Endliche $\{0,1\}$-Sequenzen mit partieller Translations-Invarianz

von Andreas W.M. Dress und A. Flammenkamp, Bielefeld

Für $n \in \mathbb{N}$ sei wie üblich $\underline{n} = \{0,1,2,\dots,n-1\}$. Sei $\varepsilon = (\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1}) \in \{0,1\}^{\underline{n}}$ eine $\{0,1\}$-Folge der Länge n. Für $0 \leq j \leq n$ sei $\alpha_j(\varepsilon) = (\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1}) \in \{0,1\}^{\underline{j}}$ das Anfangsstück der Länge j von ε und $\omega_j(\varepsilon) = (\varepsilon_{n-j},\dots,\varepsilon_{n-1}) \in \{0,1\}^{\underline{j}}$ das Endstück der Länge j von ε.

Definition 1: Mit obigen Bezeichnungen sei

$$J(\varepsilon) := \left\{ j \in \{0,\dots,n\} \mid \alpha_j(\varepsilon) = \omega_j(\varepsilon) \right\}.$$

Bemerkung: Es gilt stets $0,n \in J(\varepsilon)$.

Definition 2: Für eine endliche Teilmenge K von $\mathbb{N}$ sei

$$A_K(n) := \left\{ \varepsilon \in \{0,1\}^{\underline{n}} \mid J(\varepsilon) = K \cup \{0,n\} \right\}$$

und

$$a_K(n) := \# A_K(n).$$

Im folgenden geht es i.W. um den Beweis der folgenden, auf Grund ausführlicher Computer-Rechnungen aufgestellten Vermutung:

Für eine endliche Teilmenge $K \subseteq \mathbb{N}$ mit $0 \in K$ und für $i \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots\}$ sei

$$\varphi_K(i) := \begin{cases} 0 & \text{für } 2i,\ 2i-1 \notin K \\ 2 & \text{für } 2i \in K,\ 2i-1 \notin K \\ -1 & \text{für } 2i \notin K,\ 2i-1 \in K \\ 1 & \text{für } 2i,\ 2i-1 \in K \end{cases}.$$

Dann gilt für $n \geq 2 \cdot \max(K)$ die Rekursionsformel:

$$a_K(n+1) = 2a_K(n) + \sum_{\substack{i \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\} \\ 2i \equiv n(2)}} \varphi_K(i)\, a_K\!\left(\frac{n}{2} + i\right)$$

Bemerkung: Für $K = \emptyset$ findet sich diese Formel bereits in der Habilitationsschrift von Harborth. Zum Beweis dieser Vermutung haben wir zunächst den folgenden Ansatz versucht:

Für endliches $K \subseteq \mathbb{N}$ sei

$$B_K(n) := \left\{\varepsilon \in \{0,1\}^{\underline{n}} \mid J(\varepsilon) \supseteq K\right\}$$

und

$$b_K(n) := \# B_K(n).$$

Dann gilt offenbar

$$b_K(n) = \sum_{K \subseteq J \subseteq \{0,\ldots,n\}} a_J(n)$$

und folglich

$$a_K(n) = \sum_{K \subseteq J \subseteq \{0,\ldots,n\}} (-1)^{\# J/K} b_J(n),$$

wobei für $b_K(n)$ die folgenden einfachen Rekursionsformeln gelten:

$$b_K(n+1) = \begin{cases} 2b_K(n) & \text{falls} \quad n \geq 2\cdot\max(K) \\ b_{K\cup\{2\max(K)-n-1\}}(\max(K)) & \text{falls} \quad \max(K) \leq n < 2\cdot\max(K) \\ b_{K\setminus\{n+1\}}(n+1) & \text{falls} \quad n+1 = \max(K) \\ 0 & \text{falls} \quad n+1 < \max(K)\,. \end{cases}$$

Der Versuch, hieraus Rekursionsformeln für $a_K(n)$ zu gewinnen, führt zu der auch für sich interessanten Frage, für welche K die Menge $A_K(n)$ zumindest nicht leer ist. Hier könnten wir zeigen:

<u>Satz 1:</u> Sei $K \subseteq \mathbb{N}$ endlich, sei $k = \max(K)$ und sei $k' = \max(K\setminus\{k'\})$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $a_K(n) \neq 0$;

(ii) $a_K(k) \neq 0$;

(iii) $a_K(n) \neq 0$ für alle n mit $n \geq 2k$;

(iv) $\# K \leq 1$ oder $a_{K\setminus\{k\}}(k') \neq 0$ und entweder $k > 2k'$ oder $2k' - k \in K \cup \{0\}$ und $k' - d \notin K$ für alle echten Teiler d von $k - k'$;

(v) K genügt der folgenden Bedingung

(1) $a,b,c \in K;\ a,b \leq c \leq a+b+(c-a,c-b) \Rightarrow c - r\cdot(c-a,c-b) \in K$ für alle $r \in \mathbb{N}$ mit $c - r\cdot(c-a,c-b) > 0$.

Bemerkung: Die Bedingung (1) ist offenbar zu den folgenden zwei Bedingungen äquivalent:

$$(1') \quad a,b,c \in K; \quad a,b \leq c \leq a+b+(c-a,c-b) \Rightarrow c-(c-a,c-b) \in K;$$

$$(1'') \quad a,b,c \in K; \quad a,b \leq c < a+b \Rightarrow a+b-c \in K.$$

Zum Beweis von Satz 1:

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" ist trivial.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" und „(iv) $\Rightarrow$ (ii)" wird durch einfache induktive Konstruktion geeigneter Folgen aus Folgen kürzerer Länge bewiesen.

