GLEICHVERTEILTE FOLGEN AUF DISKRETEN RÄUMEN

Peter Kirschenhofer, Robert F. Tichy
Technische Universität Wien

In diesem Artikel wird eine Übersicht über einige neuere Resultate zur Gleichverteilung von Folgen über endlichen Alphabeten gegeben. Es werden sowohl bekannte Ergebnisse überblicksmäßig zusammengefaßt, als auch einige bislang unveröffentlichte Resultate dargestellt.

1. Einleitung

Der klassische Gleichverteilungsbegriff nach Hermann Weyl (vgl. die 1916 erschienene Arbeit [21]) lautet:

Definition: Eine Folge $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in [0,1[$, heißt gleichverteilt, wenn für die "Diskrepanz" der Anfangsabschnitte $\omega_N = x_1 x_2 \ldots x_N$ der Folge ω:

$$D^{(1)}(\omega_N) = \sup_{[a,b[\subseteq[0,1[} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \chi_{[a,b[}(x_i) - (b-a) \right|$$

($\chi_{[a,b[}$ die charakteristische Funktion von $[a,b[$) gilt:

$$\lim_{N\to\infty} D^{(1)}(\omega_N) = 0.$$

Es gilt dann etwa das folgende wichtige Kriterium:

Satz: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ist auf $[0,1[$ gleichverteilt genau dann, wenn für jede stetige Funktion f gilt

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) = \int_0^1 f(x)dx.$$

Wesentliche Beiträge zur Theorie der Gleichverteilung wurden u.a. von Erdös, Turan, Koksma, Hlawka und W. Schmidt geliefert. Für einen Überblick sei auf die Monographien [3] und [11] verwiesen, die u.a. auch Hinweise auf zahlreiche Verallgemeinerungen des klassischen Begriffes enthalten.

Im weiteren wollen wir das folgende diskrete Analogon des obigen Begriffes betrachten:

Sei $A = \{a_1, \ldots, a_\alpha\}$ eine endliche Menge (Alphabet) und μ ein nichttriviales Wahrscheinlichkeitsmaß auf A, d.h. $\mu(a_j) > 0$ für $1 \leqq j \leqq \alpha$. Für jedes "Wort" $w = x_1 x_2 \ldots x_N$, $x_i \in A$, setzen wir

$$D^{(1)}(w) = \max_{1 \leqq i \leqq \alpha} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \delta_{a_i, x_j} - \mu(a_i) \right|$$

und nennen eine Folge $\omega = (x_n)_{n=1}$, $x_n \in A$, gleichverteilt zum Maß μ wenn

$$\lim_{N\to\infty} D^{(1)}(\omega_N) = \lim_{N\to\infty} D^{(1)}(x_1 x_2 \ldots x_N) = 0.$$

Anwendungen des Gleichverteilungsbegriffes, wie etwa beim Studium von "Preudozufallsfolgen" (vgl. [10]) oder bei Untersuchungen der Buchstabenverteilung in Wörtern natürlicher Sprachen (vgl. [4], [15]) legen es nahe, kompliziertere Diskrepanzbegriffe einzuführen, die die "Durchmischung" der Elemente einer Folge stärker berücksichtigen.

Im folgenden bezeichne für (endliche) Wörter w und u über A

(w;u) die Anzahl, wie oft u in w als (nicht notwendig geschlossenes) Teilwort vorkommt,

[w;u] die Anzahl, wie oft u in w als geschlossener Teilblock auftritt.

Beispiel:

$(00101;01) = 5$, $\quad [0\underline{01}\underline{01};01] = 2$

1 2 3 4 5

Weiters sei für $u = u_1 u_2 \ldots u_s$, $u_i \in A$,

$$\mu(u) = \prod_{j=1}^{s} \mu(u_j).$$

Dann setzen wir:

<u>Definition:</u>

$$D^{(s)}(w) = \max_{u \in A^s} \left| \frac{(w;u)}{\binom{|w|}{s}} - \mu(u) \right| \qquad \text{für } s \leqq |w|$$

und

$$D^{[s]}(w) = \max_{u \in A^s} \left| \frac{w;u}{|w| - s + 1} - \mu(u) \right| \qquad \text{für } s \leqq |w|,$$

wobei $|w|$ die Länge des Wortes w angibt.

Beide Diskrepanzbegriffe definieren in natürlicher Weise Gleichverteilungsbegriffe für Folgen $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, wenn man verlangt, daß

$$\lim_{N\to\infty} D^{(s)}(\omega_N) = \lim_{N\to\infty} D^{(s)}(x_1 \ldots x_N) = 0$$

bzw.

$$\lim_{N\to\infty} D^{[s]}(\omega_N) = \lim_{N\to\infty} D^{[s]}(x_1 \ldots x_N) = 0$$

gilt.

Im folgenden Abschnitt 2 studieren wir die "Teilwortdiskrepanz" $D^{(s)}$, in Abschnitt 3 die "Teilblockdiskrepanz" $D^{[s]}$.

2. Zur "Teilwortdiskrepanz" $D^{(s)}$

Wir beginnen mit einem wesentlichen Unterschied zwischen den Diskrepanzen $D^{(s)}$ für $s \geqq 2$ und $D^{(1)}$:
Ist $\mu(a_j) \in \mathbb{Q}$ für alle $1 \leqq j \leqq \alpha$, so gibt es trivialerweise Wörter w über $A = \{a_1, \ldots, a_\alpha\}$ mit $D^{(1)}(w) = 0$. Für $s \geqq 2$ ist dies grundlegend anders:

Satz 2.1. (vgl. [7]): Sei $s \geqq 2$. Dann gilt für alle Wörter w mit $|w| \geqq s$:

$$D^{(s)}(w) > 0.$$

Beweisskizze:
Angenommen, es gäbe ein Wort w mit $|w| \geqq s \geqq 2$ und $D^{(s)}(w) = 0$. Dann ist

$$(*) \qquad (w;u) = \mu(u) \cdot \binom{|w|}{s} \quad \text{für alle } u \in A^s.$$

Ist $w = a_i^s$, so ergibt sich sofort ein Widerspruch. Enthält w mindestens zwei verschiedene Buchstaben $a_i \neq a_j$, so sei $\bar{w}$ das Wort, das aus w entsteht, indem $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_\alpha$ gleich a_j gesetzt werden.
Dann gilt wegen (*)

$$\binom{(\bar{w};a_i)}{s} = \binom{(w;a_i)}{s} = (w;a_i^s) = \binom{|w|}{s}\mu(a_i)^s$$

sowie

$$\binom{(\bar{w};a_j)}{s} = (\bar{w};a_j^s) = \sum_{\substack{u \in A^s \\ (u;a_i)=0}} (w;u) = \binom{|w|}{s}(1-\mu(a_i))^s$$

Nun ist $|w| = |\bar{w}| = (\bar{w};a_i) + (\bar{w};a_j)$, d.h.

