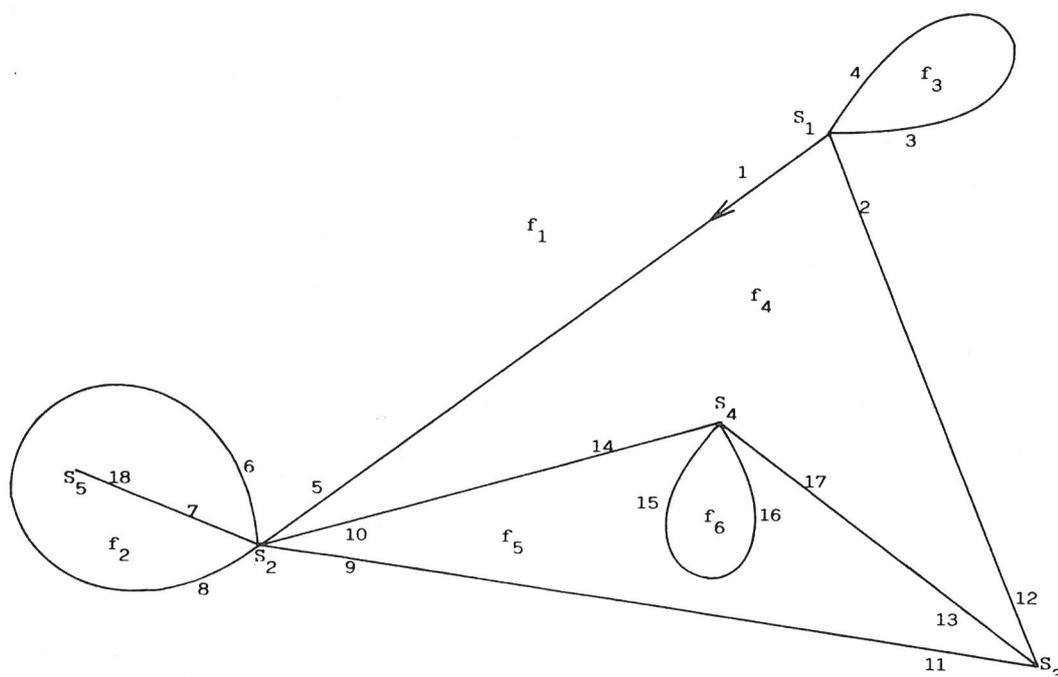
On appelle circuit, une suite  $(b_1, \dots, b_k)$  de brins de la carte tels que l'extrémité finale de  $b_i$  soit l'extrémité initiale de  $b_{i+1}$  si  $1 \leq i < k$ , de  $b_1$  si  $i = k$ .

Pour la définition de la carte duale d'une carte planaire pointée, se reporter par exemple à [17].

### I.3. Représentation d'une carte

On représentera dans la suite une carte par une projection stéréographique sur le plan, de façon à envoyer la face extérieure de la carte sur la face infinie de sa représentation dans le plan.

Exemple 1 - Dans l'exemple ci-dessous, les brins sont numérotés, le numéro de chaque brin étant placé le long de son support, près de son extrémité initiale. Le sens positif choisi pour définir les cycles de  $\sigma$  est le sens contraire des aiguilles d'une montre. Le brin pointé est marqué par une flèche.



Les sommets  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$  sont respectivement les cycles de  $\sigma$  donnés par :

$$\sigma = (1,2,3,4)(5,6,7,8,9,10)(11,12,13)(14,15,16,17)(18)$$

Les faces  $f_1$  (face extérieure),  $f_i$ ,  $2 \leq i \leq 6$ , sont respectivement les cycles de  $\bar{\sigma}$  donnés par :

$$\bar{\sigma} = (1,6,9,12,3)(8,7,18)(4)(5,2,13,14)(10,15,17,11)(16)$$

I.4. Deux cartes planaires pointées sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme de la sphère, préservant son orientation, appliquant les sommets, arêtes, faces et brin pointé de la première carte respectivement sur ceux de la seconde.

Une classe d'isomorphie dans l'ensemble des cartes planaires pointées pour la notion d'isomorphie définie ci-dessus sera encore appelée carte planaire pointée dans la suite. Ce sont ces classes d'équivalence que l'on cherche à dénombrer.

## II - Relations fonctionnelles pour les cartes planaires pointées

### II.1. Décompositions d'une carte planaire pointée

. On note  $\mathcal{M}$  (resp.  $\mathcal{J}, \mathcal{B}, \mathcal{F}$ ) la famille des cartes planaires pointées (non réduites à un sommet et, respectivement dont l'arête pointée est un isthme, une boucle, n'est pas un isthme). Pour  $K = \mathcal{M}, \mathcal{J}, \mathcal{B}, \mathcal{F}$ , on note  $K_r$  (resp.  $K_{\alpha, \beta, r}$ ) l'ensemble des cartes de  $K$  dont le degré du sommet pointé est  $r$  (resp. qui ont de plus  $(\alpha+1)$  sommets et  $(\beta+1)$  faces) et  $K'_r$  (resp.  $K'_{\alpha, \beta, r}$ ) l'ensemble des cartes de  $K$  dont la face extérieure est de degré  $r$  (resp. qui ont de plus  $(\alpha+1)$  sommets et  $(\beta+1)$  faces).

. On note  $\{p\}$ , la carte réduite à un sommet.

. On utilise les signes  $+$  ou  $\Sigma$  pour noter une réunion disjointe d'ensembles. L'existence d'une bijection entre deux ensembles est indiquée par le signe  $\leftrightarrow$ .

.  $\mathcal{E}^+$  est l'ensemble défini comme la réunion disjointe, pour  $k \geq 1$ , des  $k$ -uplets de cartes de  $\mathcal{J}_1$ , soit

$$\mathcal{E}^+ = \Sigma_{k \geq 1} \mathcal{J}_1^k, \text{ et on pose } \mathcal{E} = \{p\} + \mathcal{E}^+$$

Théorème 1 - On a les bijections suivantes :

(a)  $\mathcal{M} \leftrightarrow \{p\} + \mathcal{J} + \mathcal{F}$ , avec

(b)  $\mathcal{J} \leftrightarrow \mathcal{J}_1 \times \mathcal{M}$

et les deux décompositions de  $\mathcal{F}$ :

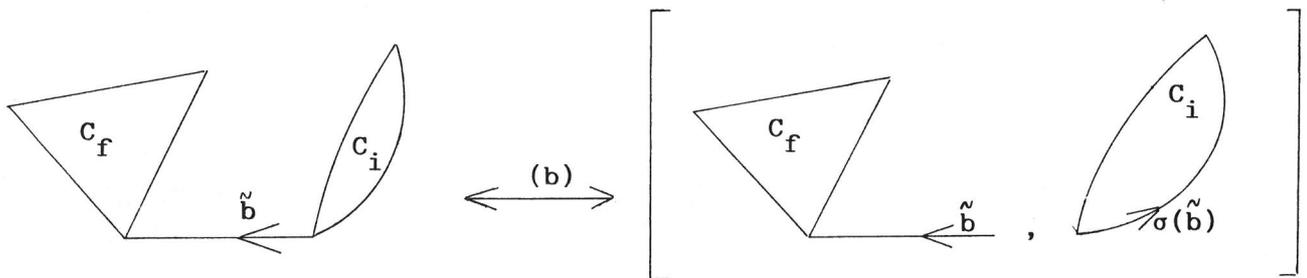
$$(c) \mathcal{F} \leftrightarrow \sum_{r \geq 0} m'_r \times [0, r].$$

$$(d) \mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{E}^+ \times \sum_{r \geq 0} m_r \times \mathcal{E}^r \quad \text{où } m_0 = \{p\}.$$

Démonstration

1. La bijection (a) est évidente. La bijection (b) est classique. La suppression de l'isthme pointé  $\tilde{b}$  d'une carte de  $\mathcal{Y}$ , décompose cette carte en deux sous-cartes  $C_i$  et  $C_f$  respectivement incidentes au sommet initial et au sommet final de l'isthme. On définit alors une bijection de  $\mathcal{Y}$  sur  $\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{M}$  en associant  $\tilde{b}$  à toute carte de  $\mathcal{Y}$ , le couple constitué d'une part par l'isthme pointé  $\tilde{b}$  associé à la carte  $C_f$  et d'autre part par la carte  $C_i$  dont on pointe le brin  $\sigma(\tilde{b})$  si elle n'est pas réduite à un sommet.

Exemple 2



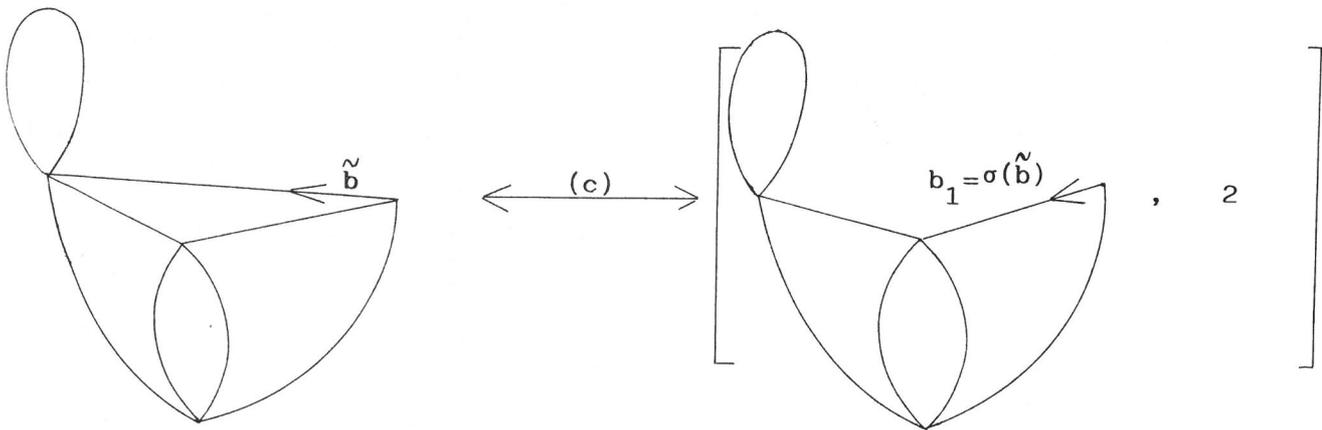
2. La décomposition géométrique (c) est celle donnée par W.T. Tutte (cf. [18]). Elle est sous une forme ou sous une autre à la base de nombreux résultats sur les cartes.

Soit  $C$  une carte de  $\mathcal{F}$ . Son arête pointée  $\tilde{b}$  n'est pas un isthme ; elle est donc incidente à deux faces ; la face extérieure de degré  $d_1$  et une autre de degré  $d_2$ .

En supprimant cette arête pointée  $\tilde{b}$ , on crée une nouvelle carte planeaire  $C_1$  que l'on pointe en distinguant le brin  $b_1 = \sigma_{|B-\{\alpha(\tilde{b})\}}(\tilde{b})$  (s'il existe, sinon  $C_1 = \{p\}$  et  $C$  est réduite à une boucle). La face extérieure de  $C_1$ , réunion des deux faces de  $C$  incidentes à  $\tilde{b}$ , a un degré  $r$  égal à  $(d_1-1)+(d_2-1)$  avec  $d_1 \geq 1$  et  $d_2 \geq 1$ .

L'application de  $\mathcal{F}$  sur  $\sum_{r \geq 0} \mathcal{M}_r^! \times [0, r]$  qui à la carte planeaire pointée  $C$  associe le couple  $(C_1, d_2-1)$  est la bijection (c) annoncée (évident).

Exemple 3  $d_1 = 4, d_2 = 3, r = (d_1-1)+(d_2-1) = 5$  ; dans cet exemple,  $b_1 = \sigma(\tilde{b})$ .



3. La bijection (d) consiste à décomposer une carte de  $\mathcal{F}$  en sa "carte intérieure", dans  $\mathcal{M}_r$ , et en son "bord",  $(r+1)$ -uplet dans  $\xi^+ \times \xi^r$  (cf. exemple 4).

3.a - Un circuit simple élémentaire étant un circuit ne passant pas deux fois par la même arête ou le même sommet, on a le

Lemme - Soit  $C$  une carte dont le brin pointé  $\tilde{b}$  n'est pas un isthme. On peut alors extraire de la suite  $\overset{\sim}{\sigma}(\tilde{b})$  des brins du circuit bordant la face extérieure de  $C$ , une unique sous-suite de brins constituant un circuit simple élémentaire, contenant  $\tilde{b}$ .

Démonstration - Le théorème de König donne l'existence de cette sous-suite. Son unicité résulte du fait que  $\overset{\sim}{\sigma}(\tilde{b})$  est la frontière d'un ouvert connexe.

C.Q.F.D.

Pour  $C$ , carte de  $\mathcal{F}$  de brin pointé  $\tilde{b}$ , on note  $P = (b_1 = \tilde{b}, b_2, \dots, b_k)$  la sous-suite de brins de  $\sigma^{-*}(\tilde{b})$  définie par le lemme et  $(s_1, \dots, s_k)$  la suite de leurs sommets initiaux.

$P$  est un polygone orienté qui partage le plan en deux domaines connexes ouverts qui lui sont respectivement intérieur et extérieur. Les brins de la carte planaire  $C$  qui sont inclus dans le domaine intérieur (resp. extérieur) à  $P$  sont dits dans la suite, brins intérieurs (resp. extérieurs) de la carte  $C$ .

### 3.β - Carte intérieure $C_{int}$ associée à $C$ :

En contractant  $P$  et son domaine extérieur en un sommet  $\tilde{t}$ , l'ensemble des brins intérieurs de  $C$  constitue une carte planaire connexe dite carte intérieure à  $C$ , notée  $C_{int}$ . Si  $C_{int}$  n'est pas réduite au sommet  $\tilde{t}$  (c'est-à-dire si  $C$  contient au moins un brin intérieur), on pointe  $C_{int}$  en distinguant le premier brin qui n'appartient pas à  $P$ , de la suite de brins  $(\sigma^{-1} \circ \alpha)^*(\tilde{b})$ ; on le note  $\tilde{d}$ .

Le sommet  $\tilde{t}$  est alors le sommet pointé de  $C_{int}$ ; les brins qui lui sont incidents sont les brins intérieurs de  $C$  dont le sommet initial est l'un des sommets  $s_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , du polygone  $P$ . Si  $r$  est leur nombre ( $r, \geq 1$ , est alors le degré du sommet  $\tilde{t}$ ), on les étiquette  $d_1, \dots, d_r$ , dans l'ordre où on les rencontre en parcourant  $P$  dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, en commençant par  $d_1 = \tilde{d}$ .

### 3.γ - Bord de $C$

La face extérieure de la carte  $C$  étant un ouvert connexe, les brins extérieurs de  $C$  constituent  $k$  cartes planaires connexes disjointes respectivement incidentes aux sommets  $s_1, \dots, s_k$  du polygone  $P$ . (Certaines des cartes peuvent éventuellement ne contenir aucune arête et être réduites au sommet  $s_i$  correspondant).

Pour  $i$  dans  $\{1, \dots, k\}$ , on définit alors la carte pointée  $C_i$  de  $\mathcal{J}_1$  en associant au brin  $b_i$  de  $P$ , que l'on pointe, la carte planaire précédemment définie, incidente au sommet final de  $b_i$ . Le  $(r+1)$ -uplet  $(B_i)_{0 \leq i \leq r}$  dans  $\mathcal{C}^+ \times \mathcal{C}^r$ , constituant le bord de  $C$  est alors obtenu en partageant la suite  $\mathcal{C} = (C_1, \dots, C_k)$  en  $r+1$  sous-suites (avec la convention qu'une sous-suite vide est la carte  $\{p\}$ );

.  $B_0$  est la sous-suite des cartes de  $\mathcal{C}$  dont les brins pointés sont, sur  $P_{\tilde{v}}$ , entre le sommet initial  $s_1$  de  $b_1 = \tilde{b}$  et le sommet initial de  $d_1 = \tilde{d}$  (si  $r \geq 1$ , et  $s_1$  si  $C_{\text{int}} = \{p\}$ ).  
 $B_0$  est une sous-suite de  $\mathcal{C}$  contenant au moins  $C_1$  et donc appartient à  $\mathcal{C}^+$ .

