ARBRES D'ANDRÉ, NOMBRES DE CARLITZ ET D'ENTRINGER

Yves POUPARD

Notre propos est de compléter l'étude de l'un des complexes d'André introduits par D. FOATA et M.P. SCHÜTZENBERGER dans [1], à savoir celui des arbres d'André, et notamment de montrer comment retrouver assez simplement l'un des résultats établis au moyen d'un procédé ingénieux mais relativement compliqué par Christiane POUPARD dans [2].

Nous revenons ainsi, pour les développer, sur les justifications des propositions (3-0), (3-2) et surtout (3-4) de notre précédent exposé [3] dont le présent exposé constitue un prolongement.

En [3], nous avons appelé "arbre hiérarchique" construit sur l'ensemble de sommets $\{0,1,\ldots,n\}$ le graphe de toute application τ de $[1;n]$ vers $[0;n-1]$ telle que pour tout entier λ de 1 à n on ait $\tau(\lambda) \leqslant \lambda-1$, et nous avons convenu de désigner par $\mathcal{T}_n$ l'ensemble de ces arbres.

A tout arbre de $\mathcal{T}_n$ nous avons associé son type, à savoir la suite $R = (r_0,r_1,\ldots,r_n)$ où, pour tout λ de 0 à n, r_λ est le nombre des antécédents du sommet λ de cet arbre ($\Rightarrow$ $r_n = 0$).

Nous avons constaté que cette suite appartient à l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des suites de Catalan d'ordre n, caractérisées par les conditions :

$$\begin{cases} r_\lambda \in \mathbb{N} & \text{pour tout } \lambda \text{ de 0 à n} \\ \sum\limits_{\lambda=0}^{n} r_\lambda = n & \\ \sum\limits_{\lambda=0}^{\nu} r_\lambda - \nu \geqslant r_\nu & \text{pour tout } \nu \text{ de 0 à n} \end{cases}$$

$$\left(\Leftrightarrow \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} r_\lambda \geqslant \nu \qquad \text{pour tout } \nu \text{ de 1 à n} \right)$$

Nous avons aussi vérifié que le nombre d'arbres de $\mathcal{T}_n$ ayant pour type une suite donnée R appartenant à $\mathcal{C}_n$ est :

$$N(R) = \prod_{\nu=0}^{n-1} \left(\frac{\sum_{\lambda=0}^{\nu} r_\lambda - \nu}{r_\nu \, !} \right)$$

Nous appelons "arbre d'André" un arbre hiérarchique dont tout sommet a, au plus, deux antécédents et désignons par $\mathcal{A}(n)$ l'ensemble des arbres d'André construits sur $\{0,1,\ldots,n\}$.

Notre objectif précis est d'étudier la répartition des arbres de $\mathcal{A}(n)$ en fonction d'une part du nombre de sommets sans antécédent et d'autre part du conséquent du sommet n.

Soit $\mathcal{A}(n,k)$ (avec $1 \leqslant k \leqslant 1 + \left[\frac{n}{2}\right]$) le sous-ensemble de $\mathcal{A}(n)$ constitué de ceux des arbres de $\mathcal{A}(n)$ qui ont k sommets sans antécédent (et donc aussi k-1 sommets possédant deux antécédents et n-2k+2 sommets possédant un un seul antécédent),

$\mathcal{A}_i(n)$ (avec $0 \leqslant i \leqslant n-1$) le sous-ensemble de $\mathcal{A}(n)$ constitué de ceux des arbres de $\mathcal{A}(n)$ pour lesquels le conséquent du sommet n est le sommet i

et $\mathcal{A}_i(n,k)$ l'intersection des sous-ensembles $\mathcal{A}(n,k)$ et $\mathcal{A}_i(n)$.(*)

Nous notons $A(n)$, $A(n,k)$, $A_i(n)$ et $A_i(n,k)$ les cardinaux respectifs de $\mathcal{A}(n)$, $\mathcal{A}(n,k)$, $\mathcal{A}_i(n)$ et $\mathcal{A}_i(n,k)$.