$$\binom{(\bar{w};a_i)}{s}^{1/s} + \binom{(\bar{w};a_j)}{s}^{1/s} = \binom{(\bar{w};a_i)+(\bar{w}\,a_i)}{s}^{1/s} .$$

Für $s \geqq 2$, $x,y \in \mathbb{N}$ mit $x + y \geqq s$ gilt aber stets

$$\binom{x}{s}^{1/s} + \binom{y}{s}^{1/s} < \binom{x+y}{s}^{1/s} . \blacksquare$$

Ordnet man die Buchstaben eines vorgegebenen Wortes w um, so erhält man die maximale Diskrepanz $D^{(s)}$ jedenfalls, wenn die gleichen Buchstaben zu Blöcken zusammengezogen werden:

<u>Satz 2.2.</u>(vgl. [7]): Es gilt $D^{(s)}(w) \leqq D^{(s)}(\tilde{w})$, wobei $\tilde{w} = a_1^{(w;a_1)} a_2^{(w;a_2)} \ldots a_n^{(w;a_n)}$. $\blacksquare$

Für spezielle Klassen von Wörter kann $D^{(s)}$ explizit berechnet werden. Man macht sich dabei kombinatorische Abzählargumente wie das folgende zunutze:

<u>Lemma 2.3:</u> $((a_1 a_2 \ldots a_\alpha)^n; u) = \binom{n+d(u)}{s}$,
wobei $d(u)$ die Anzahl aller geschlossenen Blöcke der Form $a_i a_{i+k}$, $1 \leqq i \leqq \alpha$, $1 \leqq k \leqq \alpha - i$, im Wort u ist.

<u>Beweis:</u> Für jedes Vorkommen von u als Teilwort in $a_1 a_2 \ldots a_\alpha a_1 a_2 \ldots a_\alpha \ldots a_1 a_2 \ldots a_\alpha$ werden die "Nummern" der $a_1 a_2 \ldots a_\alpha$ -Blöcke notiert, aus denen die Buchstaben $u_1,\ldots,u_s$ von u entnommen werden.

Beispiel: $\alpha = 2$, $A = \{0,1\}$, $(01)^4$, $u = 00101$:

$$(01)^4 = \overset{1}{01}\,\overset{2}{01}\,\overset{3}{01}\,\overset{4}{01}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
0 & . & 0 & 1 & 0 & 1 & . & . & \rightarrow & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\
0 & . & 0 & 1 & 0 & . & . & 1 & \rightarrow & 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\
0 & . & 0 & 1 & . & . & 0 & 1 & \rightarrow & 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \\
0 & . & 0 & . & . & 1 & 0 & 1 & \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\
0 & . & . & . & 0 & 1 & 0 & 1 & \rightarrow & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 \\
. & . & 0 & . & 0 & 1 & 0 & 1 & \rightarrow & 2 & 3 & 3 & 4 & 4.
\end{array}$$

Im allgemeinen erhalten wir $(w;u)$ schwach monoton steigende Folgen

$$1 \leqq i_1 \leqq i_2 \leqq \ldots \leqq i_s \leqq u .$$

Dabei kann $i_j = i_{j+1}$ nur gelten, wenn für die Buchstaben $u_j u_{j+1}$ in u gilt:

$$u_j u_{j+1} = a_i a_{i+k} \text{ mit } 1 \leqq i \leqq \alpha,\ 1 \leqq k \leqq \alpha - i,$$

da u_j und u_{j+1} demselben $a_1 \ldots a_\alpha$-Block entnommen wurden.

Im Bsp.: $i_j = i_{j+1}$ in den rechts stehenden Folgen $i_1,\dots,i_s$ kann nur von einem 01-Block in u herrühren.

Wir addieren nun für jeden Block $u_j u_{j+1} = a_i a_{i+k}$ der oben angegebenen Form in u die Zahl 1 zu allen i_k mit $k \geqq j+1$ und erhalten eine Folge $i'_1,\dots,i'_s$ mit

$$(**) \qquad 1 \leqq i'_1 < i'_2 < \dots < i'_s \leqq u + d(u).$$

Im Bsp.:

$$\begin{array}{lccccc}
u = & 0 & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{1} \\
+ & & & 1 & 1 & 1 \\
+ & & & & & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc c ccccc}
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \to & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 4 & \to & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\
1 & 2 & 2 & 3 & 3 & \to & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\
1 & 2 & 3 & 4 & 4 & \to & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 4 & \to & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
2 & 3 & 3 & 4 & 4 & \to & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array} \quad .$$

Umgekehrt entspricht jedem s-tupel $i'_1,\dots,i'_s$, das (**) erfüllt, genau ein Vorkommen von u in $(a_1 \dots a_\alpha)^n$. Daher ist $((a_1 \dots a_\alpha)^n; u) = \binom{n+d(u)}{s}$. ▮

Im Spezialfall $\alpha = 2$ (in dem die Form des obigen Beweises auf G. Baron zurückgeht) erhält man als Folgerung aus dem Lemma etwa:

Satz 2.4. (vgl.[7])

Für $\alpha = 2$, $A = \{0,1\}$ und $\mu(0) = \mu(1) = \frac{1}{2}$ gilt:

$$D^{(s)}((01)^n) = \frac{\binom{n+\lfloor s/2 \rfloor}{s}}{\binom{2n}{s}} - \frac{1}{2^s} \qquad \text{für } 1 \leqq s \leqq 2n.$$

Beweisskizze: Aus Lemma 2.3 ergibt sich durch Wahl geeigneter Wörter $u' \in A^s$, für die $d(u')$ extrem wird:

$$\binom{n}{s} \leqq ((01)^n; u) \leqq \binom{n+\lfloor s/2 \rfloor}{s} \quad \text{für alle } u \in A^s.$$

Daher ist

$$D^{(s)}((01)^n) = \max\left\{ \frac{\binom{n+\lfloor s/2 \rfloor}{s}}{\binom{2n}{s}} - \frac{1}{2^s},\ \frac{1}{2^s} - \frac{\binom{n}{s}}{\binom{2n}{s}} \right\}.$$

Zum Beweis des Satzes genügt es zu zeigen, daß

$$\binom{n+\lfloor s/2 \rfloor}{s} + \binom{n}{s} \geqq 2^{1-s} \binom{2n}{s}.$$

Dies folgt etwa daraus, daß die Funktion

$$F_g(x) = \begin{cases} (x)_g = x(x-1)\dots(x-g+1) & \text{für } x \geqq g-1 \\ 0 & \text{für } x \leqq g-1 \end{cases}$$

mit $g \in \mathbb{N}$ monoton und konvex ist. ▮

Zur Bestimmung der Diskrepanz aller Anfangsabschnitte der Folge $w = (010101 \ldots)$ bleibt noch der Fall ungerader Blocklänge zu betrachten. Hier zeigt man mit ähnlichen Überlegungen wie oben:

