# NOTE SUR UN ALGORITHME DE ZEILBERGER *

PAR

LAURENT HABSIEGER

RÉSUMÉ. — Un algorithme sur les partitions, dû à D. ZEILBERGER ([3]), a une interprétation évidente lorsqu'il est traduit en termes de mots.

ABSTRACT. — An algorithm on partitions, due to D. ZEILBERGER ([3]), has a natural interpretation in terms of words.

## 1. Introduction combinatoire

Rappelons tout d'abord quelques définitions usuelles. Un *mot* est une suite finie d'entiers strictement positifs, appelés *lettres*. L'ensemble des mots contenant $a_i$ fois la lettre $i$ sera noté $M(a_1, \ldots, a_n)$. Si $W = w_1 \cdots w_l$, le *nombre d'inversions* de $W$, noté $\operatorname{Inv} W$, sera, par définition, le nombre de couples $(i, j)$ avec $1 \leq i < j \leq l$ et $w_i > w_j$.

Une *partition* est une suite finie décroissante d'entiers naturels, appelés *parts*. L'ensemble des partitions ayant $a$ parts, chacune étant majorée par $b$ sera noté $P(a, b)$. Le poids d'une partition $\lambda$, noté $|\lambda|$, est égal, par définition, à la somme de ses parts.

Un *poids* $\omega$ sur un ensemble $A$ est une application de $A$ dans l'ensemble des entiers naturels. Si $\omega_1, \ldots, \omega_p$ sont des poids sur $A_1, \ldots, A_p$ respectivement, on prendra pour poids de $A_1 \times \cdots \times A_p$ le poids $\omega$ défini par $\omega(x_1, \ldots, x_p) = \sum_{i=1}^{p} \omega_i(x_i)$. Si $A$ est muni du poids $\omega$, la *fonction génératrice* de $(A, \omega)$ est $\sum_{a \in A} q^{\omega(a)}$. Dire que deux ensembles ont même fonction génératrice équivaut à dire qu'il existe une bijection entre eux, qui conserve les poids. Si de plus cette bijection est explicite, on notera $A \leftrightarrow B$, en sous-entendant les poids. Par exemple, l'inversion est un poids sur $M(a_1, \ldots, a_n)$. En fait on a même le théorème suivant.

---

* Ce texte a été composé au laboratoire de typographie de l'Université Louis-Pasteur de Strasbourg au moyen du préprocesseur *STRATEC* et traité à l'aide du formateur *TEX/SM 90*

THÉORÈME. — *Pour les poids usuels, on a :*

$$M(a,b) \longleftrightarrow P(a,b)\,.$$

*Démonstration.* — On utilise le diagramme de Ferrers d'une partition (*cf.* figure ci-dessous). On peut considérer ce diagramme comme un chemin à coordonnées entières $(x_i, y_i)_{0\le i\le a+b}$, joignant les points $(0,a)$ et $(b,0)$, tels que $(x_i, y_i) \in \{(x_{i-1}, y_{i-1}-1), (x_{i-1}+1, y_{i-1})\}$, pour $1 \le i \le a+b$. On lui associe un mot $W$ de $M(a,b)$, en convenant que la $i$-ième lettre de $W$ est 1 si $(x_i, y_i) = (x_{i-1}, y_{i-1}-1)$ et 2 si $(x_i, y_i) = (x_{i-1}+1, y_{i-1})$. Il est clair que l'on définit ainsi une bijection explicite, qui conserve les poids. Le lecteur qui désirerait de plus amples détails pourra consulter le livre d'ANDREWS ([1]). ∎