(On a bien sûr :

$$A(n,k) = \sum_i A_i(n,k) \; ; \; A_i(n) = \sum_k A_i(n,k) \text{ et}$$

$$A(n) = \sum_k A(n,k) = \sum_i A_i(n) = \sum_{(i,k)} A_i(n,k)).$$

$A(n)$ est le nombre d'André précédemment noté A_{n+1} dans [3] .

Convenons aussi de désigner par $J(n,k)$ le nombre de Carlitz et par $E(n,i)$ le nombre d'Entringer précédemment notés respectiveement J^k_{n+1} et E^{i+2}_{n+1} dans [3] .

(*)(Cf. en annexe 1, donnée à titre d'exemple, la répartition des arbres de $\mathcal{A}(4)$ en fonction des valeurs de k et de i).

Ainsi on a :

$$A(n) = \sum_{k=1}^{n} J(n,k) = \sum_{i=0}^{n-1} E(n,i).$$

Rappelons que pour $n \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$, les nombres de Carlitz peuvent être déterminés de proche en proche au moyen des relations :

$$\begin{cases} J(n,1) = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* & (1\text{-}1) \\ J(n,k) = 0 \qquad \text{pour } k \geqslant n+1 & (1\text{-}1') \\ J(n+1,k) = k\ J(n,k) + (n-2k+4)\ J(n,k-1) & (1\text{-}2) \end{cases}$$

Et de même, pour $n \geqslant 1$ et $i \geqslant 0$, les nombres d'Entringer par :

$$\begin{cases} E(1,0) = 1 & (2\text{-}1) \\ E(n,i) = 0 \quad \text{pour } i \geqslant n & (2\text{-}1') \\ E(n+1,i) = \sum_{j \geqslant n-i-1} E(n,j) & (2\text{-}2) \end{cases}$$

$$= A(n) - \sum_{j \leqslant n-i-2} E(n,j) \qquad (2\text{-}2')$$

avec $E(n,-2) = E(n,-1) = 0$

$(\Rightarrow E(n+1,n) = E(n+1,n-1) = A(n)$

$E(n+1,0) = E(n,n-1) = A(n-1))$ (*)

Les deux résultats centraux de l'étude peuvent alors se formuler :

$$A(n,k) = J(n,k) \qquad (\mathrm{I})$$

$$A_i(n) = E(n,i) \qquad (\mathrm{II})$$

Bien que ces deux résultats soient déjà connus, c'est la recherche d'une justification simple et aussi directe que possible de (II) qui est à l'origine de ce travail.

Notons que toute tentative de construction d'une bijection de l'ensemble $\mathcal{A}_i(n)$ sur l'ensemble de celles des permutations alternées descendantes de $\{0,1,\ldots,n\}$ dont le premier terme est $i+1$ a échoué.

(*) (Cf. en annexe 2 les tables respectives des nombres $J(n,k)$, $E(n,i)$ et $A(n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 5$).

On peut, comme il est facile de s'en assurer, calculer de proche en proche les nombres $A_i(n,k)$ au moyen des relations ci-après :

$$A_o(1,1) = 1 \tag{3-0}$$

Pour $k = 1$ et $i \leqslant n-1$:

$$A_i(n+1,1) = 0 \tag{3-1-1}$$

Pour $k = 1$ et $i = n$:

$$A_n(n+1,1) = 1 \tag{3-1-2}$$

Pour $k \geqslant 2$ et $i \leqslant n-1$:

$$A_i(n+1,k) = (k-1)A_i(n,k) + (n-2k+4)A_i(n,k-1) \tag{3-2-1}$$

Pour $k \geqslant 2$ et $i = n$:

$$A_n(n+1,k) = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(n,k) = A(n,k) \tag{3-2-2}$$

La justification de (3-2-1) repose sur la répartition des arbres de $\mathcal{A}_i(n+1,k)$ en deux classes, selon que le conséquent du sommet n n'a pas, ou a, un autre antécédent que n :

- on obtient un arbre de la première de ces classes à partir d'un arbre de $\mathcal{A}_i(n,k)$ moyennant remplacement du sommet n par un sommet n+1, et rattachement d'un nouveau sommet n à l'un des k-1 autres sommets sans antécédent ;
- on obtient un arbre de l'autre classe à partir d'un arbre de $\mathcal{A}_i(n,k-1)$ moyennant remplacement du sommet n par un sommet n+1 et rattachement d'un nouveau sommet n à l'un des n-2(k-1)+2 sommets ayant un et un seul antécédent. (*)

On remarque que la sommation des nombres $A_i(n+1,k)$ par rapport à i s'effectue dans difficulté mais qu'il n'en va pas de même en ce qui concerne la sommation par rapport à k.