Satz 2.5. (vgl.[8]) Mit den Voraussetzungen von Satz 2.4. gilt

$$D^{(s)}((01)^n 0) = \max\left\{ \frac{\binom{n+\lfloor\frac{s+1}{2}\rfloor}{s}}{\binom{2n+1}{s}} - \frac{1}{2^s},\ \frac{1}{2^s} - \frac{\binom{n}{s}}{\binom{2n+1}{s}} \right\}$$

wobei für ungerades s stets der 1. Ausdruck das Maximum liefert. ∎

Die Vermutung, daß die Anfangsabschnitte der Folge 0101 ... für $\mu(0) = \mu(1) = 1/2$ kleinstmögliche Diskrepanz $D^{(s)}$ unter allen Wörtern fester Länge hätten, wird leicht durch Gegenbeispiele widerlegt, z.B.:

$$D^{(2)}(0110) < D^{(2)}(0101)$$

oder

$$D^{(2)}(01100110) < D^{(2)}(01010101).$$

Ist jedoch s nicht allzu groß im Vergleich zur betrachteten Wortlänge, so kann eine entsprechende Aussage bewiesen werden:

Satz 2.6. (vgl.[8]) Sei $A = \{0,1\}$, $\mu(0) = \mu(1) = 1/2$.
Für s mit $\frac{s(3s-1)}{s-1} \leqq |w|$ gilt

$$D^{(s)}(w) \geqq D^{(s)}((01)^{\infty}_{|w|})$$

für alle Wörter w über A, wobei $(01)^{\infty}_{|w|}$ der Anfangsabschnitt von 0101 ... der Länge $|w|$ ist.

Beweisskizze: Wir betrachten etwa den Fall $|w| = 2M$ gerade. Dann kann man durch Induktion nach s zeigen:

Für $\frac{s(3s-1)}{s-1} \leqq |w|$ existiert ein Wort $z_s \in A^s$ mit $(w;z_s) \geqq \binom{M+\lfloor s/2\rfloor}{s}$ (*)

Für den Induktionsschnitt nehmen wir zunächst an, daß (*) richtig sei, für ein $s \in \mathbb{N}$, daß jedoch für alle $u \in A^{s+1}$ gelte

$$(w;u) < \binom{M+\lfloor\frac{s+1}{2}\rfloor}{s+1}$$

Dann wäre aber

$$\frac{\sum_{|u|=s+1,\,(u;z_s)>0}}{2M-s} < \frac{\binom{M+\lfloor\frac{s+1}{2}\rfloor}{s+1}(s+2)}{2M-s},$$

da

$$\sum_{|u|=s+1;\ |u;z_s|>0} = s+2$$

(Ist $z_s = y_1 y_2 \ldots y_s$, $y_i \in A$, so gilt

$$u = 0z_s \vee u = 1z_s \quad \vee \quad u = y_1\overline{y_1}y_2\ldots y_s \vee u = y_1 y_2 \overline{y_2} y_3 \cdots y_s \quad \vee \ldots ,$$

wobei $\overline{0} = 1$, $\overline{1} = 0$).

Wegen $\frac{s(3s-1)}{s-1} \leqq 2M$ ist aber der rechte Term der Ungleichung $\leqq \binom{M+\lfloor s/2\rfloor}{s}$, d.h. $(w; z_s) < \binom{M+\lfloor s/2\rfloor}{s}$, ein Widerspruch zur Induktionsannahme. ∎

Die Diskrepanz $D^{(s)}(w)$ kann durch die Diskrepanzen $D^{(1)}(w_i)$ der Anfangsabschnitte w_i von w wie folgt abgeschätzt werden:

Satz 2.7. (vgl.[8]) Für alle $w \in \{a_1,\ldots,a_\alpha\}^N$, $N \geqq 2$, und alle nichttrivialen Wahrscheinlichkeitsmaße μ gilt:

$$D^{(s)}(w) \leqq s.D^{(1)}(w) + 2\frac{s(s-1)}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} i.D^{(1)}(w_i),$$

wobei w_i der Anfangsabschnitt der Länge i von w ist.

Beweisskizze:

Sei $w = w_N = x_1 \ldots x_N$, $x_i \in A$ und $u \in A^s$.

Dann ist

$$(w_n; ua_i) = \sum_{j=1}^{n} (w_{j-1}; u)\ \delta_{a_i, x_j}$$

Weiters gilt wegen der Definition von $D^{(s)}(w_{j-1})$:

$$(w_n; ua_i) \leqq \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2;\ \geqq \sum\nolimits_1 - \sum\nolimits_2$$

mit

$$\sum\nolimits_1 = \mu(u) \sum_{j=1}^{N} \binom{j-1}{s} \delta_{a_i, x_j} \quad ; \sum\nolimits_2 = \sum_{j=s+1} \binom{j-1}{s} D^{(s)}(w_{j-1}) .$$

Abelsche Umformung von $\sum_1$ und die Ungleichung

$$|(w_k; a_i) - k\ \mu(a_i)| \leqq k.D^{(1)}(w_k)$$

ergeben

$$\sum_1 \overset{(\geq)}{\leq} \mu(ua_i)\binom{N}{s+1} \overset{(-)}{+} \mu(u)\, s \sum_{u=1}^{N-1} \binom{k}{s} D^{(1)}(w_K)$$

$$\overset{(+)}{-} \quad \mu(u).N.\binom{N-1}{s} D^{(1)}(w_N).$$

Mit $\mu(u) \leqq 1$ ergibt sich

$$D^{(s+1)}(w_N) \leqq \binom{N}{s+1}^{-1}. \{N\binom{N-1}{s} D^{(1)}(w_N) + \quad . \sum_{k=s}^{N-1} \binom{k}{s} D^{(1)}(w_k) +$$

$$+ \sum_{k=s}^{N-1} \binom{k}{s}.D^{(s)}(w_k)\}$$

und die gewünschte Ungleichung folgt durch Induktion nach s. ∎

Einige Folgerungen aus Satz 2.7 sind:

1) Für $\omega = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ und $s \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{N\to\infty} D^{(1)}(\omega_N) = 0 \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} D^{(s)}(\omega_N) = 0.$$

Durch $D^{(s)}$ wird also keine neue Klasse von gleichverteilten Folgen definiert, wohl aber ein anderes Maß für die "Güte" der Gleichverteiltheit einer gleichverteilten Folge festgelegt.

2) Für $s = 1$, $A = \{a_1,\ldots,a_\alpha\}$ konnten Meijer, Niederreiter und Tijdeman in einer Serie von Arbeiten [12],[13] ,[14] ,[19] zeigen, daß

$$\sup_{\mu} \inf_{\omega} \sup_{N\geq 1} N.D^{(1)}(\omega_N) = 1 - \frac{1}{2(\alpha-1)} .$$

(Dabei wird sup über alle Wahrscheinlichkeitsmaße μ auf A und inf über alle Folgen ω aus A^∞ erstreckt).

