# Interpolation de Lagrange

A. Lascoux, mai 1986

Etant donnée une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ , "interpoler" f en l'ensemble de "points" $B = \{b,c,\ldots,d\}$ consiste à trouver une autre fonction g , par exemple un polynôme, telle que f et g coincident en B et telle que f-g soit un "reste" négligeable. Newton et Lagrange interpolent f par le même polynôme (de degré $\leq n-1$ , avec n = cardinal de B), trouvant fort heureusement le même reste, mais présentent différemment leur calcul. Newton ordonne totalement $B = \{b < c < \ldots < d\}$ , écrivant

$$(1) \qquad f(x) - f(b) - (f\partial)\cdot(x-b) - (f\partial\partial)\cdot(x-b)(x-c) - \ldots = \text{NReste},$$

les coefficients $(f\partial\partial\ldots)$ étant ses fameuses <u>différences</u> <u>divisées</u> que nous expliciterons plus loin.

Lagrange, quant à lui, conserve la symétrie des éléments de B , et même, divisant par le produit $(x-b)(x-c)\ldots(x-d)$ , trouve une expression symétrique en $\{x,b,c,\ldots,d\}$ :

$$(2) \qquad f(x)/(x-b)(x-c)\ldots(c-d) + f(b)/(b-x)(b-c)\ldots(b-d) + \ldots + f(d)/(d-x)(d-b)(d-c)\ldots = \text{LReste}.$$

C'est en fait sur le reste qu'il est intéressant de porter son effort. On pose

$$(3) \qquad \square = \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 & \ldots & b^{n-1} & f(b) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & d & d^2 & \ldots & d^{n-1} & f(d) \\ 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} & f(x) \end{vmatrix}$$

Le calcul de Lagrange consiste simplement à remarquer que le membre de gauche de (2) est le développement du déterminant suivant sa dernière colonne (en posant $\Delta$ = Vandermonde = produit des différences):

(2') $\quad \mathrm{LReste} = \square/\triangle(x,b,c,\ldots,d)$

Newton conserve le facteur $(x-b)\ldots(x-d)$ :

(1') $\quad \mathrm{NReste} = \square/\triangle(b,c,\ldots,d) = \mathrm{LReste}\cdot(x-b)\ldots(x-d)$ .

Euclide échange droite et gauche, et prend comme reste de sa fameuse division de f par $(x-b)\ldots(x-d)$ le polynôme interpolant f:

(4) $$f - (\square/\triangle(x,b,c,\ldots,d))(x-b)\ldots(x-d)$$
$$= \mathrm{EReste} = ?x^0 + ??x^1 + \ldots + ???x^{n-1} ,$$

les coefficients ?? pouvant se calculer à l'aide des différences divisées ainsi qu'il est expliqué en (10) .

Revenons au membre de gauche de la formule de Lagrange (2), qui peut s'écrire comme suit, en posant $A = \{x,b,\ldots,d\}$ pour respecter la symétrie, et en notant $R(a,A-a)$ le produit des différences de $a \in A$ avec tous les autres éléments de A:

(5) $$\sum_{a\in A} f(a)/R(a,A-a) = \mathrm{LReste} .$$

Comme une fonction symétrique des éléments de A-a est une fonction de a à coefficients des fonctions symétriques en A , on peut sans plus de généralité introduire une fonction symétrique g de card(A)-1 variables et considérer la somme

(6) $$\sum_{a\in A} g(A-a)\, f(a)/R(a,A-a) .$$

On est ainsi conduit, à la suite de Sylvester, aux sommes

(7) $\sum_{B\subset A} g(A-B)f(B)/R(B,A-B) = (g,f,A,p,q)$ ,

p et q étant deux entiers positifs, A un ensemble de cardinal p+q, f une fonction symétrique de p variables, g de q variables, la sommation s'effectuant sur tous le sous-ensembles B de cardinal p de A et R(B,A-B) désignant enfin le produit des différences des éléments de B avec ceux de l'ensemble complémentaire A-B:

$$R(B,A-B) = \prod_{b\in B,\ c\in B} (b-c) \ .$$

La fonction (g,f,A,p,Q) est <u>symétrique</u> en A ; la somme (7) peut s'interpréter comme un opérateur bilinéaire:

$$\mathrm{FSym}(q) \times \mathrm{FSym}(p) \longrightarrow \mathrm{FSym}(p+q)$$

sur l'espace des fonctions symétriques. Nous allons l'exprimer comme un <u>produit d'opérateurs différences divisées</u>. Pour cela, il nous faut ordonner totalement $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{p+q}\}$ .

On note $\sigma_i$ la transposition de $a_i$ et $a_{i+1}$ ; par $h^{\sigma_i}$ , on désigne l'image par $\sigma_i$ d'une fonction h des variables $a_1, \ldots, a_{p+q}$ . La <u>i-ième différence divisée</u> $\partial_i$ est l'opérateur

$$h \longrightarrow h\partial_i = (h-h^{\sigma_i})/(a_i-a_{i+1}) \ .$$

Les opérateurs sont notés à droite, pour que l'on puisse les composer facilement.

On peut maintenant expliciter (g,f,A,p,q):

<u>Proposition</u>. Avec les notations de (7), on a

(8) $$\sum_{B\subset A} g(A-B)f(B)/R(B,A-B)$$

$$= gf(\partial_p \ldots \partial_{p+q-1})(\partial_{p-1} \ldots \partial_{p+q-2}) \ldots (\partial_1 \ldots \partial_q)$$

On a écrit l'operateur comme un produit de p produits de q différences divisées. Cela permet de réduire la démonstration de la proposition au cas de Lagrange (i.e. p=1):

Proposition.

