Zur kombinatorischen Bedeutung der PERRON-FROBENIUS-Projektion

von

Karl Erich Wolff

Problem 5 in the book [2,p.266] of CVETKOVIĆ, DOOB, SACHS says: "Find the relation between the theory of Markov chains and the theory of graph spectra."
We show that both theories are ruled by the PERRON-FROBENIUS projection and three matrix representations of it, which yield a common generalization of the HOFFMAN theorems for graphs [4], directed graphs [5] and point stable designs [9] as well as the ergodic theorem [3] for stochastic matrices and the ranking procedure of WEI [8] and KENDALL [6] for tournaments.

Die PERRON-FROBENIUS-Projektion

In den HOFFMAN-Theoremen, dem Ergodensatz und der Ranking-Methode von WEI und KENDALL kommt jeweils eine nichtnegative $n \times n$-Matrix M vor, ihr PERRON-FROBENIUS-Eigenwert α, sowie eine Projektionsmatrix P mit $MP = \alpha P = PM$.

Zur allgemeineren Beschreibung dieser Situation benötigen wir folgende Bezeichnungen:

$(K)_n$ sei die Menge der $n \times n$-Matrizen über einem Körper K.
E sei die Einheitsmatrix in $(K)_n$. Für $M \in (K)_n$ sei $\operatorname{spec} M$ die Menge der Eigenwerte von M. Für $\alpha \in \operatorname{spec} M$ sei $a(\alpha)$ die algebraische, $g(\alpha)$ die geometrische Vielfachheit.

Definition:

Sei $M \in (K)_n$, $\alpha \in K$. M heißt *α-quasi-orthogonal (α-qo.)*, falls $\text{Kern}(M - \alpha E) \cap \text{Bild}(M - \alpha E) = \{ \vec{o} \}$

(also $K^n = \text{Kern}(M - \alpha E) \oplus \text{Bild}(M - \alpha E)$).

Lemma 1:

Sei K ein Körper, $M \in (K)_n$, $\alpha \in \text{spec}M$, M α-qo.

Dann gilt:

Eine Matrix $P \in (K)_n$ ist die Matrix der Projektion auf $\text{Kern}(M - \alpha E)$ längs $\text{Bild}(M - \alpha E)$ genau dann, wenn

(1) $P^2 = P$, $MP = \alpha P = PM$, $\text{Rang}P \geq g(\alpha)$.

Wenn (1) gilt, sagen wir:

P ist die (Matrix der) *(M,α)-Projektion*.

Ist $O \leq M \in (\mathbb{R})_n$ und α der PERRON-FROBENIUS-Eigenwert von M, M α-qo., so nennen wir die (M,α)-Projektion die *PERRON-FROBENIUS-Projektion*.

Lemma 2:

Sei K ein Körper, $M \in (K)_n$, $\alpha \in \text{spec}M$.

Dann sind äquivalent:

a) M ist α-quasi-orthogonal

b) $a(\alpha) = g(\alpha)$

c) $\text{Kern}(M - \alpha E) = \text{Kern}(M - \alpha E)^2$

d) Es existiert ein Polynom $S(X) \in K[X]$, so daß $(X - \alpha)\, S(X)$ das Minimalpolynom von M ist und $S(\alpha) \neq 0$.

Das durch d) eindeutig bestimmte Polynom $S(X)$ nennen wir das *(M,α)-Polynom*.

Die Polynomdarstellung der (M,α)-Projektion

Satz 1:

Sei K ein Körper, $M \in (K)_n$, $\alpha \in \operatorname{spec} M$, M α-qo.,
$S(X)$ das (M,α)-Polynom. Dann ist

$$P := \frac{S(M)}{S(\alpha)} \quad \text{die } (M,\alpha)\text{-Projektion .}$$

Wichtigster Spezialfall:

Ist $S(X) = \prod_{\substack{\lambda \neq \alpha \\ \lambda \in \operatorname{spec} M}} (X - \lambda)^{s_\lambda}$ (z.B. für $K = \mathbb{C}$), so ist

$$(2) \qquad P = \prod_{\substack{\lambda \neq \alpha \\ \lambda \in \operatorname{spec} M}} \left(\frac{M - \lambda E}{\alpha - \lambda}\right)^{s_\lambda} .$$

Beweis von Satz 1:

Sei $P = S(M)/S(\alpha)$. Dann ergibt sich aus $(M - \alpha E)S(M) = 0$
die Bedingung $MP = \alpha P = PM$ (s.(1)). Offenbar gilt

(3) $P\vec{x} = \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in \operatorname{Kern}(M - \alpha E)$,

also $\operatorname{Kern}(M - \alpha E) \leq \operatorname{Bild} P$.