Aus Satz 2.7. ergibt sich nun:

$$\sup_{\mu} \inf_{\omega} \sup_{N\geq s} N.D^{(s)}(\omega_N) \leqq s(2s-1)\left(1 - \frac{1}{2(\alpha-1)}\right).$$

Für $\alpha = 2$ konnte das folgende feinere Resultat gezeigt werden:

<u>Satz 2.8.</u> (vgl. [9]) Für $A = \{0,1\}$ gilt

$$\sup_{\mu} \inf_{\omega} \limsup_{N\to\infty} N.D^{(s)}(\omega_N) = \frac{s}{2} .$$

<u>Beweisskizze:</u>

Sei $\mu(1) = \lambda$, $\mu(0) = 1 - \lambda$ und die Folge $\omega = (x_n)$ definiert durch

$$x_n = 1 \text{ falls } n = \left\lceil \frac{2k-1}{2\lambda} \right\rceil \text{ mit } k \in \mathbb{N}$$
$$x_n = 0 \text{ sonst,}$$

wobei $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\geqq x$ bedeutet.

Man bestimmt nun $(\omega_N;u)$ durch "Auszählen", wobei mehrere Fälle hinsichtlich u unterschieden werden.

Sei etwa $u = 0^{i_1}10^{i_2}1 \ldots 0^{i_r}10^{i_{r+1}}$ mit $r \geqq 1$, $i_1, i_{r+1} > 0$, $i_2,\ldots,i_r \geqq 0$.

Dann ergibt sich

$$(\omega_N;u) = \sum_{1 \leqq k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leqq \lfloor \lambda N + \frac{1}{2} \rfloor} \binom{\lceil \frac{2k_1-1}{2\lambda} \rceil - k_1}{i_1} \times$$

$$\times \binom{\lceil \frac{2k_2-1}{2\lambda} \rceil - \lceil \frac{2k_1-1}{2\lambda} \rceil - k_2 + k_1}{i_2} \times \ldots \times \binom{N - \lceil \frac{2k_r-1}{2\lambda} \rceil - \lfloor \lambda N + \frac{1}{2} \rfloor + k_r}{i_{r+1}}$$

Im nächsten Schritt bestimmt man die ersten beiden Terme der asymptotischen Entwicklung dieses Ausdrucks für $N \to \infty$. Dabei wird benützt:

i) Für irrationales λ ist die Folge $\left(\left\langle \frac{2k-1}{2\lambda} \right\rangle\right)_{k=1}^{\infty}$ (wobei $\langle x \rangle = \lceil x \rceil - x$ gilt) gleichverteilt im klassischen Sinn, sodaß

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\left\langle \frac{2k-1}{2\lambda} \right\rangle - \frac{1}{2}\right) = o(N) \text{ für } N \to \infty.$$

ii) Für rationales $\lambda = \frac{p}{q}$ mit $ggT(p,q) = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\left\langle \frac{2k-1}{2\lambda} \right\rangle - c_\lambda\right) = O(1) \text{ für } N \to \infty ,$$

$$\text{wenn } c_\lambda = \begin{cases} \frac{p-1}{2p} & \text{für 2 teilt 1} \\ \frac{1}{2} & \text{für 2 teilt nicht q} \end{cases}$$

gesetzt wird.

Durch Beweis entsprechender Abschätzungen für den 2. Term der asymptotischen Entwicklung von $(\omega_N;u)$ d.h. für den 1. Term der Entwicklung von

$$\frac{(\omega_N;u)}{\binom{N}{s}} - \frac{1}{2^s} \text{ für } N \to \infty ,$$

ergibt sich

$$\limsup_{N\to\infty} N.D^{(s)}(w_N) \leqq \frac{s}{2}.$$

Für die untere Abschätzung gibt es zunächst im Fall $s = 1$ die folgende klassische Überlegung:

Sei $\varepsilon > 0$. Angenommen es gäbe zu jedem Maß μ eine Folge ω, sodaß für fast alle N gilt:

$$|(\omega_N;1) - \mu(1).N| < \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Sei nun $\mu(1) = \lambda$ irrational. Dann folgt mit $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$:

$$\{\lambda N\} - \frac{1}{2} + \varepsilon < (\omega_N;1) - \lfloor \lambda N \rfloor < \{\lambda N\} + \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

wobei $\{\lambda N\}$ im klassischen Sinn gleichverteilt und daher dicht in $[0,1]$ ist.

Insbesondere gilt für unendlich viele N:

$$\{\lambda N\} \in (\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$$

und damit

$$0 < (w_N;1) - \lfloor \lambda N \rfloor < 1,$$

ein Widerspruch.

Für $s \geqq 2$ benützt man, daß wegen $u = 1^s \in A^s$ gilt

$$D^{(s)}(w_N) \geqq \left| \frac{(\omega_N;1^s)}{\binom{N}{s}} - \lambda^s \right|,$$

wobei $(\omega_N;1^s) = \binom{(w_N;1)}{s}$.

Aus dieser Abschätzung folgt aber

$$D^{(s)}(w_N) \geqq \left|\frac{(\omega_N;1)}{N} - \lambda\right| . \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(\omega_N;1)^j}{N^j} \lambda^{s-1-j}(1+o(1)) + o(1), \text{ für } N \to \infty,$$

und damit

$$\inf_{\omega} \limsup_{N\to\infty} N.D^{(s)}(\omega_N) \geqq \frac{s}{2}.\lambda^{s-1}$$

für jedes irrationale $\lambda \in (0,1)$.

D.h. aber

$$\sup_{\mu} \inf_{\omega} \limsup_{N\to\infty} N.D^{(s)}(\omega_N) \geqq \frac{s}{2}. \quad \blacksquare$$

Man kann nun die Frage stellen, für fest vorgegebenes Maß μ den Ausdruck

$$\inf_{\omega} \limsup_{N\to\infty} N.D^{(s)}(\omega_N)$$

zu bestimmen. Einige wenige diesbezügliche Resultate finden sich in [9], ein sehr allgemeines Resultat wurde von B. Voigt [20] angekündigt.

Motiviert durch entsprechende Überlegungen bei der Frage nach der Definition von "zufälligen Folgen" in [10] , wollen wir im weiteren für das Gleichwahrscheinlichkeitsmaß μ auf A, d.h. $\mu(a_i) = \frac{1}{\alpha}$ für alle $1 \leq i \leq \alpha$, einen Diskrepanzbegriff einführen, bei dem die "Testwortlänge" s nicht konstant bleiben muß, sondern in Abhängigkeit von der Länge N des betrachteten Anfangsabschnitts einer Folge ω steht.

Definition.
Sei $A = \{a_1,\dots,a_\alpha\}$, $\mu(a_i) = \frac{1}{\alpha}$ für alle $1 \leq i \leq \alpha$, und s(N) eine Folge natürlicher Zahlen. Eine Folge ω über A heißt (s(N))-gleichverteilt, falls

$$D^{(s(N))}(\omega_N) = \max_{u\in A^{s(N)}} \left| \frac{(\omega_N;u)}{\binom{N}{s(N)}} - \frac{1}{\alpha^{s(N)}} \right| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^{s(N)}}\right) \text{ für } N\to\infty .$$

(Man beachte, daß verlangt werden muß, daß $D^{(s(N))}(\omega_N)$ schneller gegen 0 geht, als die Maße $\alpha^{-s(N)}$).