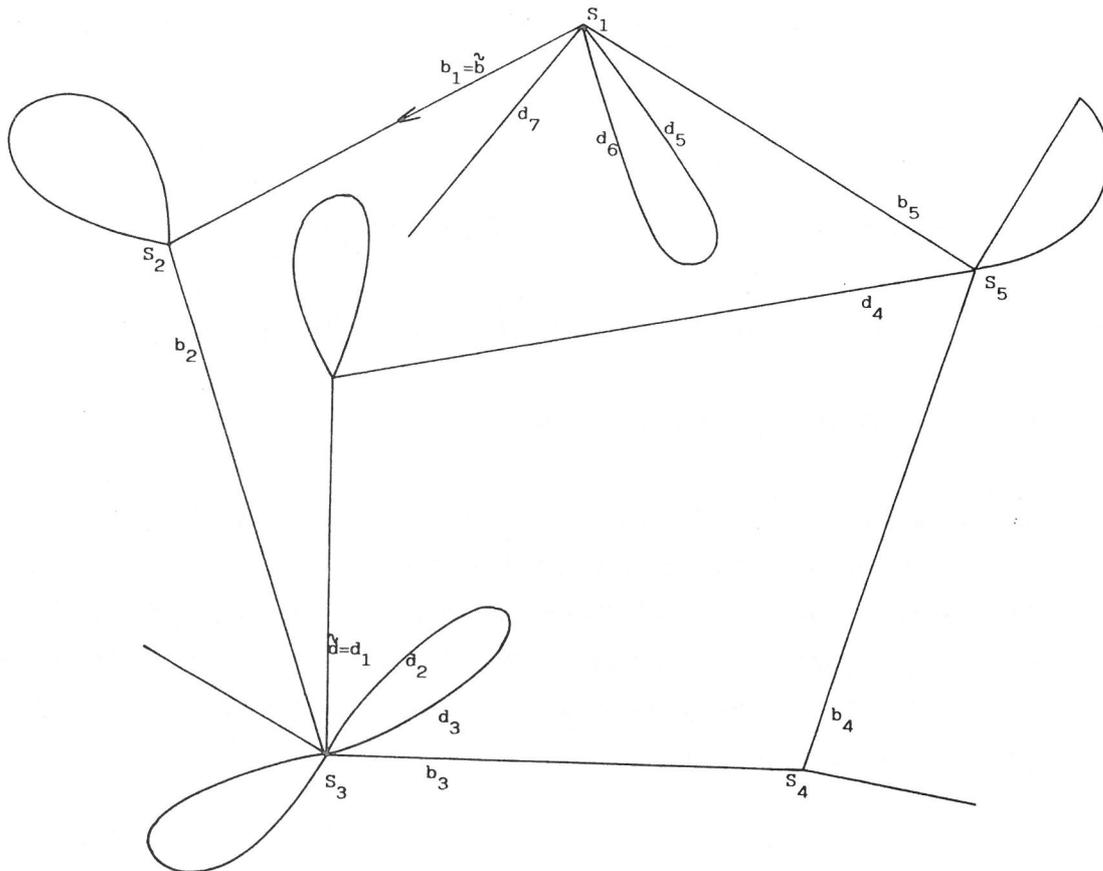
. Si  $r \geq 2$ ,  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq r-1$ , est la sous-suite des cartes de  $\mathcal{C}$  dont les brins pointés sont entre les sommets initiaux de  $d_i$  et  $d_{i+1}$ .

. Si  $r \geq 1$ ,  $B_r$  est la sous-suite des cartes de  $\mathcal{C}$  dont les brins pointés sont entre le sommet initial de  $d_r$  et  $s_1$ .

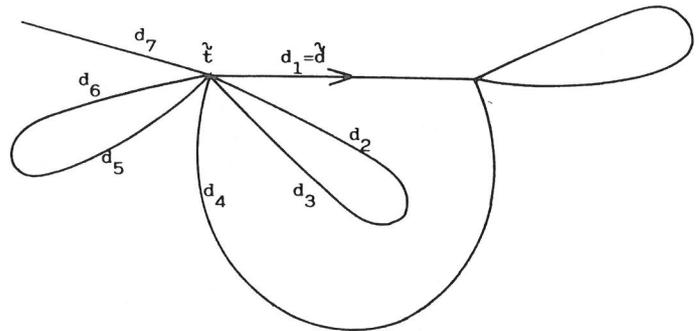
Les uplets  $B_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , sont dans  $\mathcal{E}$  (éventuellement réduits à  $\{p\}$  avec la convention ci-dessus).

L'application ainsi définie, qui à une carte de  $\mathcal{F}$  associe le uplet  $(C_{\text{int}}, (B_i)_{0 \leq i \leq r})$  est une bijection (évident) de  $\mathcal{F}$  sur  $\sum_{r \geq 0} \mathcal{M}_r \times \mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^r$ , d'où le résultat annoncé.

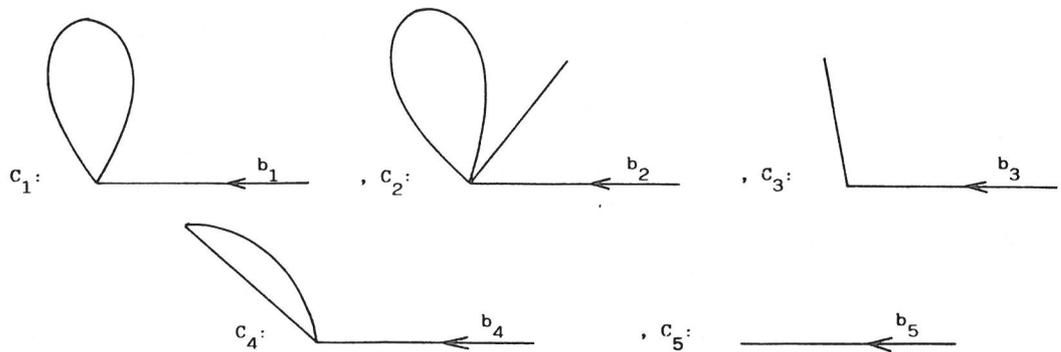
Exemple 4 - . Si  $C$  est la carte de  $\mathcal{F}$  ; ( $k = 5$ ,  $r = 7$ )



.  $C_{int}$  est la carte dans  $\mathcal{M}_7$ , obtenue en contractant la partie du plan extérieure au circuit simple élémentaire  $P = (b_1, \dots, b_5)$  en un sommet  $t$  :



et:



. Le bord de  $C$  est alors constitué par  $(B_i)_{0 \leq i \leq 7}$  dans  $\mathcal{E}^+ \times \mathcal{E}^7$

$$B_0 = (C_1, C_2), B_1 = B_2 = \{p\}, B_3 = (C_3, C_4), B_4 = C_5, B_5 = B_6 = B_7 = \{p\}.$$

## II.2. Relations fonctionnelles

A chaque carte planaire pointée de  $\mathcal{M}$ , on associe un monôme en les variables commutatives  $u, v, s$  et  $f$ .

L'exposant de  $u$  (resp.  $v$ ) donne le degré de la face extérieure (resp. du sommet pointé). L'exposant de  $s$  (resp.  $f$ ) donne le nombre de sommets différents du sommet pointé (resp. le nombre de faces différentes de la face extérieure).

On note alors  $M(u,v,s,f)$ , la série génératrice dans  $\mathbb{Z}[[u,v,s,f]]$  du nombre des cartes planaires pointées de  $\mathcal{M}$ .

On pose également

$$R(u,s,f) = M(u,1,s,f) \text{ et } Q(v,s,f) = M(1,v,s,f)$$

Le théorème classique de dualité dans  $\mathcal{M}$ , entraîne les égalités :

$$M(u,v,s,f) = M(v,u,f,s), R(v,f,s) = Q(v,s,f).$$

On déduit du théorème 1, le

Théorème 2 - La série génératrice  $R(u,s,f)$  du nombre des cartes planaires pointées est solution des deux équations :

$$(1) \quad R = 1 + u^2 s R^2 + u f \frac{R(1,s,f) - uR}{1-u} \quad (\text{cf. W.T. Tutte, [18]})$$

$$(2) \quad R = 1 + u^2 s R^2 + \frac{ufR}{1-usR} R\left(\frac{1}{1-usR}, f, s\right).$$

Où l'on note  $R$  pour  $R(u,s,f)$ .

#### Démonstration

On reprend les notations du (II.1) et de la démonstration du théorème 1.

1. L'équation (1) (cf. [18]) est la traduction en termes de séries génératrices des bijections (a), (b), (c) du théorème 1. Nous rappelons succinctement sa démonstration :

α. La carte  $\{p\}$  est associée au monôme  $u^0 s^0 f^0 = 1$  (évident).

β. La série génératrice des cartes de  $\mathcal{J}_1$  est  $u^2 s R(u,s,f)$ . (L'isthme pointé donne deux brins incidents à la face extérieure, d'où le terme  $u^2$ , et ajoute un sommet, d'où le terme  $s$ , à la carte incidente à son extrémité finale. Cette carte donne le terme  $R$ ). On déduit de la bijection (b) que la série génératrice des cartes de  $\mathcal{J}$  est  $u^2 s R^2$ .

On a ainsi obtenu les deux premiers termes de l'équation (1).

γ. Troisième terme de (1): Il s'obtient en remarquant que pour reconstruire la carte C de  $\mathcal{F}$  à partir du couple  $(C_1, i)$  de  $\mathcal{M}'_r \times [0, r]$  qui lui est associé par la bijection (c), on ajoute une arête à la carte  $C_1$  (arête qui sera, après orientation, le brin pointé de C). Cette arête joint le sommet pointé de  $C_1$  au sommet final du  $i^{\text{ième}}$  brin (en partant du brin pointé de  $C_1$ ) de la suite des brins associée à la face extérieure de  $C_1$  (si  $i \geq 1$ , à lui même si  $i = 0$ ). Cette nouvelle arête est orientée de façon à ce que la face extérieure de la carte planaire pointée C ainsi obtenue ait pour degré  $r-i+1$ , où  $r$  est le degré de la face extérieure de  $C_1$ .

La série génératrice des cartes de  $\mathcal{F}$  est donc

$$F = f \cdot \sum_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0, r \geq 0} \sum_{C_1 \in \mathcal{M}'_{\alpha, \beta, r}} s^{\alpha} f^{\beta} \sum_{i=0}^r u^{r-i+1}$$

où le terme  $f$  en facteur tient compte qu'une face supplémentaire a été créée en ajoutant l'arête.

Soit, en posant  $j = r-i$ ,

$$\begin{aligned} F &= uf \sum_{\alpha, \beta, r} \sum_{C_1 \in \mathcal{M}'_{\alpha, \beta, r}} s^{\alpha} f^{\beta} \sum_{j=0}^r u^j \\ &= uf \sum_{\alpha, \beta, r} \sum_{C_1 \in \mathcal{M}'_{\alpha, \beta, r}} s^{\alpha} f^{\beta} \frac{u^{r+1} - 1}{u-1} \\ &= uf \frac{uR(u, s, f) - R(1, s, f)}{u-1} \quad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

2. L'équation (2) diffère de l'équation (1) par le troisième terme de son second membre. Ce terme est la traduction à l'aide des séries génératrices de la décomposition (d) d'une carte C de  $\mathcal{F}$  (cf. théorème 1 dont on reprend les notations).

α. La série génératrice des cartes de  $\mathcal{J}_1$  (ensemble auquel appartiennent les cartes planaires  $C_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , qui après regroupement permettent de définir les uplets de cartes  $B_j$ ,  $0 \leq j \leq r$ , du bord de la carte de  $\mathcal{F}$  considérée) est

$$usR(u, s, f)$$

Le terme R est associé à la carte planaire pointée de  $\mathcal{M}$  incidente à l'extrémité finale du brin pointé de la carte de  $\mathcal{Y}_1$ . Ce brin donne le terme us car il ajoute un sommet et est incident une fois à la face extérieure de la carte C de  $\mathcal{F}$  dont il est issu).

β. La série génératrice de l'ensemble  $\mathcal{E}$  (auquel appartient  $B_j$  si  $1 \leq j \leq r$ ) des p-uplets, p dans  $\mathbb{N}$ , de cartes de  $\mathcal{Y}_1$ , est donc :

$$\sum_{p \geq 0} [\text{usR}(u, s, f)]^p = \frac{1}{1 - \text{usR}(u, s, f)}$$

La série génératrice de l'ensemble  $\mathcal{E}^+$  (auquel appartiennent les uplets  $B_0$ ) des p-uplets, p dans  $\mathbb{N}^*$ , de cartes de  $\mathcal{Y}_1$ , est alors :

$$\frac{\text{usR}(u, s, f)}{1 - \text{usR}(u, s, f)}$$

γ. La série génératrice des cartes  $C_{\text{int}}$  dans  $\mathcal{M}_r$ , r fixé dans  $\mathbb{N}$ , qui sont intérieures aux cartes de  $\mathcal{F}$ , et donc n'ont pas de brins incidents, à la face extérieure (donc pas de terme en u) est :

$$f \sum_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0} \sum_{C_{\text{int}} \in \mathcal{M}_{\alpha, \beta, r}} s^\alpha f^\beta = f \sum_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0} \text{card}(\mathcal{M}_{\alpha, \beta, r}) s^\alpha f^\beta$$

où,

$\text{card}(\mathcal{M}_{\alpha, \beta, r})$  est le cardinal de l'ensemble  $\mathcal{M}_{\alpha, \beta, r}$ . Le terme f en facteur est dû au fait que la face extérieure de  $C_{\text{int}}$ , non décomptée dans l'exposant  $\beta$  du monôme  $s^\alpha f^\beta$  associé à  $C_{\text{int}}$ , devient face non extérieure dans la carte planaire pointée C de  $\mathcal{F}$  reconstruite, et donc doit être décomptée en plus.

δ. La série génératrice F des cartes de  $\mathcal{F}$  est donc (cf. (d)), en notant R pour  $R(u, s, f)$  :

$$F = \frac{1}{s} \frac{\text{usR}}{1 - \text{usR}} \sum_{r \geq 0} (f \sum_{\alpha \geq 0, \beta \geq 0} \text{card}(\mathcal{M}_{\alpha, \beta, r}) s^\alpha f^\beta) \left( \frac{1}{1 - \text{usR}} \right)^r$$

Le terme  $\frac{1}{s}$  est dû au fait que lorsque l'on concatène les uplets  $B_j$ ,  $0 \leq j \leq r$ , pour reconstituer le bord de la carte C de  $\mathcal{F}$  considérée, le produit des séries génératrices associées (déterminées au β ci-dessus) décompte, par l'exposant de la variable s, tous les sommets du bord de C, y compris le sommet pointé (ce qui est exclu dans la définition de R).

On en déduit

$$F = \frac{ufR}{1-usR} Q\left(\frac{1}{1-usR}, s, f\right)$$

ce qui est le résultat annoncé en utilisant la relation liant R et Q, associée au théorème de dualité et rappelée ci-dessus.

CQFD

Remarque 1

A la décomposition bijective de  $\mathcal{M}$ :

$$(a)' \quad \mathcal{M} \leftrightarrow \{p\} + \mathcal{Y} + \mathcal{B} + (\mathcal{F} - \mathcal{B})$$

on associe alors terme pour terme, comme au théorème 2, la relation fonctionnelle:

$$(3) \quad M = 1 + u^2 vsMR + uv^2 fMQ \\ + uv^2 fM \frac{usR}{1-v(1-usR)} \left\{ \frac{1}{1-usR} Q\left(\frac{1}{1-usR}, s, f\right) - vQ \right\}$$

où l'on note M pour  $M(u, v, s, f)$ .

Les équations (1) et (2) sont des cas particuliers de (3) ; On obtient (2) en faisant  $v = 1$  dans (3) ; en faisant  $u = 1$  dans (3) et (2), on obtient alors deux relations qui induisent (1).

Remarque 2

Soit A l'anneau des polynômes  $Z[u]$  et  $A[[s, f]]$  l'algèbre des séries formelles en les variables commutatives s et f, à coefficients dans A. Dans  $A[[s, f]]$ , les équations (1) et (2) ont un sens (les substitutions de u par 1 ou de u par  $\frac{1}{1-usR}$  y sont autorisées) et y admettent comme solution la série génératrice des cartes planaires pointées, dont on sait que dans tout monôme, le degré de u est majoré par deux fois la somme des degrés de s et f.

Cette série est en fait l'unique solution de (1) ou (2) dans  $A[[s,f]]$ . En effet, munissons  $A[[s,f]]$  de la distance ultramétrique définie pour deux séries  $S_1$  et  $S_2$  par :

$$d(S_1, S_2) = 2^{-v(S_1, S_2)}$$

avec  $v(S_1, S_2) = \min\{\alpha + \beta \mid \text{les coefficients de } S_1 \text{ et } S_2 \text{ pour } s^\alpha f^\beta \text{ sont distincts}\}$ .

$A[[s,f]]$  est alors un espace métrique complet. Le second membre de (1) (resp. (2)) définit alors un opérateur contractant sur cet espace, et  $y$  admet un point fixe unique. C.Q.F.D.

### III - Application à des dénombrements

#### III.1. Dénombrement des cartes planaires pointées

La détermination de la série génératrice  $R(1,s,f)$  des cartes planaires pointées décomptées en fonction du nombre de sommets moins un et du nombre de faces moins une est rendue facile par la considération simultanée des équations (1) et (2) (tout calcul formel compliqué est évité). Des équations paramétriques ont été déterminées par W.T. Tutte dans [18]. Celles obtenues ci-dessous leur sont équivalentes; les paramètres  $y$  sont des séries "points fixes" de la transformation induite par l'équation (2). La formule de Lagrange permet alors de déterminer le terme général de  $R(1,s,f)$ .

Théorème 3. 1.  $s, f$  et  $sfR(1,s,f)$  satisfont aux équations paramétriques (où  $p$  et  $q$  sont les paramètres):

$$s = p(1-p-2q), \quad f = q(1-2p-q), \quad s.f.R(1,s,f) = pq(1-2p-2q).$$

2. Le nombre de cartes planaires pointées ayant  $m_1$  sommets,  $m_2$  faces (et  $m$  brins, avec  $m = 2(m_1+m_2-2)$ , par l'équation d'Euler pour les cartes planaires) est :

$$\frac{m!}{m_1! (m_1-1)! m_2! (m_2-1)!} \sum 2^{h+k} \frac{\binom{m_1-1}{k} \binom{m_2-1}{h}}{\binom{m}{i}} \left(1 - \frac{h}{i} - \frac{k}{m-i}\right)$$

la somme portant sur l'ensemble des triplets  $(i,k,h)$  tels que :

$$m_1 - 1 \leq i \leq m - m_2 + 1, \quad 0 \leq k \leq m_1 - 1, \quad 0 \leq h \leq m_2 - 1, \quad k = h + 2(m_1 - 1) - i.$$

avec la convention  $\frac{h}{i} = 0$  (resp.  $\frac{k}{m-i} = 0$ ) si  $h=i=0$  (resp.  $k=m-i=0$ ) ;

### Démonstration

1.α Dans l'algèbre  $\mathbb{Z}[[s, f]]$  des séries formelles en les variables commutatives  $s$  et  $f$ , l'équation en  $u$ ,

$$(e) \quad u = 1 + \frac{uf}{1 - uSR(u, s, f)} Q\left(\frac{1}{1 - uSR(u, s, f)}, s, f\right)$$

admet une solution  $U = U(s, f)$  unique (cf. remarque 2 du théorème 2).