(9) $$\sum_{a\in A} g(A-a)f(a)/R(a,A-a) = gf\partial_1\partial_2\ldots\partial_q$$

Il suffit par linéarité de considérer le cas $g=1$ , $f(a) = a^n \ \forall n \geq o$ , ou de manière équivalente, $g=1$ , $f = 1/(1-az)$ .

Alors
$$f\partial_1 = z/(1-a_1z)(1-a_2z) ,$$
$$f\partial_1\partial_2 = z^2/(1-a_1z)(1-a_2z)(1-a_3z) ,$$
$$\ldots$$
$$f\partial_1\ldots\partial_q = z^q/(1-a_1z) \ldots (1-a_{q+1}z) .$$

La fonction $f\partial_1\ldots\partial_q$ est donc la fonction génératrice de tous les monômes en $a_1,\ldots,a_{q+1}$ . On a vu que le membre de gauche est égal au quotient

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & 1/(1-a_1z) \\ \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 1 & a_{q+1} & a_{q+1}^2 & \ldots & 1/(1-a_{q+1}z) \end{vmatrix} \Big/ \Delta(a_1,\ldots,a_{q+1})$$

qui lui aussi est la fonction génératrice de tous le monômes.
Q.E.D.

Le démonstration directe de (8) se ramène en fait à montrer que l'opérateur $(\partial_p\ldots\partial_{p+q-1}) \ldots (\partial_1\ldots\partial_q)$ envoie les paires de fonctions de Schur dans les fonctions de Schur, le membre de gauche (8) s'interprétant alors comme le développement d'une fonction de Schur en p+q variables, exprimée comme un déterminant de ordre p+q , selon ses q dernières colonnes.

On peut maintenant terminer le calcul d'Euclide, à l'aide des fonctions symétriques élémentaires $\Lambda_k$ définis par,
$$\sum z^k \Lambda_k(A) = \prod_{a\in A} (1+za) .$$

Proposition. Soient $f(x)$ une série formelle, $A$ un ensemble de cardinal $n+1$ . Alors, modulo le polynôme $\prod_{a\in A}(x-a)$ ,

$$(10) \qquad f(x) \equiv (-1)^n \Lambda_n f\partial_1 \ldots \partial_n \cdot x^0 + \ldots - \Lambda_1 f\partial_1 \ldots \partial_n x^{n-1} + f\partial_1 \ldots \partial_n x^n .$$

Les différences divisées permettent de calculer des sommes du type de (8) . On peut ainsi interpoler par des fonctions rationnelles, problème résolu par Cauchy et Jacobi par des méthodes différentes.

Soient $A$ un ensemble de cardinal $p+q$ , $f$ une fonction d'une variable. On cherche deux polynômes $\prod_{c\in C}(x-c) = R(x,C)$ et $\prod_{d\in D}(x-d) = R(x,D)$ de degrés respectifs $p$ et $q-1$ tels que les fonctions $f$ et $R(x,C)/R(x,D)$ coincident sur $A$ . Donnons par exemple le numérateur.

Proposition. Le numérateur est à un facteur près

$$(11) \qquad \sum_{B\subset A} f(B)R(x,A-B)/R(B,A-B)$$

la somme étant sur tous les sous-ensemble $B$ de cardinal $q$ , en écrivant $f(B)$ pour le produit $\prod_{b\in B} f(b)$ .

Pour l'interpolation rationnelle, if faut ajouter une hypothèse de "généricité" pour assurer que le facteur parasite ne soit pas nul.

On peut sommer sur plusiers ensembles. C'est ainsi que Sylvester calcule le p.g.c.d. $P_{gcd}(A,B)$ de deux polynômes $R(x,A)$ et $R(x,B)$ .

Proposition. Soient p et q deux entiers $\geq$ o tels que p+q est égal au degré de $P_{gcd}(A,B)$ . Alors,

$$P_{gcd}(A,B) =$$

$$\sum_{A'\subset A,\, B'\subset B} \frac{R(x,A')\cdot R(x,B')\cdot R(A',B')\cdot R(A-A',B-B')}{R(A',A-A')\cdot R(B',B-B')}$$

somme sur tous les sous-ensembles A' de cardinal p , B' de cardinal q .

Remarque: tous ces calculs peuvent s'interpréter géométriquement. Dans le cas de Lagrange/Euclide, on a affaire à l'espace projectif, dont l'anneau de cohomologie est le quotient de l'anneau des polynômes en x par la relation $(x-b)\dots(x-d) = o$ , l'opérateur $\partial_1\partial_2\dots$ étant le morphisme de projection sur la base. Le cas plus général p,q $\neq$ 1 correspond à la grassmannienne des sous espaces vectoriels $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}^{p+q}$ et l'opérateur apparaissant dans la formule (8) est celui reliant la cohomologie d'une grassmannienne à celle de sa base.

Pour plus de détails sur ces opérateurs, voir

A. Lascoux, M.P. Schützenberger (in Springer L.N. 996);

pour l'interpolation de Newton à plusieurs variables voir

A. Lascoux, M.P. Schützenberger (in Springer L.N. 1146);

dans

I.G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, (Oxford 1979),

on trouve les proprietés des fonctions symétriqes.

A. Lascoux
UER Mathématiques
Université Paris VII
2, Place Jussieu
F-75251 Paris Cedex 05
France