

UNE NOUVELLE BIJECTION POUR LES ANIMAUX DIRIGES

Jean-Guy Penaud

LABRI *

Résumé. Les animaux dirigés constituent un modèle physique actuellement très en faveur en mécanique statistique. A l'aide de la notion d'empilement de pièces nous définissons une bijection entre les animaux dirigés et un langage à trois ou quatre lettres suivant le type de réseau. Par sa simplicité cette bijection semble être une bonne voie pour la solution combinatoire du modèle des animaux dirigés à trois dimensions dont une solution analytique vient d'être récemment donnée par Baxter.

Abstract. This paper presents a new bijection for the *animals problem*. It uses Viennot's theory of *heap of pieces* and gives an easy coding. This bijection can be extended in three dimensions in relation with the *hard hexagon problem* recently solved in an analytic way by Baxter .

-- INTRODUCTION --

Les animaux dirigés sont des configurations de points deux à deux voisins sur une grille régulière à maille carrée ou triangulaire, la direction privilégiée donnant la direction générale vers où peut s'étendre l'animal par ajout de nouveaux points voisins des précédents. Ce modèle, introduit vers 1982 (voir à ce sujet le livre de Temperley [32]), appartient à la classe des modèles thermodynamiques pour les phénomènes critiques et de transitions de phase . Ils sont encore liés à la description des polymères branchés [25] dans un solvant en mouvement. Enfin ils modélisent les phénomènes de percolation dirigée [28] . Le lecteur trouvera dans l'exposé de Viennot au séminaire Bourbaki [33] une synthèse de ces modélisations et une bibliographie exhaustive.

Si l'on remplace chaque point de l'animal par une cellule carrée de côté unitaire on obtient un polyomino, objet géométrique abondamment étudié tant pour ses propriétés statistiques, notamment Klarner [21,22,23], Bender [4] et récemment par Delest [6],

* Département d'Informatique, Université de Bordeaux I , Talence, France.

Delest et Dulucq [7] que pour les problèmes de pavage par Golomb [16,17] et Beauquier et Nivat [2,3].

Diverses conjectures sur l'énumération des animaux dirigés ayant n points et les valeurs moyennes asymptotiques des dimensions de l'animal ont été résolues par les physiciens Nadal, Derrida et Vannimenus [27], Hakim et Nadal [19], Dhar [12,13,14].

Par des méthodes relevant de la désormais classique *combinatoire énumérative*, Gouyou-Beauchamps et Viennot [18], ont défini des *bijections* entre des familles d'animaux et des objets familiers à la combinatoire comme des familles de *chemins du plan* ou des ensembles (*langages*) de *mots*; ils ont ramené le problème de l'énumération des animaux sur réseau carré à celle d'objets que les méthodes, développées en France par Schützenberger [30,31] et aux Etats-Unis par Rota, permettent de résoudre. Dans un autre article [34], X.G. Viennot résout un problème d'énumération d'animaux sur réseau triangulaire en introduisant un nouvel outil combinatoire, les *empilements de pièces*, qui constituent un modèle combinatoire équivalent au *monoïde de commutation* de Cartier et Foata [5] mais dont la présentation est beaucoup plus visuelle; ce monoïde est actuellement très utilisé par les théoriciens du parallélisme en programmation et le cas particulier des empilements de *dominos* que nous utilisons dans cet article correspond au cas où le *graphe des non-commutations* défini par Métivier dans [26] est une simple chaîne.

Le but de ce papier est d'exposer une nouvelle bijection pour les animaux dirigés qui, utilisant la notion d'empilement, rend compte des deux résultats précédents et qui, grâce au pouvoir évocateur de cet outil, paraîtra au lecteur, nous l'espérons, relativement simple.

De plus, la fonction génératrice des animaux sur réseau non plus planaire mais *cubique* (avec pas autorisés sur les quatres diagonales), est égale à la densité du modèle des *hexagones durs*, modèle récemment résolu par Baxter [1], à l'aide des célèbres identités de Ramanujan. La méthode que nous utilisons conduit de façon naturelle à un pavage de ces animaux par des mots écrits sur un alphabet à 18 lettres, mais le problème de caractériser ce langage reste ouvert. Il est intrigant que le modèle des carrés durs, lié au réseau cubique centré, échappe aux méthodes utilisées par Baxter pour le cas hexagonal tandis que d'un point de vue combinatoire il semblerait plutôt plus facile à résoudre.