Compte-tenu de ce que l'on a :

$$A(n+1,k) = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(n+1,k) + A_n(n+1,k),$$

(*) (Cf. en annexe 3 les tables des nombres $A_i(n,k)$, $A(n,k)$ et $A_i(n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 5$).

la sommation par rapport à i donne pour k = 1 :

$$A(n+1,1) = A(n,1) = 1 \tag{3'-1}$$

et pour $k \geqslant 2$:

$$A(n+1,k) = k\,A(n,k) + (n-2k+4)\,A(n,k-1) \tag{3'-2}$$

Ceci permet de démontrer par récurrence au moyen de (1-1) et (1-2) l'égalité (I) : $A(n,k) = J(n,k)$

Nous ne pouvons malheureusement pas poursuivre une démarche analogue pour démontrer aussi rapidement l'égalité (II) et expliquer pourquoi l'on a $A_i(n) = E(n,i)$.

Il convient alors de considérer d'autres sous-ensembles de l'ensemble $\mathcal{A}(n,k)$ que les n sous-ensembles $\mathcal{A}_o(n,k)$, $\mathcal{A}_1(n,k),\ldots,\mathcal{A}_{n-1}(n,k)$.

Soit $\mathcal{B}_i^j(n,k)$ (avec $j \in \{0,1,2\}$) le sous-ensemble de $\mathcal{A}(n,k)$ constitué de ceux des arbres de $\mathcal{A}(n,k)$ pour lesquels le sommet i a j antécédent(s) et $B_i^j(n,k)$ le cardinal de $\mathcal{B}_i^j(n,k)$.

Soit aussi $\mathcal{M}(n)$ le sous-ensemble de $\mathcal{C}_n$ constitué de celles des suites de $\mathcal{C}_n$ pour lesquelles on a $r_\lambda \in \{0,1,2\}$ pour tout λ de 0 à n,

$\mathcal{M}(n,k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}(n)$ constitué de celles des suites de $\mathcal{M}(n)$ dont le nombre de termes nuls est égal à k ($\Rightarrow$ le nombre des termes valant 1 est n-2k+2 et celui des termes valant 2 est k-1),

et $\mathcal{M}_i^j(n,k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}(n,k)$ constitué de celles des suites de $\mathcal{M}(n,k)$ pour lesquelles on a $r_i = j$

$$(\Rightarrow \quad \forall i \in [0,n], \ \bigcup_{j=0}^{2} \mathcal{M}_i^j(n,k) = \mathcal{M}(n,k)).$$

(Dans [3], les ensembles $\mathcal{M}(n)$ et $\mathcal{M}(n,k)$ étaient respectivement désignés par $\mathcal{C}_n''$ et $\mathcal{C}_n''^k$).

Comme $\mathcal{M}_i^j(n,k)$ est l'ensemble des types des arbres appartenant à $\mathcal{B}_i^j(n,k)$, on a :

$$B_i^j(n,k) = \sum_{R \in \mathcal{M}_i^j(n,k)} N(R) \tag{4-0-1}$$

Il est aisé de vérifier que pour $n \geqslant 2$, si $R = (r_o, r_1, \ldots, r_n)$ appartient à $\mathcal{M}(n,k)$, on a :

$$N(R) = \frac{\prod_{\nu=0}^{n-2} \left(\sum_{\lambda=0}^{\nu} r_\lambda - \nu \right)}{2^{k-1}} \qquad (4\text{-}0\text{-}2)^{(*)}$$

Les nombres $B_i^j(n,k)$ pourraient aussi se calculer de proche en proche au moyen de formules de récurrence facile à établir.(**)

Ces nombres satisfont en outre à de nombreuses relations.

