Kombinatorische Probleme aus der Darstellungstheorie der $Gl_m(k)$

von

Johannes Grabmeier

Für einen Körper mit unendlich vielen Elementen stehen die irreduziblen, polynomialen Darstellungen der $Gl_m(k)$ [siehe G], die homogen vom Grad n sind, in Bijektion zu den Partitionen μ von n in höchstens m Teile. Die Bijektion kann man durch Zuordnung einer symmetrischen Funktion $s_{\mu,p}$ in m Unbestimmten, homogen vom Grad n, die nur noch von char $k = p$ abhängt, erhalten [G, Th. 3.5.6]. Das lexikographisch größte Monom in $s_{\mu,p}$ ist $X_1^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot X_m^{\mu_m}$, wir erhalten also für jedes p eine $\mathbb{Z}$-Basis des entsprechenden Raums der symmetrischen Funktion und können also

$$s_{\mu,p} = \sum_{\lambda < \mu} k^p_{\lambda\mu} m_\lambda \text{ mit } k^p_{\lambda\mu} \in \mathbb{Z},\ k^p_{\mu\mu} = 1 \text{ schreiben.}$$

(m_λ die monomialen symmetrischen Funktionen [vgl. M]). Unser Ziel ist es Aussagen über $k^p_{\lambda\mu}$ zu machen und Bezüge zwischen den Fällen char $k = p$ (Primzahl) und char $k = 0$ herzustellen.

Man kann zeigen [siehe z.B. Gr], daß die Isomorphieklassen der unzerlegbaren, direkten Summanden des n-fachen Tensorraums $E_m^{\otimes n}$

eines m-dimensionalen k-Vektorraums als kS_n-Rechtsmodul (Platzvertauschungen!) durch die gleiche Menge von Partitionen indiziert werden kann: $P_{\mu,k}$. Wenn wir den Modul, der durch Induktion des trivialen Darstellungsmoduls einer Young-Untergruppe S_λ von S_n entsteht, mit $Y_{\lambda,k}$ bezeichnen und mit $[P_{\mu,k}|Y_{\lambda,k}]$ die Vielfachheit mit der $P_{\mu,k}$ in einer direkten Zerlegung von $Y_{\lambda,k}$ vorkommt, so erhalten wir den

Satz
$k^p_{\lambda\mu} = [P_{\mu,k}|Y_{\lambda,k}]$ $(\in \mathbb{N})$, falls char $k=p$ (Primzahl oder 0).

In char $k=0$ sind die $P_{\mu,k}$ die einfachen kS_n-Moduln, es gilt $k^0_{\lambda\mu} = \langle\xi^\lambda,\zeta^\mu\rangle = |ST^\mu(\lambda)|$, die Anzahl der standard μ-Tableaux mit Inhalt λ [Young's rule J/K 2.8.5]. $S_{\lambda,0}$ sind also die üblichen Schurfunktionen, $k^0_{\lambda\mu}$ die üblichen Kostkazahlen [M, I.6]. Die auf der Hand liegende Frage nach kombinatorischen Objekten, die von den "p-Kostkazahlen" $k^p_{\lambda\mu}$ (p ab jetzt Primzahl) abgezählt werden, scheint sehr schwer beantwortbar zu sein. Leicht hingegen sieht man den folgenden Satz:

Satz

i) $k^p_{\lambda\mu} \leq k^0_{\lambda\mu}$ ii) $k^p_{\lambda\mu} \neq 0 \Rightarrow \lambda \trianglelefteq \mu$.

Eine Abschätzung nach unten ergibt sich aus der $\mathfrak{Y}$-Vertextheorie, die in [Gr] entwickelt wird und in der etwa bei der S_n den unzerlegbaren kS_n-Moduln nicht p-Untergruppen, sondern Young-Untergruppen, deren Teile alle p-Potenzordnung haben, als Vertices zugeordnet werden.

Satz

$\forall \mu \vdash n \;\; \exists\, \mathrm{vtx}\,\mu \vdash n$: $k^p_{\lambda\mu} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{vtx}\,\mu \leq_{S_n} \lambda$.

Dabei ist $\rho = (\rho_1,\dots,\rho_n) \leq_{S_n} \lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n) :\iff$

$\forall 1 \leq i \leq n \ \exists\, T_i \subseteq \underline{n}: \ \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}} T_i = \underline{n}$ und $\sum\limits_{j\in T_i} \rho_j = \lambda_i$ (Verfeinerung!)

