

KOMBINATORISCHE STRUKTUREN IN POLYNOMRINGEN

Michael Clausen

Fakultät für Informatik, Universität Karlsruhe
Technologiefabrik, Haid-und-Neu Straße 7
D-7500 Karlsruhe 1

1. EINLEITUNG

Der Polynomring über \mathbf{Z} in Unbestimmten X_{ij} , $i, j \in \mathbf{N}$, besitzt eine \mathbf{Z} -Basis aus sog. standard Bideterminanten. Bideterminanten sind Potenzprodukte von Minoren der Unbestimmtenmatrix (X_{ij}) . Diese Basis wurde wohl explizit erstmals von MEAD [] angegeben, dürfte aber Klassikern wie TURNBALL und HODGE nicht fremd gewesen sein. So richtig publik wurde die Basis allerdings erst durch die Arbeiten von ROTA und Mitarbeitern []. Zahlreiche Forschungsprogramme, die im Umkreis dieser Basis anzusiedeln sind, wurden in [] vorgeschlagen. Mittlerweile sind einige davon in Angriff genommen. Wir erwähnen stellvertretend die invariantentheoretischen Arbeiten [], darstellungstheoretische Anwendungen [], Anwendungen in der algebraischen Geometrie und kommutativen Algebra [], schließlich die Dissertation von J.STEIN über Hopf-Algebren Strukturen auf Tensorprodukten von \mathbf{Z} -Moduln. Nach dieser angedeuteten Vielfalt von Anwendungen ist es umso erstaunlicher, daß das ganze Gebäude beweistechnisch im Prinzip auf zwei Methoden basiert:

- Laplace-Entwicklungen
- Capelli-Operatoren.

Diese Methoden wurden in [] bereits ausführlich besprochen. Trotzdem wird hier nochmals auf diese Methoden eingegangen, weil im Laufe der letzten Jahre die kombinatorischen und gruppentheoretischen Hintergründe bewußter geworden sind. Dies bezieht sich zum einen auf den Dualitätssatz. Die verallgemeinerten Laplace-Entwicklungen, bisher nur schwer in Worte zu fassen [], haben unseres Erachtens im Dualitätssatz (siehe Kap. 2) endlich eine prägnante und adäquate Beschreibung erfahren. Hier werden elementare Gruppentheorie und Kombinatorik miteinander verknüpft. Der Dualitätssatz liefert eine Fülle von Relationen zwischen Bideterminanten. Diese Relationen erlauben, z.B. gewisse Erzeugendensysteme von \mathbf{Z} -Unterräumen des Polynomrings systematisch auszudünnen bis hin zum Auffinden problemangepaßter \mathbf{Z} -Basen. Dieses Ausdünnen geht einher mit dem Aufbau kombinatorischer Strukturen (wie z.B. standard Tableaux mit Nebenbedingungen). Die Abschnitte 3.3 und 3.4 sollen einen ersten Eindruck von der Tragweite des Dualitätssatzes vermitteln. Auch die Kehrseite der Medaille soll dort zum Ausdruck gebracht werden: man muß den Überfluß verwalten lernen ... (ein unerschöpfliches und schwieriges Thema auch im heutigen LOTHRINGEN und angrenzenden Gebieten) ... sprich: man muß unterscheiden lernen zwischen wesentlich neuen Relationen gegenüber bereits benutzten. Dieser Lernprozess ist noch nicht abgeschlossen, aber erste Fortschritte sind zu verzeichnen [].

Die mit oben erwähnter \mathbf{Z} -Basis verbundenen kombinatorischen Strukturen treten andererseits im Zusammenhang mit den Capelli-Operatoren deutlich zu Tage. Es handelt sich hier um eine Abschwächung der Dominanzhalbordnung für standard Tableaux. Durch konsequente Verwendung dieser Halbordnung werden die Ergebnisse schärfer, auf der anderen Seite werden die Beweise einfacher und transparenter, was zeigt, daß diese neue Halbordnung dem Problemkreis angemessen zu sein scheint. Implizit ist diese Halbordnung

in der Literatur schon seit langem zu finden. Wir glauben aber, daß hier erstmals ausführlich und bewußt von dieser Halbordnung geredet wird. (Überträgt man diese Halbordnung auf Diagramme, so erhält man nichts anderes als die wohlbekanntere Dominanzhalbordnung von Diagrammen!) Eine ausführliche Erörterung findet sich in Kapitel 2. Die Verwendung von doppeltindizierten Unbestimmten führt auf Paare von standard Tableaux gleicher Gestalt. Es läge nun nahe, die obige, für standard Tableaux erwähnte Halbordnung auf diese Paare zu übertragen, indem man zur Produktordnung übergeht. Tatsächlich kommt man hier mit einer abgeschwächten Halbordnung aus (siehe Kap. 2).

Bei den Anwendungen im Kapitel 3 beschränken wir uns auf die Darstellungstheorie zweier Serien von Gruppen: symmetrische Gruppen und Kranzprodukte symmetrischer Gruppen. Diese Kranzprodukte denken wir uns realisiert als maximal imprimitive Permutationsgruppen. Um die Arbeit auch für Kombinatoriker lesbar zu machen, die mit der Darstellungstheorie nicht vertraut sind, erinnern wir zu Beginn von Kapitel 3 an Grundlegendes aus der Darstellungstheorie. Nach diesem darstellungstheoretischen Vorspann sollte dann jedem der Vorteil der Doppelindizierung klar werden: auf den linken Indizes operiert die Permutationsgruppe, die rechten Indizes dienen dem Aufbau kombinatorischer Strukturen, die (im Fall der gewöhnlichen Darstellungstheorie) die Vielfachheiten einfacher Moduln im gegebenen Modul abzählen. Die Abschnitte 3.1 und 3.2 geben Isomorphielisten einfacher Moduln für die Gruppen aus den genannten Serien an. Auf ähnliche Weise ließen sich auch Isomorphielisten anderer klassischer Gruppen angeben. Abschnitt 3.3 stellt einen algorithmischen Zugang zur modultheoretischen Version der LITTLEWOOD-RICHARDSON Regel dar. Abschnitt 3.4 deutet eine mögliche Verallgemeinerung an: an Stelle von zyklischen Moduln, die zu sog. Schiefdiagrammen gebildet sind, werden hier allgemeine Gestalten zugelassen. Die damit verbundenen kombinatorischen Probleme sind äußerst verwickelt und Lösungen nur in Spezialfällen bekannt.

Die vorliegende Arbeit ist ein Fragment. Verbesserungsvorschläge und sonstige Kommentare sind sehr willkommen.

Die Arbeit gibt Teile einer Vorlesung wieder, die der Verfasser auf Bitte von Herrn Strassen im WS 84/85 an der Universität Zürich gehalten hat. Ich möchte Volker Strassen herzlich für die hilfreichen Diskussionen danken.

2. GRUNDLAGEN UND METHODEN

In diesem Abschnitt geht es um eine eng mit kombinatorischen Strukturen verbundene \mathbb{Z} -Basis des Polynomrings

$$\mathbb{Z}[X] := \mathbb{Z}[X_{ij} : i, j \in \mathbb{N}].$$

Diese Basis besteht aus gewissen Potenzprodukten von Minoren der Matrix (X_{ij}) . Zu $i_1, \dots, i_d, j_1, \dots, j_d \in \mathbb{N}$ heißt

$$\left(\begin{array}{c|c} i_1 & j_1 \\ \vdots & \vdots \\ i_d & j_d \end{array} \right) := \det \begin{pmatrix} X_{i_1 j_1} & \dots & X_{i_1 j_d} \\ \vdots & & \vdots \\ X_{i_d j_1} & \dots & X_{i_d j_d} \end{pmatrix}$$

eine *Minore*. Potenzprodukte von Minoren, sog. *Bideterminanten*, deuten wir gern durch spaltenweises Hintereinanderschreiben an:

$$\left(\begin{array}{c|c} 218 & 122 \\ 72 & 21 \\ 3 & 4 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 2|1 \\ 7|2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 1|2 \\ 2|1 \\ 3|4 \end{array} \right) = \det \begin{pmatrix} X_{21} & X_{22} \\ X_{71} & X_{72} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} X_{12} & X_{11} & X_{14} \\ X_{22} & X_{21} & X_{24} \\ X_{32} & X_{31} & X_{34} \end{pmatrix} \cdot X_{82}.$$

Wir bereiten eine präzise Definition derartiger Bideterminanten vor: Ist A eine endliche Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, so bezeichnet $\text{Sym}(A)$ die symmetrische Gruppe auf A , $V(A) \simeq \prod_j \text{Sym}(j\text{-te Spalte von } A)$ die Untergruppe aller Vertikal- und $H(A) \simeq \prod_i \text{Sym}(i\text{-te Zeile von } A)$ die Untergruppe aller Horizontalpermutationen von A . Eine Abbildung $S : A \rightarrow \mathbb{N}$ heißt *A-Tableau* (oder *Tableau der Gestalt A*) vom *Inhalt* $(|S^{-1}(1)|, |S^{-1}(2)|, \dots)$. Ein *A-Bitableau* vom *Inhalt* (α, β) ist ein Paar (S, T) von A -Tableaux mit $\alpha = \text{Inhalt}(S)$, $\beta = \text{Inhalt}(T)$.

Beispiel. $\left(\begin{array}{c|c} 215 & 122 \\ 4 & 2,2 & 1 \end{array} \right)$ ist ein A -Bitableau vom Inhalt (α, β) , wo $A = \{11, 12, 13, 21, 23\}$, $\alpha = (1, 2, 0, 1, 1, 0, \dots)$ und $\beta = (2, 3, 0, 0, \dots)$. (Lies (1,1) statt 11, usw.)

Definition. Einem A -Bitableau (S, T) kann man eine Reihe merkwürdiger Polynome zuordnen:

$$\begin{aligned} \{S|T\} &:= \prod_{a \in A} X_{S(a), T(a)} && \text{natürliches Monom} \\ (S|T) &:= \sum_{\sigma \in V(A)} \text{sgn}(\sigma) \{S \circ \sigma | T\} && L\text{-Bideterminante} \\ \{S|T\} &:= \sum_{\tau \in V(A)} \text{sgn}(\tau) \{S | T \circ \tau\} && R\text{-Bideterminante} \\ |S|T) &:= \sum_{S' \in S \circ H(A)} \{S'|T\} && L\text{-symmetrisierte Bideterminante} \\ (S|T) &:= \sum_{T' \in T \circ H(A)} \{S|T'\} && R\text{-symmetrisierte Bideterminante} \\ |S|T) &:= \sum_{\sigma \in H(A)} \{S \circ \sigma | T\} && L\text{-Bipermanente} \\ \{S|T\} &:= \sum_{\tau \in H(A)} \{S | T \circ \tau\} && R\text{-Bipermanente} \end{aligned}$$

$$\{\emptyset|\emptyset\} := \dots = \{\emptyset|\emptyset\} := 1; \quad S \circ H(A) := \{S \circ \sigma | \sigma \in H(A)\}.$$

Wir werden uns im folgenden schwerpunktmäßig mit Bideterminanten befassen und formulieren erste, einfach nachzuweisende Eigenschaften von Monomen und Bideterminanten als

Übung. Ist (S, T) ein A -Bitableau, (U, V) ein B -Bitableau, so gilt:

- $\{S | T\} = \{U | V\}$ gdw eine Bijektion $\varphi : A \rightarrow B$ existiert mit $(U \circ \varphi, V \circ \varphi) = (S, T)$.
- $\{S \circ \sigma | T\} = \{S | T \circ \sigma^{-1}\}$ ($\sigma \in \text{Sym}(A)$).
- $\{S | T\} = \{S | T\} =: (S | T)$.
(L- und R-Bideterminante zu (S, T) stimmen also überein. Folglich macht es Sinn, von der Bideterminante zu (S, T) zu sprechen.)
- $(S | T) = \prod_j (S^j | T^j)$.
(Der Faktor $(S^j | T^j)$ ist Bideterminante (= Minore) zu den j -ten Spalten von S und T .)
- $(S \circ \sigma | T \circ \tau) = \text{sgn}(\sigma\tau) (S | T)$ ($\sigma, \tau \in V(A)$).
- $(S | T) \neq 0$ gdw alle S^j und alle T^j injektiv sind. (S heißt dann *spalteninjektiv*, ebenso T .) \square

Definition. $S : A \rightarrow \mathbb{N}$ heißt *standard* gdw A ein *Diagramm* ist (d.h. $(i, j) \in A, 1 \leq i' \leq i, 1 \leq j' \leq j \Rightarrow (i', j') \in A$), und S in jeder Zeile schwach und in jeder Spalte streng monoton ansteigt. Ein Bitableau (S, T) heißt *standard* gdw S und T standard sind.