Die Frage, ob es Folgen (s(N)) mit $\lim_{N\to\infty} s(N) = \infty$, gibt, für die (s(N))-gleichverteilte Folgen ω existieren, wird zunächst durch folgenden Satz beantwortet:

Satz 2.9 (vgl [8]):
Sei die Folge ω (1)-gleichverteilt, d.h. $D^{(1)}(\omega_N) = \mathcal{O}(1)$.
Weiters bezeichne

$$\Delta_N(\omega) = \sum_{i=1}^{N} i.D_1(\omega_i) .$$

Gibt es dann ein $\sigma < 1$, sodaß

$$s(N) = \mathcal{O}\left(\left(\log \frac{1}{D^{(1)}(\omega_N)}\right)^{\sigma}\right)$$

und $s(N) = \mathcal{O}\left(\left(\log \frac{N^2}{\Delta_N}\right)^{\sigma}\right)$ für $N \to \infty$, so ist ω auch (s(N))-gleichverteilt.

Beweisidee: Man benütze die Abschätzung aus Satz 2.7. ∎

Nach Satz 2.9 ist jede (1)-gleichverteilte Folge ω also auch $(s(N))$-gleichverteilt für genügend schwach gegen ∞ wachsendes $s(N)$.
Daß $s(N)$ prinzipiell nicht zu rasch wachsen darf, zeigt das folgende Resultat (der Spezialfall $\alpha = 2$ wurde in [8]bewiesen):

Satz 2.10: Sei $\omega(s(N))$-gleichverteilt über $A = \{a_1,\dots,a_\alpha\}$.
Dann gilt i) $s(N) = \theta(\sqrt{N})$
und ii) $s(N) = \theta\left(\frac{1}{D^{(1)}(\omega_N)}\right)$ für $N \to \infty$.

Beweis:

Ad i): Für alle $s,N \in \mathbb{N}$ mit $s \leq N$ gilt.

$$(*) \qquad \alpha^s.D^{(s)}(\omega_N) \geq 1 - e^{-\frac{\lfloor s/\alpha\rfloor^2}{N}}$$

Sei nämlich $N = \alpha k + \beta$ mit $0 \leq \beta \leq \alpha - 1$. Sei weiters a_i einer unter den seltensten Buchstaben von ω_N, d.h.

$$(\omega_N;a_i) \leq (\omega_N;a_j) \quad \text{für alle } 1 \leq j \leq \alpha.$$

Dann ist

$$(\omega_N;a_i{}^s) \leq \binom{k}{s}$$

und somit

$$\alpha^s D^{(s)}(\omega_N) \geq 1 - \alpha^s\binom{k}{s}\Big/\binom{\alpha k+\beta}{s} \; (\geq 0).$$

Für $s > k$ folgt

$$\alpha^s D^{(s)}(\omega_N) \geq 1$$

sodaß (*) erfüllt ist.

Sei nun $s \leq k = \lfloor \frac{N}{\alpha} \rfloor$. Dann haben wir

$$\frac{\alpha^s\binom{k}{s}}{\binom{\alpha k+\beta}{s}} = \prod_{i=1}^{s-1} \frac{k - i}{k - \frac{i}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}} ,$$

wobei die Faktoren positiv und monoton abnehmend in i sind. Somit ist

$$\frac{\alpha^s\binom{k}{s}}{\binom{\alpha k+\beta}{s}} \leq 1^{\lfloor s/\alpha\rfloor - 1}\left(\frac{k - \lfloor s/\alpha\rfloor}{k-\frac{1}{\alpha}\lfloor \frac{s}{\alpha}\rfloor+\frac{\beta}{\alpha}}\right)$$

Der rechte Term ist nun

$$\leq \left(1 - \frac{\lfloor s/\alpha\rfloor}{\alpha k+\beta}\right)^{\lfloor s/\alpha\rfloor}$$

woraus (*) unmittelbar folgt.

Ad ii) Sei a_i so gewählt, daß

$$(\omega_N;a_i) = \frac{N}{\alpha}(1 \pm \alpha . D^{(1)}(\omega_N)) .$$

Dann gilt

$$D^{(s)}(\omega_N) \geqq |I_N - \frac{1}{\alpha^s}|$$

wobei

$$I_N = \binom{(\omega_N;a_i)}{s} / \binom{N}{s} .$$

Die asymptotische Entwicklung lautet, unter Berücksichtigung von $s(N) = \mathcal{O}(\sqrt{N})$:

$$I_N = \frac{1}{\alpha^s}(1 + \alpha s D^{(1)}(\omega_N) + O(\frac{s^2}{N}) + O(\frac{s^2}{N} D^{(1)}(\omega_N)^2) + O(\frac{s^3}{N} D^{(1)}(\omega_N)),$$
$$(s = s(N)),$$

d.h.

$$\alpha^{s(N)} D^{(s(N))}(\omega_N) = \Omega(\alpha s(N) D^{(1)}(\omega_N)), \text{ für } N \to \infty ,$$

woraus das behauptete Resultat folgt. ∎

Tatsächlich ist die Schranke $s(N) = \mathcal{O}(\sqrt{N})$ bestmöglich. Es gilt nämlich:

<u>Satz 2.11:</u> $\omega = (\alpha_1,\dots,\alpha_\alpha)^\infty)$ ist genau dann $(s(N))$-gleichverteilt, wenn $s(N) = \mathcal{O}(\sqrt{N})$ für $N \to \infty$.

<u>Beweis:</u> Sei $N = \alpha k + \beta$ mit $0 \leqq \beta < \alpha$,

$$M_N = \max_{u \in A^{s(N)}} (\omega_N;u),$$

$$m_N = \min_{u \in A^{s(N)}} (\omega_N;u)$$

und bezeichne

$$I_N = M_N / \binom{N}{s} \text{ sowie } J_N = m_N / \binom{N}{s} .$$

Dann ist

$$D^{(s(N))}(\omega_N) = \max(I_N - \alpha^{-s(N)}, \alpha^{-s(N)} - J_N)$$

und es gilt

$$\lim_{N\to\infty} \alpha^{s(N)} D^{(s(N))}(\omega_N) = 0$$

genau dann, wenn

$$\lim_{N\to\infty} (\log I_N + s(N)\log \alpha) = \lim_{N\to\infty} (\log J_N + s(N) \log \alpha) = 0 .$$

Aus Lemma 2.3 folgt aber

$$M_N \leqq \binom{k + O(s(N))}{s(N)} \text{ und } m_N \geqq \binom{k}{s(N)} ,$$

woraus sich die obigen Beziehungen durch asymptotische Entwicklung ergeben. ▮

Aus dem Gesetz des iterierten Logarithmus für $D^{(1)}$ vgl. [11]) und aus Satz 2.7 ergibt sich unmittelbar die folgende metrische Aussage:

Satz 2.12: Sei s(N) eine Folge natürlicher Zahlen mit $s(N) \leqq c. \log_\alpha N$ $c < \frac{1}{2}$, für alle genügend großen N. Dann sind fast alle Folgen ω über A (im Sinn des ∞-dimensionalen Produktmaßes) (s(N))-gleichverteilt.