Si l'on pose (en notant  $U$  pour  $U(s, f)$  et  $V$  pour  $V(s, f)$ ):

$$(i) \quad V(s, f) = \frac{1}{1 - USR(U, s, f)}, \text{ alors (e) s'écrit :}$$

$$(ii) \quad U(s, f) = \frac{1}{1 - VfQ(V, s, f)}$$

On peut remarquer de plus que (i) et (ii) entraînent que  $V(f, s)$  est également solution de (e), et donc est égale (par unicité de cette solution) à  $U(s, f)$ .

β Substituons  $U = U(s, f)$  et  $V = V(s, f)$  respectivement à  $u$  et  $v$  dans les équations (1), (2) du théorème 2 (cf. II, 2) et dans l'équation (2') ci-dessous, déduite de l'équation (2) en substituant  $v$  à  $u$ , en échangeant  $s$  et  $f$  et en utilisant les égalités entre  $R$  et  $Q$  issues de la dualité et rappelées au (II, 2). L'équation (2') s'écrit, en notant  $Q$  pour  $Q(v, s, f)$ :

$$(2') \quad Q(v, s, f) = 1 + v^2 f Q^2 + \frac{vsQ}{1 - vfQ} R\left(\frac{1}{1 - vfQ}, s, f\right).$$

Après substitution, ces trois équations s'écrivent en utilisant les relations (i) et (ii) et en posant:

$$R = R(U, s, f) \quad \text{et} \quad Q = Q(V, s, f),$$

$$(1) \quad R = 1 + U^2 s R^2 + Uf \frac{R(1, s, f) - UR}{1 - U}$$

$$(2) \quad R = 1 + U^2 s R^2 + UVfRQ$$

$$(2') \quad Q = 1 + V^2 f Q^2 + UVsRQ$$

Or par (i) et (ii),  $R = \frac{V-1}{UVs}$  et  $Q = \frac{U-1}{UVf}$

On déduit alors facilement, en éliminant R et Q dans (1), (2) et (2'), le système d'équations paramétriques :

$$s = \frac{(V-1)(2V+U-2UV)}{UV^2}, \quad f = \frac{(U-1)(2U+V-2UV)}{U^2V}, \quad \text{et}$$

$$R(1,s,f) = \frac{UV(2U+2V-3UV)}{(2U+V-2UV)(2V+U-2UV)}$$

En posant  $p = \frac{V-1}{V}$  et  $q = \frac{U-1}{U}$ , on obtient la paramétrisation annoncée.

2. En utilisant la formule de Lagrange à deux variables, cf. [13], ces équations paramétriques permettent de calculer le terme général de  $\text{sfR}(1,s,f)$ . La formule obtenue donne après simplifications (non détaillées ici) celle annoncée. CQFD.

Remarque 1 - Une interprétation combinatoire des séries paramètres U, V, p et q en termes de séries génératrices d'arbres étiquetés peut être donnée (cf. Remarques 2 et 4 de la proposition 1,IV, exposé 2).

Remarque 2 - Si l'on identifie s et f à la même variable z, on déduit de l'équation d'Euler satisfaite par les cartes planaires que :

$G(1,z) = R(1,z,z)$  est la série génératrice des cartes planaires pointées décomptées en fonction du nombre d'arêtes.

Le système d'équations paramétriques du théorème 3 devient alors

$$z = p(1-3p), \quad G(1,z) = \frac{1-4p}{(1-3p)^2}$$

d'où l'on déduit par la formule de Lagrange le nombre de cartes planaires pointées à n arêtes :

$$\frac{2 \cdot 3^n (2n)!}{n!(n+2)!}$$

### III.2. Cartes d'ordre $i$

Associons à toute carte planaire pointée  $C$ , l'ensemble  $\mathcal{F}(C)$  des cartes planaires pointées de  $\mathcal{F}$  obtenues en substituant au brin pointé  $\tilde{b}$  de  $C$ , et en le pointant, tout brin de  $\tilde{\sigma}^*(\tilde{b})$  qui ne soit pas un isthme. On définit alors  $\text{Int}(C)$  comme l'ensemble des cartes planaires pointées duales des cartes intérieures associées aux cartes de  $\mathcal{F}(C)$  (par la décomposition du théorème 1).

Définition - . Une carte planaire pointée  $C$  est dite d'ordre 0 si  $\text{Int}(C)$  est vide ( $C$  est alors un arbre) ou ne contient que la carte  $\{p\}$ .

. Une carte planaire pointée  $C$  est dite d'ordre  $i$  ( $i \geq 1$ ), si toutes les cartes dans  $\text{Int}(C)$  sont d'ordre inférieur ou égal à  $i-1$ .

Remarques - . Intuitivement une carte est d'ordre  $i$  si elle a au plus " $i$  niveaux intérieurs".

. Une carte d'ordre  $i$  est d'ordre  $j$  pour tout  $j \geq i$ .

. Les cartes d'ordre 0 sont connues sous le nom de cartes simples (cf. [7] par exemple).

. Les cartes d'ordre 1 peuvent également être définies comme les cartes planaires pointées telles que toute arête ait au moins une extrémité incidente à la face extérieure.

Notons, pour  $i$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $G_i(u, z)$  la série génératrice des cartes d'ordre  $i$  décomptées en fonction du nombre de brins de la face extérieure (variable  $u$ ) et du nombre d'arêtes (variable  $z$ ).

Proposition 1 - Les séries génératrices  $G_i$ ,  $i \geq 0$ , satisfont au système d'équations :

$$(E_i) \quad G_i = 1 + u^2 z G_i^2 + \frac{uzG_i}{1-uzG_i} G_{i-1} \left( \frac{1}{1-uzG_i}, z \right)$$

où l'on a posé  $G_{-1} \equiv 1$ .

Démonstration - Pour démontrer  $(E_i)$ , il suffit de reprendre, en l'appliquant aux cartes d'ordre  $i$ , le (d) du théorème 1 de décomposition. On démontre alors l'équation fonctionnelle  $(E_i)$  comme l'équation (2) du théorème 2.

Remarque - Pour  $i = 0$ ,  $(E_0)$  est

$$G_0 = 1 + u^2 z G_0^2 + \frac{uzG_0}{1-uzG_0}.$$

On retrouve l'équation fonctionnelle bien connue qui conduit au dénombrement des cartes simples (cf. [7]).

Pour  $i = 1$ , on a le résultat suivant :

Proposition 2 - . La série génératrice  $G_1(1,z)$  est solution de l'équation fonctionnelle :

$$(e_1): G_1(1,z) = (1 + z G_1^2(1,z))^2.$$

. Le nombre  $a_n$  de cartes planaires d'ordre 1 dont le brin pointé est un isthme et ayant  $n$  arêtes est, pour  $n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{n} \binom{4n}{n-1}.$$

. Le nombre  $b_n$  de cartes planaires d'ordre 1 à  $n$  arêtes est :

$$b_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}, \text{ où l'on pose } a_0 = 1.$$

Démonstration

1.  $(E_1)$  implique, en faisant  $u = 1$  et en posant  $g_1 = G_1(1,z)$  :

$$(*) \quad G_0\left(\frac{1}{1-zg_1}, z\right) = \frac{g_1 - 1 - zg_1^2}{z g_1} (1 - zg_1).$$

En substituant  $\frac{1}{1-zg_1}$  à  $u$  dans  $E_0$  (opération licite, cf. remarque 2 du théorème 2) et en utilisant (\*), on obtient l'équation  $(e_1)$ .

2. On déduit de  $(e_1)$  que  $I_1 = z G_1^2(1, z)$ , série génératrice des cartes planaires d'ordre 1 dont le brin pointé est un isthme, est solution de l'équation:

$$I_1 = z(1+I_1)^4$$

la formule de Lagrange appliquée à cette équation donne :

$$a_n = \frac{1}{n} \binom{4n}{n-1} .$$

On déduit alors de  $(e_1)$ :  $G_1 = (1+I_1)^2$ , la formule donnant  $b_n$ .

Remarque - Pour  $i \geq 2$ , le problème de la détermination d'une formule close donnant le terme général de la série  $G_i$  est, à ma connaissance, ouvert.

On peut remarquer que les  $(i+1)$  premiers termes (par rapport à la variable  $z$ ) de  $G_i$  sont ceux de  $G$  (Remarque 2 du théorème 3, (III,1)). On a également le résultat suivant que l'on déduit de l'étude de la bijection établie par Cori et Vauquelin (cf. [10]) entre cartes planaires pointées et arbres bien étiquetés pointés (arbres dont les sommets sont étiquetés par des entiers naturels, la racine étant étiquetée 0 et les étiquettes de deux sommets adjacents différant au plus d'une unité. Se reporter au deuxième exposé pour l'étude détaillée de ces arbres).

Proposition 3 - L'ensemble des cartes planaires d'ordre  $i$  est en bijection avec l'ensemble des arbres bien étiquetés pointés, étiquetés au plus  $(i+1)$  et tels que les sommets étiquetés  $(i+1)$  soient des maximum stricts pour la fonction d'étiquetage (i.e. leur père et fils éventuels dans l'arbre sont étiquetés  $i$ ).

#### IV. Etude des hypercartes planaires pointées

L'étude des hypercartes planaires pointées menée par R. Cori dans le cadre non commutatif (cf. [7]) et T.R.S. Walsh (cf. [19]), utilise l'idée essentielle de contraction d'une arête. Précisément, T.R.S. Walsh utilise les dénombrements sur les cartes eulériennes obtenus à partir de relations de récurrence (cf. W.T. Tutte [16]) pour décompter les hypercartes planaires pointées en fonction du nombre de brins et du nombre de faces.

La nouvelle décomposition géométrique introduite au II s'applique également à l'étude des hypercartes planaires pointées. On montre ainsi l'existence de deux relations fonctionnelles (analogues à celles (1) et (2) du II) dont la série génératrice du nombre des hypercartes planaires pointées décomptées en fonction du nombre de sommets, faces et hyperarêtes est solution. On en déduit facilement un système d'équations paramétriques très simple dont cette série génératrice est solution. On obtient alors le terme général de cette série à l'aide de la formule de Lagrange.

Un cas particulier de ce système paramétrique permet de retrouver le résultat précité de T.R.S. Walsh.

Les définitions et résultats essentiels sont donnés ci-dessous ; se reporter à [3] pour le détail des démonstrations.

#### IV.1. Hypercarte planaire pointée (cf. exemple ci-dessous)

. Une carte planaire est dite deux-coloriable si on peut colorier ses faces avec deux couleurs, toute arête étant incidente à deux faces de couleurs différentes.

La propriété "deux-coloriable" étant compatible avec la relation d'équivalence dont les classes sont les cartes planaires pointées (cf. I,4) on peut définir une hypercarte planaire pointée comme une carte planaire pointée deux-coloriable contenant au moins un brin. Ce sont ces hypercartes planaires pointées que l'on cherche à dénombrer. Cette définition est équivalente (cf. [1] ou [19]) à la définition combinatoire d'une hypercarte donnée au deuxième exposé.

. Si  $H$  est une hypercarte planaire pointée, on note  $C(H)$  la carte planaire pointée deux-coloriable qui lui est associée. Les faces de  $C(H)$  de la même couleur (resp. de l'autre couleur) que la face extérieure de  $C(H)$  sont appelées faces (resp. arêtes) de l'hypercarte et notées h-faces (resp. h-arêtes) dans la suite. Les sommets de  $C(H)$  sont les sommets de l'hypercarte  $H$ . La face extérieure de  $C(H)$  est appelée h-face extérieure de  $H$ .

L'ensemble B des brins de C(H) appartenant aux cycles définissant dans C(H) les h-faces, est appelé ensemble des brins de l'hypercarte, notés h-brins dans la suite. On appelle h-degré d'une h-face (resp. d'un sommet) de l'hypercarte H, le nombre de h-brins qui lui sont incidents en tant que cellule de C(H).

Le h-degré d'une h-face coïncide avec son degré comme face de C(H) (évident). Par contre le h-degré d'un sommet de l'hypercarte est moitié de son degré dans C(H).

. Dualité - La dualité (cf. [7]) est une bijection dans l'ensemble des hypercartes planaires pointées ; les h-faces (respectivement sommets) d'une hypercarte sont échangés avec les sommets (resp. h-faces) de l'hypercarte duale ; la h-face extérieure est échangée avec le sommet pointé de l'hypercarte duale (les deux ayant même h-degré) ; les deux hypercartes ont mêmes h-arêtes. Cette propriété sera utilisée au théorème 5.

. On définit par convention deux hypercartes planaires pointées associées à la carte planaire pointée réduite à un sommet ; on les note respectivement {p} et {q} suivant que l'unique face de la carte associée est considérée comme h-face ou h-arête.

. Dans l'exemple ci-dessous, l'hypercarte H (dont les h-arêtes sont hachurées) est associée à la carte C(H) dont les brins sont numérotés, le numéro de chaque brin étant placé le long de son support, près de son extrémité initiale. Les deux brins de chaque arête sont numérotés i et -i, celui étiqueté positif étant un h-brin. Le sens positif choisi pour définir les cycles de  $\sigma$  dans C(H) est le sens contraire des aiguilles d'une montre. Le brin pointé est marqué par une flèche.

Les sommets  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq 4$  sont respectivement dans C(H) les cycles de  $\sigma$  donnés par

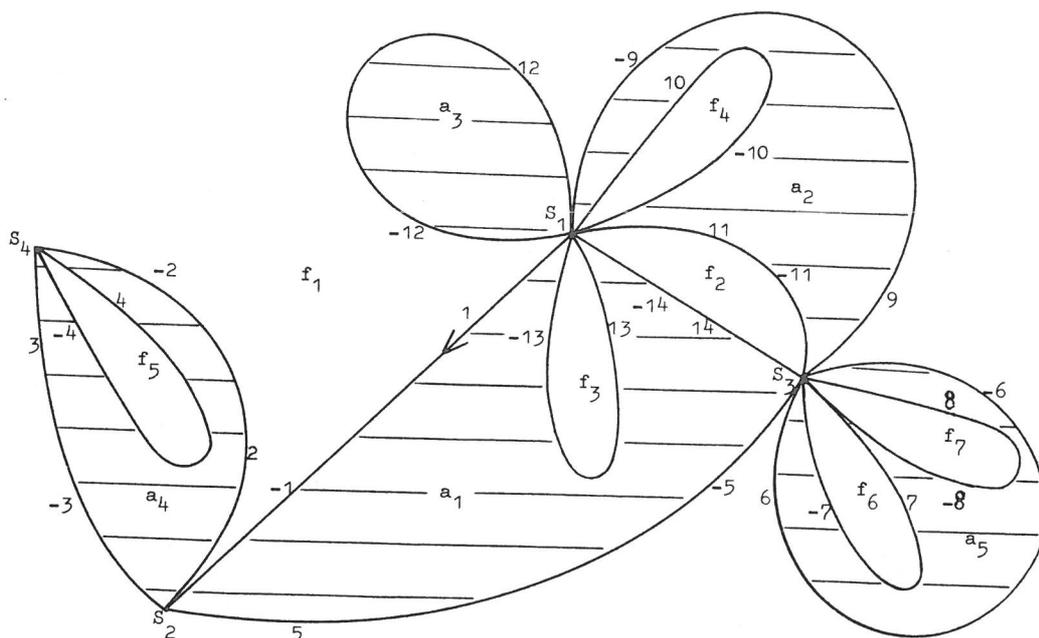
$$\sigma = (1, -13, 13, -14, 11, -10, 10, -9, 12, -12), (-1, 2, -3, 5), (-5, 6, -7, 7, -8, 8, -6, 9, -11, 14), (-2, 3, -4, 4).$$

Les h-faces  $f_1$  (h-face extérieure),  $f_i$ ,  $2 \leq i \leq 7$ , sont respectivement dans C(H) les cycles de  $\bar{\sigma}$

$$(1, 2, 3, 5, 6, 9, 12), (14, 11), (13), (10), (4), (7), (8).$$

Les h-arêtes  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq 5$ , sont respectivement dans  $C(H)$ , les cycles de  $\bar{\sigma}$

$(-1, -13, -14, -5), (-9, -11, -10), (-12), (-3, -4, -2), (-6, -7, -8).$



#### IV.2. - Décompositions d'une hypercarte

. On note  $\mathcal{H}$ , l'ensemble des hypercartes planaires pointées contenant au moins un brin.

. On note  $\mathcal{H}_r$ ,  $r \geq 1$ , l'ensemble des hypercartes de  $\mathcal{H}$  dont le h-degré du sommet pointé est  $r$ .

.  $\mathcal{J}_1$  désigne l'ensemble des cartes planaires pointées  $C$ , dont le degré du sommet pointé est égal à un et telles que la sous-carte planaire de  $C$  obtenue en supprimant l'isthme pointé  $\tilde{b}$  de  $C$  ainsi que son sommet initial soit deux-coloriable (éventuellement réduite au sommet final de  $\tilde{b}$ ).