Mentionnons celles qui nous serviront pour établir (II) :

$\forall i \in [0,n]$, on a :

$$B_i(n,k) = \sum_{j=0}^{2} B_i^j(n,k) = A(n,k) \qquad (4\text{-}1)$$

$$A_i(n+1,k) = B_i^o(n,k) + B_i^1(n,k) \qquad (4\text{-}2)$$

$\forall i \in [1,n]$, on a :

$$B_i^o(n,k) = B_{i-1}^o(n,k) + A_{i-1}(n,k) \qquad (4\text{-}3)$$

$$\sum_k B_i^o(n,k) = \sum_k B_{i-1}^o(n,k) + A_{i-1}(n) \qquad (4\text{-}3')$$

$$\sum_k B_i^o(n,k) = \sum_{j \leqslant i-1} A_j(n) \qquad (4\text{-}3'')$$

et $\forall i \in [0,n-1]$,

$$B_i^j(n,k) = B_{n-i-1}^{2-j}(n,k) \qquad (4\text{-}4)$$

(*) (Cf. en annexe 4, données à titre d'exemple, la grille de calcul et la table des nombres $B_i^j(4,k)$).

(**) (Cf. annexe 5).

(4-1) résulte de ce que l'on a

$$\bigcup_{j=0}^{2} \mathcal{B}_i^j(n,k) = \mathcal{A}(n,k) \qquad \forall i \in [0,n]$$

(4-2) se vérifie immédiatement en considérant la répartition des arbres de $\mathcal{A}_i(n+1,k)$ en deux classes, selon que le sommet i n'a pas, ou a, un autre antécédent que le sommet n+1.

(4-3) se vérifie en considérant, pour $i \geqslant 1$, la répartition des arbres de $\mathcal{B}_i^o(n,k)$ en deux classes selon que le sommet i-1 n'est pas, ou est, conséquent de i : on obtient un arbre de la première de ces classes à partir d'un arbre de $\mathcal{B}_{i-1}^o(n,k)$ moyennant permutation des sommets i et i-1 ; on obtient un arbre de l'autre classe à partir d'un arbre de $\mathcal{A}_{i-1}(n,k)$ moyennant remplacement du sommet n par un sommet i et pour tout j de i à n-1, remplacement du sommet j par un sommet j+1.

De (4-3) par sommation par rapport à k on déduit (4-3)', puis par itération de (4-3'), compte tenu de ce que l'on a $B_o^o(n,k) = 0$ pour $n \geqslant 1$, on déduit (4-3").

Reste à justifier (4-4).

Soit $R = (r_o, r_1, \ldots, r_n)$ une suite appartenant à $\mathcal{M}(n,k)$

et $R' = (r'_o, r'_1, \ldots r'_n)$ la suite définie par :

$$\forall \lambda \in [0,n-1] \qquad r'_\lambda = 2 - r_{n-\lambda-1}$$

$$(\Leftrightarrow \quad r_\lambda = 2 - r'_{n-\lambda-1})$$

$$\text{et} \quad r'_n = r_n = 0.$$

On vérifie que l'on a $R' \in \mathcal{M}(n,k)$

et $N(R') = N(R)$

Pour ce faire, on remarque que $\forall \nu \in [1,n]$, on peut écrire successivement :

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} r'_\lambda = 2\nu - \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} r_{n-\lambda-1} = \begin{cases} 2\nu - n + \sum_{\lambda'=0}^{n-\nu-1} r_{\lambda'} & \text{pour } \nu \leqslant n-1 \\ n \quad \text{pour } \nu = n, \end{cases}$$

d'où l'on tire, puisque $\sum_{\lambda'=0}^{n-\nu-1} r_{\lambda'} \geqslant n-\nu$ pour $\nu \leqslant n-1$ et que $r'_n = 0$:

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} r'_\lambda \geqslant \nu \quad \forall \nu \geqslant 1,$$

ce qui permet d'affirmer que l'on a $R' \in \mathcal{M}(n,k)$, et aussi :

$$\sum_{\lambda=0}^{\nu} r'_\lambda - \nu = \sum_{\lambda'=0}^{n-\nu-2} r_{\lambda'} - (n-\nu-2) \text{ pour } 0 \leqslant \nu \leqslant n-2,$$

puis, par conséquent :

$$\prod_{\nu=0}^{n-2} \left(\sum_{\lambda=0}^{\nu} r'_\lambda - \nu \right) = \prod_{\nu=0}^{n-2} \left(\sum_{\lambda'=0}^{n-\nu-2} r_{\lambda'} - (n-\nu-2) \right)$$

$$= \prod_{\nu'=0}^{n-2} \left(\sum_{\lambda'=0}^{\nu'} r_{\lambda'} - \nu' \right),$$

ce qui permet d'affirmer que l'on a $N(R') = N(R)$.