Ehe wir uns der "Teilblockdiskrepanz" zuwenden, betrachten wir noch kurz die folgende Möglichkeit den Begriff der "Teilwortdiskrepanz" auf Doppelfolgen (Felder) zu verallgemeinern.

Definition: Sei W eine mxn-Matrix über $A = \{a_1, \ldots, a_\alpha\}$ und $s,t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqq s \leqq m$, $1 \leqq t \leqq n$.
Weiters bezeichne (W;U) die Anzahl, wie oft die Matrix U als Minor (Submatrix) der Matrix W auftritt. Für $U = (u_{ij})$, $u_{ij} \in A$, sei $\mu(U) = \prod_{i,j} \mu(u_{ij})$. Dann ist

$$D^{(s,t)}(W) = \max_{U\in A^{sxt}} \left| \frac{(W;U)}{\binom{m}{s}\binom{n}{t}} - \mu(U) \right| .$$

Eine Doppelfolge $\omega = (x_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ über A heißt (s,t)-gleichverteilt zum Maß μ, wenn für die MxN-Anfangsabschnitte $\omega_{M,N}$ von ω gilt:

$$\lim_{M,N\to\infty} D^{(s,t)}(\omega_{M,N}) = 0$$

für unabhängig gegen ∞ strebendes M und N.

Offensichtlich ist die (s,t)-Gleichverteiltheit für beliebiges $s,t \in \mathbb{N}$ nun nicht aus der (1,1)-Gleichverteiltheit zu folgern.
Beispiel: Das "Schachbrett"

010101 ...
101010 ...
010101 ...
⋮

ist (1,1)-gleichverteilt zu $\mu(0) = \mu(1) = 1/2$ über $A = \{0,1\}$ aber sicher nicht (2,2)-gleichverteilt, da etwa $U = \binom{00}{01}$ überhaupt nie als Minor auftritt. Es gilt jedoch der folgende Satz:

<u>Satz 2.13:</u> (vgl.[5])
Ist ω (2,2)-gleichverteilt, so ist $\omega(s,t)$-gleichverteilt für alle $s,t \in \mathbb{N}$.

Konkrete Beispiele (2,2)-gleichverteilter Doppelfolgen zu konstruieren ist nicht trivial, wie das folgende Ergebnis zeigt:

<u>Satz 2.14:</u> (vgl.[5])
Sei $|A| = \alpha \geqq 2$ und $\omega(2,2)$-gleichverteilt zum (nichttrivialen) Maß μ.
Dann kann ω weder zeilen- noch spaltenperiodisch sein.

Ein "diskreter" Erzeugungsprozeß etwa einer (2,2)-gleichverteilten 0,1-Doppelfolge zum Maß $\mu(0) = \mu(1) = 1/2$ erscheint damit nicht leicht zugänglich (da etwa eine polynomiale Folge $p(i,j)$ über $\mathbb{Z}_2$ nach Satz 2.14 nicht in Frage kommt). Ein Ausweg bietet sich, indem man einen zum diskreten (s,t)-Gleichverteilungsbegriff analogen Begriff für Doppelfolgen $\omega = (x_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ mit $x_{i,j} \in [0,1[$ in naheliegender Weise einführt. Man kann dann etwa die folgenden Resultate beweisen.

<u>Satz 2.15:</u> (vgl.[5])

i) Sei β irrational mit beschränkten Teilnennern der Kettenbruchentwicklung.
Dann ist die Doppelfolge der Bruchteile $(\{\beta . i . j\})_{i,j=1}^{\infty}$, (2,2)-gleichverteilt auf $[0,1[$.

ii) Für $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$ mit $0 < \sigma, \tau \leqq \frac{1}{2}$ und $\sigma + \tau < 1$ ist die Doppelfolge der Bruchteile $(\{i^{\sigma} j^{\tau}\})_{i,j=1}^{\infty}$ (2,2)-gleichverteilt auf $[0,1[$.

<u>Beweisidee:</u> Man schätzt $D^{(2,2)}(\omega_{M,N})$ mit Hilfe der Ungleichung von Erdös-Turan-Koksma in $\mathbb{R}^4$ (vgl.[3]) nach oben ab. ∎

Aus den über $[0,1[$ (2,2)-gleichverteilten Doppelfolgen $\omega = (x_{ij})$ erhält man solche über $A = \{a_1, \ldots, a_\alpha\}$, die zum Maß $\mu(2,2)$-gleichverteilt sind, indem man $[0,1[$ in die Intervalle

$$I_k = [\sum_{i=1}^{k-1} \mu(a_i), \sum_{i=1}^{k} \mu(a_i)[\quad , 1 \leqq k \leqq \alpha$$

zerlegt und ω die Doppelfolge $\tilde{\omega} = (y_{ij})$ mit

$$y_{ij} = a_k \Leftrightarrow x_{ij} \in I_k$$

zuordnet.

3. Zur "Teilblockdiskrepanz" $D^{[s]}$

Offensichtlich folgt aus der [1]- (=(1)-)Gleichverteiltheit einer Folge $\omega = (x_n)$ nicht mehr, daß die Folge auch [s]-gleichverteilt ist, d.h. daß $\lim\limits_{N\to\infty} D^{[s]}(\omega_N) = 0$ gilt.

Beispiel: $\omega = 010101\ldots$

ist [1]-gleichverteilt über $A = \{0,1\}$ zum Maß $\mu(0) = \mu(1) = \frac{1}{2}$,

aber nicht [s]-gleichverteilt für $s \geqq 2$, da keine Blöcke 0^s auftrete

Speziell ist daher die Frage interessant, ob sich Verallgemeinerungen des Resultats von Meijer, Niederreiter und Tijdeman für $D^{[s]}$ beweisen lassen. Es konnte bisher gezeigt werden.

<u>Satz 3.1</u> (vgl.[6])

Sei $A = \{0,1\}$. Dann gilt

$$\sup_{\mu} \inf_{\omega} \sup_{N} (N-1).D^{[2]}(\omega_N) = \frac{3}{2}.$$

<u>Beweisskizze:</u>

Sei $\langle x\rangle = \lfloor x + \frac{1}{2}\rfloor$ und o.B.d.A. $\sigma = \mu(0) > \mu(1) = \tau$.