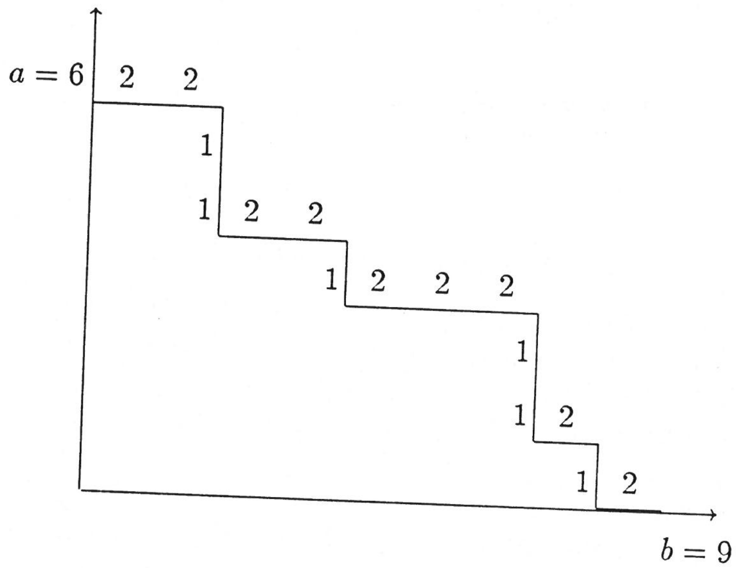


Figure 1

Sur l'exemple ci-dessus, la partition $(8,7,7,4,2,2)$ s'envoie sur le mot 221122122211212.

## 2. L'algorithme Z pour les partitions

Cet algorithme est en fait une bijection, découverte par D. ZEILBERGER ([3]) et portant sur ce qu'il appelait des partitions colorées. ANDREWS et BRESSOUD ([2]) l'utilisèrent pour donner une preuve constructive du $q$-analogue du théorème de Pfaff-Saalschütz. Ils la baptisèrent “algorithme Z” et nous allons maintenant reproduire et compléter leur preuve.

THÉORÈME. — *On a la correspondance :*

$$P(a,b) \times P(a+b,c) \longleftrightarrow P(b,c) \times P(a,b+c)\,.$$

*Démonstration.* — Soit $(\lambda,\mu) \in P(a,b)\times P(a+b,c)$. Notons $0 \le \lambda(1) \le \cdots \le \lambda(a) \le b$ les parts de $\lambda$ et $0 \le \mu(1) \le \cdots \le \mu(a+b) \le c$ les parts de $\mu$. Pour $1 \le i \le a$, additionnons $\lambda(i)$ et $\mu(\lambda(i)+i)$ pour former une partition $\mu' \in P(a,b+c)$. Les parts restant dans $\mu$ donneront une partition $\lambda' \in P(b,c)$. De plus, il est évident que $|\lambda| + |\mu| = |\lambda'| + |\mu'|$.

Par exemple, prenons $a = 5$, $b = 4$, $c = 10$, $\lambda = (0,1,1,3,4)$ et $\mu = (0,2,3,6,6,8,8,8,9)$. On a la disposition suivante :

$$\begin{array}{cc|ccccccccc}
\lambda' & : & & 2 & & & 6 & 8 & & 8 & \\
\lambda & : & 0 & & 1 & 1 & & & 3 & & 4 \\
\mu & : & 0 & 2 & 3 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 & 9 \\
\mu' & : & 0 & & 4 & 7 & & & 11 & & 13
\end{array}$$

On a donc $\lambda' = (2,6,8,8)$ et $\mu' = (0,4,7,11,13)$.

Réciproquement, soit $(\lambda',\mu') \in P(b,c)\times P(a,b+c)$. Notons $0 \le \lambda'(1) \le \cdots \le \lambda'(b) \le c$ les parts de $\lambda'$ et $0 \le \mu'(1) \le \cdots \le \mu'(a) \le b+c$ les parts de $\mu'$. Pour $1 \le j \le a$, on pose $\lambda(j) = \#\{i \in \{1,\dots,b\} : \lambda'(i)+i \le \mu'(j)\}$ et $\nu(j) = \mu'(j) - \lambda(j)$. On forme ensuite la suite $\big(\mu(j)\big)_{1\le j\le a+b}$ : on prend les $\lambda(1)$ premières valeurs de $\lambda'$, puis $\nu(1)$, puis les $\lambda(2) - \lambda(1)$ valeurs suivantes de $\lambda'$ etc... puis $\nu(a)$ puis les $b - \lambda(a)$ dernières valeurs de $\lambda'$.

Reprenons l'exemple donné ci-dessus :

$$\begin{array}{cc|ccccccccc}
\mu' & : & & 2 & & & 6 & 8 & & 8 & \\
(\mu'(i)+i) & : & & 3 & & & 8 & 11 & & 12 & \\
\lambda' & : & 0 & & 4 & 7 & & & 11 & & 13 \\
\lambda & : & 0 & & 1 & 1 & & & 3 & & 4 \\
\mu & : & 0 & 2 & 3 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 & 9
\end{array}$$

La disposition est dictée par la croissance de la suite 0 3 4 7 8 11 11 12 13 . Les parts de $\lambda$ comptent le nombre de “blancs” situés avant elles.