„(ii) $\Rightarrow$ (v)" wird durch Analyse von Repetitionsbedingungen gezeigt.

„(v) $\Rightarrow$ (ii)" wird vermittels „(iv) $\Rightarrow$ (ii)" durch Induktion nach k gezeigt.

Korollar 1: Aus $a_{K_1}(n) \neq 0$ und $a_{K_2}(n) \neq 0$ folgt $a_{K_1 \cap K_2}(n) \neq 0$.

Korollar 2: Für jedes endliche $K \subseteq \mathbb{N}$ gibt es ein eindeutig bestimmtes kleinstes $\overline{K} \supseteq K$, für welches $a_{\overline{K}}(n)$ nicht immer 0 ist.

Korollar 3: Nennt man eine Menge K zulässig, wenn sie die Bedingungen von Satz 1 erfüllt, so läßt sich jede zulässige Menge, von $K = \emptyset$ oder $K = \{0\}$ ausgehend, dadurch rekursiv gewinnen, daß man schrittweise zu einer zulässigen Menge K mit $k = \max(K)$ ein Element der Form $k+r$ adjungiert mit $r > k$ oder $k-r \leq K \cup \{0\}$ und $k-d \notin K$ für alle echten Teiler d von k.

So befriedigend die durch Satz 1 erreichte Klärung unseres Problems war, so erlaubte sie dennoch (bis jetzt) nicht den erwünschten Beweis unserer vermuteten Rekursionsformeln für $a_K(n)$ mittels Möbius-Inversion aus den Formeln für $b_K(n)$. Als ein interessantes offenes Problem möchte ich z.B. die Frage nach der Möbius-Formel für den Verband der zulässigen Mengen stellen.

Stattdessen führte schließlich ein anderer Gedanke ganz einfach zum Ziel, der darauf beruht, die Mengen

$$E_K(n) := \left\{ \varepsilon \in \{0,1\}^{\underline{n}} \;\middle|\; K \cup \{0\} = \{j \in J(\varepsilon) \mid 2j \leq n\} \right\}$$

und deren Mächtigkeiten

$$e_K(n) := \# E_K(n)$$

in Betracht zu ziehen.

Für diese gilt nämlich, wie man leicht verifiziert, der folgende

Satz 2: (i) Für $n \geq \max(K)$ gilt

$$e_K(2n+1) = 2\, e_K(2n)$$

und

$$e_K(2n+2) + a_K(n+1) = 2\, e_K(2n+1);$$

(ii) für $n \geq 2\max(K)$ gilt

$$e_K(n) = a_K(n) + \sum_{\substack{n < 2j < 2n \\ 2j-n \in K}} a_K(j).$$

Es ist nun ein leichtes, aus Satz 2 durch einfaches Umrechnen die erwünschten Rekursionsformeln für $a_K(n)$ zu gewinnen. Der zum Beweis von Satz 2 benötigte Trick besteht in der Betrachtung der Abbildungen

$$\{0,1\}^{\underline{2n+1}} \longrightarrow \{0,1\}^{\underline{2n}} : (\varepsilon_o,\ldots,\varepsilon_{2n}) \longmapsto (\varepsilon_o,\ldots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_{n+1},\ldots,\varepsilon_{2n})$$

and - analog -

$$\{0,1\}^{\underline{2n+2}} \longrightarrow \{0,1\}^{\underline{2n+1}} : (\varepsilon_o,\ldots,\varepsilon_{2n+1}) \longmapsto (\varepsilon_o,\ldots,\varepsilon_{n-1},\varepsilon_{n+1},\ldots,\varepsilon_{2n+1}).$$

Um mit seiner Hilfe die $a_K(n)$ ausrechnen zu können, brauchen wir jedoch noch die Werte von $a_K(n)$ für $n < 2\cdot\max(K)$. Hier gilt jedoch - in Präzisierung von Satz 1 - mit $k = \max(K)$

Satz 3: Für $n \leq 2k$ gilt die Rekursionsformel

$$a_K(n) = \begin{cases} a_{K\setminus\{k\}}(k) & \text{für } 2k-n \in K \text{ und } k-d \notin K \text{ für alle echten Teiler } d \text{ von } n-k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Bemerkungen:

(1) Die obige Rekursionsformel führt zu interessanten Funktionalgleichungen und zu bemerkenswertem Polverhalten der durch $f_K(z) = \Sigma\, a_K(n)\, z^n$ definierten meromorphen Funktion.

(2) Es scheint eine wesentlich schwierigere Frage zu sein, entsprechendes für "Doppelfolgen" $\varepsilon \in \{0,1\}^{\underline{n} \times \underline{m}}$ herzuleiten, für welche man statt der Menge $J(\varepsilon)$ wohl besser etwa die Menge

$$I(\varepsilon) := \Big\{(a,b) \in \{0,\pm 1,\ldots,\pm n\} \times \{0,\pm 1,\ldots,\pm m\} \;\Big|\; \varepsilon(i,j) = \varepsilon(i+a,j+b) \text{ für alle } (i,j) \in \underline{n} \times \underline{m} \text{ mit } (i+a,j+b) \in \underline{n} \times \underline{m}\Big\}$$

betrachten sollte.

(3) Trivial dagegen ist die Verallgemeinerung auf Alphabete mit mehr als zwei Elementen.