($\mu(0) = \mu(1) = \frac{1}{2}$ ist ein trivialer Sonderfall)

Dann definiert man

$$\omega = 0^{\langle 1/2\tau\rangle} 1^{\langle 1/\sigma\rangle} 0^{\langle 3/2\tau\rangle - \langle 1/2\tau\rangle} 1^{\langle 2/\sigma\rangle - \langle 1/\sigma\rangle} 0^{\langle 5/2\tau\rangle - \langle 3/2\tau\rangle} 1^{\langle 3/\sigma\rangle - \langle 2/\sigma\rangle} \ldots$$

Nach Unterscheidung der Fälle $u = 00, 01, 10, 11$ und jeweiligem "Auszählen" der Vorkommnisse als Subblock, gewinnt man die ersten beiden Terme der asymptotischen Entwicklung von $[\omega_N;u]$ für $N \to \infty$ und damit die obere Abschätzung

$$\sup_{\mu} \inf_{\omega} \sup_{N} (N-1).D^{[2]}(\omega_N) \leqq \frac{3}{2}.$$

Für die untere Abschätzung zeigt man für beliebiges s

$$\sup_{\mu} \inf_{\omega} \sup_{N} (N - s + 1) D^{[2]}(\omega_N) \geqq \frac{2s-1}{2}:$$

In einer [s]-gleichverteilten Folge muß der Block 1^s unendlich oft auftreten. Sei $\omega_N 1^s$ ein derartiges Auftreten. Dann gilt aber

$$[\omega_{N+2s-1};0^s] = [\omega_N;0^s].$$

Mit dieser Überlegung ergibt sich nach kurzer Rechnung das Resultat, wenn man $\mu(0)$ gegen 1 streben läßt. ∎

Wie im Fall der Teilwortdiskrepanz kann man auch hier für $A = \{a_1,\ldots,a_\alpha\}, \mu(a_i) = \frac{1}{\alpha}$ für alle $1 \leqq i \leqq \alpha$, die "Testblocklänge" s von der Länge N des betrachteten Anfangsabschnitts einer Folge ω abhängig machen:

Definition: Sei $s(N)$ eine Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge ω über $A = \{a_1,\dots,a_\alpha\}$ $[s(N)]$-gleichverteilt, falls für $N \to \infty$ gilt

$$D^{[s(N)]}(\omega_N) = \max_{u \in A^{s(N)}} \left| \frac{[\omega_N;u]}{N-s(N)+1} - \frac{1}{\alpha^{s(N)}} \right| = o\left(\frac{1}{\alpha^{s(N)}}\right) .$$

Aus der Definition folgt unmittelbar, daß eine $[s(N)]$-gleichverteilte Folge nur existieren kann, wenn $s(N) \leqq \log_\alpha N$ für fast alle N gilt. Um ein erstes metrisches Resultat über $[s(N)]$-gleichverteilte Folgen zu erzielen, kann etwa die folgende Abschätzung benützt werden.

Lemma 3.2. Für jedes $u \in \{a_1,\dots,a_\alpha\}^s$ und jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\operatorname{card} \{w \in \{a_1,\dots,a_\alpha\}^N : \left| \frac{[w;u]}{N-s+1} - \frac{1}{\alpha^s} \right| \geqq \varepsilon\} = O\left(\frac{s.\alpha^N}{\varepsilon^2.N}\right)$$

wobei die O-Konstante unabhängig von u,s,N und ε gewählt werden kann.

Beweisskizze: Seien für $w = x_1 x_2,\dots,x_N$ mit $x_i \in A$, die zufälligen Veränderlichen X_i definiert durch

$$X_i = \delta_{x_i \dots x_{i+s-1},u}$$

Dann sind für $|j-i| \geqq s$ X_i und X_j unabhängig und man kann den Beweis analog wie bei der klassischen Bernoulli-Tschebyscheff-Ungleichung weiterführen. ∎

Als Folgerung aus dem Lemma ergibt sich:

Satz 3.3. Sei $(s(N))$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $s(N) \leqq c.\log_\alpha N$, $c < \frac{1}{3}$, für alle genügend großen N. Dann sind fast alle Folgen ω über A (im Sinn des Produktmaßes auf A^∞) $[s(N)]$-gleichverteilt.

Beweis: Nach lemma 3.1 haben wir

$$\operatorname{card} \{w \in A^N : D^{[s(N)]}(w) \geqq \varepsilon\} = O\left(\frac{s(N)\alpha^{N+s(N)}}{\varepsilon^2.N}\right)$$

und daher

$$\operatorname{Prob} (\alpha^{s(N)} D^{[s(N)]}(\omega_N) \geqq \varepsilon) = O\left(\frac{s(N)\alpha^{3s(N)}}{\varepsilon^2.N}\right)$$

Für $s(N) \leqq c.\log_\alpha N$ mit $c < \frac{1}{3}$ ist aber

$$\frac{s(N).\alpha^{3s(N)}}{N} \leqq c.\log_\alpha N.N^{3c-1} ,$$

sodaß mit $\varepsilon = \varepsilon(N) = N^{-\sigma}, \sigma < \frac{1-3c}{2}$, folgt:

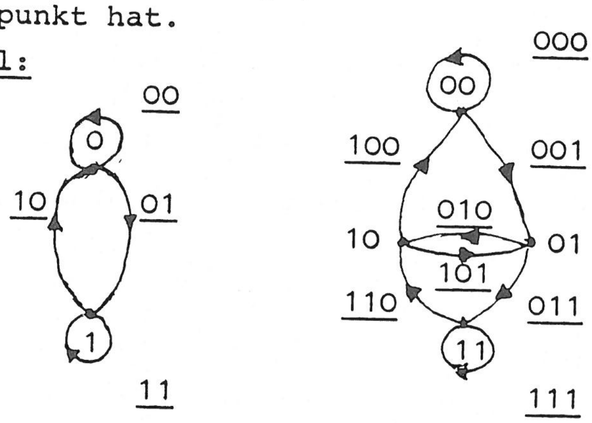
Für fast alle Folgen ω gilt

$$\alpha^{s(N)} D^{[s(N)]}(\omega_N) < N^{-\sigma} \qquad \text{für alle } N \geqq N_0 . \; ∎$$

Neben metrischen Aussagen ist, speziell für die Anwendungen, die Beschreibung konkreter Folgen ω von Interesse, die $[s(N)]$-gleichverteil sind zu Folgen $(s(N))$ mit $\lim_{N\to\infty} s(N) = \infty$. Wir wollen hier eine Konstruktion für $\alpha = 2$, d.h. 0,1-Folgen, beschreiben, die sich aber auch auf allgemeines α übertragen läßt (vgl. [1]):

Zur Konstruktion einer endlichen Folge, die jedes $u \in \{0,1\}^s$ genau einmal als Subblock enthält, kann man sich der "De Bruijn -Graphen" bedienen: Für $s \geqq 2$ sei $\underline{\overline{X}}_s$ der gerichtete Graph mit Knotenmenge $\{0,1\}^{s-1}$ und Knotenmenge $\{0,1\}^s$, wobei die gerichtete Kante $u_1u_2 \ldots u_s$ den Knoten $u_1u_2 \ldots u_{s-1}$ als Anfangspunkt und den Knoten $u_2 \ldots u_s$ als Endpunkt hat.