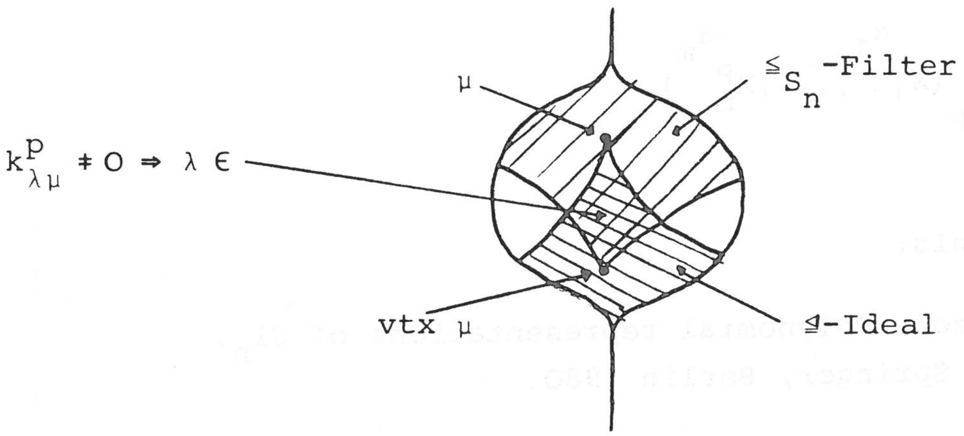
eine Halbordnung mit $\rho \leq_{S_n} \lambda \Rightarrow \rho \trianglelefteq \lambda$.

Zur Berechnung von vtx μ benötigen wir die - eindeutig bestimmte - p-adische Zerlegung $\mu = \sum\limits_{i\geq 0} p^{\alpha_i}\mu^{(i)}$ einer Partition, $\mu^{(i)} \vdash \beta_i \neq 0$ ist p-spaltenreguläre Partition, die Addition von Partitionen erfolgt als Elemente von $\mathbb{N}^n$, $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_s \geq 0$.

Satz

$$\text{vtx}\ \mu = (\underbrace{p^{\alpha_1},\dots,p^{\alpha_1}}_{\beta_1},\ \underbrace{p^{\alpha_2},\dots,p^{\alpha_2}}_{\beta_2},\ \dots\ ,\ \underbrace{p^{\alpha_s},\dots,p^{\alpha_s}}_{\beta_s})$$

Zusammenfassend ergibt sich folgendes Bild:



Die Berechnung der p-spaltensingulären Spalten von $(k^p_{\lambda\mu})$ kann durch folgenden Satz geschehen:

Satz [K, Cor. 9.2]
Es sei μ eine p-spaltensinguläre Partition, dann gilt:
$k^p_{\lambda\mu} = \sum_D \prod_{D_j} k^p_{D_j,\mu^{(j)}}$ für alle Partitionen λ. Die

Summation geht über alle Matrizen D mit Spalten

$$D_j = \begin{pmatrix} d_{1j} \\ \vdots \\ d_{nj} \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^n \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} d_{ij} = \beta_j, \sum_{j=1}^{s} p^{\alpha_j} d_{ij} = \lambda_i,$$

die Multiplikation über alle Spalten D_j, aus denen man durch Transponieren und Umordnen eine Partition gemacht hat.

Aus diesem Satz kann man das Steinberg Tensorprodukt Theorem für die $Gl_m(k)$ ableiten [siehe Gr], für die "p-Schurfunktionen" $s_{\mu,p}$ bedeutet dies

Folgerung
$$s_{\mu,p} = \prod_{j=1}^{s} s_{\mu^{(j)},p}(X_1^{p^{\alpha_1}},\ldots,X_m^{p^{\alpha_m}}).$$

Literaturverzeichnis:

[G] J. A. Green: Polynomial representations of Gl_n. SLN 830, Springer, Berlin 1980.

[Gr] J. Grabmeier: Unzerlegbare Moduln und Vertices in durchschnitts- und konjugationsstabilen Systemen von Untergruppen, in Vorbereitung.

[K] A. A. Klyachko: Direct summands of permutation modules, Sel. Math. Sovetica Vol. 3, No. 1, 1983/84, 45-55.

[J/K] G. James, A. Kerber: The representation theory of symmetric groups, Encyc. of Math. and its appl. 16, Cambridge University Press.

[M] I. G. Macdonald: Symmetric functions and Hall polynomials, Clarendon Press, Oxford 1979.