Ainsi en faisant correspondre à toute suite R de $\mathcal{M}(n,k)$ la suite R', on définit une involution sur $\mathcal{M}(n,k)$.

Cette involution est telle que pour $i \leqslant n-1$, si $R \in \mathcal{M}_i^j(n,k)$ on a $R' \in \mathcal{M}_{n-i-1}^{2-j}(n,k)$.

Par suite, puisque de plus $N(R') = N(R)$, pour $i \leqslant n-1$, on peut écrire successivement :

$$B_i^j(n,k) = \sum_{R \in \mathcal{M}_i^j(n,k)} N(R) = \sum_{R' \in \mathcal{M}_{n-i-1}^{2-j}} N(R') = B_{n-i-1}^{2-j}(n,k) \text{ d'où (4-4).}$$

On peut d'ailleurs construire l'involution correspondante sur $\mathcal{A}(n,k)$ qui, pour $i \leqslant n-1$, fait correspondre à tout arbre de $\mathcal{B}_i^j(n,k)$ un arbre de $\mathcal{B}_{n-i-1}^{2-j}(n,k)$ mais cette involution est relativement longue à décrire.

Nous pouvons maintenant vérifier que l'on a :

$$A_i(n+1) = A(n) - \sum_{j \leqslant n-i-2} A_j(n) \qquad (4\text{-}5)$$

avec $A_{-2}(n) = A_{-1}(n) = 0.$

En effet, pour i=n, on sait que $A_n(n+1) = A(n)$ et pour $i \leqslant n-1$, compte tenu respectivement de (4-2), (4-1), (4-4) et (4-3"), on peut écrire successivement :