Andererseits gilt wegen $(M - \alpha E)S(M) = 0$

$\operatorname{Bild} P = \operatorname{Bild} S(M) \leq \operatorname{Kern}(M - \alpha E)$, also gilt

(4) $\operatorname{Bild} P = \operatorname{Kern}(M - \alpha E)$.

Aus (4) und (3) ergibt sich $P^2 = P$ und daher (1) wegen (4).
Also ergibt sich aus Lemma 1 die Behauptung.

Die dyadische Darstellung der (M,α)-Projektion

Sei K ein Körper, $M \in (K)_n$, $\alpha \in \operatorname{spec}M$,

$R(\alpha) := \{ \vec{x} \in K^n \mid M\vec{x} = \alpha\vec{x} \}$ der Rechtseigenraum von α,

$L(\alpha) := \{ \vec{x} \in K^n \mid M^T\vec{x} = \alpha\vec{x} \}$ der Linkseigenraum von α.

Satz 2:

Sei K ein Körper, $M \in (K)_n$, $\alpha \in \operatorname{spec}M$ und $a(\alpha) = 1$.
Dann existieren $\vec{r} = (r_1,\dots,r_n)^T$, $\vec{\ell} = (\ell_1,\dots,\ell_n)^T \in K^n$,
so daß $R(\alpha) = \langle \vec{r} \rangle$, $L(\alpha) = \langle \vec{\ell} \rangle$ und

$$(5) \qquad P := \left(\sum_{k=1}^{n} r_k\ell_k\right)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} r_1\ell_1 & \cdots & r_1\ell_n \\ \vdots & & \vdots \\ r_n\ell_1 & \cdots & r_n\ell_n \end{pmatrix} = \frac{\vec{r}\,\vec{\ell}^T}{\vec{\ell}^T\vec{r}}$$

ist die (M,α)-Projektion.

Beweis:

Wegen $a(\alpha) = 1$ ist $g(\alpha) = a(\alpha)$, also ist M α-qo.
Sei P die Matrix der (M,α)-Projektion. Wegen (1) ist also
$MP = \alpha P$, d.h. die Spalten von P sind Elemente von $R(\alpha) = \langle\vec{r}\rangle$,
also existiert ein $\vec{c} \in K^n$ mit $P = (r_i c_j) = \vec{r}\,\vec{c}^T$.
Wegen $PM = \alpha P$ sind die Zeilen von P Elemente von $\langle\vec{\ell}\rangle$
und wegen $P^2 = P \neq 0$ (nach (1)) ist $\vec{o} \neq \vec{\ell}^T = \vec{\ell}^T P$,
also existiert ein j mit $0 \neq \ell_j = \vec{\ell}^T c_j \vec{r}$, also ist
$\vec{\ell}^T\vec{r} \neq 0$ und daher $c_k = \ell_k/(\vec{\ell}^T\vec{r})$ für alle $k \in \{1,\dots,n\}$
und deshalb $P = \vec{r}\,\vec{\ell}^T/(\vec{\ell}^T\vec{r})$.

Die HOFFMAN-Gleichung einer zusammenhängenden Inzidenzstruktur

Sei J eine zusammenhängende Inzidenzstruktur mit $v \times b$ - Inzidenzmatrix A und Verbindungsmatrix $N := AA^T \in (\mathbb{R})_v$, α der PERRON-FROBENIUS-Eigenwert von N. Dann ist der Rechtseigenraum $R(\alpha)$ eindimensional (denn N ist unzerlegbar, da J zusammenhängend ist). Wegen $N = N^T$ ist $L(\alpha) = R(\alpha)$, etwa $R(\alpha) = \langle\vec{r}\rangle$ für ein $\vec{r} \in \mathbb{R}^v$.

Dann gilt nach Satz 1 und Satz 2 die folgende HOFFMAN-Gleichung für zusammenhängende Inzidenzstrukturen

$$(6) \qquad \prod_{\substack{\lambda<\alpha \\ \lambda\in \mathrm{spec}N}} \frac{N - \lambda E}{\alpha - \lambda} = \frac{\vec{r}\,\vec{r}^T}{\vec{r}^T\vec{r}} ,$$

denn beide Seiten der Gleichung stellen die PERRON-FROBENIUS-Projektion von N dar, da N diagonalähnlich ist.

Folgerungen aus (6):

Ist J punkt-stabil (s.[9,10]), d.h. $NJ = \alpha J$ für ein $\alpha \in \mathbb{N}$, wobei $J = (J_{ik}) \in (\mathbb{R})_v$ und $J_{ik} = 1$ für $1 \leq i,k \leq v$, dann ist α der PERRON-FROBENIUS-Eigenwert von N und $\vec{r} := (1,\ldots,1)^T \in R(\alpha)$, also $\vec{r}^T\vec{r} = v$ und daher liefert (6) die HOFFMAN-Gleichung für zusammenhängende punkt-stabile Inzidenzstrukturen (s.[9]):

$$(7) \qquad \prod_{\substack{\lambda<\alpha \\ \lambda\in \mathrm{spec}N}} \frac{N - \lambda E}{\alpha - \lambda} = \frac{1}{v} J .$$

Daraus erhält man (s.[9]) die ursprüngliche HOFFMAN-Gleichung aus [4] für zusammenhängende reguläre Graphen.