Il reste toutefois à prouver que nous avons bien construit deux partitions, appartenant à $P(a,b)$ et $P(a+b,c)$, respectivement. En effet on aurait alors $\mu(\lambda(j)+j)=\nu(j)$, pour $1\le j\le a$, ce qui nous asure de la réciprocité des deux algorithmes, et

$$\begin{aligned}|\lambda|+|\mu| &= \Big(\sum_{j=1}^{a}\lambda(j)\Big)+\Big(\sum_{j=1}^{b}\lambda'(j)+\sum_{j=1}^{a}\nu(j)\Big)\\ &= \sum_{j=1}^{b}\lambda'(j)+\sum_{j=1}^{a}\mu'(j)=|\lambda'|+|\mu'|\,.\end{aligned}$$

Du fait que $\lambda(i)$ est le cardinal d'une partie de $\{1,\ldots,b\}$, on a forcément $\lambda(1)\ge 0$ et $\lambda(a)\le b$. De plus, pour $1\le j\le a-1$, comme $\mu'(j+1)\ge\mu'(j)$, on a :

$$\{i\in\{1,\ldots,b\}:\lambda'(i)+i\le\mu'(j)\}\subset\{i\in\{1,\ldots,b\}:\lambda'(i)+i\le\mu'(j+1)\}\,.$$

Ceci nous assure que $\lambda'(j)\le\lambda'(j+1)$, donc que $\lambda\in P(a,b)$. On notera que, pour $j\in\{1,\ldots,a\}$, on a $\{i\in\{1,\ldots,b\}:\lambda'(i)+i\le\mu'(j)\}=\{1,\ldots,\lambda(j)\}$, car la fonction $i\mapsto\lambda'(i)+i$ est strictement croissante.

Montrons que $\nu$ définit une partition. On a $\lambda'(\lambda(1))+\lambda(1)\le\mu'(1)$, donc $\nu(1)=\mu'(1)-\lambda(1)\ge 0$. De plus :

$$\begin{aligned}\nu(a) &= \mu'(a)-\#\{i\in\{1,\ldots,b\}:\lambda'(i)+i\le\mu'(a)\}\\ &\le \mu'(a)-\#\{i\in\{1,\ldots,b\}:i+c\le\mu'(a)\}\quad \text{car } \lambda'\in P(b,c)\\ &= c\quad \text{car } \mu'(a)-c\le b.\end{aligned}$$

En outre, pour $j\in\{1,\ldots,a-1\}$, $\nu(j+1)-\nu(j)=\big(\mu'(j+1)-\mu'(j)\big)-\big(\lambda(j+1)-\lambda(j)\big)=\big(\mu'(j+1)-\mu'(j)\big)-\#\{i\in\{1,\ldots,b\}:\mu'(j)<\lambda'(i)+i\le\mu'(j+1)\}\ge 0$, en utilisant la croissance stricte de la fonction $i\mapsto\lambda'(i)+i$.

Enfin, pour $j\in\{1,\ldots,b\}$, on a :

$$i\le\lambda(j)\Rightarrow\lambda'(i)+\lambda(j)\le\lambda'(\lambda(j))+\lambda(j)\le\mu'(j)\Rightarrow\lambda'(i)\le\nu(j)\,.$$

Et de même, on trouve :

$$\begin{aligned}i>\lambda(j) &\Rightarrow \lambda'(i)+\lambda(j)+1\ge\lambda'(\lambda(j)+1)+\lambda(j)+1>\mu'(j)\\ &\Rightarrow \lambda'(i)>\mu'(j)-\lambda'(j)-1\Rightarrow\lambda'(i)\ge\nu(j)\,.\end{aligned}$$

La suite $\big(\mu(j)\big)_{1\le j\le a+b}$ définit donc bien une partition $\mu\in P(a+b,c)$.

Examinons maintenant ce qui se passe lorsqu'on remplace les partitions par des mots à deux lettres.