<u>Beispiel:</u>



$\underline{\overline{X}}_2$ $\underline{\overline{X}}_3$

Jeder Graph $\underline{\overline{X}}_s$ ist Eulersch, und jede Eulersche Linie von $\underline{\overline{X}}_s$ definiert durch die Bezeichnungen ihrer Kanten in inmittelbar einsichtiger Weise ein Wort, das jedes $u \in A^s$ genau einmal als Teilblock enthält.

<u>Beispiel:</u> Die Eulersche Linie $\langle 000, 001, 010, 101, 011, 111, 110, 100 \rangle$ von $\underline{\overline{X}}_3$ definiert das Wort 0001011100.

Wir erzeugen nun aus jedem $\underline{\overline{X}}_s$ genau ein derartiges Wort, welches mit 0^s beginnt, lassen den Endabschnitt 0^{s-1} weg und hängen die so für $s = 2,3,\ldots$ entstehenden Wörter aneinander. Sei ω die dabei entstehende Folge. Dann gilt

<u>Satz 3.4.</u> (vgl.[8])

Ist $s(N) = \theta(\log \log N)$ für $N \to \infty$, so ist $\omega[s(N)]$-gleichverteilt.

<u>Beweisidee:</u>

"Volle" Unterabschnitte der Folge ω, die von einer Eulerschen Linie in $\underline{\overline{X}}_{s(N)}, \underline{\overline{X}}_{s(N)+1}, \ldots$ herrühren, ergeben genau die richtige Häufigkeit $[\omega_N; u]$ für alle $u \in A^{s(N)}$.

Der mögliche Fehler für den auf $\underline{\overline{X}}_2, \ldots, \underline{\overline{X}}_{s(N)-1}$ zurückgehenden Anfangsabschnitt kann leicht abgeschätzt werden.

Es bleibt der Fehler abzuschätzen, der sich daraus ergeben kann, daß ω_N vor dem Ende des auf $\underline{\overline{X}}_k$ zurückgehenden Teils von ω endigt. Sei $\tilde{\omega}_N$ der Endteil von ω, der in die Eulersche Linie von $\underline{\overline{X}}_k$ fällt und seien $v_1, v_2, \ldots \in \{0,1\}^k$ die Kanten der gewählten Eulerschen Linie des $\underline{\overline{X}}_k$. Dann ist $[\tilde{\omega}_N; u]$ ungefähr gleich dem Ausdruck

$$\frac{\sum_{i=1}^{N-2^k} [v_i; u]}{k}$$

mit einer unschwer abschätzbaren Differenz.

Da alle v_i verschieden sind, gilt aber:

$$\operatorname{card}\left\{ i : \left| \frac{[v_i; u]}{k} - \frac{1}{2^s} \right| > \varepsilon \right\} \leqq \operatorname{card}\left\{ w \in A^k : \left| \frac{[w; u]}{k} - \frac{1}{2^s} \right| > \varepsilon \right\}$$

und für diese Anzahlen ist durch Lemma 3.2 eine aureichend gute Abschätzung bekannt. ∎

In [1] wird ein entsprechendes Resultat für allgemeines α gezeigt, wobei von den De Bruijn-Graphen $\underline{\overline{X}}_s$ mit Knotenmenge A^{s-1} ausgegangen wird.

Indem man die auf $\underline{\overline{X}}_s$ zurückgehende Eulersche Linie nicht nur einmal sondern α^s-mal durchläuft, dürfte man die Bedingung für $s(N)$ auf $s(N) \leqq c.\log_\alpha n$ mit $c < \frac{1}{2}$ abschwächen können ([2]).

Die auf das Studium spezieller normaler Zahlen zurückgehenden Konstruktionen in [17] und [18] ergeben dagegen ebenfalls die Einschränkung $s(N) = \mathcal{O}(\log \log N)$.

LITERATUR:

[1] FLAJOLET Ph., KIRSCHENHOFER P. und TICHY R.F., Discrepancy of Sequences in Discrete Spaces, preprint, 1986.

[2] GOLDSTERN M., Eine fast optimal vollständig gleichverteilte Folge, preprint, TU Wien, 1986.

[3] HLAWKA E., Theorie der Gleichverteilung, Mannheim-Wien-Zürich, Bibliographisches Institut 1979.

[4] HLAWKA E., Gleichverteilung und mathematische Linguistik, Österr.Akad.d.Wiss., Math. Naturwiss.Kl. SB II 189, 209-248, (1980).

[5] KIRSCHENHOFER P. und TICHY R.F., On uniform distribution of double sequences. Manuscripta math. 35, 195-207 (1981).

[6] KIRSCHENHOFER P. und TICHY R.F., Gleichverteilung in diskreten Räumen. In: Zahlentheoretische Analysis (E.Hlawka ed.) Springer Verlag, Lecture Notes in Math. 1114, 66-76 (1985).

[7] KIRSCHENHOFER P. und TICHY R.F., Gleichverteilung und Formale Sprachen. Österr. Akad.Wiss., Math.Naturwiss.Kl. SB II 189, 291-319 (1980).

[8] KIRSCHENHOFER P. und TICHY R.F., Some distribution properties of 0,1-sequences. Manuscripta math. 54, 205 - 219 (1985).

[9] KIRSCHENHOFER P. und TICHY R.F., Zur Diskrepanz von 0,1-Folgen. J. Number Th. 21, 156-175 (1985).

[10] KNUTH D.E., The art of computer programming, Vol. 2: Seminumerical algorithms. Reading, Addison Wesley, 1981.

[11] KUIPERS L, und NIEDERREITER H., Uniform distribution of sequences New York - London - Sydney - Toronto: J. Wiley & Sons 1974.

[12] MEIJER H.G., On a distribution problem in finite sets. Indag. Math. 35, 9 - 17 (1973).

[13] MEIJER H.G. und NIEDERREITER H., On a distribution problem in finite sets. Compositio Math. 25, 153 - 160 (1972).

[14] NIEDERREITER H., On the existence of uniformly distributed sequences in compact spaces. Compositio Math. 25, 93 - 99 (1972).

[15] PECHLANER W., Numerische Analysen zur Diskrepanz von Sprachen, Österr. Akad. Wiss., Math. Naturwiss. Kl. SB II 190, 245-251 (1981).

[16] PHILIPP W., Ein zentraler Grenzwertsatz mit Anwendungen auf die Zahlentheorie. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 8, 185 - 203 (1967).

[17] SCHIFFER J., Diskrepanz normaler Zahlen. Diss. Formal- und Naturwiss. Fakultät Universität Wien, 1983.

[18] SCHOISSENGEIER J., Über die Diskrepanz von Folgen (αb^n). Österr. Akad.Wiss.Math. Naturwiss.Kl. SB II 187, 225-236 (1978).

[19] TIJDEMAN H., On a distribution problem in finite and countable sets. J.Comb.Theory (A) 15, 129 - 137 (1973).

[20] VOIGT B., Zur Diskrepanz von 0,1-Folgen. Vortrag beim Seminaire Lotharingien de Combinatoire, 14 eme Session, Feuerstein 1986.

[21] WEYL H., Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, Math.Ann. 77 (1916), 313-352.