Die HOFFMAN-McANDREW-Gleichung für stark zusammenhängende reguläre gerichtete Graphen

Sei G ein gerichteter Graph mit Adjazenzmatrix $A \in (\mathbb{R})_n$.
Bekanntlich ist G stark zusammenhängend genau dann, wenn A unzerlegbar ist. G ist d-regulär genau dann, wenn $\vec{r} = (1,\ldots,1)^T \in R(d) \cap L(d)$. Also besitzt in einem stark zusammenhängenden d-regulären gerichteten Graphen G der PERRON-FROBENIUS-Eigenwert d von A die algebraische Vielfachheit 1, daher ist $R(d) = \langle \vec{r} \rangle = L(d)$, also erhält man aus Satz 1 und Satz 2 die HOFFMAN-McANDREW-Gleichung

$$\frac{S(A)}{S(d)} = \frac{1}{n} J \quad .$$

$n \frac{S(X)}{S(d)}$ heißt in [5] das Polynom des gerichteten Graphen G.

Die Limes-Darstellung der (M,α)-Projektion

Der Ergodensatz (s.[3]) besagt u.a., daß der Limes $\lim\limits_{k\to\infty} S^k$ einer stochastischen Matrix S eine spezielle dyadische Matrix der Form (5) ist mit $\vec{r} = (1,\ldots,1)^T$.
Wir betrachten allgemeiner den Limes $\lim\limits_{k\to\infty} M^k$ für $M \in (\mathbb{C})_n$ und benutzen das

Lemma 3:

Sei $M \in (\mathbb{C})_n$. Dann existiert $\lim\limits_{k\to\infty} M^k$ genau dann, wenn $|\lambda| < 1$ für alle $\lambda \in \operatorname{spec} M \setminus \{1\}$ und M 1-quasi-orthogonal ist.

Satz 3:

Sei $M \in (\mathbb{C})_n$. Wenn $P := \lim_{k\to\infty} M^k$ existiert, dann ist P die (M,α)-Projektion (mit $\alpha = 1$) oder $P = O$.

Beweis:

Sei $P := \lim_{k\to\infty} M^k \neq O$. Dann ist $1 \in \operatorname{spec}M$ wegen $MP = P \neq O$ und nach Lemma 3 ist M 1-quasi-orthogonal. Offenbar ist $P^2 = P$, $MP = P = PM$. Wie in [3,S.17,37] zeigt man $\operatorname{Rang}P = g(1)$. Also ist P die $(M,1)$-Projektion nach Lemma 1.

Aus Satz 2 und Satz 3 erhalten wir den

Satz 4:

Sei $M \in (\mathbb{C})_n$ und es existiere $\lim_{k\to\infty} M^k \neq O$. Dann ist $1 \in \operatorname{spec}M$. Wenn $g(1) = 1$ ist, dann gilt

$$(8) \qquad \lim_{k\to\infty} M^k = \frac{\vec{r}\,\vec{\ell}^{\,T}}{\vec{\ell}^{\,T}\,\vec{r}}$$

wobei $R(1) = \langle \vec{r} \rangle$, $L(1) = \langle \vec{\ell} \rangle$.

Bemerkung:

Die Hauptaussage des Ergodensatzes für sehr gute (s.[2]) stochastische Matrizen erhält man aus den beiden Darstellungen der PERRON-FROBENIUS-Projektion in (8) mit $\vec{r} = (1,\dots,1)^T$.

Aus Satz 1 und Satz 3 ergibt sich eine weitere algebraische Berechnungsmöglichkeit für den Limes $\lim_{k\to\infty} M^k$:

Satz 5:

Sei $M \in (\mathbb{C})_n$ und es existiere $\lim_{k\to\infty} M^k \neq O$.
Dann gilt (mit den Bezeichnungen von (2)):

$$(9) \qquad \lim_{k\to\infty} M^k = \frac{S(M)}{S(1)} = \prod_{\substack{|\lambda|<1 \\ \lambda\in\operatorname{spec}M}} \left(\frac{M-\lambda E}{1-\lambda}\right)^{s_\lambda}.$$

Die PERRON-FROBENIUS-Projektion in der WEI-KENDALL-Methode

Zur Bestimmung einer "sinnvollen" Rangfolge der Teilnehmer eines Turniers ermittelt man zuerst (s.[1,6,8]) die lineare Ordnung der starken Zusammenhangskomponenten des gerichteten Turniergraphen T und ordnet dann in jeder starken Zusammenhangskomponente mit $m > 3$ Teilnehmern (bei genau 3 Teilnehmern werden alle drei auf denselben Rang gesetzt, während $m = 2$ wegen der Antisymmetrie von T nicht vorkommt) diese Teilnehmer folgendermaßen an:

Die primitive (s.[1]) Adjazenzmatrix A der gegebenen starken Zusammenhangskomponente Z wird "konvergenz-erzwingend" durch ihren PERRON-FROBENIUS-Eigenwert α geteilt und man erhält die Matrix $A_1 := A/\alpha$.