Beispiel. $\begin{pmatrix} 1124 & 2335 \\ 235 & 455 \end{pmatrix}$ ist ein standard Bitableau.

Nun können wir das Hauptresultat dieses Abschnitts formulieren.

Theorem. Die Bideterminanten zu den standard Bitableaux bilden eine \mathbb{Z} -Basis von $\mathbb{Z}[X]$.

Zwei Methoden beherrschen beweistechnisch das hier diskutierte Gebiet: verallgemeinerte Laplace-Entwicklungen und Capelli-Operatoren. Wir entwickeln diese Methoden beim Beweis des Theorems. Der Beweis besteht aus zwei Schritten: In Schritt 1 wird gezeigt, daß die standard Bideterminanten den Polynomring als \mathbb{Z} -Modul erzeugen, in Schritt 2 geht es um die lineare Unabhängigkeit der standard Bideterminanten.

Beweis. Zunächst zerlegen wir $\mathbb{Z}[X]$ mittels Homogenitätsbedingungen direkt in \mathbb{Z} -Untermoduln $\mathbb{Z}_{\alpha\beta}$ von endlichem Rang:

$$\mathbb{Z}[X] = \bigoplus_{d \geq 0} \mathbb{Z}[X]_d = \bigoplus_{d \geq 0} \bigoplus_{|\alpha| = d = |\beta|} \mathbb{Z}_{\alpha\beta},$$

dabei bezeichnet $\mathbf{Z}[X]_d$ den Raum der Polynome, die homogen vom Grad d sind, und zu $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$, $\alpha_i, \beta_j \geq 0$, $|\alpha| := \sum_i \alpha_i = d = |\beta|$, ist $\mathbf{Z}_{\alpha\beta}$ die \mathbf{Z} -lineare Hülle aller Monome $X_{i_1 j_1} \cdots X_{i_d j_d}$, bei denen genau α_i mal im Tupel (i_1, \dots, i_d) die Zahl i und genau β_j mal in (j_1, \dots, j_d) die Zahl j vorkommt. Anders ausgedrückt: Bezeichnet $M_{\alpha\beta}$ die Menge aller $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ -Matrizen über \mathbf{N}_0 mit vorgegebenem Zeilensummenvektor α und mit vorgegebenem Spaltensummenvektor β , so ist

$$\mathbf{Z}_{\alpha\beta} = \ll X^C \mid C \in M_{\alpha\beta} \gg_{\mathbf{Z}} \quad \text{mit} \quad X^C := \prod_{i,j} X_{ij}^{c_{ij}}$$

Beispiel. $\mathbf{Z}_{(2,3),(1,1,3)} = \ll X^{\binom{002}{111}}, X^{\binom{011}{102}}, X^{\binom{101}{012}}, X^{\binom{110}{003}} \gg_{\mathbf{Z}}$.

Bezeichnet $\text{SBT}(\alpha, \beta)$ die Menge der standard Bitableaux vom Inhalt (α, β) und $\text{SBD}(\alpha, \beta)$ die zugehörige Menge von Bideterminanten, so genügt es, für jedes (α, β) folgendes zu zeigen:

Theorem. (2. Version) $\mathbf{Z}_{\alpha\beta} = \ll \text{SBD}(\alpha, \beta) \gg_{\mathbf{Z}}$.

Beispiel. $\mathbf{Z}_{(2,3),(1,1,3)} = \ll (11222|12333), \binom{1122}{2} | \binom{1333}{2}, \binom{1122}{2} | \binom{1233}{3}, \binom{112}{22} | \binom{123}{33} \gg_{\mathbf{Z}}$.

Schritt 1: $\mathbf{Z}_{\alpha\beta}$ wird \mathbf{Z} -linear erzeugt von $\text{SBD}(\alpha, \beta)$.

Sei $\text{BT}(\alpha, \beta)$ die (endliche !) Menge aller Bitableaux von Diagrammgestalt und vom Inhalt (α, β) ; $\text{BD}(\alpha, \beta)$ sei die zugehörige Menge von Bideterminanten. Da jedes Monom wegen $X_{i_1 j_1} \cdots X_{i_d j_d} = (i_1 \dots i_d | j_1 \dots j_d)$ als Bideterminante zu einem einzeiligen Bitableau aufgefaßt werden kann, wird $\mathbf{Z}_{\alpha\beta}$ sicherlich linear erzeugt von $\text{BD}(\alpha, \beta)$. Es genügt also zu zeigen:

Satz. Jede Bideterminante vom Inhalt (α, β) ist darstellbar als \mathbf{Z} -Linearkombination von standard Bideterminanten gleichen Inhalts.

Das triviale Beispiel $(21 | 12) = (12 | 12) - \binom{1}{2} | \binom{1}{2}$ läßt schon die Beweisidee erkennen:

$\text{BT}(\alpha, \beta)$ wird total geordnet: zunächst grob nach der Diagrammgestalt $\{(1, 1), (1, 2)\} > \{(1, 1), (2, 1)\}$, dann, bei gleicher Gestalt, (spalten-) lexikographisch $(21 > 12)$. Schließlich zeigt man:

$$(U, V) \text{ nicht standard} \Rightarrow (U|V) \in \sum_{(S,T) < (U,V)} \mathbf{Z} \cdot (S|T). \quad (*)$$

Zusammen mit der Endlichkeit von $\text{BT}(\alpha, \beta)$ folgt daraus die Behauptung des Satzes. Der Beweis von (*) basiert auf einer verallgemeinerten Laplace-Entwicklung, die wir hier schon in der später benötigten Allgemeinheit diskutieren. Das Beispiel $(21 | 12) = (12 | 12) - \binom{1}{2} | \binom{1}{2}$ kann man ansehen als Identität zwischen gewissen polynomialen Ausdrücken in Minoren der Unbestimmtenmatrix (X_{ij}) . Eine Fülle derartiger Identitäten wird beschrieben durch folgenden

Dualitätssatz. Sei $\varphi: A \rightarrow B$ eine Bijektion zwischen den endlichen Teilmengen A, B von $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$; $\psi := \varphi^{-1}$. Sei S ein A - und T ein B -Tableau. Dann gilt

$$\sum_{\sigma \in V(B)^\psi \text{ mod } V(B)^\psi \cap V(A)} \text{sgn}(\sigma)(S \circ \sigma | T \circ \varphi) = \sum_{\tau \in V(A)^\varphi \text{ mod } V(A)^\varphi \cap V(B)} \text{sgn}(\tau)(S \circ \psi | T \circ \tau).$$

Hierbei bezeichnet $V(B)^\psi \text{ mod } V(B)^\psi \cap V(A)$ eine (zunächst beliebige) Transversale der Linksnebenklassen von $V(B)^\psi := \psi \circ V(B) \circ \psi^{-1}$ nach $V(B)^\psi \cap V(A)$; analog ist $V(A)^\varphi \text{ mod } V(A)^\varphi \cap V(B)$ zu lesen.

Beweis. Da $V(B)^\psi$ und $V(A)$ Untergruppen von $\text{Sym}(A)$ sind, können wir ihr Komplexprodukt

$$V(B)^\psi \cdot V(A) := \{\psi \circ \beta \circ \psi^{-1} \circ \alpha \mid \beta \in V(B), \alpha \in V(A)\}$$

bilden; dieses korrespondiert unter der Inversion $x \mapsto x^{-1}$ und anschließender φ -Konjugation bijektiv mit dem Komplexprodukt $V(A)^\varphi \cdot V(B)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 (S | T)_\varphi &:= \sum_{\sigma \in V(B)^\varphi \cdot V(A)} \operatorname{sgn}(\sigma) \{S \circ \sigma | T \circ \varphi\} \\
 &= \sum_{\sigma \in V(B)^\varphi \cdot V(A)} \operatorname{sgn}(\sigma) \{S \circ \varphi^{-1} | T \circ \varphi \circ \sigma^{-1} \circ \varphi^{-1}\} \\
 &= \sum_{\tau \in V(B) \cdot V(A)^\varphi} \operatorname{sgn}(\tau) \{S \circ \psi | T \circ \tau^{-1}\} \\
 &= \sum_{\tau \in V(A)^\varphi \cdot V(B)} \operatorname{sgn}(\tau) \{S \circ \psi | T \circ \tau\} \\
 &=: \psi(S | T).
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung, wenn wir noch beachten, daß das Komplexprodukt $H \cdot K$ von Untergruppen einer Gruppe G disjunkte Vereinigung gewisser Linksnebenklassen von K in G ist; genauer gilt für eine beliebige Transversale $H \bmod H \cap K$ der Linksnebenklassen von H nach $H \cap K$:

$$H \cdot K = \bigcup_{h \in H \bmod H \cap K} hK. \quad \square$$

Übung. Man zeige, daß die Laplace-Entwicklung der n -reihigen Determinante (X_{jk}) nach der i -ten Zeile ein Spezialfall des Dualitätssatzes ist.

(Auf ähnliche Weise kann man auch allgemeinere Laplace-Entwicklungen als Spezialfälle des Dualitätssatzes erhalten.) \square

Um den Dualitätssatz konkret anwenden zu können, wählen wir jetzt spezielle Transversalen aus. Dazu ordnen wir alle Permutationen von A total an und nehmen als Repräsentanten aus jeder Linksnebenklasse den kleinsten Vertreter. Die Totalordnung von $\operatorname{Sym}(A)$, die für uns von Interesse ist, basiert auf folgender "getwisteten" Totalordnung \leq_t von $N \times N$.

Definition. $(a, b) \leq_t (x, y) \Leftrightarrow (b > y) \vee (b = y \wedge a \leq x)$.

Sei nun $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset N \times N$, $a_1 <_t a_2 \dots <_t a_n$. Wir ordnen die Permutationen von A gemäß ihrer zweiten Zeilen \leq_t -lexikographisch an: $\pi <_t \sigma \Leftrightarrow \exists i \left(\pi(a_i) <_t \sigma(a_i) \right) \wedge \forall j < i : \pi(a_j) = \sigma(a_j)$.

Ist $\psi : B \rightarrow A$ eine Bijektion, so bezeichne im folgenden $V(B)^\psi \bmod V(B)^\psi \cap V(A)$ die \leq_t -lexikographisch kleinste Transversale der Linksnebenklassen von $V(B)^\psi$ nach $V(B)^\psi \cap V(A)$. Ist $B^j := B \cap (N \times \{j\})$ (bzw. A^j) die j -te Spalte von B (bzw. A), so kann man obige Transversale auch so beschreiben:

$$\begin{aligned}
 V(B)^\psi \bmod V(B)^\psi \cap V(A) &= \{ \pi \in V(B)^\psi | \forall j, k : \pi|_{\pi(B^j) \cap A^k} \text{ ist } \leq_t \text{-isoton} \} \\
 &= \{ \pi \in \operatorname{Sym}(A) | \forall j : \pi(\psi(B^j)) = \psi(B^j) \wedge \forall j, k : \pi|_{\pi(B^j) \cap A^k} \text{ ist } \leq_t \text{-isoton} \}
 \end{aligned}$$

Derartige Permutationen heißen *Schiebepermutationen* (engl.: shuffles) bzgl. $\psi : B \rightarrow A$. Die Identität id_A gehört bzgl. jeder Bijektion $\psi : B \rightarrow A$ zu den Schiebepermutationen.

Beispiel.

$$A = \begin{array}{|c|c|} \hline \times & \times \\ \hline \times & \\ \hline \end{array} \quad B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \times & \times & \times \\ \hline \times & \times & \\ \hline \times & & \\ \hline \end{array} \quad \psi = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 12 & 32 & 11 \\ \hline 22 & 42 & \\ \hline 21 & & \\ \hline 31 & & \\ \hline 41 & & \\ \hline 51 & & \\ \hline \end{array}$$

Dann ist $V(B)^\psi \cong \prod_j \text{Sym}(\psi(B^j)) = \text{Sym}(\{12, 22, 21, 31, 41, 51\}) \times \text{Sym}(\{32, 42\}) \times \text{Sym}(\{11\})$ und $V(B)^\psi \text{ mod } V(B)^\psi \cap V(A)$ besteht aus allen $\pi \in \text{Sym}(A)$, die folgende Eigenschaften haben: π stabilisiert jede der Mengen $\{12, 22, 21, 31, 41, 51\}, \{32, 42\}, \{11\}$, und die Einschränkungen von π auf $\psi(B^1) \cap A^1 = \{21, 31, 41, 51\}$, $\psi(B^2) \cap A^2 = \{12, 22\}$, $\psi(B^3) \cap A^3 = \{32, 42\}$ sowie $\psi(B^3) \cap A^1 = \{11\}$ sind jeweils \leq_t -isoton.