. On appelle alors  $\mathcal{D}^+$ , l'ensemble défini comme la réunion disjointe, pour  $k \geq 1$ , des  $k$ -uplets de cartes de  $\tilde{\mathcal{J}}_1$ , soit :

$$\mathcal{D}^+ = \sum_{k \geq 1} \tilde{\mathcal{J}}_1^k, \text{ et on pose } \mathcal{D} = \{p\} + \mathcal{D}^+$$

. On note  $I[n,m]$  l'ensemble des nombres entiers impairs appartenant à l'intervalle  $[n,m]$ .

Théorème 4 - On a les bijections suivantes :

$$(\alpha) \mathcal{H} \leftrightarrow \tilde{\mathcal{J}}_1 \times [\{q\} + \mathcal{H}] + \sum_{r \geq 1} \mathcal{H}_r \times I[1,2r-1].$$

$$(\beta) \mathcal{H} \leftrightarrow \mathcal{D}^+ \times [\{q\} + \sum_{r \geq 1} \mathcal{H}_r \times \mathcal{D}^r]$$

Démonstration (se reporter à [3] pour le détail).

1. - La bijection  $(\alpha)$  est obtenue en contractant le brin pointé.

2. - La bijection  $(\beta)$  consiste à décomposer une hypercarte  $H$  de  $\mathcal{H}$  en son "hypercarte intérieure" dans  $\mathcal{H}_r$  (si  $r \geq 1$ , égale à  $\{q\}$  si  $r = 0$ ) et en son "bord",  $(r+1)$ -uplet  $(B_i)_{0 \leq i \leq r}$  de  $\mathcal{D}^+ \times \mathcal{D}^r$ .

#### IV.3. Relations fonctionnelles

Soit  $J(u,s,f,a)$  (resp.  $K(v,s,f,a)$ ), la série génératrice commutative des hypercartes planaires pointées de  $\mathcal{H}$  (contenant au moins un brin) décomptées en fonction du  $h$ -degré de la  $h$ -face extérieure (resp. du sommet pointé), variable  $u$  (resp.  $v$ ), du nombre de sommets moins un, variable  $s$ , du nombre de  $h$ -faces moins une, variable  $f$ , du nombre de  $h$ -arêtes, variable  $a$ .

Par application du théorème de dualité pour les hypercartes,  $J(u,f,s,a) = K(u,s,f,a)$  et  $J(1,s,f,a) = J(1,f,s,a)$ .

On déduit des décompositions du théorème 4 :

Théorème 5 - On a les relations fonctionnelles, où l'on note  $J$  pour  $J(u,s,f,a)$  et  $K$  pour  $K(v,s,f,a)$ .

$$(4) \quad K = v(1+K)(fK+a) + vs \frac{K-J(1,s,f,a)}{v-1}$$

$$(5) \quad J = \frac{u(1+J)}{1-us(1+J)} \left\{ fK\left(\frac{1}{1-us(1+J)}, s, f, a\right) + a \right\}$$

$$(6) \quad K = \frac{v(1+K)}{1-vf(1+K)} \left\{ sJ\left(\frac{1}{1-vf(1+K)}, s, f, a\right) + a \right\}$$

Démonstration (cf. [3])

(4) est déduite de ( $\alpha$ ), (5) est déduite de ( $\beta$ ), théorème 4, et (6) se déduit de (5) par application de la dualité.

#### IV.4. Application aux dénombrements d'hypercartes

Le théorème 5 entraîne

Théorème 6 - La série génératrice  $sfJ(1,s,f,a)$  qui décompte les hypercartes planaires pointées ayant au moins un brin en fonction du nombre de sommets,  $h$ -faces et  $h$ -arêtes est solution du système paramétrique

$$s = \lambda(1-\mu-\nu), \quad f = \mu(1-\nu-\lambda), \quad a = \nu(1-\lambda-\mu)$$

$$sfJ(1,s,f,a) = \lambda\mu\nu (1-\lambda-\mu-\nu)$$

Remarque - La forme paramétrique obtenue pour la série génératrice  $sfJ(1,s,f,a)$  montre son invariance par permutation quelconque des variables  $s, f$  et  $a$ .

On sait déjà (dualité) que  $sfJ(1,s,f,a) = fsJ(1,f,s,a)$ . D'autre part, l'opération géométrique qui consiste à remplacer le brin pointé d'une hypercarte plane pointée par son brin opposé est une bijection de  $\mathcal{H}$  sur  $\mathcal{H}$  qui échange  $h$ -faces et  $h$ -arêtes. On a donc

$$sfJ(1,s,f,a) = saJ(1,s,a,f).$$

CQFD

Cette remarque a également des conséquences importantes en ce qui concerne les bijections entre hypercartes planaires pointées et arbres très bien étiquetés (cf. théorème 3, (III.3) du deuxième exposé).

On déduit du théorème 6 les corollaires :

Corollaire 1 - Le nombre d'hypercartes planaires pointées ayant  $m_1(\geq 1)$  sommets,  $m_2(\geq 1)$  h-faces et  $m_3(\geq 1)$  h-arêtes est donné par

$$\sum_{\ell=1}^3 \pi \binom{m_\ell - 1 + i_\ell}{m_\ell - 1} \binom{i_\ell}{j_\ell} \cdot C$$

où

$$C = 1 - \sum_{k=1}^3 \frac{j_k}{m_k - 1 + i_k} + \frac{j_1 j_2 j_3}{m_1 m_2 m_3} - \frac{m_1 - 1}{m_1 - 1 + i_1} \cdot \frac{j_2}{m_2} \cdot \frac{i_3 - j_3}{m_3} - \frac{m_2 - 1}{m_2 - 1 + i_2} \cdot \frac{j_3}{m_3} \cdot \frac{i_1 - j_1}{m_1} - \frac{m_3 - 1}{m_3 - 1 + i_3} \cdot \frac{j_1}{m_1} \cdot \frac{i_2 - j_2}{m_2}$$

la sommation porte sur les  $(i_\ell, j_\ell)_{1 \leq \ell \leq 3}$  tels que

$$0 \leq j_\ell \leq i_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq 3 \text{ et}$$

$$m_1 - 1 = i_2 - j_2 + j_3, \quad m_2 - 1 = i_3 - j_3 + j_1, \quad m_3 - 1 = i_1 - j_1 + j_2.$$

Dans le cas où  $m_k = 1$ , on fait de plus les conventions

$$\frac{j_k}{m_k - 1 + i_k} = 0 \text{ si } i_k = j_k = 0, \quad \frac{m_k - 1}{m_k - 1 + i_k} = 1 \text{ si } i_k = 0.$$

Un cas particulier du résultat obtenu au théorème 6 permet de retrouver le dénombrement présenté par T.R.S. Walsh (cf. [19]):

Corollaire 2

1. La série génératrice  $S(f, y)$  des hypercartes planaires pointées décomptées en fonction du nombre de h-brins (variable  $y$ ) et du nombre de h-faces moins une (variable  $f$ ) satisfait aux équations paramétriques (paramètre  $p$ )

$$y = \frac{p}{(1 + \frac{fp}{1-p})(1+p)^2}, \quad S(f, y) = (1+p) - \frac{p^3}{(1-p)^2} f$$

2. Le nombre d'hypercartes planaires à  $n$   $h$ -faces et  $m$   $h$ -brins est

$$\frac{2(m-1)!}{(n-1)!(m-n+2)!} \sum_{i=0}^{m-n} \binom{n+i}{i} \binom{2m}{m-n-i} \quad (\text{cf [19]}).$$

On déduit de la décomposition  $(\beta)$  du théorème 4, la

Proposition - 1. Le nombre d'hypercartes planaires pointées ayant une seule face et  $n$   $h$ -brins est le  $n^{\text{ième}}$  nombre de Catalan  $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  (cf. [7]).

2. Le nombre d'hypercartes planaires pointées dont tous les sommets appartiennent à la frontière de la  $h$ -face extérieure et qui ont  $n$   $h$ -brins,  $n \geq 1$ , est

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} \binom{n}{i} 2^i .$$

## Exposé 2

### Bijections entre cartes planaires et arbres bien étiquetés

---

L'exposé précédent a présenté une étude des cartes planaires pointées dans le cadre commutatif, dont le but essentiel est le dénombrement.

Une autre approche est la recherche d'un codage pour les cartes planaires pointées ; R. Cori a développé cet aspect, cf. [7], définissant un codage des hypercartes et des cartes planaires pointées par des mots sur un alphabet infini.

Cette approche est essentielle de par la variété des problèmes qu'elle permet d'étudier, par exemple :

- . L'algébricité, voire la rationalité des séries obtenues, cf [7], [6].

- . Les problèmes de dénombrement, cf. [7], [10].

- . En informatique, le problème de représentation linéaire en mémoire d'une carte planaire ou non.

- . Le problème de dessin d'une carte, planaire ou non, en respectant certaines contraintes (par exemple, la forme ou l'épaisseur des sommets, leur écart minimal, la forme des arêtes, leur longueur minimale, leur épaisseur, des contraintes de positionnement global, etc...). Ces aspects ont été développés par R. Cori et J. Hardouin-Duparc, cf. [8], H. de Frayssex et P. Rosenstiehl, cf. [12], D.H. Greene, cf. [14] ...

Un autre codage des cartes planaires a été proposé par R. Cori et B. Vauquelin, cf. [10], permettant de définir une bijection entre cartes planaires pointées et arbres bien étiquetés. Le problème, alors posé par R. Cori, est de déterminer un tel codage des hypercartes par des arbres étiquetés. Ce sont deux telles bijections que nous décrivons aux paragraphes II et III. La première est une nouvelle bijection entre cartes planaires pointées et arbres bien étiquetés, issue de la notion de distance dans un graphe, et qui induit une bijection entre hypercartes planaires et arbres très bien étiquetés. Si cette bijection est particulièrement simple dans sa mise en oeuvre, elle présente cependant l'inconvénient de ne pas traduire au niveau des arbres très bien étiquetés, la symétrie complète existant dans l'ensemble des hypercartes planaires entre les notions de sommets, faces et hyperarêtes, (cf. théorème 6 de l'exposé 1). Cet inconvénient est levé dans la seconde bijection entre hypercartes planaires et arbres très bien étiquetés, proposée au paragraphe III.

Ces bijections permettent de coder cartes et hypercartes planaires pointées par un langage sur un alphabet fini généralisant le langage de Dyck. L'étude combinatoire de ce langage permet alors de dénombrer cartes et hypercartes en fonction du nombre d'arêtes. Il est à noter que ce langage n'est malheureusement pas algébrique (mais intersection de deux langages algébriques).

Nous ne développons pas cet aspect qui est traité dans [10].

La notion de fraction multicontinue que nous introduisons au paragraphe IV généralise celle de fraction continue (cf. [4] et [5]). C'est un objet algébrique particulièrement bien adapté à l'étude des arbres étiquetés et donc à l'étude des cartes et hypercartes planaires pointées. A l'aide du calcul formel sur ces objets, comme par exemple les "transformations équivalentes" (par analogie avec les opérations du même nom sur les fractions continues), on obtient ainsi des relations fonctionnelles sur les arbres étiquetés qui impliquent celles, nouvelles, obtenues au premier exposé.

## I. Définitions et notations

La définition combinatoire d'une carte plane pointée a été esquissée au premier exposé. Nous la développons ici afin de pouvoir définir les bijections entre cartes et arbres étiquetés de façon purement combinatoire.

Cet aspect combinatoire de l'étude des cartes planes est due à Edmonds (cf. [11]) et a été repris dans de nombreux travaux (cf. en particulier [7], [20], [1], [4] et [10] dont nous reprenons ici les notations).

### I.0. - Notations

Soit  $\tau$  une permutation sur l'ensemble  $A$  et  $B$  un sous-ensemble de  $A$ .

.  $\tau^*(B)$  est le plus petit sous-ensemble de  $A$ , contenant  $B$  et stable par  $\tau$ .

. Pour  $b$  dans  $B$ ,  $\tau|_B(b)$  est le premier brin dans  $B$  parmi  $\tau(b)$ ,  $\tau^2(b)$ , ... .

. Pour  $\tau_1$  et  $\tau_2$  permutations sur  $A$ , on note  $\tau_1\tau_2$  la composition  $\tau_1 \circ \tau_2$ .

### I.1. - Cartes combinatoires

. Soit  $Z_m$ , l'ensemble des entiers non nuls de module maximum  $m$ ,  $m \geq 1$

$$Z_m = \{-m, \dots, -1, 1, \dots, m\}.$$

On note  $\alpha$  l'involution sans point fixe définie sur  $Z_m$  par

$$\alpha(i) = -i.$$

Pour  $\sigma$  permutation sur  $Z_m$ , on note  $Z(\sigma)$  le nombre de cycles de  $\sigma$  et  $\bar{\sigma}$  la permutation sur  $Z_m$  définie par  $\bar{\sigma} = \sigma\alpha$ .

. Une carte combinatoire à m arêtes est une permutation  $\sigma$  sur  $Z_m$  telle que le couple  $(\sigma, \alpha)$  engendre un groupe transitif sur  $Z_m$ . On appelle sommets (resp. faces, arêtes) de la carte combinatoire  $(\sigma, \alpha)$ , les cycles de  $\sigma$  (resp.  $\bar{\sigma}, \alpha$ ). Les éléments de  $Z_m$  sont appelés les brins de la carte. Une paire de brins  $(i, -i)$  est une arête de la carte (cycle pour  $\alpha$ ). Le sommet initial d'un brin  $b$  de la carte est le sommet  $\sigma^*(b)$ . Deux cellules (sommet, face, arête) sont dites incidentes si elles ont un brin en commun.

. Le genre  $g(\sigma, \alpha)$  d'une carte  $(\sigma, \alpha)$  sur  $Z_m$  est défini par

$$g(\sigma, \alpha) = \frac{1}{2} \{m+2-Z(\sigma)-Z(\bar{\sigma})\}.$$

Le genre d'une carte combinatoire est un entier que l'on sait non négatif (cf. [7]). S'il est nul, la carte est plane.

. La dualité associe à la carte combinatoire  $(\sigma, \alpha)$  la carte  $(\bar{\sigma}, \alpha)$  appelée duale de  $(\sigma, \alpha)$ . La dualité échange les sommets et faces d'une carte et de sa duale.

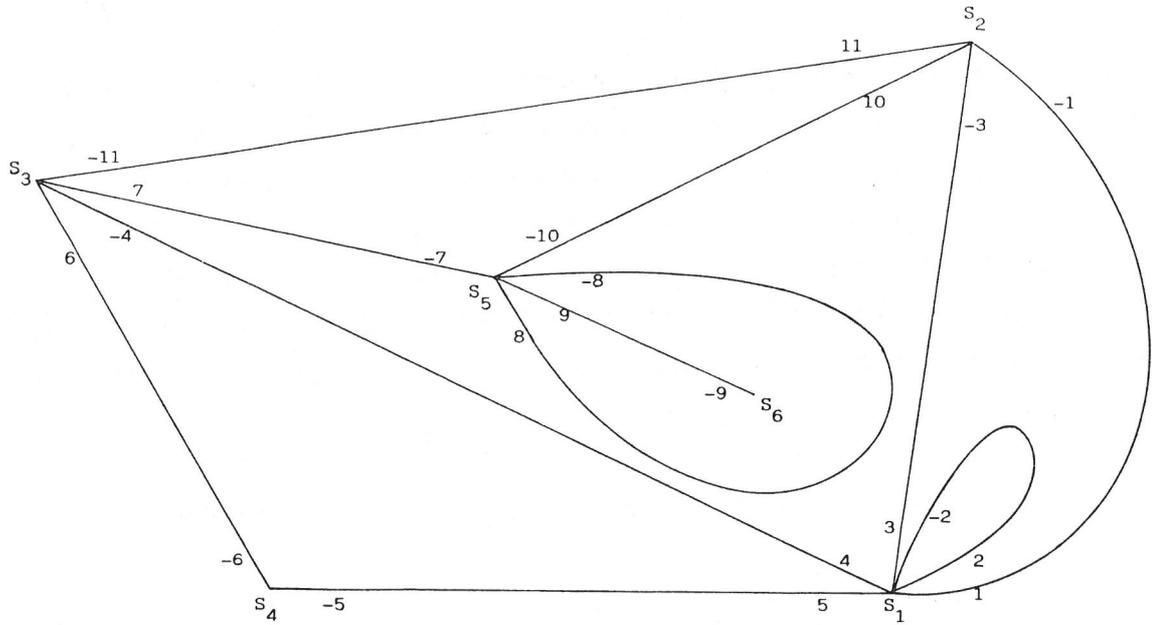
### I.2. Représentation d'une carte combinatoire

Soit  $(\sigma, \alpha)$  une carte combinatoire sur  $Z_m$ . On représente les cycles  $(a, \sigma(a), \dots, \sigma^k(a))$  de  $\sigma$  par des points situés dans cet ordre sur un cercle pour un sens de rotation choisi. On joint alors les points numérotés  $a$  et  $-a$  par une arête.

Par exemple, la carte combinatoire définie sur  $Z_{11}$  par

$$\sigma = (1, 2, -2, 3, 4, 5)(-1, 11, 10, -3)(-11, 6, -4, 7)(-6, -5)(-7, 8, 9, -8, -10)(-9)$$

est représentée, en contractant chaque cercle défini ci-dessus en un point et en notant ces six sommets de  $s_1$  à  $s_6$



Le sens de rotation choisi pour représenter les cycles de  $\sigma$  est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

On a,  $\bar{\sigma} = (1, 11, 6, -5)(2, 3, -1)(-2)(4, 7, 8, -10, -3)(5, -6, -4)(-7, -11, 10)(-8, 9, -9)$ .