Es existiert der Limes $P := \lim_{k \to \infty} A_1{}^k \neq 0$, da nach dem PERRON-FROBENIUS-Theorem (s.[7]) 1 der einzige betragsmaximale Eigenwert von A_1 ist und $a(1) = 1 = g(1)$ (s.Lemma 2, Lemma 3). Also ist nach Satz 3 P die PERRON-FROBENIUS-Projektion auf den eindimensionalen $\mathrm{Kern}(A_1 - E) = \mathrm{Kern}(A - \alpha E)$. Daher existiert genau ein positiver Vektor $\vec{r}$ mit

$$< \vec{r} > = \mathrm{Kern}(A - \alpha E) \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{m} r_i = 1 \quad .$$

Dieser Vektor $\vec{r}$ wird als "Ranking-Vektor" genommen, d.h. man gibt dem Teilnehmer i genau dann einen höheren Rang als dem Teilnehmer j , wenn $r_i > r_j$ ist.

Zur kombinatorischen Deutung dieser WEI-KENDALL-Methode sei s_{ki} := die i-te Koordinate des Vektors $A^k J_{m,1}$, wobei $J_{m,1} := (1,\ldots 1)^T \in \mathbb{R}^m$, also ist

s_{ki} die Anzahl der im Punkt i beginnenden Pfade der Länge k (in der starken Zusammenhangskomponente Z), weshalb wir s_{ki} als "Spielstärke der Stufe k des Teilnehmers i " interpretieren.

Dann gilt:

$$(10) \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{s_{ki}}{s_{kj}} = \frac{r_i}{r_j} \qquad (i,j = 1,\ldots,m).$$

Beweis:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s_{ki}}{\alpha^k} = (\lim_{k\to\infty} A_1^k \, J_{m,1})_i = (PJ_{m,1})_i \, .$$

Nach Satz 2 ist $P = \vec{r}\,\vec{\ell}^T/(\vec{\ell}^T\,\vec{r})$, also ist

$PJ_{m,1} = c\,\vec{r}$ mit $c := \vec{\ell}^T J_{m,1}/(\vec{\ell}^T\,\vec{r}) > 0$. Also ist

$$\lim_{k\to\infty} \frac{s_{ki}}{\alpha^k} = (PJ_{m,1})_i = c\,r_i$$ und daher gilt (10).

LITERATUR

[1] BONDY,J.A.,MURTY,U.R.S.: Graph theory with applications Amer.Elsevier Publ.Co.,Inc.,New York 1976

[2] CVETKOVIĆ,D.M.,DOOB,M.,SACHS,H.: Spectra of graphs Acad.Press 1979

[3] FRITZ,F.J.,HUPPERT,B.,WILLEMS,W.: Stochastische Matrizen Springer Verlag 1979

[4] HOFFMAN,A.J.: On the polynomial of a graph Amer.Math.Monthley 70,30-36(1963).

[5] HOFFMAN,A.J.,McANDREW,M.H.: The polynomial of a directed graph. Proc.Amer.Math.Soc.16(1965)303-309.

[6] KENDALL,M.G.: Further contributions to the theory of paired comparisons. Biometrics 11,43-62(1955).

[7] SENETA,E.: Non-negative matrices George Allen and Unwin Ltd., London 1973.

[8] WEI,T.H.: The algebraic foundations of ranking theory. Thesis, Cambridge 1952.

[9] WOLFF,K.E.: Punkt-stabile und semi-partial-geometrische Inzidenzstrukturen. Mitt.math.Sem.Gießen 121(1976).

[10] WOLFF,K.E.: Punkt-stabile Inzidenzstrukturen und stochastische Matrizen. Séminaire lotharingien de combinatoire (Bayreuth,Erlangen,Strasbourg),Mitwitz 1984, 124-126.- Publ. IRMA Strasbourg 266/S-11,1985.

Herrn A. DRESS möchte ich für einige wertvolle Hinweise, u.a. auf Lemma 3 und den Begriff der quasi-orthogonalen Matrizen herzlich danken.

Karl Erich Wolff
Fachbereich MN
Fachhochschule Darmstadt
Schöfferstr. 3
6100 Darmstadt