$$\sum_k A_i(n+1,k) = \sum_k \left[B_i^o(n,k) + B_i^1(n,k-1)\right]$$

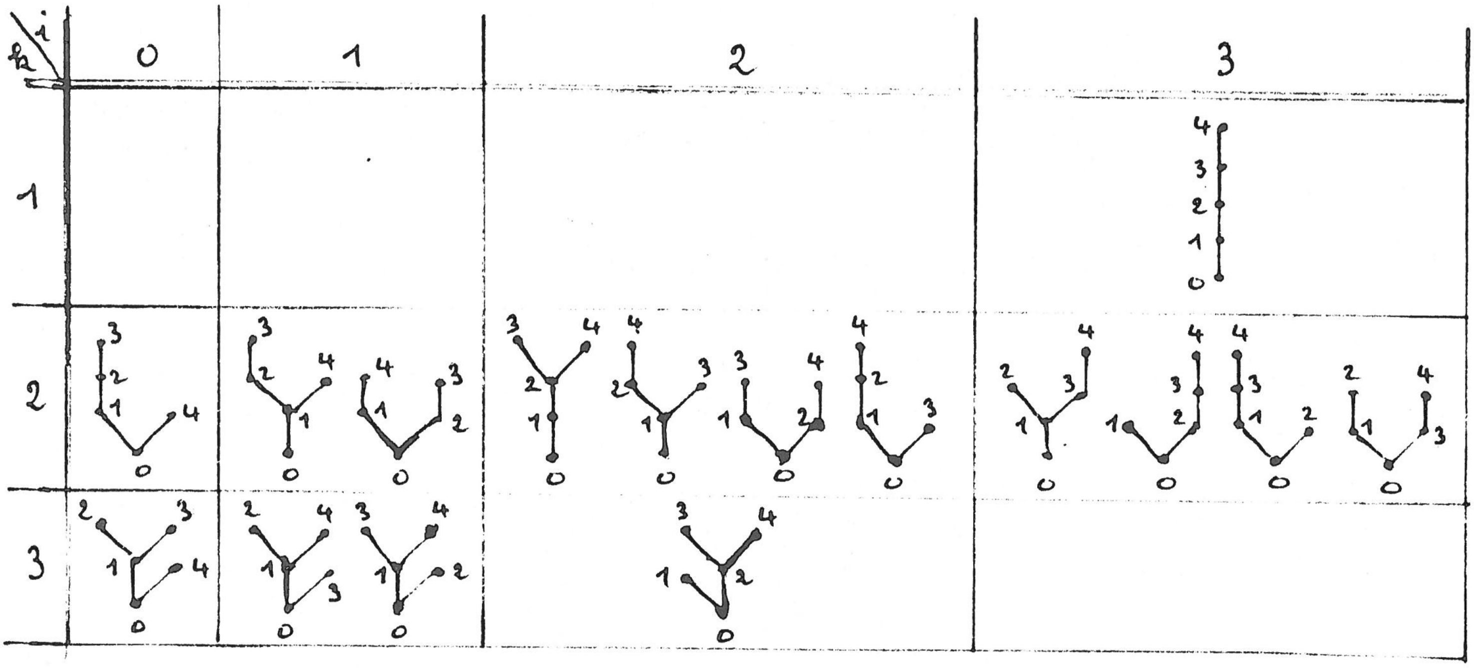
$$= \sum_k A(n,k) - \sum_k B_i^2(n,k)$$

$$= A(n) - \sum_k B^o_{n-i-1}(n,k)$$

$$= A(n) - \sum_{j \leqslant n-i-2} A_j(n).$$

Comme $A_o(1) = 1 = E(1,0)$, (4-5) permet d'établir par récurrence, au moyen de (2-2'), l'égalité (II) : $A_i(n) = E(n,i)$.

Annexe 1. Répartition des arbres de l'ensemble $\mathcal{A}(4)$ en fonction du nombre k des sommets sans antécédent et du conséquent i du sommet n = 4.



Annexe 2. Tables des nombres J(n,k) de Carlitz
des nombres E(n,i) d'Entringer pour $1 \leqslant n \leqslant 5$
et des nombres A(n) d'André

$J(n,k)$

n \ k	1	2	3	4	5
1	1				
2	1	1			
3	1	4			
4	1	11	4		
5	1	26	34		

$E(n,i)$

n \ i	0	1	2	3	4
1	1				
2	1	1			
3	1	2	2		
4	2	4	5	5	
5	5	10	14	16	16

$A(n)$

n	A(n)
1	1
2	2
3	5
4	16
5	61

Annexe 3. Tables des nombres $A_i(n,k)$, $A(n,k)$ et $A_i(n)$ pour $1 \leqslant n \leqslant 5$.

$n=1$

$k \backslash i$	0	$A(1,k)$
1	1	1
$A_i(1)$	1	1

$n=2$

$k \backslash i$	0	1	$A(2,k)$
1	0	1	1
2	1	0	1
$A_i(2)$	1	1	2

$n=3$

$k \backslash i$	0	1	2	$A(3,k)$
1	0	0	1	1
2	1	2	1	4
$A_i(3)$	1	2	2	5

$n=4$

$k \backslash i$	0	1	2	3	$A(4,k)$
1	0	0	0	1	1
2	1	2	4	4	11
3	1	2	1	0	4
$A_i(4)$	2	4	5	5	16

$n=5$

$k \backslash i$	0	1	2	3	4	$A(5,k)$
1	0	0	0	0	1	1
2	1	2	4	8	11	26
3	4	8	10	8	4	34
$A_i(5)$	5	10	14	16	16	61

Annexe 4. Grille de calcul et table des nombres $B_i^j(4,k)$

- GRILLE DE CALCUL.