On note respectivement de  $f_1$  à  $f_7$  ces 7 faces (cycles de  $\bar{\sigma}$ ) ; elles apparaissent comme les frontières topologiques des domaines déterminés par la représentation ci-dessus. Dans cet exemple,  $g(\sigma, \alpha) = \frac{1}{2} \{11+2-6-7\} = 0$  ; la carte est planaire.

### I.3. Cartes planaires pointées

. Deux cartes planaires  $(\sigma, \alpha)$  et  $(\sigma', \alpha)$  sur  $Z_m$  sont isomorphes s'il existe une permutation  $\varphi$  sur  $Z_m$  telle que

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi\sigma = \sigma'\varphi, \quad \varphi\alpha = \alpha\varphi.$$

. Une carte planaire pointée est une classe d'équivalence pour cette relation d'isomorphisme. Le brin 1 et son sommet initial sont dits pointés.

#### I.4. Arbres

. Une carte planaire  $(\sigma, \alpha)$  sur  $Z_m$  à une seule face ( $Z(\bar{\sigma}) = 1$ ) est un arbre à  $m$  arêtes. Un arbre étiqueté est un arbre dans lequel chaque sommet est étiqueté par un entier naturel. L'arbre est dit bien étiqueté si sa racine  $\sigma^*(1)$ , sommet initial du brin 1, est étiquetée 0 et si deux sommets adjacents ont des étiquettes différant au plus d'une unité. Un arbre est dit très bien étiqueté si de plus, deux sommets adjacents n'ont pas la même étiquette.

. On note  $\epsilon(s)$  l'étiquette du sommet  $s$  et  $(\sigma, \alpha; \epsilon)$  un arbre  $(\sigma, \alpha)$  étiqueté par  $\epsilon$ .  
Pour  $b$ , brin de l'arbre, on appellera étiquette du brin  $b$ , notée  $\epsilon(b)$ , l'étiquette de son sommet initial  $\sigma^*(b)$ .

. Un arbre étiqueté pointé est une classe d'équivalence dans l'ensemble des arbres étiquetés pour la restriction à cet ensemble de la relation d'isomorphisme sur les cartes planaires (cf. I.3.) à laquelle on impose de plus de préserver l'étiquetage

$$\epsilon = \epsilon' \circ \varphi$$

## II. Bijection entre cartes planaires pointées et arbres bien étiquetés pointés

### II.1. Construction de l'arbre bien étiqueté associé à une carte

Soit  $(\sigma, \alpha)$  une carte planaire sur  $Z_m$ . On associe à cette carte, un arbre  $\hat{\sigma}$  sur  $Z_m$  et un étiquetage  $\epsilon$  de cet arbre de façon à ce que l'application  $(\sigma, \alpha) \rightarrow (\hat{\sigma}, \alpha; \epsilon)$  soit une bijection de l'ensemble des cartes planaires sur l'ensemble des arbres bien étiquetés.

II.1.a. Définition de la fonction d'étiquetage  $\epsilon$

. Soit  $s$  un sommet de la carte planaire  $(\sigma, \alpha)$  de sommet pointé  $s_1 = \sigma^*(1)$ . Alors  $\epsilon(s)$  est la longueur (en nombre d'arêtes) d'un plus court chemin joignant  $s_1$  à  $s$  (en particulier  $\epsilon(s_1) = 0$ ). Les brins issus d'un sommet étiqueté  $i$  sont donc étiquetés  $i$ . Si  $n$  est la plus grande distance d'un sommet de la carte au sommet pointé, on note  $B_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , l'ensemble des brins de la carte étiquetés  $i$ . Ces ensembles  $B_i$  sont stables par  $\sigma$ .

. Dans notre exemple (cf. I.2.)

$$\epsilon(s_1) = 0, \epsilon(s_2) = \epsilon(s_3) = \epsilon(s_4) = 1, \epsilon(s_5) = 2, \epsilon(s_6) = 3.$$

$$B_0 = \{1, 2, -2, 3, 4, 5\}, B_1 = \{-1, 11, 10, -3, -11, 6, -4, 7, -6, -5\},$$

$$B_2 = \{-7, 8, 9, -8, -10\}, B_3 = \{-9\}.$$

II.1.b. Définition de  $\hat{\sigma}$  sur  $Z_m$

. A chaque face  $\lambda$  (cycle de  $\bar{\sigma}$ ) de la carte donnée, on associe  $m(\lambda)$ : valeur minimum des étiquettes des brins définissant cette face.

Pour  $i$  appartenant à  $\{0, \dots, n\}$ ,  $F_i$  est alors l'ensemble des brins  $b$  de  $B_i$  dont l'étiquette  $i$  est égale à  $m(\bar{\sigma}^*(b))$  (valeur minimum des étiquettes des brins de la face engendrée par  $b$ ).

On pose également  $S_i = B_i \setminus F_i$  pour  $0 \leq i \leq n$ .

. On définit alors pour  $i$  dans  $\{0, \dots, n\}$

$$\hat{\sigma}(a) = \sigma|_{S_i}(a) \text{ si } a \text{ est dans } S_i$$

$$\hat{\sigma}(a) = \bar{\sigma}|_{F_i}(a) \text{ si } a \text{ est dans } F_i.$$

Théorème 1 - 1.  $(\hat{\sigma}, \alpha)$  muni de l'étiquetage défini par  $\epsilon$  est un arbre bien étiqueté.

2. L'application  $T$  définie ci-dessus qui à  $(\sigma, \alpha)$  associe  $(\hat{\sigma}, \alpha; \epsilon)$  est une bijection de l'ensemble des cartes planaires sur l'ensemble des arbres bien étiquetés. Cette bijection conserve les arêtes. Elle donne par passage au quotient une bijection  $\tilde{T}$  de l'ensemble des cartes planaires pointées sur l'ensemble des arbres bien étiquetés pointés.

Dans notre exemple

$$\cdot m(f_1) = m(f_2) = m(f_3) = m(f_4) = m(f_5) = 0, m(f_6) = 1, m(f_7) = 2$$

$$\cdot F_0 = B_0, F_1 = \{-11, 10\}, F_2 = \{-8, 9\}, F_3 = \emptyset$$

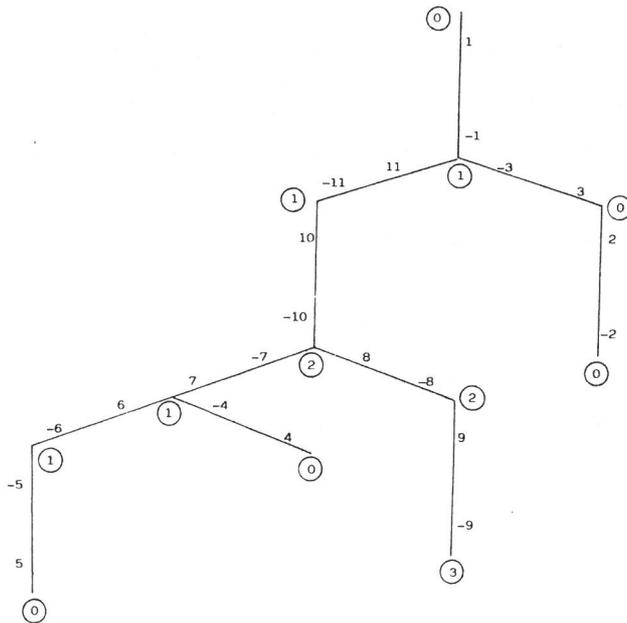
$$S_0 = \emptyset \text{ (c'est toujours le cas)}, S_1 = \{-1, 11, -3, 6, -4, 7, -6, -5\},$$

$$S_2 = \{-7, 8, -10\}, S_3 = \{-9\}$$

$$\cdot \bar{\sigma}|_{F_0} = (1)(2,3)(-2)(4)(5), \bar{\sigma}|_{F_1} = (-11, 10), \bar{\sigma}|_{F_2} = (-8, 9)$$

$$\sigma|_{S_1} = (-1, 11, -3)(6, -4, 7)(-6, -5), \sigma|_{S_2} = (-7, 8, -10), \sigma|_{S_3} = (-9)$$

Donc  $\hat{\sigma} = (1)(2,3)(-2)(4)(5)(-11,10)(-8,9)(-1,11,-3)(6,-4,7)(-6,-5)(-7,8,-10)(-9)$   
 l'étiquetage des brins de  $\hat{\sigma}$  étant le même que celui de la carte  $\sigma$ , ce qui  
 donne l'arbre dans lequel l'étiquetage est donné par les chiffres entourés  
 d'un cercle.



Le théorème résulte des quatre lemmes démontrés ci-dessous.

Lemme 1 -  $(\hat{\sigma}, \alpha)$  est une carte

Démonstration - Il faut montrer que le groupe  $\hat{G}$  engendré par  $\{\hat{\sigma}, \alpha\}$  est transitif sur  $Z_m$ .

Il suffit de prouver que pour tous  $a$  et  $b$  dans  $Z_m$  tels que  $a = \sigma(b)$ , il existe un élément  $g$  du groupe  $\hat{G}$  tel que  $a = g(b)$  (on utilise le fait que  $\{\sigma, \alpha\}$  agit transitivement sur  $Z_m$ ).

Remarque préliminaire  $F_n$  est stable par  $\bar{\sigma}$  ; en effet, si une face  $\lambda$  est telle que  $m(\lambda) = n$ , alors tous ses brins ont une étiquette minorée par  $n$ , par définition de  $m(\lambda)$ , et majorée par  $n$ , par définition de  $n$ . Donc tous les brins de cette face (cycle pour  $\bar{\sigma}$ ) sont dans  $F_n$ .

1. Si a est dans  $B_n$ , et donc b dans  $B_n$  (stable par  $\sigma$ )

1.a. Si a est dans  $F_n$ , on a  $-b = -\sigma^{-1}(a) = \bar{\sigma}^{-1}(a)$  est dans  $F_n$  donc par définition de  $\hat{\sigma}$ ,  $-b = \hat{\sigma}^{-1}(a)$ , soit  $a = \hat{\sigma} \circ \alpha(b)$ .

1.b Si a est dans  $S_n$

Posons  $b_1 = b$ ,  $b_2 = \sigma^{-1}(b_1), \dots, b_p = \sigma^{-1}(b_{p-1})$ , où  $b_p$  est le premier brin de cette suite qui est dans  $S_n$ , les précédents étant dans  $F_n$ .

Alors, par définition de  $\hat{\sigma}$ ,  $a = \hat{\sigma}(b_p) (= \sigma|_{S_n}(b_p))$ .

D'autre part, pour  $1 \leq \ell < p$ ,  $b_\ell = \sigma(b_{\ell+1})$  avec  $b_\ell$  dans  $F_n$ .

Donc d'après le 1.a., il existe  $g_\ell$  dans  $\hat{G}$  tel que  $b_\ell = g_\ell(b_{\ell+1})$

et donc  $b = b_1 = g_1 g_2 \dots g_{p-1} \hat{\sigma}^{-1}(a)$ , d'où a en fonction de b.

2. Supposons par récurrence avoir démontré le résultat pour tous brins a et b tels que  $a = \sigma(b)$  et que a ait une étiquette supérieure à i. Supposons alors a dans  $B_i$ , et donc b dans  $B_i$  (stable par  $\sigma$ ).

2.a. Si a est dans  $F_i$ , tous les brins de la face  $\bar{\sigma}^*(a)$  sont dans  $F_i$  ou dans  $\bigcup_{j>i} S_j$ .

Posons  $b_1 = -b = \bar{\sigma}^{-1}(a)$ ,  $b_2 = \bar{\sigma}^{-1}(b_1), \dots, b_p = \bar{\sigma}^{-1}(b_{p-1})$  où  $b_p$  est le premier brin dans  $F_i$ , les autres étant dans  $\bigcup_{j>i} S_j$ .

Alors, par définition de  $\hat{\sigma}$  sur  $F_i$ ,  $a = \hat{\sigma}(b_p)$ .

De plus, pour  $1 \leq \ell < p$ ,  $b_\ell = \bar{\sigma}(b_{\ell+1})$  avec  $b_\ell$  dans  $\bigcup_{j>i} S_j$

Donc par hypothèse de récurrence, il existe  $g_\ell$ ,  $1 \leq \ell < p$ , dans  $\hat{G}$  tels que

$$-b = b_1 = g_1 g_2 \dots g_{p-1} \hat{\sigma}^{-1}(a) \text{ d'où a en fonction de b.}$$

2.b. Si  $a$  est dans  $S_i$ , la démonstration est la même qu'au 1.b. en remplaçant  $n$  par  $i$ .

Lemme 2  $(\hat{\sigma}, \alpha)$  est un arbre.

Démonstration

Déterminons le nombre de cycles de  $\hat{\sigma}$ .

a.  $F = \bigcup_{i \geq 0} F_i$  est stable par  $\hat{\sigma}$  (par définition de  $\hat{\sigma}$ ) et,

$$Z(\hat{\sigma}|_F) = Z(\bar{\sigma}).$$

En effet  $\hat{\sigma}$  est définie sur  $F$  en associant à chaque face (cycle de  $\bar{\sigma}$ ) un cycle pour  $\hat{\sigma}$ .

b.  $S = \bigcup_{i \geq 1} S_i$ , ( $S_0 = \emptyset$ ), est stable par  $\hat{\sigma}$ .

Le sommet pointé  $a$  tous ses brins étiquetés 0 et donc (évident)  $a$  tous ses brins dans  $F$ . C'est le seul. Tout autre sommet (cycle pour  $\sigma$  non étiqueté 0) possède au moins un brin qui soit dans  $S$ . En effet, soit  $s$  un sommet inclus dans  $F_i$ , étiqueté  $i$  non nul,  $s_1$  un sommet adjacent à  $s$ , et  $(b_1, -b_1)$  une arête liant  $s_1$  (sommet initial de  $b_1$ ) à  $s$ :

Le brin  $b = \bar{\sigma}(b_1) = \sigma(-b_1)$ , est un brin de  $s$ , donc appartient à  $F_i$ . Par suite  $b_1$  (et donc  $s_1$ ), qui appartient à la même face que  $b$ , est étiqueté  $j$  supérieur ou égal à  $i$ .

On a donc démontré que tout sommet adjacent au sommet  $s$ , a une étiquette supérieure ou égale à  $i$ . Le sommet  $s$  devrait donc (du fait de la notion de distance utilisée pour étiqueter les sommets) être étiqueté  $i+1$ ; c'est une contradiction. Le sommet  $s$  ne peut donc pas être inclus dans  $F_i$  ( $i$  non nul). Par suite, la définition de  $\hat{\sigma}$  entraîne que  $Z(\hat{\sigma}|_S) = Z(\sigma) - 1$ .

c. On déduit du a et du b que  $Z(\hat{\sigma}) = Z(\sigma) + Z(\bar{\sigma}) - 1$

$$\text{Or, } g(\hat{\sigma}, \alpha) = \frac{1}{2} (2+m - Z(\hat{\sigma}) - Z(\bar{\sigma}))$$

$$\text{Donc } g(\hat{\sigma}, \alpha) = g(\sigma, \alpha) + \frac{1}{2} (1 - Z(\bar{\sigma})) = \frac{1}{2} (1 - Z(\bar{\sigma}))$$

et  $g(\hat{\sigma}, \alpha)$  doit être un entier naturel.

Donc  $Z(\bar{\sigma}) = 1$  et par suite,  $g(\hat{\sigma}, \alpha) = 0$ .

Donc,  $(\hat{\sigma}, \alpha)$  est une carte plane et un arbre.

Lemme 3  $(\hat{\sigma}, \alpha)$  est bien étiqueté par  $\epsilon$ .

Démonstration - C'est évident par la définition de  $\epsilon$ .

Lemme 4 - L'application qui à la carte planaire  $(\sigma, \alpha)$  fait correspondre l'arbre bien étiqueté  $(\hat{\sigma}, \alpha; \epsilon)$  est une bijection. Elle induit par passage au quotient une bijection de l'ensemble des cartes planaires pointées sur l'ensemble des arbres bien étiquetés pointés.

Démonstration - On utilise dans la démonstration ci-dessous, le lemme technique introduit dans [10], que nous rappelons ci-dessous sans démonstration :

Lemme - Soient  $A'$  et  $A''$  deux ensembles disjoints de réunion  $A$ . Soit  $\varphi$  une injection de  $A'$  dans  $A$ , sans cycle dans  $A'$  (c'est-à-dire une suite  $a_1, \dots, a_p$  dans  $A'$  telle que pour  $1 \leq i < p$ ,  $\varphi(a_i) = a_{i+1}$  et  $\varphi(a_p) = a_1$ ). Soit  $\alpha$  une permutation de  $A''$ . Alors, il existe une unique permutation  $\theta$  sur  $A$  telle que

$$1. \theta|_{A''} = \alpha \quad 2. \theta(a) = \varphi(a) \text{ pour } a \text{ dans } A'.$$

On note  $\theta = T_{A'', A'}(\alpha, \varphi)$ .

1. Pour prouver l'injectivité, nous allons montrer que  $(\sigma, \alpha)$  est uniquement déterminée par son image  $(\hat{\sigma}, \alpha)$  étiquetée par  $\epsilon$ .

1.a. Les ensembles  $B_i$ ,  $0 \leq i \leq n$ , sont déterminés par

$$a \in B_i \iff \epsilon(a) = i.$$

1.b. Détermination des ensembles  $F_i$  et  $S_i$

. Ces ensembles  $F_i$  et  $S_i$  sont stables par  $\hat{\sigma}$  ; ce sont donc des réunions de sommets de l'arbre, étiquetés  $i$ .