In der folgenden Illustration dieser Traversalen dürfen Elemente zwischen benachbarten Doppelstrichen unter Respektierung der lokalen \leq_t -Ordnungsbedingung vertauscht werden:

$$V(B)^\psi \text{ mod } V(B)^\psi \cap V(A) = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} 12 & 22 & 21 & 31 & 41 & 51 \\ \hline \nearrow & & \nearrow & & \nearrow & \nearrow \\ \hline \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} 32 & 42 \\ \hline \nearrow & \nearrow \\ \hline \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} 11 \\ \hline \nearrow \\ \hline \end{array} \right\|.$$

Die obige Transversale hat $\binom{6}{2,4} \cdot \binom{2}{2} \cdot \binom{1}{1} = \binom{6}{2} = 15$ Elemente. Eines dieser Elemente ist die Permutation $\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 12 & 22 & 21 & 31 & 41 & 51 \\ \hline 22 & 41 & 12 & 21 & 31 & 51 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} 32 & 42 \\ \hline 32 & 42 \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 11 \\ \hline 11 \\ \hline \end{array} \right)$. \square

Nach diesem Exkurs über verallgemeinerte Laplace-Entwicklungen fahren wir jetzt im eigentlichen Beweis von Schritt 1 fort, indem wir die bereits angedeutete Totalordnung von $\text{BT}(\alpha, \beta)$ nun präzisieren.

Definition. Eine Folge $(\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ heißt *Partition* von n gdw $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_h > 0$, $\lambda_1 + \dots + \lambda_h = n$. Vermöge $(\lambda_1, \dots, \lambda_h) \mapsto \bigcup_{i=1}^h \{(i, 1), \dots, (i, \lambda_i)\}$ identifizieren wir Partitionen und zugehörige Diagramme. Die Buchstaben λ, μ, ν bezeichnen im folgenden stets Partitionen (\equiv Diagramme). Aus technischen Gründen identifizieren wir $(\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ mit $(\lambda_1, \dots, \lambda_h, 0, \dots, 0)$. Statt Diagramme durch die Folge der Zeilenlängen zu beschreiben, hätten wir auch die Folge der Spaltenlängen zur Kodierung benutzen können. Dies führt auf die zu λ *konjugierte Partition* $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots)$, $\lambda'_j := |\{i | \lambda_i \geq j\}|$.

Definition. Sei $(P, Q) \in \text{BT}(\alpha, \beta)$ von Gestalt μ und $(W, Z) \in \text{BT}(\alpha, \beta)$ von Gestalt ν . Wir schreiben $(P, Q) \leq (W, Z)$ gdw

- entweder $\mu' > \nu'$ ist (d.h. die erste nichtverschwindende Differenz von $\mu'_i - \nu'_i$ ist positiv)
- oder $\mu = \nu$ und die Folge $(p_{11}, p_{21}, \dots, p_{12}, p_{22}, \dots; q_{11}, q_{21}, \dots, q_{12}, q_{22}, \dots)$, die man durch spaltenweises Lesen von P und Q erhält, ist lexikographisch kleiner oder gleich der entsprechenden Folge zu (W, Z) . (0)

Wir zeigen nun per Induktion nach der gerade eingeführten Totalordnung in $\text{BT}(\alpha, \beta)$:

$$(U, V) \in \text{BT}(\alpha, \beta) \text{ nicht standard} \Rightarrow (U|V) \in \sum_{(S,T) < (U,V)} \mathbf{Z}(S|T) \quad (1)$$

Beweis von (1).

Start.

Ist (U_0, V_0) das $<$ -kleinste Element von $\text{BT}(\alpha, \beta)$, so sind U_0, V_0 einspaltige Tableaux vom Inhalt α bzw. β . Sind alle $\alpha_i, \beta_j \in \{0, 1\}$, so ist (U_0, V_0) standard, andernfalls ist $(U_0|V_0) = 0$.

Schritt.

Sei $(U, V) \in \text{BT}(\alpha, \beta)$ und (1) gelte für alle $(U', V') < (U, V)$. Wir können annehmen, daß U und V beide spalteninjektiv von der Gestalt λ sind. Dann gibt es $\sigma, \tau \in V(\lambda)$ mit

- $U \circ \sigma, V \circ \tau$ sind streng monoton wachsend in jeder Spalte
- $(U \circ \sigma, V \circ \tau) \leq (U, V)$
- $(U|V) = \pm(U \circ \sigma|V \circ \tau)$.

Also bleibt der Fall zu untersuchen, wo U und V streng spaltenmonotone λ -Tableaux sind. Sei U^i (bzw. V^i) die i -te Spalte von U (bzw. V). Angenommen, U ist nicht standard. Dann liegt in zwei benachbarten Spalten (etwa der j -ten und der $(j+1)$ -ten) von U eine Verletzung der Standardität vor:

a_1	\leq	b_1
\wedge		\wedge
a_2	\leq	b_2
\wedge		\wedge
\vdots		\vdots
\wedge		\wedge
a_{k-1}	\leq	b_{k-1}
\wedge		\wedge
a_k	$>$	b_k
\wedge		\wedge
\vdots		\vdots
\vdots		\wedge
\vdots		b_t
\vdots		
\wedge		
a_s		

Wir sondern die Spalten vom Index j und $j+1$ aus:

$$(U|V) = \prod_i (U^i|V^i) = (U^j|V^j)(U^{j+1}|V^{j+1}) \cdot \prod_{j \neq i \neq j+1} (U^i|V^i). \quad (2)$$

Wir definieren $\varphi = \psi^{-1} : A \rightarrow B$ durch

$$\varphi = \begin{matrix} & 12 & 11 \\ & 22 & 21 \\ & \vdots & \\ & k-1, 2 & \\ k+1, 1 & & k1 \\ k+2, 1 & & 13 \\ & \vdots & \\ & \vdots & t-k, 3 \\ s+1, 1 & & \end{matrix} .$$

Sei $S := U^j U^{j+1}$ und $T := (V^j V^{j+1}) \circ \psi$. Dann folgt aus $(S|T)_\varphi = \psi(S|T)$ und $T \circ \varphi = V^j V^{j+1}$

$$(U^j U^{j+1}|V^j V^{j+1}) = - \sum_{1 \neq \sigma \in V(B) \uparrow \text{mod } V(B) \uparrow \cap V(A)} \text{sgn}(\sigma)(S \circ \sigma|T \circ \varphi) + \sum_{\tau \in V(A) \uparrow \text{mod } V(A) \uparrow \cap V(B)} \text{sgn}(\tau)(S \circ \psi|T \circ \tau). \quad (3)$$

Wegen $b_1 < \dots < b_k < a_k < \dots < a_s$ ist für alle unter der ersten Summe auftretenden Schiebepermutationen σ , $\sigma \neq 1$, $S \circ \sigma$ spaltenlexikographisch kleiner als S ; da ferner die erste Spalte von B länger ist als die erste Spalte von A , gilt für alle unter der zweiten Summe in (3) auftretenden Schiebepermutationen τ

$$(S \circ \psi, T \circ \tau) < (U^j V^{j+1}, V^j V^{j+1}).$$

Ersetzt man nun in Gleichung (2) den Term $(U^j | V^j)$ ($U^{j+1} | V^{j+1}$) durch die rechte Seite von Gleichung (3), so erhält man Behauptung (1). Analog behandelt man den Fall, wo V nicht standard ist. Damit ist Schritt 1 (Seite 4) vom Theorem bewiesen.

Schritt 2. $SBD(\alpha, \beta)$ ist \mathbb{Z} -linear unabhängig.

Zunächst eine Beweisskizze: Zu jedem $(S, T) \in SBT(\alpha, \beta)$ definieren wir einen sogenannten *Capelli-Operator* $C_{ST} \in \text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X]_d)$, $|\alpha| = |\beta| = d$. Dann führen wir eine reflexive und antisymmetrische Relation $\leftarrow \uparrow$ auf den standard Tableaux ein. Capelli-Operatoren, standard Bideterminanten und die Relation $\leftarrow \uparrow$ stehen wie folgt in Verbindung $((S, T), (U, V) \in SBT(\alpha, \beta))$:

$$C_{ST}(S|T) \neq 0 \tag{4}$$

$$C_{ST}(U|V) \neq 0 \Rightarrow S \leftarrow \uparrow U \text{ und } T \leftarrow \uparrow V \tag{5}$$

Aus diesen Eigenschaften ergibt sich die lineare Unabhängigkeit der standard Bideterminanten: Ist

$$0 = \sum_{(U,V) \in SBT(\alpha,\beta)} a_{UV} (U|V) \tag{6}$$

eine nicht-triviale lineare Relation, so hat die endliche, nichtleere Menge $\{(U, V) \mid a_{UV} \neq 0\}$ ein $\leftarrow \uparrow$ -maximales Element, etwa (S, T) . Wenden wir den Capelli-Operator C_{ST} auf (6) an, so liefern obige Eigenschaften von C_{ST} zusammen mit der $\leftarrow \uparrow$ -Maximalität von (S, T) folgenden Widerspruch:

$$\begin{aligned} 0 &= a_{ST} C_{ST}(S|T) + \sum_{(U,V) \neq (S,T)} a_{UV} C_{ST}(U|V) \\ &= a_{ST} C_{ST}(S|T) \neq 0. \end{aligned}$$

Ende der Beweisskizze.

Wir führen nun eine Klasse von Operatoren ein, aus der sich beweistechnisch die zweite fundamentale Methode ergibt. Zu dieser Klasse gehören insbesondere alle Capelli-Operatoren. Jeder Matrix $D = (d_{ij})$ über \mathbb{N}_0 mit $\sum_{i,j} d_{ij} = d$ ordnen wir einen linken Substitutionsoperator L_D und einen rechten Substitutionsoperator R_D aus $\text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X]_d)$ wie folgt zu.

Definition. Seien $U, V : A \rightarrow \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ d -elementig.

$$\text{Sub}_D(U) := \{S : A \rightarrow \mathbb{N} \mid \forall i, j \ d_{ij} = |S^{-1}\{i\} \cap U^{-1}\{j\}|\}$$

ist die Menge der D -Substitute von U .

$$L_D\{U|V\} := \sum_{S \in \text{Sub}_D(U)} \{S|V\}$$

$$\{U|V\}R_D := \sum_{T \in \text{Sub}_D(V)} \{U|T\}$$

definiert die *linke (rechte) D-Substitution* $L_D (R_D)$. Ist $\text{Sub}_D(U) = \emptyset$, so sei $L_D\{U|V\} = \{V|U\}R_D := 0$.

Grob gesprochen besteht $\text{Sub}_D(U)$ aus allen A -Tableaux, die man aus U dadurch erhält, indem man *simultan* und *disjunkt* für alle i und j genau d_{ij} Einträge j in U durch i ersetzt. L_D ist wohldefiniert, denn sind W, Z B -Tableaux mit $\{U|V\} = \{W|Z\}$, so existiert eine Bijektion $\beta : B \rightarrow A$ mit $W = U \circ \beta$ und $Z = V \circ \beta$. Eine triviale Rechnung zeigt dann, daß $\text{Sub}_D(U \circ \beta) = \text{Sub}_D(U) \circ \beta$. Analog zeigt man die Wohldefiniertheit von R_D . Wir beschreiben jetzt die Wirkung von D -Substitutionen auf Bideterminanten.

Lemma. $L_D(U|V) = \sum_{S \in \text{Sub}_D(U)} (S|V)$ und $(U|V)R_D = \sum_{T \in \text{Sub}_D(V)} (U|T)$.