	$R=(r_0\, r_1\, r_2\, r_3\, r_4)$	$N(R)$	r_0: 0	r_0: 1	r_0: 2	r_1: 0	r_1: 1	r_1: 2	r_2: 0	r_2: 1	r_2: 2	r_3: 0	r_3: 1	r_3: 2	r_4: 0	r_4: 1	r_4: 2
$k=1$	1 1 1 1 0	1		1			1			1			1		1		
	sous-totaux →	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0
$k=2$	1 1 2 0 0	1		1			1				1	1			1		
	1 2 0 1 0	1		1				1	1				1		1		
	1 2 1 0 0	2		2				2		2		2			2		
	2 0 1 1 0	1			1	1				1			1		1		
	2 1 0 1 0	2			2		2		2				2		2		
	2 1 1 0 0	4			4		4			4		4			4		
	sous-totaux →	11	0	4	7	1	7	3	3	7	1	7	4	0	11	0	0
$k=3$	2 0 2 0 0	1			1	1					1	1			1		
	2 2 0 0 0	3			3			3	3			3			3		
	Sous. totaux →	4	0	0	4	1	0	3	3	0	1	4	0	0	4	0	0

- TABLE.

k ↓ \ i →		0: j 0	0: j 1	0: j 2	1: j 0	1: j 1	1: j 2	2: j 0	2: j 1	2: j 2	3: j 0	3: j 1	3: j 2	4: j 0	4: j 1	4: j 2	$B^j(4,k)$: j 0	$B^j(4,k)$: j 1	$B^j(4,k)$: j 2
1	$\dot{j}=0$	0			0			0			0			1			1		
	$\dot{j}=1$		1			1			1			1			0			4	
	$\dot{j}=2$			0			0			0			0			0			0
2	$\dot{j}=0$	0			1			3			7			11			22		
	$\dot{j}=1$		4			7			7			4			0			22	
	$\dot{j}=2$			7			3			1			0			0			11
3	$\dot{j}=0$	0			1			3			4			4			12		
	$\dot{j}=1$		0			0			0			0			0			0	
	$\dot{j}=2$			4			3			1			0			0			8
$B_i^j(4)$	$\dot{j}=0$	0			2			6			11			16			35		
	$\dot{j}=1$		5			8			8			5			0			26	
	$\dot{j}=2$			11			6			2			0			0			19
		5			10			14			16			16			61		

Annexe 5. Formules de récurrence permettant de calculer de proche en proche les nombres $B_i^j(n,k)$

Pour $k = 1$ et $i \leqslant n$:

$$\begin{cases} B_i^o(n+1,1) = 0 \\ B_i^1(n+1,1) = 1 \quad (= J(n+1\ ,1)) \\ B_i^2(n+1,1) = 0 \end{cases}$$

Pour $k = 1$ et $i = n+1$:

$$\begin{cases} B_{n+1}^o(n+1,1) = 1 \quad (= J(n+1,1)) \\ B_{n+1}^1(n+1,1) = 0 \\ B_{n+1}^2(n+1,1) = 0 \end{cases}$$

Pour $k \geqslant 2$ et $i \leqslant n$:

$$\begin{cases} B_i^o(n+1,k) = (k-1)\ B_i^o(n,k) + (n-2k+4)\ B_i^o(n,k-1) \\ B_i^1(n+1,k) = B_i^o(n,k) + k\ B_i^1(n,k) + (n-2k+3)\ B_i^1(n,k-1) \\ B_i^2(n+1,k) = B_i^1(n,k-1) + k\ B_i^2(n,k) + (n-2k+4)\ B_i^2(n,k-1) \end{cases}$$

$$(\Rightarrow \quad B_i(n+1,k) = k\ B_i(n,k) + (n-2k+4)\ B_i(n,k-1)$$

$$\Rightarrow \quad A(n,k) = B_i(n,k) = J(n,k))$$

Pour $k \geqslant 2$ et $i = n+1$:

$$\begin{cases} B_{n+1}^o(n+1,k) = J(n+1,k) \\ B_{n+1}^1(n+1,k) = 0 \\ B_{n+1}^2(n+1,k) = 0 \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

[1] D. FOATA et M.P. SCHÜTZENBERGER, Nombres d'Euler et permutations alternantes, University of Florida, Gainesville, 1971 partiellement repris dans "A survey of Combinatorial Theory", North-Holland Publishing Company, 1973.

[2] C. POUPARD, De nouvelles significations énumératives des nombres d'Entringer. Disc. Math. 38 (1982), 265-271.

[3] Y. POUPARD, Plusieurs familles de nombres reconstituées à partir d'atomes communs. Actes du Séminaire Lotharingien de combinations - 11e session, Mitwitz 23-27 septembre 1984.