. Pour  $i$  dans  $\{0, \dots, n\}$ ,  $S_i = B_i \setminus F_i$  et  $F_i$  est l'ensemble des sommets étiquetés  $i$  de l'arbre dont les sommets adjacents dans l'arbre sont étiquetés  $j \geq i$ .

Démontrons cette caractérisation de  $F_i$

. Soit  $(b_1, \dots, b_k)$  une face  $f$ , cycle pour  $\bar{\sigma}$ , telle que le sous-cycle  $(b_{i_1}, \dots, b_{i_r})$  soit un sommet  $\hat{s}$  de  $\hat{\sigma}$  inclus dans  $F_i$  (on a  $m(f) = i$ ). Alors, pour  $\ell$  dans  $\{1, \dots, r\}$ ,  $\sigma(-b_{i_\ell}) = \bar{\sigma}(b_{i_\ell}) = b_{i_\ell+1}$  (ou  $b_1$  si  $i_\ell = k$ ) par suite,  $\epsilon(-b_{i_\ell}) = \epsilon(b_{i_\ell+1}) \geq m(f) = i$ .

Donc les sommets adjacents au sommet  $\hat{s}$  dans l'arbre ont des étiquettes supérieures ou égales à  $i$ .

. Réciproque :

Pour  $i > 0$ , supposons par l'absurde qu'un sommet  $s = (b_1, \dots, b_k)$ , cycle pour  $\sigma$ , soit tel que la sous suite de brins  $(b_{i_1}, \dots, b_{i_r})$  soit un sommet  $\hat{s}$  de  $\hat{\sigma}$  dans  $S_i$ , dont les sommets adjacents dans l'arbre ont des étiquettes supérieures ou égales à  $i$ . Alors pour  $\ell = 1, \dots, r$ ,  $\epsilon(-b_{i_\ell}) \geq i$ .

De plus si  $b$  est dans  $s \setminus \hat{s}$ ,  $b$  est nécessairement dans  $F_i$ . Donc,

$b' = \bar{\sigma}(b)$  est étiqueté  $j \geq i$ . Par suite  $\epsilon(-b) = \epsilon(b') = j \geq i$ .

On a donc montré que pour tout  $b$  dans  $s$ ,  $\epsilon(-b) \geq i$ .

Donc  $s$  ne peut pas être étiqueté  $i$ , du fait de la notion de distance utilisée pour étiqueter les sommets. On a donc une contradiction et l'on a bien prouvé la caractérisation des ensembles  $F_i$ .

1.c. Détermination de  $\sigma$  sur  $B_n$ ,  $n > 0$  (le cas  $n = 0$  se déduit du e)

.  $F_n$  est stable par  $\bar{\sigma}$  (cf. démonstration du lemme 1) et  $\bar{\sigma}^{-1} = \hat{\sigma}^{-1}$  sur  $F_n$ .

On note dans la suite  $\wedge_n = \bar{\sigma}^*(F_n) = F_n$ .

$$\sigma|_{B_n}^{-1} = T_{S_n, F_n}(\hat{\sigma}|_{S_n}^{-1}, \bar{\sigma}^{-1})$$

Ceci découle du lemme technique si l'on vérifie que  $\sigma^{-1} = \bar{\sigma}^{-1}$  n'a pas de cycle dans  $F_n$ .

Si  $\sigma^{-1}$  (et donc  $\sigma$ ) avait un cycle dans  $F_n$  ( $n > 0$ ) cela impliquerait que tous les brins d'un sommet de la carte sont dans  $\bigcup_{i>0} F_i$ , ce qui n'est pas possible (cf. démonstration du lemme 2).

1.d. Détermination de  $\sigma$  sur  $B_i$ ,  $i > 0$ ,  $\sigma$  étant supposée déjà déterminée sur  $\bigcup_{j>i} B_j$  et  $\bar{\sigma}$  sur  $\bigcup_{j>i} \Lambda_j$ , avec  $\Lambda_j = \bar{\sigma}^* F_j$ .

1.d.a. Pour déterminer  $\Lambda_i = \bar{\sigma}^*(F_i)$ , on remarque que de par la définition de  $F_i$ , on a  $\Lambda_i = F_i \cup A_i$  avec  $A_i$  inclus dans  $C_i = \bigcup_{j>i} B_j \setminus \bigcup_{j>i} \Lambda_j$  (du fait que  $\bar{\sigma}$  sature  $\bigcup_{j>i} \Lambda_j$ ).

L'algorithme suivant détermine pour tout brin  $b$  de  $C_i$  s'il est ou non dans  $A_i$ .

E : Soit  $b$  dans  $C_i$ . On pose  $\tilde{b} = \bar{\sigma}^{-1} b = -\sigma^{-1}(b)$  ( $\sigma^{-1}$  est connu sur  $\bigcup_{j>i} B_j$ ).

- . Si  $\tilde{b}$  est dans  $F_i$ , alors  $b$  appartient à  $A_i$
- . Si  $\tilde{b}$  est dans  $C_i$ , alors on recommence avec  $\tilde{b}$  (aller en E)
- . Si  $\tilde{b}$  n'appartient pas à  $F_i \cup C_i$  alors il est dans  $S_i$  et donc  $b$  n'appartient pas à  $A_i$ .

Remarque

On ne peut pas avoir de cycle pour  $\bar{\sigma}^{-1}$  (donc pour  $\bar{\sigma}$ ) dans  $C_i$  ; ce cycle serait une face  $f$  de la carte dont tous les brins auraient une étiquette supérieure ou égale à  $i+1$  ; soit  $m(f) \geq i+1$ . Donc, les brins étiquetés par  $m(f)$  dans cette face devraient appartenir à  $F_{m(f)}$ , ce qui n'est pas puisque  $C_i \cap F_{m(f)}$  est vide. Par suite, l'algorithme ci-dessus termine.

1.d.b. On a  $\bar{\sigma}^{-1}|_{\Lambda_i} = T_{F_i, A_i}(\hat{\sigma}^{-1}|_{F_i}, -\sigma^{-1})$

$-\sigma^{-1}$  n'a pas de cycle sur  $A_i$  par définition même de  $A_i$ .

1.d.y. On a  $\sigma^{-1}|_{B_i} = T_{S_i, F_i}(\hat{\sigma}^{-1}|_{S_i}, -\bar{\sigma}^{-1})$

$-\bar{\sigma}^{-1}$  n'a pas de cycle sur  $F_i$  (cf. c)

1.e. Détermination de  $\sigma$  sur  $B_o = F_o$

Les points  $\underline{\alpha}$  et  $\underline{\beta}$  du cas général (cf. d) sont inchangés.

On conclut avec  $\sigma|_{B_o}^{-1} = \bar{\sigma}^{-1}$  sur  $B_o$ .

On a donc prouvé l'injectivité recherchée.

2. La surjectivité de l'application qui à une carte planaire associe un arbre bien étiqueté résulte du fait que ces deux ensembles sont en bijection (cf. [10]).

On peut également la prouver directement à l'aide des formules de reconstruction de  $\sigma$  à partir de  $\hat{\sigma}$  établies au 1.

II.2. Bijection entre hypercartes planaires et arbres très bien étiquetés

Au a, est rappelée la définition combinatoire d'une hypercarte planaire pointée donnée par R. Cori (cf. [7]). On rappelle au b différentes représentations d'une hypercarte planaire pointée par une carte planaire pointée. On retrouve alors en particulier la représentation que nous avons prise comme définition au premier exposé. Le c donne la bijection annoncée entre hypercartes planaires et arbres très bien étiquetés.

II.2.a. Définition combinatoire d'une hypercarte

. On note  $Z_m^+ = Z_m \cap \mathbb{N}$  et  $Z_m^- = Z_m \cap (-\mathbb{N})$ .

Une hypercarte est un couple  $(p,a)$  de permutations opérant sur  $Z_m^+$  (ensemble des h-brins), tel que le groupe engendré par  $\{p,a\}$  opère transitivement sur  $Z_m^+$ . Les orbites de  $p$  (resp.  $a$ ,  $p \circ a^{-1}$ ) sont les sommets (resp. h-arêtes, h-faces) de l'hypercarte.

Le genre de l'hypercarte  $(p,a)$  sur  $Z_m^+$  est défini par

$$g(p,a) = 1 + \frac{1}{2} (m - Z(p) - Z(a) - Z(p \circ a^{-1})).$$

Le genre d'une hypercarte est un entier positif ou nul. S'il est nul, l'hypercarte est dite planaire.

. Hypercarte planaire pointée

Deux hypercartes planaires  $(p,a)$  et  $(p',a')$  sur  $Z_m^+$  sont isomorphes, s'il existe une permutation  $\lambda$  sur  $Z_m^+$  telle que

$$\lambda(1) = 1, \lambda p = p'\lambda, \lambda a = a'\lambda.$$

Une hypercarte planaire pointée est une classe d'équivalence modulo cet isomorphisme.

Le brin 1 et son sommet initial  $p^*(1)$  sont dits pointés. La h-face  $(p \circ a^{-1})^*(1)$  est appelée h-face extérieure de l'hypercarte  $(p,a)$ .

II.2.b. Représentations d'une hypercarte planaire par une carte planaire (cf. exemple ci-dessous):

Les deux représentations b et c données proposition 2 ci-dessous, sont équivalentes à celle donnée par T.R.S. Walsh (cf. [19]). Une autre représentation peut être trouvée dans [7].

Proposition 1 - Soit  $H = (p,a)$  une hypercarte planaire sur  $Z_m^+$ ,  $m \geq 1$ .

On définit la permutation  $\sigma$  sur  $Z_m$  par

$$\sigma = p \circ a^{-1} \circ \alpha \text{ sur } Z_m^-, \sigma = \alpha \circ a \text{ sur } Z_m^+$$

avec

$$\alpha(i) = -i \text{ sur } Z_m.$$

1.  $C(H) = (\sigma, \alpha)$  est une carte planaire sur  $Z_m$ , telle que la permutation  $\bar{\sigma} = \sigma \circ \alpha$ , dont les cycles sont les faces de  $C(H)$ , sature  $Z_m^+$  et  $Z_m^-$ .

Les cycles de  $\bar{\sigma}$  dans  $Z_m^+$  sont les cycles de  $p \circ a^{-1}$  (donc les h-faces de  $H$ ). Les cycles de  $\bar{\sigma}$  dans  $Z_m^-$  sont en bijection par l'involution  $\alpha$  avec les cycles de  $a$  (h-arêtes de  $H$ ).

2. L'application  $C$  définie au 1. est une bijection de l'ensemble des hypercartes planaires sur  $Z_m^+$ , sur l'ensemble  $\mathcal{D}_m$  des cartes planaires  $(\sigma, \alpha)$  sur  $Z_m$  telles que  $\bar{\sigma}$  sature  $Z_m^+$  et  $Z_m^-$ .

Démonstration - Se reporter à [1] ou [19] pour une démonstration.

Remarquons seulement que la bijection  $C^{-1}$  associée à la carte planaire  $(\sigma, \alpha)$  ( $\bar{\sigma}$  saturant  $Z_m^+$  et  $Z_m^-$ ) de  $\mathcal{D}_m$ , l'hypercarte  $(p, a)$  sur  $Z_m^+$  avec  $p = \sigma^2$ , (il y a donc bijection entre les sommets de la carte et de  $|Z_m^+$  l'hypercarte associées), et  $a = \alpha \circ \sigma$ .

Remarque  $\mathcal{D}_m$  peut être caractérisé comme l'ensemble des cartes planaires, à  $m$  arêtes, deux-coloriables, c'est-à-dire dont on peut colorier les faces avec deux couleurs, toute arête étant incidente à deux faces de couleurs différentes. En l'occurrence, les deux types de faces sont respectivement les  $h$ -faces et les  $h$ -arêtes de l'hypercarte (évident à partir de la proposition 1).

Proposition 2 Les trois ensembles suivants sont en bijection

- a. L'ensemble des hypercartes planaires pointées à  $m$   $h$ -brins
- b. L'ensemble des cartes planaires pointées deux-coloriables, à  $m$  arêtes
- c. L'ensemble des cartes planaires pointées biparties (c'est-à-dire ayant deux types de sommets, toute arête étant incidente à deux sommets de types différents) à  $m$  arêtes

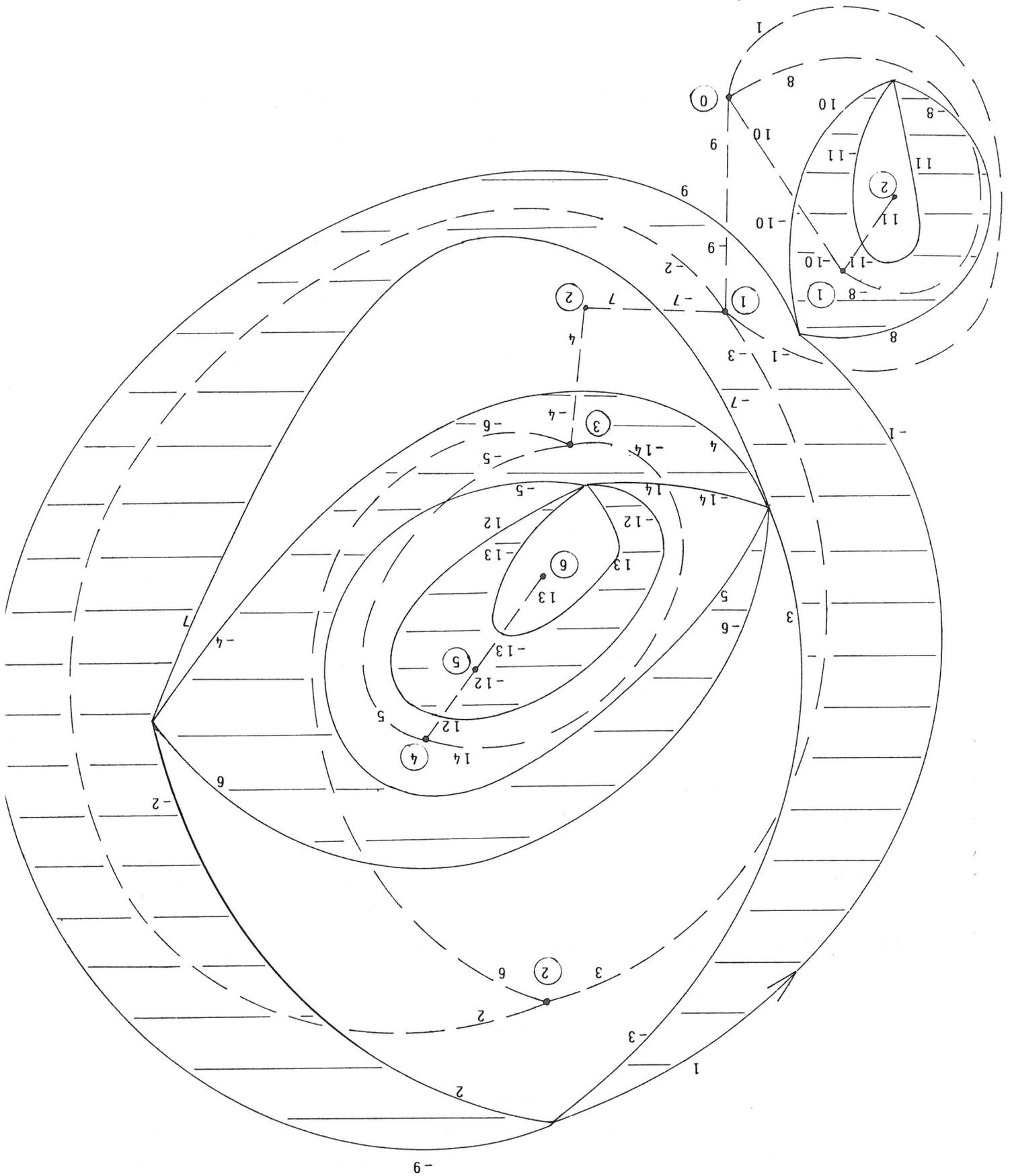
Démonstration - La bijection entre a et b se déduit de la proposition 1 par passage au quotient (la notion deux-coloriable étant compatible avec la relation d'équivalence).

La bijection entre b et c résulte tout simplement de la dualité dans les cartes planaires pointées (cf. [19] ou [1]).

Exemple . Considérons l'hypercarte planaire  $H = (p, a)$  sur  $Z_{14}^+$  définie par

$$p = (1, 2), (3, 4, 5), (6, 7), (8, 9), (10, 11), (12, 13, 14)$$

$$a = (1, 3, 7, 2, 9), (4, 14, 5, 6), (8, 10, 11), (12, 13)$$



. La carte planaire pointée deux-coloriable  $C(H) = (\sigma, \alpha)$  associée, sur  $Z_{14}$ , représentée ci-dessus en traits pleins (les faces non hachurées correspondent aux h-faces de l'hypercarte ; les faces hachurées correspondent aux h-arêtes, cf. proposition 1) est définie par

$$\sigma = (1, -3, 2, -9), (3, -7, 4, -14, 5, -6), (6, -4, 7, -2), (8, -10, 9, -1), \\ (10, -11, 11, -8), (12, -13, 13, -12, 14, -5)$$

$$\alpha = (i, -i), 1 \leq i \leq 14$$

Le numéro de chaque brin dans  $Z_{14}$  est indiqué près de son extrémité initiale. Le sens de rotation choisi pour représenter les cycles de  $\sigma$  est le sens contraire des aiguilles d'une montre.