Beweis. Seien U, V A -Tableaux. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L_D(U|V) &= L_D\{U|V\} \\ &= L_D\left(\sum_{\tau \in V(A)} \text{sgn}(\tau)\{U|V \circ \tau\}\right) \\ &= \sum_{\tau \in V(A)} \text{sgn}(\tau) \sum_{S \in \text{Sub}_D(U)} \{S|V \circ \tau\} \\ &= \sum_{S \in \text{Sub}_D(U)} (S|V). \end{aligned}$$

Analog zeigt man die zweite Aussage. \square

Korollar. $L_D(U|V) = \sum(S|V)$, wobei nur über die spalteninjektiven Elemente von $\text{Sub}_D(U)$ zu summieren ist. Enthält $\text{Sub}_D(U)$ insbesondere keine spalteninjektiven Tableaux, so ist $L_D(U|V) = 0$. Analoges gilt für R_D . \square

Zu den meisten der hier vorkommenden Paare (D, U) gibt es höchstens ein spalteninjektives D -Substitut von U . Dadurch wird die im Korollar auftretende Summe sehr überschaubar. Wir geben jetzt die uns besonders interessierenden D 's an.

Definition. Zu einem Tableau S bezeichne $D(S)$ die Matrix, die an der Position (i, j) angibt, wie oft in der i -ten Zeile von S die Zahl j vorkommt:

$$D(S)_{ij} := \left| \{i\} \times \mathbb{N} \cap S^{-1}\{j\} \right| .$$

Beispiel.

Für $S = \begin{matrix} 1133 \\ 234 \\ 4 \end{matrix}$ ist $D(S) = \begin{pmatrix} 2020 \\ 0111 \\ 0001 \end{pmatrix}$.

Definition. Ist (S, T) ein Bitableau, so heißt $L_{D(S)}$ der *linke Capelli-Operator* zu S , $R_{D(T)}$ der *rechte Capelli-Operator* zu T und $C_{ST} := L_{D(S)} \circ R_{D(T)}$ der *Capelli-Operator* zu (S, T) .

Für spätere Zwecke beweisen wir gleich eine leicht verallgemeinerte Version von $C_{ST}(S|T) \neq 0$. Diese Verallgemeinerung hängt eng zusammen mit folgendem

Sortierlemma. Sei λ ein Diagramm. $U : \lambda \rightarrow \mathbb{N}$ sei in jeder Spalte streng monoton wachsend. Ordnet man die Einträge in jeder Zeile von U von links nach rechts schwach monoton ansteigend an, so geht dadurch die strenge Spaltenmonotonie nicht verloren, d.h., es entsteht ein Tableau $U^{st} : \lambda \rightarrow \mathbb{N}$, welches standard ist.

Definition. U^{st} heißt die *Standardisierung* von U .

Beispiel

$$\text{Zu } U = \begin{array}{c} 12113 \\ 34325 \\ 4554 \\ 5 \end{array} \text{ ist } U^{st} = \begin{array}{c} 11123 \\ 23345 \\ 4455 \\ 5 \end{array}$$

Beweis des Sortierlemmas durch Induktion nach dem größten Eintrag m in U .

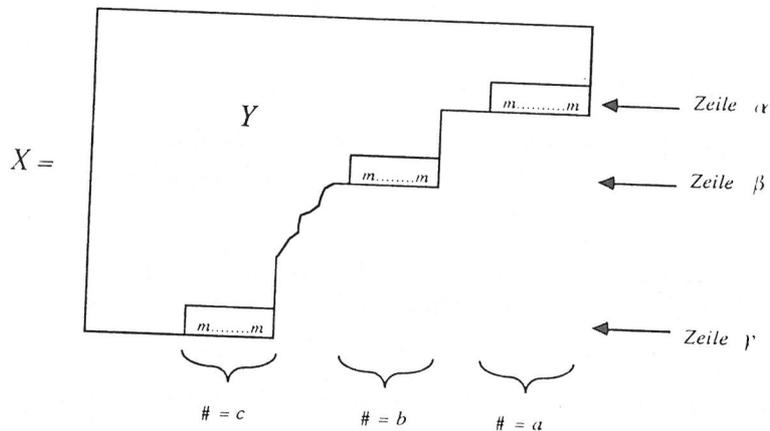
$m = 1$. Da U in den Spalten streng monoton wächst, ist notwendigerweise $U = 11\dots 1 = U^{st}$.

$m > 1$. Wegen der strengen Spaltenmonotonie von U befinden sich die m 's in U an den Spaltenenden. Indem wir nun zunächst die gleichlangen Spalten von U lexikographisch nach dem letzten Eintrag umordnen, erhalten wir ein streng spaltenmonotones λ -Tableau X mit $X^{st} = U^{st}$.

Beispiel

$$\text{Zu } U = \begin{array}{c} 12113 \\ 34325 \\ 4554 \\ 5 \end{array} \text{ ist ein mögliches } X = \begin{array}{c} 11213 \\ 32435 \\ 4455 \\ 5 \end{array} \text{ mit "5-freiem" Anteil } Y = \begin{array}{c} 11213 \\ 3243 \\ 44 \\ 4 \end{array}$$

Sei allgemein Y der " m -freie" Anteil von X :



Mit X ist auch Y streng spaltenmonoton, und aufgrund der Maximalität von m bleiben beim Übergang $X \mapsto X^{st}$ die m 's an ihren Plätzen, d.h. $X \mapsto X^{st}$ wird i.w. beschrieben durch $Y \mapsto Y^{st}$. Nach Induktion ist Y^{st} standard, also auch $X^{st} (= U^{st})$. \square

Übung. Man beweise folgende Variante des Sortierlemmas: Ordnet man im schwach spaltenmonotonen λ -Tableau U die Einträge in jeder Zeile schwach monoton ansteigend an, so geht dadurch die schwache Spaltenmonotonie nicht verloren. \square

Satz. (Erste fundamentale Eigenschaft von Capelli-Operatoren) Sei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ ein Diagramm, und seien U, V streng spaltenmonotone λ -Tableaux. Bezeichnet $T_\lambda : \lambda \rightarrow \mathbb{N}$ die Projektion $(i, j) \mapsto i$, so gilt:

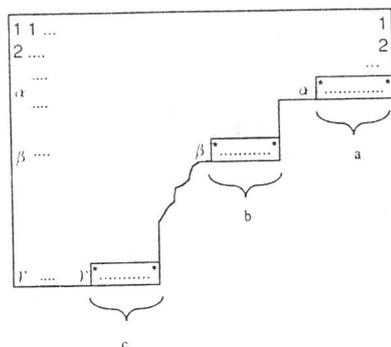
$$L_{D(U)}(U|V) = (T_\lambda|V) \neq 0$$

$$(U|V)R_{D(V)} = (U|T_\lambda) \neq 0$$

$$C_{UV}(U|V) = (T_\lambda|T_\lambda) \neq 0.$$

Beweis. Es genügt, die erste Behauptung zu beweisen. Wir halten an den Bezeichnungen des letzten Beweises fest. Zunächst bemerken wir, daß für alle Zeilenpermutationen $\sigma \in H(\lambda)$ gilt: $D(U) = D(U \circ \sigma)$.

Die Umordnung der Spalten von U , um X zu bekommen, kann durch eine geeignete Zeilenpermutation $\sigma \in H(\lambda)$ simuliert werden: $X = U \circ \sigma$. Also ist $(U|V) = (X|V \circ \sigma)$ und $L_{D(U)}(U|V) = L_{D(X)}(X|V \circ \sigma)$. Ist Y von Diagrammgestalt μ , so können wir per Induktion annehmen, daß T_μ einziges spalteninjektives Tableau in $\text{Sub}_{D(Y)}(Y)$ ist. Also sind alle spalteninjektiven Tableaux in $\text{Sub}_{D(X)}(X)$ notwendigerweise von folgendem Typ



wo die $a + b + \dots + c$ *'s simultan und disjunkt durch a α 's, b β 's, \dots , c γ 's ersetzt werden müssen. Offensichtlich ist T_λ die einzige spalteninjektive Lösung. Also gilt:

$$\begin{aligned} L_{D(U)}(U|V) &= L_{D(X)}(X|V \circ \sigma) \\ &= (T_\lambda|V \circ \sigma) \\ &= (T_\lambda \circ \sigma^{-1}|V) \\ &= (T_\lambda|V) \\ &\neq 0. \quad \square \end{aligned}$$

Wir wenden uns nun der Relation $\leftarrow \uparrow$ zu.

Definition. Tableaux $S : A \rightarrow \mathbb{N}$, $U : B \rightarrow \mathbb{N}$ heißen *zeilenähnlich* ($S \leftrightarrow U$) gdw für alle i gilt: Inhalt (i -ter Zeile von S) = Inhalt (i -ter Zeile von U). Analog definiert man *Spaltenähnlichkeit* ($S \downarrow U$). S heißt *zeilen-spalten-transformierbar* in U ($S \leftarrow \uparrow U$) gdw ein Z existiert mit $S \leftrightarrow Z \downarrow U$.

Beispiel.

$$S = \begin{array}{ccc} & 1124 & \\ 233 & \longleftrightarrow & \begin{array}{cc} 112 & 4 \\ 3 & 23 \\ 54 & \\ 6 & 6 \end{array} = Z, \\ 45 & & \\ 6 & & \end{array}$$

also $S \leftarrow \uparrow U$. \square

Die Relation $\leftarrow \uparrow$ ist reflexiv, aber i.a. nicht antisymmetrisch, sie wird es aber, wenn man sich auf standard Tableaux beschränkt:

Satz. Für standard Tableaux S, T gilt: $S = T \Leftrightarrow S \leftarrow \uparrow T \wedge T \leftarrow \uparrow S$.

Beweis.

" \Rightarrow ": trivial.

" \Leftarrow ": Für $U : A \rightarrow \mathbb{N}$ und $p, q \in \mathbb{N}$ sei $a_{pq}(U) := |\{(i, j) \in A \mid i \leq p \wedge u_{ij} \leq q\}|$ die Anzahl der Einträge $\leq q$ in den ersten p Zeilen von U . Aus $S \leftrightarrow Z \downarrow T$ folgt für alle p, q : $a_{pq}(S) = a_{pq}(Z) \leq a_{pq}(T)$. Zusammen mit $T \uparrow S$ ergibt sich für alle p, q : $a_{pq}(S) = a_{pq}(T)$. Da S und T standard sind, folgt daraus $S = T$. \square

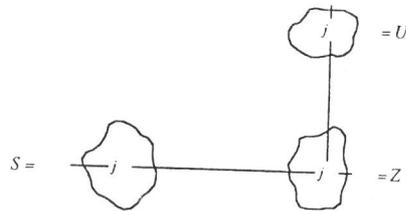
Korollar. Für standard Tableaux S, T gleichen Inhalts gilt: $S \uparrow T \Rightarrow S \trianglelefteq T$. Hier bezeichnet \trianglelefteq die bekannte Dominanzhalbordnung $S \trianglelefteq T \Leftrightarrow \forall p, q \ a_{pq}(S) \leq a_{pq}(T)$ von standard Tableaux.

Der folgende Satz mit seinen Folgerungen unterstreicht die Bedeutung der Relation \uparrow .

Satz. Sind (S, T) und (U, V) zwei Bitableaux gleichen Inhalts (α, β) , und sind alle $\alpha_i, \beta_j \in \{0, 1\}$, so gilt:

$$C_{ST}(U|V) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad S \uparrow U \wedge T \uparrow V.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß unter obigen Voraussetzungen gilt: $L_{D(S)}(U|V) \neq 0 \Leftrightarrow S \uparrow U$. Da S und U Bijektionen mit gleichem Bild sind, ist $L_{D(S)}(U|V) \neq 0$ gdw für alle i die Einträge der i -ten Zeile von S in U in verschiedenen Spalten stehen, d.h.

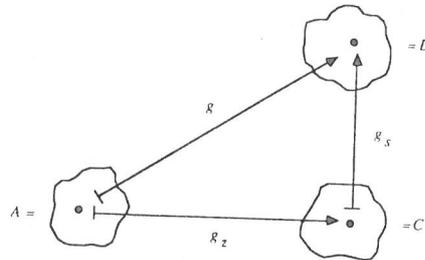


liefert eine wohldefinierte Bijektion Z mit $S \leftrightarrow Z \downarrow U$, d.h. $S \uparrow U$. \square

Satz. (Zweite fundamentale Eigenschaft von Capelli-Operatoren) Für Bitableaux (S, T) und (U, V) gleichen Inhalts gilt:

$$\begin{aligned} L_{D(S)}(U|V) \neq 0 &\Rightarrow S \uparrow U, \\ (U|V)R_{D(T)} \neq 0 &\Rightarrow T \uparrow V, \\ C_{ST}(U|V) \neq 0 &\Rightarrow S \uparrow U \text{ und } T \uparrow V. \end{aligned}$$

Beweis. S habe Gestalt A , U Gestalt B . Dann folgt aus $L_{D(S)}(U|V) \neq 0$ die Existenz einer Bijektion $g : A \rightarrow B$ mit $U \circ g = S$ und $|g(i\text{-ter Zeile von } A) \cap y\text{-ter Spalte von } B| \leq 1 \quad (\forall i, y)$. Also ist



eine wohldefinierte Faktorisierung von g : $g = g_s \circ g_z$. Nun ist $S = U \circ g = (U \circ g_s) \circ g_z \leftrightarrow U \circ g_s \downarrow U$, d.h. $S \uparrow U$. Die anderen Aussagen beweist man analog. \square

Damit ist nicht nur das Theorem bewiesen, sondern es sind auch die beiden Beweismethoden in der Form vorgestellt worden, wie sie in den Anwendungen immer wieder benötigt werden.

