Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1987, 340/S–15
Actes 15^{e} Séminaire Lotharingien, p. 101–103

KANTENSUCHE IN GRAPHEN

VON

EBERHARD TRIESCH

Gegeben sei ein Graph $G=(V,E)$. Zwei Spieler, die wir mit A (für Algorithmiker) und S (für Stratege) bezeichnen wollen, spielen das folgende Spiel: A stellt S Fragen über eine hypothetische Kante e^* von G und zwar sind alle Fragen der Form "Ist $v\epsilon e^*$?" mit $v\epsilon V$ zugelassen und nur diese. S antwortet mit Ja oder Nein. Er braucht sich dabei nicht von vornherein auf eine bestimmte Kante festzulegen, muß aber die Antwort stets so geben, daß die Menge aller mit seinen Antworten verträglichen Kanten von G nicht leer ist. Ziel von A ist es, diese Menge durch das Stellen von möglichst wenigen Fragen zu einer einelementigen Menge zusammenschrumpfen zu lassen. Ziel von S ist es, A zu möglichst vielen Fragen zu zwingen. Das Spiel ist zu Ende, wenn es nur noch eine Kante in G gibt, die mit den Antworten von S verträglich ist. Die Anzahl der Fragen, die in diesem Spiel gestellt werden, wenn beide Spieler aus ihrer Sicht optimal spielen, nennen wir die Komplexität von G, $c(G)$.

Die Komplexität $c(G)$ wurde erstmals in [1] untersucht. Es folgt eine Zusammenfassung der Resultate dieser Arbeit:

<u>Satz 1:</u> Ist $G=(V,E)$ ein Graph und c seine Komplexität, so gelten die Ungleichungen:

(i) $|E| \leq \binom{c+1}{2} + 1$

(ii) $|V| \leq \binom{c+1}{2} + 1 +$ (Anzahl der Komponenten von G) $\leq \binom{c+2}{2} + 1$

(iii) $c \leq |V| - 1$

Der einzige Graph mit $|E| = \binom{c+1}{2} + 1$ und $V = \binom{c+2}{2} + 1$ ist
$G = \bigcup_{i=1}^{c} K_{1,i} \cup K_2$ (vgl. Bild 1)

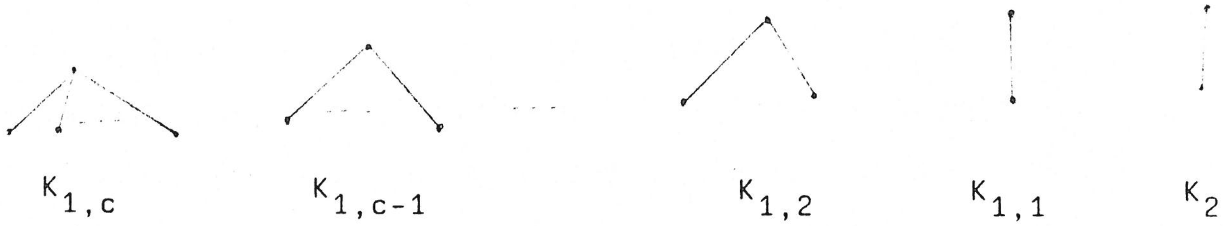

Bild 1

Es ist keine nichttriviale Charakterisierung aller Graphen mit $|E| = \binom{c+1}{2} + 1$ bekannt. Gleichheit in (iii) gilt genau dann, wenn der Komplementärgraph, $\bar{G}$, von G mindestens 3 Komponenten hat.

Die Zahl $c(G)$ ist NP-schwer zu berechnen, genauer:

Es sei GRAPH COMPLEXITY das folgende Entscheidungsproblem: (vgl. [2] zum Hintergrund dieses Abschnittes).

GRAPH COMPLEXITY

Eingabe: Ein Graph $G = (V,E)$ und eine natürliche Zahl $k \leq |V|$

Frage: Ist $c(G) \leq k$?

Dann gilt:

Satz 2: GRAPH COMPLEXITY ist NP-vollständig.

Um untere Schranken für $c(G)$ zu erhalten, betrachten wir die folgende einfache Strategie: Spieler S antwortet auf die Fragen von A mit Nein, so lange ihm dies die Spielregeln erlauben, d.h. so lange es noch eine Kante in G gibt, die mit diesen Antworten verträglich ist. Die Anzahl der Fragen im Spiel, wenn S diese Strategie verwendet, bezeichnen wir mit $c_o(G)$. Offenbar ist $c(G) \leq c_o(G)$. Auch die Zahl $c_o(G)$ ist NP-schwer zu berechnen, sie läßt sich aber sehr gut probabilistisch analysieren. Es sei G ein Zufallsgraph auf n Punkten, in dem jede Kante mit der festen Wahrscheinlichkeit $p, o < p < 1$, zu G gehört. Dann gilt:

Satz 3: Es sei $d=d(n)$ die positive reelle Zahl mit $\binom{n}{d}(1-p)^{\binom{d}{2}} = 1$. Dann gilt für fast alle Graphen G auf n Punkten

$$c_o(G) = n - \lceil d(n) \rceil \quad \text{oder}$$

$$c_o(G) = n - \lfloor d(n) \rfloor \quad \text{, wobei}$$

$$d(n) = \frac{2 \cdot \log n}{\log \frac{1}{1-p}} + O(\log \log n)$$

Entsprechende Resultate für $c(G)$ sind noch nicht bekannt.

Literatur:

[1] M. Aigner and E. Triesch, Searching for an Edge in a Graph, erscheint in: Journal of Graph Theory

[2] M.R. Garey - D.S. Johnson, Computers and Intractability. Freeman, San Francisco, 1979