. La carte planaire bipartie  $(\sigma', \alpha)$ , duale de la carte planaire deux-coloriable précédente, est représentée en pointillés. Près des sommets de cette carte, les chiffres entourés d'un cercle donnent l'étiquetage des sommets (et donc des brins qui en sont issus) par la méthode d'étiquetage définie au (II,1,a) associée à la distance dans ce graphe à partir du sommet pointé  $\sigma'^*(1)$ . Les numéros des brins sont indiqués près de leur extrémité initiale. Cette carte est définie par  $(\sigma', \alpha)$  avec:

$$\sigma' = \bar{\sigma} = (1, 8, 10, 9)(2, 6, 3)(4, 7)(5, 12, 14)(11)(13) \\ (-1, -3, -7, -2, -9)(-4, -14, -5, -6)(-8, -10, -11)(-12, -13)$$

Les cycles de  $\sigma'$  sont représentés dans le sens des aiguilles d'une montre.

### II.2.c. Bijection entre hypercartes planaires et arbres très bien étiquetés

#### Théorème 2

En appliquant une hypercarte planaire pointée sur l'arbre bien étiqueté pointé associé à la carte planaire pointée bipartie liée à cette hypercarte (cf. proposition 2), on définit une bijection de l'ensemble des hypercartes planaires pointées sur l'ensemble des arbres très bien étiquetés pointés.

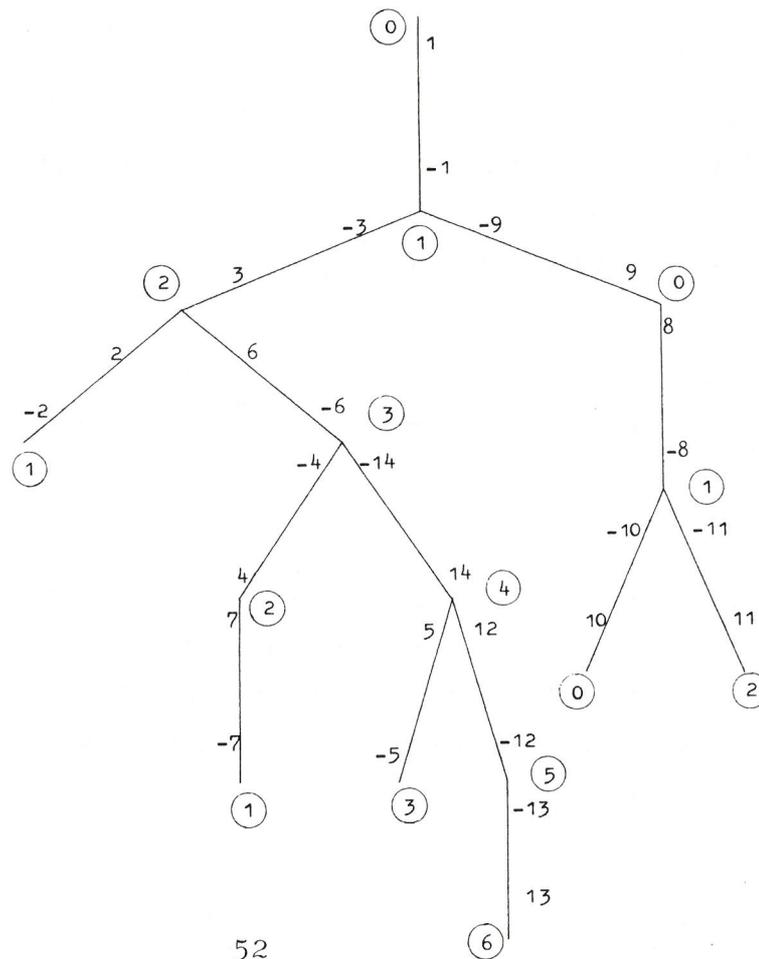
Démonstration Il suffit de montrer que l'application  $\hat{T}$  définie au théorème 1 du (II.1.b.), met en bijection l'ensemble des cartes planaires pointées biparties et l'ensemble des arbres très bien étiquetés pointés. Cela résulte de la définition de la fonction  $\epsilon$  qui étiquette les sommets d'une carte planaire bipartie C (cf. II.1.a.) ; les sommets de la famille du sommet pointé seront étiquetés pairs et les autres impairs. Par suite toute arête dans C étant incidente à deux sommets de types différents aura ses brins étiquetés pair pour l'un, impair pour l'autre. L'arbre associé sera donc très bien étiqueté. La réciproque est évidente.

CQFD

Dans le cas de l'exemple ci-dessus, l'arbre très bien étiqueté  $(\hat{\sigma}, \alpha; \epsilon)$  est défini par

$$\hat{\sigma} = (1), (8,9), (10), (-2), (-7), (-1, -3, -9), (-8, -10, -11), (2, 6, 3), (4, 7), (11), (-5), (-4, -14, -6), (5, 12, 14), (-12, -13), (13).$$

Soit, l'étiquetage représenté ci-dessous par les chiffres entourés d'un cercle, se déduisant de celui de la carte bipartie ci-dessus.



Remarque Considérons une hypercarte planaire pointée et la carte planaire pointée deux-coloriable associée. On déduit de la démonstration du lemme 4 (cf. II.1.b.) de la démonstration de la proposition 1 (cf. II.2.b.) et de la proposition 2 (cf. II.2.b.) que :

Les sommets de l'hypercarte sont en bijection avec les sommets de l'arbre qui sont des minimum locaux pour la fonction d'étiquetage (c'est-à-dire les sommets qui ont une étiquette inférieure à celles de leurs sommets adjacents dans l'arbre).

Les h-faces de l'hypercarte, différentes de la h-face extérieure, sont en bijection avec les sommets de l'arbre étiquetés pairs et qui ne sont pas des minimum locaux dans l'arbre.

Les h-arêtes de l'hypercarte sont en bijection avec les sommets de l'arbre étiquetés impairs et qui ne sont pas minimum locaux dans l'arbre.

La totale "symétrie" entre les notions de sommet, h-arête et h-face d'une hypercarte apparue au premier exposé (cf. théorème 6, IV.4.) ne se traduit donc pas dans l'arbre associé. Le paragraphe III propose une autre bijection entre hypercartes planaires et arbres très bien étiquetés qui respecte cette symétrie. Le paragraphe IV utilisera ce résultat plus fin pour l'obtention de relations fonctionnelles sur les hypercartes planaires.

La même remarque est valable pour les cartes planaires. La bijection établie au II entre cartes planaires et arbres bien étiquetés, bien que très simple dans sa mise en oeuvre, ne traduit pas agréablement la symétrie entre sommets et faces d'une carte planaire (imposée par la dualité) ; les faces (resp. sommets) sont envoyés sur les sommets de l'arbre minimum locaux (resp. non minimum locaux). Cette symétrie est respectée dans la bijection établie par Cori et Vauquelin (cf. [10]) qui envoie sommets et faces (non extérieure) de la carte planaire respectivement sur les sommets étiquetés pairs, et impairs de l'arbre associé.

### III. Une autre bijection entre hypercartes planaires et arbres très bien étiquetés

Soit  $H$  une hypercarte planaire  $(p, a)$  sur  $Z_m^+$  et  $C(H)$ , la carte planaire  $(\sigma, \alpha)$  deux-coloriable sur  $Z_m$  qui lui est bijectivement associée par la proposition 1 (cf. II.2.b.). On associe à  $C(H)$  et donc à  $H$  un arbre très bien étiqueté de la façon suivante (se reporter à [4] pour les démonstrations).

#### III.1. Définition de la fonction d'étiquetage $\epsilon$ sur $C(H)$

On définit l'ensemble  $B_i$  ( $\subset Z_m$ ) des brins étiquetés  $i$  de  $C(H)$  ( $= (\sigma, \alpha)$ ), par récurrence de la façon suivante

$$\begin{aligned} B_0 &= \bar{\sigma}^*(1) \\ B_1 &= (\sigma^2)^*(\sigma B_0) \end{aligned}$$

Si  $B_{6\mu}$  et  $B_{6\mu+1}$ ,  $\mu \geq 0$ , sont déterminés, on pose alors, en notant  $\tilde{\sigma} = \alpha \circ \sigma$

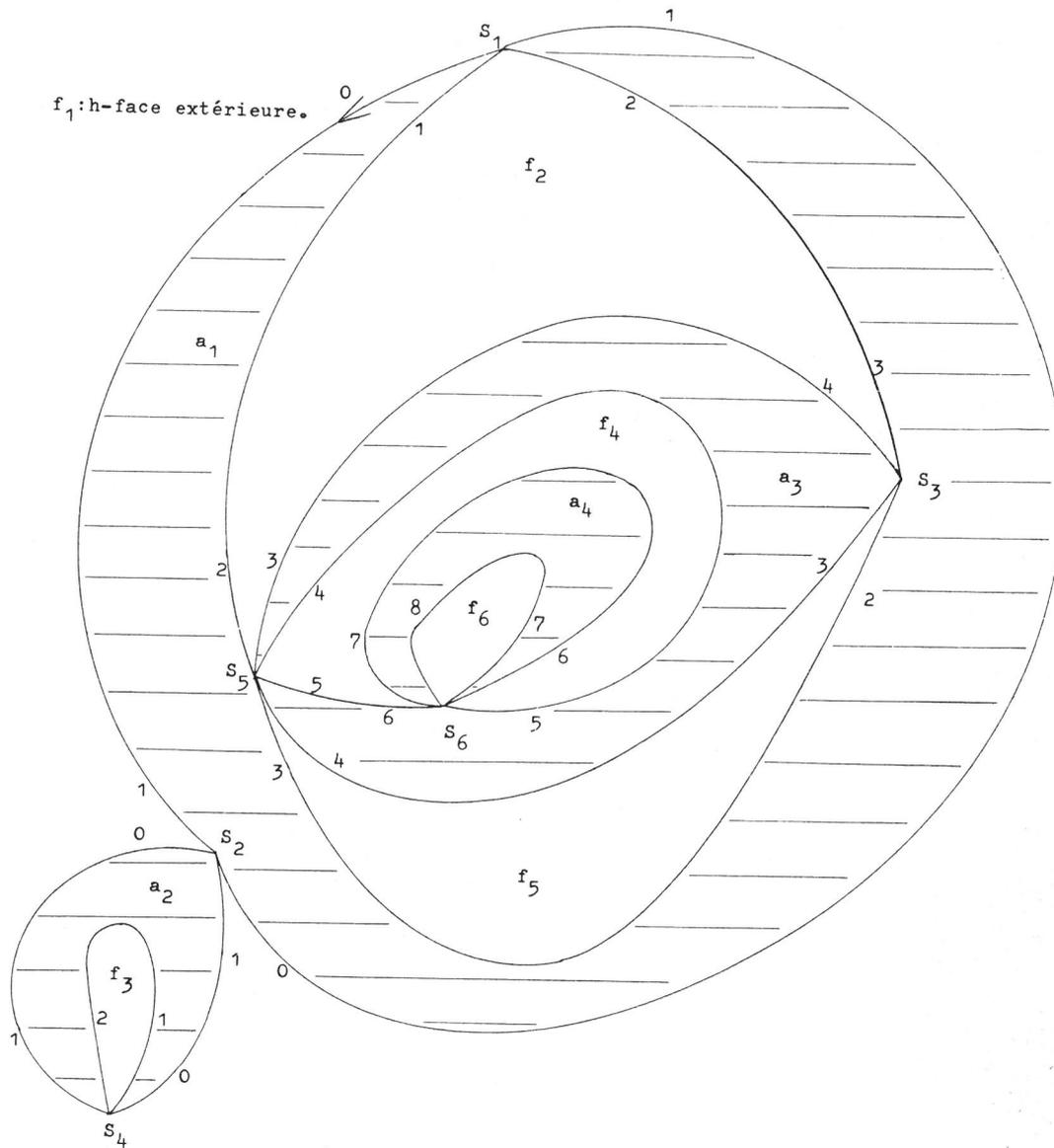
$$\begin{aligned} B_{6\mu+2} &= \tilde{\sigma}^*(\alpha B_{6\mu+1}) \setminus B_{6\mu} \\ B_{6\mu+3} &= \tilde{\sigma}^*(\alpha B_{6\mu+2}) \setminus B_{6\mu+1} \\ B_{6\mu+4} &= (\sigma^2)^*(\sigma B_{6\mu+3}) \setminus B_{6\mu+2} \\ B_{6\mu+5} &= \bar{\sigma}^*(\sigma B_{6\mu+4}) \setminus B_{6\mu+3} \\ B_{6(\mu+1)} &= \bar{\sigma}^*(\sigma B_{6\mu+5}) \setminus B_{6\mu+4} \\ B_{6(\mu+1)+1} &= (\sigma^2)^*(\sigma B_{6(\mu+1)}) \setminus B_{6\mu+5} \end{aligned}$$

et cela jusqu'à étiquetage de tous les brins de  $C(H)$ .

Dans l'exemple donné au (II.2.b.), on obtient l'étiquetage

$$\begin{aligned} B_0 &= \{1, 8, 9, 10\}, \quad B_1 = \{-3, -9, -1, -10, -8, -11\}, \quad B_2 = \{2, 11, 3, 7\} \\ B_3 &= \{-2, -7, -6, -4\}, \quad B_4 = \{4, 5, 6\}, \quad B_5 = \{-14, -5\}, \\ B_6 &= \{14, 12\}, \quad B_7 = \{-12, -13\}, \quad B_8 = \{13\}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi l'hypercarte  $C(H)$  où les chiffres donnent l'étiquetage des brins (la flèche indiquant le brin pointé).



### III.2. Définition de l'arbre très bien étiqueté

On associe à  $C(H) = (\sigma, \alpha)$  (et donc à  $H$ , hypercarte sur  $Z_m^+$ ), l'arbre très bien étiqueté  $(\hat{\sigma}, \alpha; \varepsilon)$  sur  $Z_m$  de la façon suivante

. Pour tout  $\mu \geq 0$ , on pose

$$\hat{\sigma}|_{B_{3\mu}} = \sigma^2|_{B_{3\mu}}, \quad \hat{\sigma}|_{B_{6\mu+1}} = \bar{\sigma}|_{B_{6\mu+1}}, \quad \hat{\sigma}|_{B_{6\mu+2}} = \bar{\bar{\sigma}}|_{B_{6\mu+2}},$$

$$\hat{\sigma}|_{B_{6\mu+4}} = \tilde{\sigma}|_{B_{6\mu+4}}, \quad \hat{\sigma}|_{B_{6\mu+5}} = \tilde{\tilde{\sigma}}|_{B_{6\mu+5}}$$

où l'on note  $\tilde{\sigma} = \alpha \circ \sigma$ .

- .  $\alpha(i) = -i$  pour tout  $i$  dans  $Z_m$
- . L'étiquetage  $\epsilon$  des brins est celui défini au (III.1.).

Dans notre exemple, on obtient

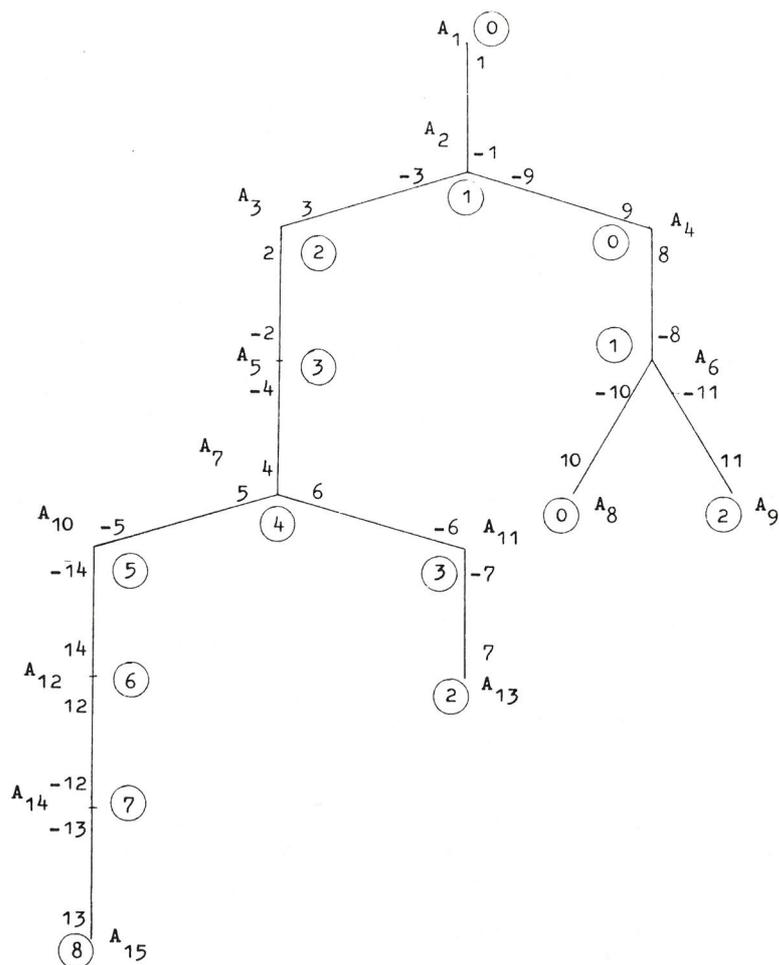
$$\hat{\sigma}|_{B_0} = (1)(8,9)(10), \quad \hat{\sigma}|_{B_1} = (-3,-9,-1)(-10,-11,-8)$$

$$\hat{\sigma}|_{B_2} = (3,2)(7)(11), \quad \hat{\sigma}|_{B_3} = (-6,-7)(-2,-4)$$

$$\hat{\sigma}|_{B_4} = (4,5,6) \quad , \quad \hat{\sigma}|_{B_5} = (-5,-14), \quad \hat{\sigma}|_{B_6} = (12,14)$$

$$\hat{\sigma}|_{B_7} = (-13,-12), \quad \hat{\sigma}|_{B_8} = (13).$$

Ce qui donne l'arbre très bien étiqueté, où les étiquettes des sommets sont données par les chiffres entourés d'un cercle et où les sommets sont notés  $A_1$  à  $A_{15}$



### III.3. Théorème fondamental :

Les propriétés de la construction précédente sont données par le

Théorème 3 - L'application définie ci-dessus est une bijection de l'ensemble des hypercartes planaires  $(p, a)$ , sur  $Z_m^+$ , sur l'ensemble des arbres très bien étiquetés  $(\hat{\sigma}, \alpha, \epsilon)$  tels que  $\hat{\sigma}$  sature  $Z_m^+$  et  $Z_m^-$ . Les sommets (resp. les h-arêtes, les h-faces différentes de la h-face extérieure) de l'hypercarte sont bijectivement associés aux sommets de l'arbre dont l'étiquette est congrue à 0 (resp. 1, 2) modulo 3.