Sei (U, V) streng spaltenmonotones Bitableau vom Inhalt (α, β) . Die zugehörige Bideterminante ist nach dem Theorem eindeutig darstellbar als \mathbb{Z} -Linearkombination von standard Bideterminanten gleichen Inhalts:

$$(U|V) = \sum_{(S,T) \in \text{SBT}(\alpha, \beta)} a_{ST, UV} (S|T). \quad (7)$$

Das nächste Resultat macht u.a. a-priori-Aussagen über das Verschwinden gewisser *Entwicklungskoeffizienten*:

Satz. Sei (U, V) streng spaltenmonotones μ -Bitableau und (S, T) ein standard Bitableau gleichen Inhalts. Dann gilt:

- $a_{ST, UV} \neq 0 \Rightarrow (S, T) \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} (U, V)$.
- $a_{U^{st}V^{st}, UV} = 1$.

Definition. Ist S standard, U streng spaltenmonoton, so soll $S \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} U$ bedeuten: es gibt standard(!) Tableaux S_1, \dots, S_r mit $S = S_1 \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} S_2 \dots S_r \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} U$. Analog bedeutet $(S, T) \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} (U, V)$: es gibt standard Bitableaux $(S_1, T_1), \dots, (S_r, T_r)$ mit $S = S_1 \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} S_2 \dots S_r \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} U$ und $T = T_1 \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} T_2 \dots T_r \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} V$.

Bemerkung. Trivialerweise gilt: $((S, T) \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} (U, V)) \Rightarrow (S \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} U \text{ und } T \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} V)$, aber die Umkehrung gilt i.a. nicht, da bei der Relation $\stackrel{\uparrow}{\leftarrow}$ die (S_i, T_i) gleiche Gestalt haben müssen!

Beweis des Satzes. Sei (S, T) ein $\stackrel{\uparrow}{\leftarrow}$ -maximales Element, das im Träger $\{(W, Z) | a_{WZ, UV} \neq 0\}$ von $(U|V)$ liegt. Wendet man den Capelli-Operator C_{ST} auf Gleichung (7) an, so liefert die $\stackrel{\uparrow}{\leftarrow}$ -Maximalität von (S, T) : $C_{ST}(U|V) = a_{ST, UV} C_{ST}(S|T) \neq 0$. Also gilt $S \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} U$ und $T \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} V$. Ist (W, Z) ein nicht $\stackrel{\uparrow}{\leftarrow}$ -maximales Element aus dem Träger von $(U|V)$, so existiert ein $\stackrel{\uparrow}{\leftarrow}$ -maximales Element (S, T) aus dem Träger mit $(W, Z) \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} (S, T)$, also gilt auch $(W, Z) \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} (U, V)$. Das beweist die erste Aussage. Die zweite Aussage ergibt sich aus $C_{U^{st}V^{st}}(U|V) = C_{UV}(U|V) = (T_\mu | T_\mu)$ und der Bemerkung, daß kein standard Tableau $W \neq U^{st}$ existiert mit $U^{st} \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} W \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} U$. \square

Als nächstes deuten wir einen Algorithmus zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten an. Seien $(S_1, T_1) < \dots < (S_r, T_r)$ sämtliche standard Bitableaux vom Inhalt (α, β) . (S_i, T_i) habe Gestalt λ^i . C_i sei der zu (S_i, T_i) gehörige Capelli-Operator. Die Totalordnung \leq sei eine Linearisierung der Partialordnung

$$\stackrel{\uparrow}{\leftarrow}: \quad (S_i, T_i) \stackrel{\uparrow}{\leftarrow} (S_j, T_j) \Rightarrow i \leq j.$$

Wir wählen im folgenden immer die in (0) definierte spaltenlexikographische Totalordnung. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \forall i \quad C_i(S_i|T_i) &= (T_{\lambda^i} | T_{\lambda^i}) \\ \forall i > j \quad C_i(S_j|T_j) &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Sei $(W, T) \in \text{BT}(\alpha, \beta)$. Wenden wir auf

$$(W|Z) = \sum_{j=1}^r a_j (S_j|T_j)$$

alle Capelli-Operatoren C_i an, so erhalten wir (in Matrixschreibweise) folgendes Polynomgleichungssystem:

$$(C_i(S_j|T_j)) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1(W|Z) \\ \vdots \\ C_r(W|Z) \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir in der i -ten Zeile nur den Koeffizienten des Monoms $\{T_{\lambda^i}|T_{\lambda^i}\}$, so erhalten wir mit (8) das folgende lineare Gleichungssystem zur Berechnung der Entwicklungskoeffizienten a_1, \dots, a_r :

$$\begin{pmatrix} 1 & & \xi_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_r \end{pmatrix};$$

hier bezeichnet ξ_{ij} (bzw. b_j) den Koeffizienten von $\{T_{\lambda^i}|T_{\lambda^i}\}$ in $C_i(S_j|T_j)$ (bzw. in $C_i(W|Z)$). Wir bemerken, daß die Matrix (ξ_{ij}) nicht von (W, Z) abhängt. Hat man also, wie bei den folgenden Anwendungen im nächsten Kapitel deutlich wird, viele verschiedene $(W|Z)$ gleichen Inhalts zu entwickeln, so ist es ratsam, einmal die Inverse der Matrix (ξ_{ij}) zu berechnen. Die restliche Arbeit setzt sich dann zusammen aus der Berechnung der b_i und anschließender Multiplikation von oberer Dreiecksmatrix $(\xi_{ij})^{-1}$ mit dem Spaltenvektor (b_i) .

Beispiel. $\alpha = (2, 1, 2)$, $\beta = (1, 3, 1)$.

$$\begin{aligned} (S_1, T_1) &= \begin{pmatrix} 113 & 122 \\ 2 & , 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 113 & 122 \\ 23 & , 23 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 112 & 122 \\ 33 & , 23 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1133 & 1223 \\ 2 & , 2 \end{pmatrix} \\ &< \begin{pmatrix} 1133 & 1222 \\ 2 & , 3 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1123 & 1222 \\ 3 & , 3 \end{pmatrix} < (11233, 12223) = (S_8, T_8) \end{aligned}$$

zählt sämtliche standard Bitableaux vom Inhalt (α, β) auf.

$$(\xi_{ij}) = \begin{bmatrix} 11010011 \\ 1012011 \\ 100111 \\ 10001 \\ 1000 \\ 101 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für $(W, Z) = \begin{pmatrix} 121 & 212 \\ 33 & , 32 \end{pmatrix}$ ist $(W^{st}, Z^{st}) = \begin{pmatrix} 112 & 122 \\ 33 & , 23 \end{pmatrix} = (S_3, T_3)$.

Die Anordnung der standard Bitableaux hat zur Folge, daß für die Entwicklungskoeffizienten a_1, \dots, a_r zu einem streng spaltenmonotonen Bitableau (W, Z) vom Inhalt (α, β) im Falle $(W^{st}, Z^{st}) = (S_h, T_h)$ gilt: $a_h = 1, a_{h+1} = \dots = a_r = 0$. In dem Fall ist also nur die $h \times h$ -Hauptuntermatrix von (ξ_{ij}) zu invertieren, um die restlichen Koeffizienten a_1, \dots, a_{h-1} zu erhalten.

In unserem konkreten Beispiel ist wegen $b_1 = b_2 = -1, b_3 = 1$

$$\begin{bmatrix} 110 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

also $a_3 = 1, a_2 = -1, a_1 = 0$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 121 & | & 212 \\ 33 & | & 32 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 113 & | & 122 \\ 23 & | & 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 112 & | & 122 \\ 33 & | & 23 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Weitere Vereinfachungen ergeben sich aufgrund folgender

Übung. Ist (U, V) ein λ -Bitableau, V standard, so gilt für jedes standard λ -Bitableau (S, T) , das im Träger von $(U|V)$ liegt, $T = V$.

Die in diesem Kapitel gemachten Aussagen bleiben richtig, wenn man überall \mathbf{Z} durch einen beliebigen kommutativen Ring \mathbf{R} mit Einselement $1_{\mathbf{R}} \neq 0$ ersetzt. Anders ist es bei folgendem Resultat, das wir ohne Beweis angeben (vgl. []).

Satz. Sei \mathbf{R} ein kommutativer Ring mit Einselement $1_{\mathbf{R}} \neq 0$. Dann gilt: Die L -symmetrisierten Bideterminanten (bzw. R -symmetrisierten Bideterminanten, bzw. L -Bipermanenten (= R -Bipermanenten)) zu den standard Bitableaux bilden eine \mathbf{R} -Basis von $\mathbf{R}[X]$ gdw \mathbf{Q} ein Unterring von \mathbf{R} ist (incl. $1_{\mathbf{Q}} = 1_{\mathbf{R}}$).

3. ANWENDUNGEN IN DER DARSTELLUNGSTHEORIE

Wir wollen in diesem Kapitel mit Hilfe der gerade besprochenen Methoden die Darstellungstheorie zweier Serien von Gruppen entwickeln. Zunächst erinnern wir an grundlegende Definitionen, Fakten und Problemstellungen.

Sei G eine Gruppe, k ein Körper. Eine k -Darstellung von G ist ein Gruppenmorphismus $D : G \rightarrow GL(V)$, $V \simeq k^r$; V heißt *Darstellungsraum* zur Darstellung D , r heißt *Grad* der Darstellung. Will man konkret rechnen, wählt man in V eine Basisfolge aus, beschreibt die k -linearen Abbildungen $D(g)$, $g \in G$, durch Matrizen bzgl. dieser Basisfolge und erhält so eine k -*Matrixdarstellung* von G , das ist ein Gruppenmorphismus $\mathbf{D} : G \rightarrow GL(r, k)$. Verschiedene Basisfolgen liefern zu D i.a. verschiedene (aber als äquivalent angesehene) Matrixdarstellungen von G . Dementsprechend heißen k -Darstellungen $D_i : G \rightarrow GL(V_i)$ ($i = 1, 2$) *äquivalent* gdw ein k -Isomorphismus $T : V_1 \rightarrow V_2$ existiert, so daß für alle $g \in G$ gilt: $D_2(g) = T \circ D_1(g) \circ T^{-1}$. Mit diesen Begriffen können wir nun eine zentrale Aufgabenstellung der k -Darstellungstheorie einer Gruppe G formulieren:

- Klassifiziere bis auf Äquivalenz alle k -Darstellungen von G .

Es hat sich gezeigt, daß die Natur der k -Darstellungstheorie einer endlichen Gruppe G wesentlich abhängt vom Verhältnis $\text{char } k$ und $|G|$. Zwei Fälle sind zu unterscheiden: gewöhnliche Darstellungstheorie ($\text{char } k \nmid |G|$) und modulare Darstellungstheorie ($\text{char } k \mid |G|$). Wir beschränken uns hier auf Hinweise zur gewöhnlichen Darstellungstheorie, obwohl auch mit den Methoden des letzten Kapitels Resultate in der modularen Darstellungstheorie erzielt wurden []. Im Fall der gewöhnlichen Darstellungstheorie sind aufgrund der Voraussetzung Mittelungsprozesse $|G|^{-1} \sum_{g \in G} \dots$ erlaubt. Mit einem solchen Mittelungsprozeß beweist man den

Satz von MASCHKE. Teilt die Charakteristik des Körpers k die Ordnung der endlichen Gruppe G nicht, so ist jede k -Darstellung $D : G \rightarrow GL(V)$ direkte Summe von irreduziblen k -Darstellungen.