## 3. L'algorithme Z pour les mots

Quand on a un mot de trois lettres, il y a deux manières de le décomposer en mots de deux lettres, en conservant son poids.

Premièrement, on élimine le 3 pour former le premier mot et on remplace la lettre 1 (resp. 2, resp. 3) par la lettre 1 (resp. 1, resp. 2) pour obtenir le deuxième mot. On voit ainsi que $M(a,b,c) \longleftrightarrow M(a,b) \times M(a+b,c)$.

Deuxièmement, on élimine la lettre 1 et on remplace les lettres 2 et 3 par les lettres 1 et 2, pour former le premier mot. Pour obtenir le deuxième, on remplace la lettre 1 (resp. 2, resp. 3) par la lettre 1 (resp. 2, resp. 2). On a alors $M(a,b,c) \longleftrightarrow M(b,c) \times M(a,b+c)$.

Comme on a vu dans les préliminaires combinatoires que $M(a,b) \longleftrightarrow P(a,b)$, on peut se demander quel est le lien entre ces deux décompositions et l'algorithme Z. La réponse est donnée par le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] & M(a,b,c) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M(a,b) \times M(a+b,c) \arrow[d, leftrightarrow] & & M(b,c) \times M(a,b+c) \arrow[d, leftrightarrow] \\ P(a,b) \times P(a+b,c) \arrow[rr, leftrightarrow, "Z"] & & P(b,c) \times P(a,b+c) \end{tikzcd}$$

*Exemple.* — Prenons le couple $(\lambda,\mu)$ déja utilisé lors de l'illustration de l'algorithme Z, avec les paramètres $a=5$, $b=4$ et $c=10$.

$$\begin{cases} \lambda = (0,1,1,3,4) \\ \mu = (0,2,3,6,6,8,8,8,9) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 1\quad 2\quad 1\quad\quad 12\quad 212\quad 1 \\ 1\ 22\ 1\ 2\ 1\ 222\ 11\ 22\ 111\ 212 \end{cases}$$

$$\updownarrow$$

$$1\ 33\ 2\ 3\ 1\ 333\ 12\ 33\ 213\ 311$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{cases} \lambda' = (2,6,8,8) \\ \mu' = (0,4,7,11,13) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} 22\ 12\quad 222\quad 1\ 221\quad 12\quad 2 \\ 1\ 22\ 22\ 1\ 222\ 1\ 2\ 222\ 1\ 22\ 1\ 2 \end{cases}$$

*Démonstration.* — Considérons le sens direct de l'algorithme Z. On se donne $\lambda$ et $\mu$ :

$$\begin{array}{lllllll} \lambda & : & & \lambda(1) & \le \cdots \le & \lambda(a) & \le b \\ \mu & : & \mu(1) \le \cdots \le & \mu(\lambda(1)+1) & \le \cdots \le & \mu(a+b) & \le c \end{array}$$

Les $a + b$ parts de $\mu$ correspondent aux lettres 1 et 2 confondues. Or la place du $i$-ième 1 dans le mot correspondant à $\lambda$ (qui est justement formé des lettres 1 et 2) est $\lambda(i) + i$. La partition $\lambda'$ correspond donc au mot obtenu en ne gardant que les lettres 2 et 3, modulo une translation de $-1$ sur les lettres. La partition $\mu'$ s'obtient en ajoutant au nombre de 2 situés avant le $j$-ième 1 ($\lambda(j)$) le nombre de 3 situés avant le $j$-ième 1 ($\mu(\lambda(j) + j)$). Ainsi $\lambda'$ correspond bien au mot obtenu en changeant la lettre 3 en la lettre 2, ce qui achève la preuve du théorème.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREWS (G.E.). — *The theory of Partitions, Encyclopedia of Math and Its Applications*, vol. 2. — Addison-Wesley, Reading, MA, 1970, p. 40.

[2] ANDREWS (G.E.) and BRESSOUD (D.M.). — Identities in combinatorics 3 : Further aspects of ordered set sorting, *Discr. Math.*, t. **49**, 1984, p. 223–236.

[3] BRESSOUD (D.M.) and ZEILBERGER (D.). — Generalized Rogers-Ramanujan bijections, prépublication.

Laurent HABSIEGER,
Département de Mathématique,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René-Descartes,
F-67084 Strasbourg.