Par passage au quotient, on définit une bijection de l'ensemble des hypercartes planaires pointées sur l'ensemble des arbres très bien étiquetés pointés.

Démonstration - Se reporter à [4].

Remarques - 1. Dans l'exemple traité, l'association entre sommets de l'arbre et cellules (sommets, h-faces, h-arêtes) de l'hypercarte est la suivante (cf figures pages 52 et 53 pour les notations.):

Les sommets de l'arbre  $A_1, A_4, A_5, A_8, A_{11}, A_{12}$ , étiquetés 0 modulo 3, sont associés aux sommets  $S_1$  à  $S_6$  de l'hypercarte.

Les sommets de l'arbre  $A_2, A_6, A_7, A_{14}$ , étiquetés 1 modulo 3, sont associés aux h-arêtes  $a_1$  à  $a_4$  de l'hypercarte.

Les sommets de l'arbre  $A_3, A_9, A_{10}, A_{13}, A_{15}$ , étiquetés 2 modulo 3, sont associés aux h-faces  $f_2$  à  $f_6$  de l'hypercarte.

2. La symétrie complète existant entre les notions de sommet, h-arête et h-face d'une hypercarte planaire se traduit bien, par cette bijection sur l'étiquetage des sommets de l'arbre. On va utiliser ce résultat de façon essentielle au paragraphe IV.

### IV. Application des fractions multicontinues à l'obtention de relations fonctionnelles

Nous montrons ici comment le calcul formel sur la notion de fraction multicontinue (cf. [4] et [5]) permet d'obtenir des relations fonctionnelles sur les arbres très bien étiquetés pointés, et donc sur les hypercartes planaires pointées, ainsi que l'interprétation combinatoire de certaines séries paramètres introduites au premier exposé.

#### IV.1. Un développement en fraction multicontinue

. Pour  $i$  dans  $\mathbb{N}$ , on appelle arbre  $i$ -très bien étiqueté pointé, un arbre étiqueté pointé (cf. I.4.), dont la racine (sommet pointé de l'arbre) est étiquetée  $i$ , deux sommets adjacents ayant des étiquettes différant d'une unité. Les arbres 0-très bien étiquetés pointés sont les arbres très bien étiquetés des parties I à III.

. La hauteur d'un sommet d'un arbre enraciné est le nombre d'arêtes de l'unique chemin joignant la racine à ce sommet. La hauteur d'un arbre enraciné est le maximum des hauteurs de ses sommets.

. Notons  $B_{i,m;(n_j)_{j \geq 0}}^{\leq h}$  le nombre d'arbres  $i$ -très bien étiquetés pointés de hauteur inférieure ou égale à  $h$ , ayant  $m$  brins étiquetés 0 et ayant  $n_j$ ,  $j$  dans  $\mathbb{N}$ , sommets d'étiquette  $j$ , pour  $h, m, n_j$ , ( $j$  dans  $\mathbb{N}$ ), entiers donnés. Il est clair que les entiers  $n_j$  sont nécessairement nuls pour tout  $j$  n'appartenant pas à  $[\max(0, i-h), i+h]$ .  
Notons  $B_i^{\leq h}(u, (z_j)_{j \geq 0})$  la série génératrice correspondante, c'est-à-dire :

$$B_i^{\leq h}(u, (z_j)_{j \geq 0}) = \sum_{m \geq 0, n_0 \geq 0, n_1 \geq 0, \dots} B_{i,m;(n_j)_{j \geq 0}}^{\leq h} u^m z_0^{n_0} z_1^{n_1} \dots$$

et  $B_i = B_i(u, (z_j)_{j \geq 0})$ , la série génératrice des arbres  $i$ -très bien étiquetés sans restriction de hauteur. Nous allons étendre un raisonnement très classique sur les arbres pour obtenir une expression de la série  $B_i^{\leq h}$ .

Considérons les arbres  $i$ -très bien étiquetés de hauteur inférieure ou égale à  $h > 0$  donné et ayant  $k$  fils,  $k$  donné. Un tel arbre est, à sa racine près, un  $k$ -uplet d'arbres de hauteur inférieure ou égale à  $h-1$  et ces arbres sont soit  $(i-1)$ , soit  $(i+1)$ -très bien étiquetés (sauf si  $i = 0$ , auquel cas ils sont 1-très bien étiquetés). La série génératrice de ces arbres s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \text{si } i = 0 : & \quad z_0 (u B_1^{\leq h-1})^k \\ \text{si } i = 1 : & \quad z_1 (u B_0^{\leq h-1} + B_2^{\leq h-1})^k \\ \text{si } i \geq 2 : & \quad z_i (B_{i-1}^{\leq h-1} + B_{i+1}^{\leq h-1})^k \end{aligned}$$

En sommant sur  $k \geq 0$ , on obtient donc :

$$B_0^{\leq h} = \frac{z_0}{1 - u B_1^{\leq h-1}}, \quad B_1^{\leq h} = \frac{z_1}{1 - u B_0^{\leq h-1} - B_2^{\leq h-1}}$$

pour  $i \geq 2$ ,

$$B_i^{\leq h} = \frac{z_i}{1 - B_{i-1}^{\leq h-1} - B_{i+1}^{\leq h-1}}$$

avec  $B_i^{\leq -1} = 0$  pour tout  $i \geq 0$ .

En éliminant la condition sur la hauteur ( $h = +\infty$ ), on obtient pour les séries  $B_i$ ,  $i \geq 0$ , le système d'équations :

$$(S) \begin{cases} B_0 = \frac{z_0}{1 - u B_1}, & B_1 = \frac{z_1}{1 - u B_0 - B_2} \\ \text{pour } i \geq 2, & B_i = \frac{z_i}{1 - B_{i-1} - B_{i+1}} \end{cases}$$

Définition - On appelle fraction multicontinue associée à la famille des arbres (0-)très bien étiquetés, la fraction développant  $B_0 = B_0(u, (z_j)_{j \geq 0})$  par itération à partir des équations (S) précédentes, c'est-à-dire la fraction

$$(1) \quad B_0 = \frac{z_0}{1 - \frac{u z_1}{1 - \frac{u z_0}{1 - \frac{u z_1}{1 - \dots}} - \frac{z_2}{1 - \frac{z_1}{1 - \dots} - \frac{z_3}{1 - \dots}}}}$$

Si l'on ne garde que les  $h+1$  premiers niveaux de cette fraction multicontinue, on obtient  $B_0^{\leq h}$  appelée réduite d'ordre  $h$  de  $B_0$ .  
On définit de même la fraction multicontinue associée à  $B_i$ ,  $i \geq 0$ .

#### IV.2. Relations fonctionnelles sur les arbres très bien étiquetés pointés

On donne dans ce paragraphe deux relations fonctionnelles dont  $B_0$ , série génératrice des arbres très bien étiquetés pointés, est solution. On les obtient par des techniques de calcul formel sur les fractions multicontinues généralisant celles bien connues sur les fractions continues.

##### IV.2.a. Première relation fonctionnelle

Théorème 4 La série génératrice  $B_0 = B_0(u, (z_j)_{j \geq 0})$  des arbres très bien étiquetés pointés est solution de l'équation fonctionnelle :

$$(2) \quad B_0 = \frac{z_0}{1 - \frac{u}{1-uB_0} B_0 \left[ \frac{1}{1-uB_0}, (z_{j+1})_{j \geq 0} \right]}$$

dans laquelle on note  $B_0$  pour  $B_0(u, (z_j)_{j \geq 0})$  et  $(z_{j+1})_{j \geq 0}$  signifie que l'on a substitué  $z_{j+1}$  à  $z_j$  pour tout  $j$  dans  $\mathbb{N}$ .

##### Démonstration

Etant donnée la première équation du système (S) (cf. IV.1.), il suffit de montrer l'égalité :

$$(2') \quad B_1 = B_1(u, (z_j)_{j \geq 0}) = \frac{1}{1-uB_0} B_0 \left[ \frac{1}{1-uB_0}, (z_{j+1})_{j \geq 0} \right]$$



Alors, pour tout  $i$  dans  $\mathbb{Z}$ , on a (comme au (IV,1))

$$(3) \quad C_i = \frac{z_i}{1 - C_{i-1} - C_{i+1}}$$

On a le

Théorème 5  $C_0, C_{-1}$  et  $B_0$  sont liés par la relation fonctionnelle, où l'on note  $C_i$  pour  $C_i((z_j)_{j \in \mathbb{Z}})$

$$(4) \quad C_0 = \frac{1}{1 - C_{-1}} B_0 \left[ \frac{1}{1 - C_{-1}}, (z_j)_{j \geq 0} \right]$$

Démonstration - Elle est analogue à celle du théorème 4.

On transforme la fraction multicontinue associée à  $C_0$ , obtenue par itération à partir du système d'équations (3), en multipliant par  $(1 - C_{-1})^{-1}$  le numérateur et le dénominateur de tous les rapports de fractions :

$$\frac{z_0}{1 - C_{-1} - \frac{z_1}{1 - \dots}} \text{ qui y apparaissent.}$$

Le résultat est alors immédiat.

#### IV.2.c. Application à l'étude des hypercartes planaires pointées

Rappelons les notations introduites au premier exposé.

A chaque hypercarte plane pointée contenant au moins un brin (traduction de la condition  $m \geq 1$  pour  $Z_m$  dans la définition combinatoire d'une hypercarte), on associe un monôme en les variables  $u, s, f$  et  $a$ .

L'exposant de  $u$  donne le  $h$ -degré de la  $h$ -face extérieure, l'exposant de  $s$  donne le nombre de sommets de l'hypercarte différents du sommet pointé, l'exposant de  $f$  donne le nombre de  $h$ -faces autres que la  $h$ -face extérieure, l'exposant de  $a$  donne le nombre de  $h$ -arêtes.

On note alors  $J(u, s, f, a)$  la série génératrice du nombre des hypercartes planaires pointées contenant au moins un brin.

Soit  $\phi$  le morphisme qui applique  $z_j, j \in \mathbb{Z}$ , sur  $s$  (resp.  $a, f$ ) si  $j$  est congru à 0 (resp. 1, 2) modulo 3.

On déduit facilement du théorème 3 (cf. III, 3.) que :

$$\phi (B_0(u, (z_j)_{j \in \mathbb{N}})) = s(1+J(u, s, f, a)) .$$

Posons

$$D_i = D_i(s, f, a) = \phi \circ C_i((z_j)_{j \in \mathbb{Z}}), \quad i \in \mathbb{Z}.$$

On déduit alors des théorèmes 4 et 5 la

Proposition 1 La série génératrice  $J = J(u, s, f, a)$  des hypercartes planaires pointées contenant au moins un brin satisfait aux équations fonctionnelles (dans lesquelles on note  $J$  pour  $J(u, s, f, a)$ ).

$$(5) \quad J(u, s, f, a) = \frac{ua(1+J)}{1 - us(1+J)} \left[ 1 + J\left(\frac{1}{1-us(1+J)}, a, s, f\right) \right]$$

$$(6) \quad D_0(s, f, a) = \frac{1}{1 - D_0(f, a, s)} s \left[ 1 + J\left(\frac{1}{1 - D_0(f, a, s)}, s, f, a\right) \right]$$

où  $D_0$  satisfait à l'équation

$$(7) \quad D_0(s, f, a) = \frac{s}{1 - D_0(f, a, s) - D_0(a, s, f)}$$

Démonstration - Les équations (5), (6), (7) se déduisent respectivement des équations (2), (4) et (3) par application du morphisme  $\phi$ . (Remarquer que  $D_{-1}(s, f, a) = D_0(f, a, s)$  et  $D_1(s, f, a) = D_0(a, s, f)$ ).

#### Remarques

1. L'équation (5) de la proposition 1 ci-dessus est identique à l'équation (5) du théorème 5, paragraphe (IV.3.) de l'exposé 1. Il suffit en effet de remarquer que

$$sfK(v, s, f, a) = asJ(v, a, s, f) \quad (\text{admis}).$$

2 Les séries paramètres  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  intervenant au théorème 6, paragraphe (IV,3) de l'exposé 1 sont respectivement égales à  $D_0(s,f,a)$ ,  $D_0(f,a,s)$  et  $D_0(a,s,f)$  et décomptent donc des familles d'arbres étiquetés (C'est une conséquence des équations (6), (7), proposition 1).

3. La série génératrice  $J(u,s,f,a)$  est unique solution de l'équation (5). Le problème de la résolution directe de ce type d'équations est ouvert. Au premier exposé, cette résolution permettant la détermination de la série génératrice  $J(1,s,f,a)$  utilise une équation supplémentaire, analogue à celle de W.T. Tutte pour les cartes planaires pointées.

4. Des résultats analogues à ceux obtenus dans ce paragraphe IV peuvent être obtenus en appliquant les techniques associées aux fractions multicontinues aux arbres bien étiquetés. On retrouve ainsi les résultats sur les cartes planaires pointées obtenus au premier exposé.

## Bibliographie

- [1] D. Arquès, "Les hypercartes planaires sont des arbres très bien étiquetés", Mai 1984, Rapport de Recherche U.H.A. n° 18.
- [2] D. Arquès, "Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes planaires pointées", Septembre 1984, Rapport de Recherche U.H.A. n° 19.
- [3] D. Arquès, "Relations fonctionnelles et dénombrement des hypercartes planaires pointées", Novembre 1984, Rapport de Recherche U.H.A. n° 22.
- [4] D. Arquès, "Une nouvelle bijection entre hypercartes planaires et arbres très bien étiquetés. Calcul formel sur les fractions multicontinues", Décembre 1984, Rapport de Recherche U.H.A. n° 24.
- [5] D. Arquès et J. Françon, "Arbres bien étiquetés et fractions multicontinues", 9ième Colloque international sur les arbres en algèbre et programmation ; Mars 1984, Cambridge, University Press.
- [6] R. Cori, "Sur la rationalité de certaines séries génératrices", *Discrete Mathematics* 3 (1972), 215-31.
- [7] R. Cori, "Un code pour les graphes planaires et ses applications", *Astérisque*, Société Math. de France 27 (1975).
- [8] R. Cori et J. Hardouin-Duparc, "Manipulation des cartes planaires à partir de leur codage", Journées de combinatoire et informatique, Bordeaux, Juin 1975.
- [9] R. Cori et J. Richard, "Enumération des graphes planaires à l'aide des séries formelles en variables non commutatives", *Discrete Math.* 2 (1972), 115-162.
- [10] R. Cori et B. Vauquelin, "Planar maps are well labeled trees", *Can. J. Math.*, Vol. XXXIII, n° 5, 1981, pp. 1023-1042.

- [11] J. Edmonds, "A combinatorial representation for polyhedral surfaces", Notices Amer. Math. Soc. 7 (1960) 646.
- [12] H. de Fraysseix et P. Rosenstiehl, "Structures combinatoires pour des tracés automatiques de réseaux", Actes de la 3<sup>è</sup> Conférence Européenne sur la C.F.A.O. et l'Infographie, MICAD'84, Volume 1.
- [13] I.J. Good, "Generalizations to several variables of Lagrange's expansion, with applications to stochastic processes", 1960, Proc. Cambridge Philos. Soc., 56, 367-380.
- [14] D.H. Greene, "Efficient coding and Drawing of Planar Graphs" Preprint, Xerox Palo Alto Research Center.
- [15] A.B. Lehman, "A bijective census of rooted planar maps", communication at Ontario Math. Conference (1970) unpublished.
- [16] W.T. Tutte, "A census of slicings", Can. J. Math. 14 (1962), 708-722.
- [17] W.T. Tutte, "A census of planar maps", Can. J. Math. 15 (1963), 249-271.
- [18] W.T. Tutte, "On the enumeration of planar maps", Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), 64-74.
- [19] T.R.S. Walsh, "Hypermappings versus bipartite maps, J. Combinatorial Theory 18 (B) (1975) 155-163.
- [20] T.R.S. Walsh et A.B. Lehman, "Counting Rooted Maps by Genus. I", Journal of combinatorial Theory (B), 13, 192-218 (1972).
- [21] T.R.S. Walsh et A.B. Lehman, "Counting Rooted Maps by Genus. II", Journal of combinatorial Theory (B) 13, 122-141 (1972).
- [22] T.R.S. Walsh et A.B. Lehman, "Counting Rooted Maps by Genus. III Nonseparable Maps", Journal of Combinatorial Theory (B), 18, 222-259 (1975).

D.A.  
 Institut des Sciences Exactes et  
 Appliquées  
 4, rue des Frères Lumière  
 68093 MULHOUSE - Cédex  
 France