Das bedeutet, $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ ist direkte Summe von k -Unterräumen V_i ($\neq 0$), die V_i sind G -invariant (d.h. $D(g)V_i \subseteq V_i, \forall g \in G$), und zudem gibt es in V_i außer 0 und V_i keine weiteren G -invarianten Teilräume. Die Einschränkung von D auf V_i liefert eine *irreduzible* Darstellung $D_i : G \rightarrow GL(V_i)$. Wir schreiben: $D = D_1 \oplus \dots \oplus D_s$. Ist $D = d_1 \oplus \dots \oplus d_t$ eine weitere Zerlegung von D in irreduzible Bestandteile, so folgt aus einem Satz von KRULL-REMAK-SCHMIDT $s = t$ sowie (nach etwaiger Umordnung) die Äquivalenz von D_i und d_i ($i = 1, \dots, s$). Für eine irreduzible k -Darstellung F von G ist also die Anzahl der i , für die D_i äquivalent zu F ist, unabhängig von der speziellen Zerlegung von D in irreduzible Bestandteile; diese Anzahl heißt die *Vielfachheit* von F in D . Das Klassifikationsproblem zerfällt damit im Fall der gewöhnlichen Darstellungstheorie so: (i) Bestimme ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen irreduzibler k -Darstellungen von G . (ii) Bestimme den Isomorphietyp einer beliebigen k -Darstellung von G , z.B. durch Beschreibung der oben genannten Vielfachheiten. Zwei Fragen drängen sich sofort zu (i) auf: Wieviele Äquivalenzklassen irreduzibler k -Darstellungen von G gibt es? Wo soll man nach Repräsentanten suchen? Zumindest theoretisch sind die Antworten schnell gegeben: Der k -Vektorraum kG mit k -Basis G ist Darstellungsraum von

G vermöge $R(g)x := gx$ ($g, x \in G$). Jede irreduzible k -Darstellung von G ist äquivalent zu einem irreduziblen Bestandteil dieser sog. regulären k -Darstellung R von G . Indem man jetzt noch beachtet, daß kG nicht nur k -Vektorraum ist, sondern via Gruppenmultiplikation auch Algebrenstruktur besitzt (kG heißt deswegen bezeichnenderweise die Gruppenalgebra von G über k), kann man die WEDDERBURNsche Theorie halbeinfacher Algebren anwenden. Die Endresultate lesen sich dann im Fall der gewöhnlichen Darstellungstheorie so:

Satz. (i) Die Maximalzahl paarweise inäquivalenter irreduzibler k -Darstellungen von G ist kleiner oder gleich der Klassenzahl von G (das ist die Anzahl der Konjugationsklassen von G). (ii) Für die Vielfachheit $\langle F, R \rangle$, mit der eine irreduzible k -Darstellung F von G in der regulären k -Darstellung R vorkommt, gilt $1 \leq \langle F, R \rangle \leq \text{Grad}(F)$. (iii) Besitzt z.B. k eine primitive $|G|$ -te Einheitswurzel, so gilt Gleichheit in (i), und in (ii) gilt stets $\langle F, R \rangle = \text{Grad}(F)$.

In den folgenden Abschnitten geben wir derartige Repräsentantensysteme zu zwei Serien von Gruppen an. Danach befassen wir uns mit dem Problem, den Isomorphietyp gewisser nicht irreduzibler k -Darstellungen $D : G \rightarrow GL(V)$ zu bestimmen. Dazu genügt es, eine Kompositionsreihe von V anzugeben, das ist eine Kette $0 = U_0 \subset U_1 \dots \subset U_s = V$ von G -invarianten k -Unterräumen U_i von V , mit der Eigenschaft, daß zwischen U_i und U_{i+1} keine weiteren G -invarianten k -Unterräume von V liegen.

Wir bevorzugen im folgenden die modultheoretische Sprechweise: Ist eine k -Darstellung $D : G \rightarrow GL(V)$ gegeben, so schreiben wir gv statt $D(g)(v)$. Dann erfüllt diese äußere Multiplikation $G \times V \rightarrow V$ eine Reihe naheliegender Gesetze. V heißt dann ein kG -Linksmodul. Die G -invarianten k -Unterräume von V sind die kG -Untermodule von V . Besitzt ein kG -Linksmodul V außer 0 und V keine weiteren kG -Untermodule, so heißt V einfach. Einfache Module und irreduzible Darstellungen entsprechen einander. Ein Morphismus zwischen kG -Linksmodulen V_1, V_2 ist eine k -lineare Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$, die mit den Operationen von G vertauscht: $f(gv) = gf(v)$ ($g \in G, v \in V$).

Im folgenden geht es um die gewöhnliche Darstellungstheorie gewisser Permutationsgruppen. Die Permutationen lassen wir auf den linken Indizes der doppeltindizierten Unbestimmten operieren während die rechten Indizes kombinatorische Strukturen aufbauen, mit denen man die oben angesprochenen Vielfachheiten zumindest in Spezialfällen beschreiben kann.

3.1 Einfache QS_n -Moduln

S_n operiert als Gruppe von Algebra-Automorphismen auf $\mathbb{Z}[X]$ vermöge $\sigma X_{ij} := X_{\sigma i, j}$ ($\sigma i := i$ für $i > n$) und $\sigma \mapsto \prod_{i=1}^n X_{\sigma i, i}$ liefert eine Isomorphie $\mathbb{Z}S_n \simeq \mathbb{Z}_{(1^n), (1^n)}$ von $\mathbb{Z}S_n$ -Linksmoduln.

Übung. Für ein A -Bitableau (U, V) , $\sigma \in S_n$ und rechter Substitution R_D mit $\sum_{i,j} d_{ij} = |A|$ gilt: $\sigma\{U|V\} = \{\sigma \circ U|V\}$, $\sigma(U|V) = (\sigma \circ U|V)$ sowie $(\sigma\{U|V\})R_D = \sigma(\{U|V\}R_D)$. Insbesondere sind die rechten Capelli-Operatoren S_n -Morphismen. \square

Geeignete Anordnung der \mathbb{Z} -Basis $SBD(1^n, 1^n)$ von $\mathbb{Z}_{(1^n), (1^n)}$ deutet auf einen Zusammenhang hin mit dem Satz von Wedderburn über die Struktur halbeinfacher Gruppenalgebren: Seien $T_1 < \dots < T_r$ sämtliche standard Tableaux vom Inhalt (1^n) . Die Totalordnung \preceq sei eine Linearisierung der Partialordnung \uparrow : $T_i \uparrow T_j \Rightarrow T_i \preceq T_j$. (Wir wählen im folgenden immer die analog zu (0) definierte spaltenlexikographische Totalordnung.) Mittels $<$ bilden wir eine nur partiell besetzte $r \times r$ Matrix (b_{ij}) , die $SBD(1^n, 1^n)$ aufzählt:

$$b_{ij} := \begin{cases} (T_i|T_j) & , \text{ falls Gestalt}(T_i) = \text{Gestalt}(T_j) \\ \text{undefiniert} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

(iii) liefert auch einen zweiten Beweis von (i): $U_r(\mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}S_n$ ist $\mathbf{Z}S_n$ -Modul; $U_{r-1}(\mathbf{Z})$ als Kern des $\mathbf{Z}S_n$ -Morphismus $R_{D(\tau_e)}|_{U_e(\mathbf{Z})}$ ebenfalls, usw.)

(iv) ist trivial.

(v). Die Aussagen unter (v) ergeben sich aus folgenden Fakten: Der Spechtmodul $S_\lambda(k)$ kommt in $U_0(k) \subset U_1(k) \subset \dots \subset U_r(k)$ mindestens $(S_\lambda(k) : k)$ -mal als Faktor vor. Unter den gemachten Voraussetzungen ist kS_n eine halbeinfache k -Algebra (Satz von Maschke). Ist A halbeinfache k -Algebra und M ein einfacher A -Linksmodul, so kommt M (bis auf Isomorphie) in einer Kompositionsreihe vom A -Linksmodul A mindestens einmal und höchstens $(M : k)$ -mal als Faktor vor (Satz von Wedderburn). \square

Beispiel.

$$\begin{aligned} S_{(4)}(\mathbf{Q}) &= \ll (1234|1234) \gg_{\mathbf{Q}}, \\ S_{(3,1)}(\mathbf{Q}) &= \ll \begin{pmatrix} 134 & | & 111 \\ 2 & & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 124 & | & 111 \\ 3 & & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 & | & 111 \\ 4 & & 2 \end{pmatrix} \gg_{\mathbf{Q}}, \\ S_{(2,2)}(\mathbf{Q}) &= \ll \begin{pmatrix} 13 & | & 11 \\ 24 & | & 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & | & 11 \\ 34 & | & 22 \end{pmatrix} \gg_{\mathbf{Q}}, \\ S_{(2,1,1)}(\mathbf{Q}) &= \ll \begin{pmatrix} 14 & | & 11 \\ 2 & | & 2 \\ 3 & & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & | & 11 \\ 2 & | & 2 \\ 4 & & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 & | & 11 \\ 3 & | & 2 \\ 4 & & 3 \end{pmatrix} \gg_{\mathbf{Q}}, \\ S_{(1,1,1,1)}(\mathbf{Q}) &= \ll \begin{pmatrix} 1 & | & 1 \\ 2 & | & 2 \\ 3 & | & 3 \\ 4 & | & 4 \end{pmatrix} \gg_{\mathbf{Q}} \end{aligned}$$

ist eine Isomorphieliste einfacher $\mathbf{Q}S_4$ -Linksmoduln. \square

3.2 Einfache $\mathbf{Q}[S_\ell \wr S_m]$ -Moduln

Ist $n = l \cdot m$, so kann man $\{1, \dots, n\}$ in m gleichlange Blöcke B_1, \dots, B_m partitionieren: $B_1 = \{1, \dots, l\}$, $B_2 = \{l+1, \dots, 2l\}$, \dots , $B_m = \{(m-1)l+1, \dots, n\}$.

Das sogenannte *Kranzprodukt* (engl. wreath product)

$$S_\ell \wr S_m := \{\sigma \in S_n \mid \{\sigma B_1, \dots, \sigma B_m\} = \{B_1, \dots, B_m\}\}$$

ist ein semidirektes Produkt von $S_\ell \times \dots \times S_\ell$ (m -mal) mit S_m , hat also die Ordnung $(\ell!)^m \cdot m!$. Die hier gewählte Definition realisiert $S_\ell \wr S_m$ (im Fall $\ell > 1, m > 1$) als maximal imprimitive Untergruppe von S_n (wobei die B_1, \dots, B_m die Imprimitivitätsgebiete darstellen). Jedes $\sigma \in S_\ell \wr S_m$ läßt sich eindeutig zerlegen in einen $S_\ell \times \dots \times S_\ell$ -Anteil σ_1 und einen S_m -Anteil σ_2 : $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$. Dabei permutiert σ_1 nur die Elemente innerhalb eines jeden Blocks, und σ_2 permutiert die Blöcke als Ganzes. So ist z.B.

$$\sigma_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 & 7 & 8 & 9 & 12 & 11 & 10 \end{array} \right) \in S_3 \wr S_4$$

eine typische Permutation innerhalb der Blöcke und

$$\sigma_2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 10 & 11 & 12 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right) \in S_3 \wr S_4$$

eine typische Permutation der Blöcke.

Ziel dieses Abschnitts ist die Angabe einer Isomorphieliste einfacher $\mathbf{Q}[S_\ell \wr S_m]$ -Linksmoduln. Unser Vorgehen ähnelt dem des letzten Abschnitts. Wir beschreiben zunächst ein \mathbf{Z} -Erzeugendensystem von $\mathbf{Z}[S_\ell \wr S_m]$ und zeigen dann dessen lineare Unabhängigkeit. Diese \mathbf{Z} -Basis von $\mathbf{Z}[S_\ell \wr S_m]$ führt schließlich zur gesuchten Isomorphieliste.

Sei $\sigma \in S_\ell \wr S_m$. Wir teilen das zu σ gehörige Monom in Blockfaktoren auf: $\prod_{i=1}^n X_{\sigma_i, i} = \prod_{j=1}^m \prod_{i \in B_j} X_{\sigma_i, i}$. Dann stellen wir jeden einzelnen Blockfaktor dar als \mathbf{Z} -Linearkombination von standard Bideterminanten: $\prod_{i \in B_j} X_{\sigma_i, i} = \sum \sigma_{U_j, V_j}(U_j|V_j)$; dabei wird rechts summiert über alle injektiven standard Bitableaux (U_j, V_j) mit Bild $U_j = \sigma B_j =: B_{\hat{\sigma}_j}$ und Bild $V_j = B_j$. (Beachte, daß zu $\sigma \in S_\ell \wr S_m$ genau ein $\hat{\sigma} \in S_m$ existiert mit $\sigma B_j = B_{\hat{\sigma}_j} \ (\forall j)$.) Als nächstes multiplizieren wir aus und sortieren innerhalb der so entstehenden Potenzprodukte von standard Bideterminanten nach den auftretenden Gestalten:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n X_{\sigma_i, i} &= \prod_{j=1}^m \left(\sum \sigma_{U_j, V_j}(U_j|V_j) \right) \\ &= \sum_{((U_1, V_1), \dots, (U_m, V_m))} \sigma_{U_1, V_1} \cdots \sigma_{U_m, V_m} \cdot \prod_{\lambda} \prod_{j: \text{Gestalt}(U_j)=\lambda} (U_j|V_j). \end{aligned} \tag{8}$$

Grob gesprochen haben wir damit innerhalb der Blöcke begradigt und zudem gestaltemäßig sortiert.

Jetzt begradigen wir blockweise, und zwar separat jeden Ausdruck $\alpha = \prod_{j: \text{Gestalt}(U_j)=\lambda} (U_j|V_j)$. Wir können α ansehen als Bild des Monoms $a = \prod_{j: \text{Gestalt}(U_j)=\lambda} (\hat{\sigma}_j|j)$ unter der Substitution

$$\varphi : X_{\hat{\sigma}_j, k} \mapsto \begin{cases} (U_j|V_k) & \text{falls } U_j, V_k \text{ von gleicher Gestalt} \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir schreiben a als \mathbf{Z} -Linearkombination von standard Bideterminanten: $a = \sum_{(S, T)} \text{standard } a_{ST}(S|T)$. Da φ einen \mathbf{Z} -Algebrenmorphismus definiert, gilt: $\alpha = \varphi(a) = \sum_{(S, T)} \text{standard } a_{ST} \varphi(S|T)$. Indem wir dies oben einsetzen und ausmultiplizieren, erhalten wir $\prod X_{\sigma_i, i}$ ausgedrückt als \mathbf{Z} -Linearkombination von Produkten gewisser $\varphi(S|T)$. Diese Produkte der $\varphi(S|T)$ bilden die gesuchte \mathbf{Z} -Basis von $\mathbf{Z}[S_\ell \wr S_m]$. (Genauer es unten.)

Beispiel. Die oben allgemein beschriebene Vorgehensweise sieht im Spezialfall

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 3 & 2 & 6 & 5 & 4 \end{array} \right) \in S_3 \wr S_3$$

so aus:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^9 X_{\sigma_i, i} &= (789|123) \cdot (132|456) \cdot (654|789) \\ &= (789|123) \cdot \\ &\quad \left[(123|456) - \binom{12}{3} \binom{45}{6} + \binom{13}{2} \binom{45}{6} + \binom{12}{3} \binom{46}{5} - \binom{13}{2} \binom{46}{5} + \binom{1}{2} \binom{4}{5} \binom{4}{6} \right] \cdot \\ &\quad \left[(456|789) - \binom{45}{6} \binom{78}{9} \right] \\ &= \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \parallel \parallel \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \right) \end{aligned} \tag{9.1}$$

$$\begin{aligned} &- \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \parallel \parallel \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 6 \\ \hline \end{array} \parallel \parallel \begin{array}{|c|} \hline 7 & 8 \\ \hline 9 \\ \hline \end{array} \right) \\ &+ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \parallel \parallel \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 6 \\ \hline \end{array} \parallel \parallel \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & 9 \\ \hline \end{array} \parallel \parallel \begin{array}{|c|} \hline 7 & 8 \\ \hline 9 \\ \hline \end{array} \right) \\ &+ \dots \quad (\text{insgesamt 12 Potenzprodukte}) \end{aligned} \tag{9.2}$$

Hier haben wir (in Verallgemeinerung von $(i_1 \dots i_d | j_1 \dots j_d) := X_{i_1 j_1} \cdots X_{i_d j_d}$) für Bitableaux $(I_1, J_1), \dots, (I_d, J_d)$ folgende Schreibweise benutzt:

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline I_1 & I_2 \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|} \hline I_d \\ \hline \end{array} \parallel \parallel \begin{array}{|c|c|} \hline J_1 & J_2 \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|} \hline J_d \\ \hline \end{array} \right) := (I_1|J_1) \cdots (I_d|J_d).$$

(Sind die hier auftretenden Gestalten der I 's und J 's l -elementige Diagramme, so schreiben wir jedes I_a und jedes J_b jeweils links- und topbündig in ein Quadrat der Kantenlänge l .) Beachte, daß in der obigen Formel für $\prod X_{\sigma_i, i}$ in jedem Kasten wiederholungsfrei sämtliche Elemente genau eines der Blöcke B_1, \dots, B_m stehen und in jedem Potenzprodukt stets links und rechts sämtliche Blöcke vorkommen. Ersetzen wir als nächstes z.B. in

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \parallel \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \right)$$

jedes vorkommende Tableau durch den zugehörigen Blockindex, so entsteht das Monom $(312|123)$, das wir als \mathbb{Z} -Linearkombination von standard Bideterminanten schreiben können:

$$(312|123) = (123|123) - \binom{12}{3|3} + \binom{13}{2|3} - \binom{13}{2|2} + \binom{1}{3|3}.$$

Sei $U_1 = V_1 := 123$, $U_2 = V_2 := 456$, $U_3 = V_3 := 789$.

Die Substitution $X_{i,j} \mapsto (U_i|V_j)$ führt obige Identität über in

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \parallel \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \parallel \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \right) \\ &- \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 & & & \\ \hline \end{array} \parallel \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 & & & \\ \hline \end{array} \right) \\ &+ \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 4 & 5 & 6 & & & \\ \hline \end{array} \parallel \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 & & & \\ \hline \end{array} \right) \\ &- \left(\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 4 & 5 & 6 & & & \\ \hline \end{array} \parallel \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 4 & 5 & 6 & & & \\ \hline \end{array} \right) \\ &+ \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \parallel \begin{array}{|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \right). \end{aligned}$$

Wir haben die gerade benutzte Schreibweise zu präzisieren. Sind $(I_1, J_1), \dots, (I_d, J_d)$ A -Bitableaux, so heißt

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline I_1 & J_1 \\ \hline I_2 & J_2 \\ \hline \vdots & \vdots \\ \hline I_d & J_d \\ \hline \end{array} \right) := \det \begin{pmatrix} (I_1|J_1) & \dots & (I_1|J_d) \\ \vdots & & \vdots \\ (I_d|J_1) & \dots & (I_d|J_d) \end{pmatrix}$$

eine *Blockminore* zur Gestalt A . Im Fall $|A| = 1$ ist eine Blockminore eine gewöhnliche Minore. Potenzprodukte von Blockminoren (zu möglicherweise verschiedenen Gestalten) deuten wir (wie im Fall $|A| = 1$) durch

"blockspaltenweises" Hintereinanderschreiben an und nennen solche Gebilde *Blockbideterminanten*:

$$\left(\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 8 & \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \left\| \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 3 \\ \hline 1 & \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right) = \det \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline (12|43) \\ \hline (8|1) \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline (12|52) \\ \hline (8|2) \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline (12|16) \\ \hline (8|8) \end{array} \\ \hline \end{array} \right) \cdot \det \left(\begin{array}{|c|c|} \hline (613|422) & (613|123) \\ \hline (622|422) & (622|123) \end{array} \right).$$

Wir geben jetzt noch die Entwicklung des unter (9.2) stehenden Potenzproduktes an: Hier treten (im Gegensatz zu (9.1)) verschiedene Gestalten auf, die wir separat blockweise begründen:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \left\| \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 \\ \hline 9 & \end{array} \\ \hline \end{array} \right) = \\ & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \left\| \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 \\ \hline 9 & \end{array} \\ \hline \end{array} \right) - \\ & \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 \\ \hline 9 & \end{array} \\ \hline \end{array} \right) = \\ & \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \left\| \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 \\ \hline 9 & \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} \\ \hline \end{array} \right) - \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 7 & 8 & 9 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 5 \\ \hline 6 & \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 7 & 8 \\ \hline 9 & \end{array} \\ \hline \end{array} \left\| \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 7 & 8 \\ \hline 9 & \end{array} \\ \hline \end{array} \right).$$

Damit haben wir auch die kombinatorischen Strukturen angedeutet, die mit der gesuchten \mathbf{Z} -Basis von $\mathbf{Z}[S_\ell \wr S_m]$ verbunden sind. \square

Weitere Sprechweisen erläutern wir am *Blocktableau*

$$S = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 8 & \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 4 & \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 6 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} & \\ \hline \end{array}$$

In S gibt es 3 *Blockzeilen* und 2 *Blockspalten*. S hat die *Blockgestalt* $(2,2,1)$ und den Inhalt $(4,4,3,1,0,2,0,1)$. Der *Blockeintrag* $S_{21} = \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}$ hat *Gestalt* $(2,1)$. S hat 9 *Zeilen* und 6 *Spalten*. Die 3., 6. und 9. Zeile sowie die 3. Spalte von S sind leer. Definitionsgemäß sollen in einem *Blocktableau* S die *Blockeinträge* in einer *Blockspalte* gleiche *Gestalt* haben. Ein *A-Blockbitableau* ist ein Paar (S, T) von *Blocktableaux* gleicher *Blockgestalt* A , wo zudem für alle $(i, j) \in A$ gilt: $\text{Gestalt}(S_{ij}) = \text{Gestalt}(T_{ij})$. Einem *A-Blocktableau* (S, T) kann man (wie oben geschehen) eine *A-Blockbideterminante* zuordnen, die wir von jetzt an zur Vermeidung von Mißverständnissen mit $(S||T)$ bezeichnen wollen. Sei wieder $n = \ell \cdot m$. Wir denken uns die *Partitionen* von ℓ (etwa lexikographisch) angeordnet: $(1, 1, 1) < (2, 1) < (3)$.

Definition. Ein *Blocktableau* S heißt (ℓ, m) -*standard* gdw gilt:

- die *Blockgestalt* von S ist eine *Partition* μ von m ,
- S hat den Inhalt (1^n) ,
- alle S_{ij} sind *standard Tableaux* $((i, j) \in \mu)$,

- in S_{ij} stehen genau die Elemente eines Blocks $B_{p_{ij}}$,
- sind $(a, b), (i, j) \in \mu$ mit $a \leq i$ und $b \leq j$, haben weiter S_{ab}, S_{ij} gleiche Gestalt, so gilt $p_{ab} \leq p_{ij}$ (grob gesprochen: der λ -Anteil von S , λ Partition von ℓ , muß ein standard Tableau liefern, wenn man die Blockeinträge S_{ij} , die Gestalt λ haben, durch zugehörige Blockindizes p_{ij} ersetzt und Leerspalten eliminiert),
- sind die j -te und die $(j+1)$ -te Spalte von μ gleichlang, so ist $\text{Gestalt}(S_{1j}) \leq \text{Gestalt}(S_{1,j+1})$.

Ein Blockbitableau (S, T) ist (ℓ, m) -standard gdw S und T (ℓ, m) -standard sind.

Beispiel.

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 10 & 4 & 5 & 16 & 7 & 9 & 25 & 26 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 11 & & & 17 & 8 & & 27 & & & & \\ \hline 12 & & & 18 & & & & & & & \\ \hline 28 & 13 & 14 & 31 & 19 & 20 & 34 & 35 & & & \\ \hline 29 & & & 32 & 21 & & 36 & & & & \\ \hline 30 & & & 33 & & & & & & & \\ \hline 37 & 22 & 24 & & & & & & & & \\ \hline 38 & & & & & & & & & & \\ \hline 39 & & & & & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

- S ist Blocktableau der Blockgestalt $\mu = (6, 5, 2)$,
- S hat den Inhalt (1^{39}) ,
- alle S_{ij} sind standard,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 6 & 3 & 9 & 1 \\ \hline 10 & 5 & 11 & 7 & 12 & \\ \hline 13 & 8 & & & & \\ \hline \end{array}$$

stellt die Abbildung $(i, j) \in \mu \mapsto p_{ij}$ dar;

deren λ -Anteile $p(\lambda, S)$, λ Partition von $\ell (= 3)$, sind sämtlich standard Tableaux:

$$p((1, 1, 1), S) = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 6 \\ \hline 10 & 11 \\ \hline 13 & \\ \hline \end{array}; \quad p((2, 1), S) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 9 \\ \hline 5 & 7 & 12 \\ \hline 8 & & \\ \hline \end{array}; \quad p((3), S) = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array}$$

- bzgl. gleichlanger Spalten gilt: $\text{Gestalt}(S_{11}) \leq \text{Gestalt}(S_{12})$ und $\text{Gestalt}(S_{13}) \leq \text{Gestalt}(S_{14}) \leq \text{Gestalt}(S_{15})$. Also ist S ein $(3, 13)$ -standard Blocktableau. \square

Identifizieren wir die Permutation σ mit dem Monom $\prod X_{\sigma(i), i}$, so gilt:

Satz. Die Blockbideterminanten zu den (ℓ, m) -standard Blockbitableaux bilden eine \mathbf{Z} -Basis von $\mathbf{Z}[S_\ell \wr S_m]$.

Beweis. Die (ℓ, m) -standard Blockbideterminanten bilden ein \mathbf{Z} -Erzeugendensystem von $\mathbf{Z}[S_\ell \wr S_m]$: Sei (S, T) ein (ℓ, m) -standard Blockbitableau der Blockgestalt μ . Dann gilt für die zugehörige Blockbideterminante:

$$(S||T) = \sum_{\sigma \in V(\mu)} \text{sgn}(\sigma) \prod_{(i,j) \in \mu} (S_{\sigma(i),j} | T_{ij}).$$

Wegen $\{\text{Bild} S_{\sigma(i),j} \mid (i,j) \in \mu\} = \{B_1, \dots, B_m\} = \{\text{Bild} T_{ij} \mid (i,j) \in \mu\}$ liegt $(S||T)$ in $\mathbf{Z}[S_\ell \wr S_m]$. Zusammen mit dem bereits Gezeigten ergibt sich die zu Beweisbeginn gemachte Aussage.

Die (ℓ, m) -standard Blockbideterminanten sind \mathbf{Z} -linear unabhängig: Angenommen, $0 = \sum a_{UV} (U||V)$ ist eine nicht-triviale lineare Relation zwischen (ℓ, m) -standard Blockbideterminanten. Wir sondern mittels \uparrow ein (S, T) unter den (U, V) mit $a_{UV} \neq 0$ aus und erhalten einen Widerspruch, indem wir für den zu (S, T) gehörigen Capelli-Operator zeigen:

- $C_{ST}(S||T) \neq 0$
- $a_{UV} \neq 0, (U, V) \neq (S, T) \Rightarrow C_{ST}(U||V) = 0$.

Beweis von (i). Wir beschreiben zunächst schrittweise ein (S, T) . Für $1 \leq i \leq m$ und $a_{UV} \neq 0$ sei U_i (bzw. V_i) der Blockeintrag von U (bzw. V) mit B_i als Bild. Sei $W_1 \leftarrow \uparrow$ -maximal unter allen $U_1, a_{UV} \neq 0$. Sind W_1, \dots, W_{i-1} schon ausgewählt, so sei $W_i \leftarrow \uparrow$ -maximal unter allen U mit $a_{UV} \neq 0$ und $U_1 = W_1, \dots, U_{i-1} = W_{i-1}$. Sei $S \leftarrow \uparrow$ -maximales Blocktableau unter allen U mit $a_{UV} \neq 0$ und $U_1 = W_1, \dots, U_m = W_m$. Wir halten S fest und betrachten nur noch (S, Z) mit $a_{SZ} \neq 0$. Unter diesen Z wählen wir analog zur obigen Wahl von S ein T , haben also schließlich ein (S, T) mit $a_{ST} \neq 0$ und gewissen Zusatzeigenschaften gefunden. (S, T) habe Gestalt (nicht Blockgestalt!) A . Sei T_A die Projektion $A \ni (i, j) \mapsto i$. Behauptung (i) folgt nun aus der Tatsache, daß der Koeffizient des natürlichen Monoms $\{T_A | T_A\}$ in $C_{ST}(S || T)$ gleich 1 ist.

Beweis von (ii). Sei $a_{UV} \neq 0$ und $(U, V) \neq (S, T)$; etwa $U \neq S$. *Fall 1.* Es existiert ein kleinstes i mit $U_i \neq S_i$. Dann gibt es zwei verschiedene Zahlen, die in S_i in einer Zeile, in U_i aber in einer Spalte stehen. Also ist $C_{ST}(U || V) = 0$. *Fall 2.* $U_1 = S_1, \dots, U_m = S_m$. U und S haben also bis auf die Platzierung gleiche Blockeinträge. Nach Konstruktion gibt es zwei verschiedene Blockeinträge, die in S in einer Blockzeile, in U aber in einer Blockspalte stehen. Also ist auch hier $C_{ST}(U || V) = 0$, da mindestens eine Blockminore verschwindet, denn zu ihr gehört eine Matrix mit zwei gleichen Zeilen. Im Fall $U = S$ und $V \neq T$ argumentiert man analog. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Unter den "gewöhnlichen" μ -Tableaux nimmt die Projektion $T_\mu := (\mu \ni (i, j) \mapsto i)$ eine Sonderstellung ein. Wir definieren jetzt ein $S_\ell \wr S_m$ -Analogon. Ist μ q -spaltige Partition von m , sind $\lambda^1, \dots, \lambda^q$ Partitionen von ℓ , so sei $T_{\mu; \lambda^1, \dots, \lambda^q}$ das Blocktableau der Blockgestalt μ , deren (i, j) -ter Blockeintrag das λ^j -Tableau $(\lambda^j \ni (a, b) \mapsto (i-1) \cdot \ell + a)$ ist.

Definition. Eine Folge $(\mu; \lambda^1, \dots, \lambda^q)$ heißt (ℓ, m) -zulässig gdw gilt:

- μ ist eine Partition von m ,
- μ ist q -spaltig, d.h. $\mu_1 = q$,
- $\lambda^1, \dots, \lambda^q$ sind Partitionen von ℓ ,
- $\forall j < q (\mu'_j = \mu'_{j+1} \Rightarrow \lambda^j \leq \lambda^{j+1})$.

Definition. Sei $(\mu; \lambda^1, \dots, \lambda^q)$ (ℓ, m) -zulässig; \mathbb{R} ein beliebiger kommutativer Ring mit Einselement. Sei S ein beliebiges (ℓ, m) -standard Blocktableau der Blockgestalt μ mit Gestalt $(S_{i,j}) = \lambda^j (\forall (i, j) \in \mu)$. Der zyklische $\mathbb{R}[S_\ell \wr S_m]$ -Linksmodul

$$S_{\mu; \lambda^1, \dots, \lambda^q}(\mathbb{R}) := \mathbb{R}[S_\ell \wr S_m] \cdot (S || T_{\mu; \lambda^1, \dots, \lambda^q})$$

heißt ein verallgemeinerter Spechtmodul über \mathbb{R} .

Übung. Sei $(\mu; \lambda^1, \dots, \lambda^q)$ (ℓ, m) -zulässig. Wenn S alle (ℓ, m) -standard Blocktableaux der Blockgestalt μ mit Gestalt $(S_{i,j}) = \lambda^j$ durchläuft, so bilden die zugehörigen Blockbideterminanten $(S || T_{\mu; \lambda^1, \dots, \lambda^q})$ eine \mathbb{R} -Basis des verallgemeinerten Spechtmoduls $S_{\mu; \lambda^1, \dots, \lambda^q}(\mathbb{R})$. \square

Mit einer zu Abschnitt 3.1 analogen Argumentation erhält man folgenden

Satz. Sei k ein Körper, dessen Charakteristik die Ordnung von $S_\ell \wr S_m$ nicht teilt. Dann bilden die zu den (ℓ, m) -zulässigen Folgen gehörigen verallgemeinerten Spechtmoduln über k eine Isomorphieliste einfacher $k[S_\ell \wr S_m]$ -Linksmoduln. \square

Beispiel. Im Fall $\ell = m = 2$ ist

$$S_{(2);(2),(2)}(\mathbb{Q}), S_{(2);(1,1),(2)}(\mathbb{Q}), S_{(2);(1,1),(1,1)}(\mathbb{Q}), S_{(1,1);(2)}(\mathbb{Q}), S_{(1,1);(1,1)}(\mathbb{Q})$$

eine Isomorphieliste einfacher $\mathbb{Q}[S_\ell \wr S_m]$ -Linksmoduln. (Wir bemerken noch, daß $S_2 \wr S_2$ als 2-Sylowgruppe von S_4 isomorph zur Diedergruppe der Ordnung 8 ist.) \square

Literaturliste

1. Abeasis, S., Del Fra, A., "Young diagrams and ideals of Pfaffians", *Advances in Math.*, **35** (1980), 158-178.
2. Clausen, M., "Letter place algebras and a characteristic-free approach to the representation theory of the general linear and symmetric groups, I", *Advances in Math.*, **33** (1979), 161-191.
3. Clausen, M., "Letter place algebras and a characteristic-free approach to the representation theory of the general linear and symmetric groups, II", *Advances in Math.*, **38** (1980), 152-177.
4. Clausen, M., "Letter-Place-Algebren und ein charakteristik-freier Zugang zur Darstellungstheorie symmetrischer und voller linearer Gruppen", *Bayreuther Mathematische Schriften* **4** (1980), 151 S.
5. Clausen, M., "A straightening formula for bipermanents", *Linear and Multilinear Algebra*, **11** (1982), 33-38.
6. Clausen, M., "Dominance orders, Capelli operators, and straightening of bideterminants", *Europ. J. Combinatorics*, **5** (1984), 207-222.
7. Clausen, M., Stötzer, F., "Pictures and skew (reverse) plane partitions", *Springer Lecture Notes in Math.*, **969**, 100-114.
8. Clausen, M. Stötzer, F., "Pictures und Standardtableaux - Grundlagen und Algorithmen", *Bayreuther Mathematische Schriften*, **16** (1984), 1-122.
9. Clausen, M., Grabmeier, J., "On a class of cyclic S_n -modules", in Vorbereitung.
10. De Concini, C., Procesi, C., "A characteristic free approach to invariant theory", *Advances in Math.*, **21** (1976), 330-354.
11. De Concini, C., "Symplectic standard tableaux", *Advances in Math.*, **34** (1979), 1-27.
12. De Concini, C., Eisenbud, D., Procesi, C., "Young diagrams and determinantal varieties", *Inventiones Math.*, **56** (1980), 129-165.
13. De Concini, C., Strickland, E., "Traceless tensors and the symmetric group", *J. Algebra* **61** (1979), 112-128.
14. De Concini, C., Strickland, E., "On the variety of complexes", *Advances in Math.*, **41** (1981), 57-77.
15. Désarménien, J., "An algorithm for the Rota straightening formula", *Discrete Math.*, **30** (1980), 51-68.
16. Désarménien, J., Kung, J.P.S., Rota, G.-C., "Invariant theory, Young bitableaux and combinatorics", *Advances in Math.*, **27** (1978), 63-92.
17. Doubilet, P., Rota, G.-C., "Skew-symmetric invariant theory", *Advances in Math.*, **21** (1976), 196-201.
18. Doubilet, P., Rota, G.-C., Stein, J., "On the foundations of combinatorial theory: IX. Combinatorial methods in invariant theory", *Stud. Appl. Math.*, **53** (1974), 185-216.
19. James, G., Kerber, A., "The representation theory of the symmetric group", *Encyclopedia of Mathematics and its applications* **16**, Addison-Wesley, 1981.
20. Kerber, A., "Zur Darstellungstheorie von Kranzprodukten", *Can. J. Math.*, **20** (1968), 665-672.
21. Kung, J.P.S., Rota, G.-C., "On the differential invariants of a linear ordinary differential equation", *Proc. Roy Soc. Edinburgh* **89A** (1981), 111-123.
22. Mead, D. G., "Determinantal ideals, identities and the Wronskian", *Pacific J. Math.*, **42** (1972), 167-175.
23. Pommerening, K., "Invarianten unipotenter Gruppen", *Math. Z.*, **176** (1981), 359-374.
24. Rota, G.-C., Désarménien, J., "Théorie combinatoire des invariants classiques", *Séries de Mathématique Pures et Appliquées*, IRMA, Strasbourg, 1977.
25. Stein, J., "Hopf algebra structures on tensor products of \mathbb{Z} -modules", Thesis, Harvard University, 1980.
26. Strickland, E., "The symplectic group and determinants", *J. Algebra*, **66** (1980), 511-533.