Ce papier se décompose en cinq sections. La première est un bref exposé des notions élémentaires de chemins et de mots pour les lecteurs non familiers avec ce domaine. Dans la deuxième, nous rappelons les définitions des animaux et les principaux résultats connus. La troisième présente les notions de base des empilements de dominos qui sont un cas particulier des empilements de pièces. Dans la quatrième, on introduit les

opérateurs qui permettent de générer les animaux et conduisent à la bijection. Enfin un codage des animaux dans l'espace est présenté dans la section finale.

I-- MOTS ET CHEMINS --

Dans la suite de cet article, nous avons besoin de quelques notions élémentaires de la théorie des langages formels. Le lecteur non familier avec cette théorie trouvera une introduction aux langages algébriques pour "purs combinatoriciens" dans l'article de M.Delest et X.G.Viennot [10] . Nous en rappellerons ici le minimum nécessaire à notre propos.

Soit X un ensemble fini non vide, appelé *alphabet* , dont les éléments sont les *lettres*. Un *mot* est une suite finie de lettres de X et la *longueur* du mot est la longueur de la suite; on désignera par $|f|$ la longueur du mot f et par $|f|_a$ le nombre d'occurrences de la lettre a dans le mot f . L'ensemble des mots écrits sur l'alphabet X est muni d'une opération interne appelée *concaténation*:: si $f = a_{i_1}a_{i_2}..a_{i_p}$ et $g = b_{j_1}b_{j_2}..b_{j_q}$, où les a_{i_k} et b_{j_l} sont des lettres de X , alors le résultat de la concaténation de f et de g , noté fg , est le mot de longueur $p+q$ égal à $a_{i_1}a_{i_2}..a_{i_p}b_{j_1}b_{j_2}..b_{j_q}$. Cette opération, associative et possédant un élément neutre, le mot de longueur nulle, appelé le *mot vide* et noté ϵ , confère à l'ensemble des mots la structure de monoïde libre, dans laquelle l'égalité de 2 mots ne peut être que l'égalité littérale; on désigne cet ensemble par X^* . Le mot g est dit *facteur* de f si et seulement si existent dans X^* deux mots u et v tels que $f= u g v$. Si u est le mot vide, g est dit *facteur gauche* de f , ce qui s'écrit encore $g \leq f$. Enfin on appelle *langage* toute partie de X^* .

Nous utiliserons dans ce papier l'alphabet à $k+2$ lettres $X_{k+2} = \{a,b,c,d,..,l\}$ où les k lettres $c,d,..,l$ sont dites *colorées* . Il est alors usuel de définir, pour tout mot,

Notation I-1. Pour tout mot f on note θ l'entier tel que,

$$\theta(f) = |f|_a - |f|_b.$$

C'est clairement un morphisme de X_{k+2}^* dans \mathbb{N} que l'on peut également définir par les relations $\theta(a) = 1$, $\theta(b) = -1$, et $\theta(c) = \theta(d) = \dots \theta(l) = 0$.

Ce paramètre nous permet alors de définir les très classiques langages suivants,

Définition I-2. On appelle *langage de Motzkin k -coloré* et *langage des facteurs gauches de Motzkin k -coloré*, les langages M_k et F_k définis par les égalités suivantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} M_k = \{ f \in X_{k+2}^* / \theta(f') \geq 0, \forall f' \leq f; \text{ et } \theta(f) = 0 \} \\ F_k = \{ f \in X_{k+2}^* / \theta(f') \geq 0, \forall f' \leq f \}. \end{array} \right.$$

Pour $k = 0$, on retrouve le langage de Dyck restreint, souvent noté D , encore appelé *langage des parenthèses*, pour $k = 1$ le langage de Motzkin et pour $k = 2$ le langage de Motzkin bicolore. Remarquons que le morphisme τ de X_4^* dans X_2^* défini par $\tau(a)=aa$, $\tau(b)=bb$, $\tau(c)=ab$, et $\tau(d)=ba$, permet de définir une bijection ψ entre les mots de M_2 de longueur n et les mots de D de longueur $2(n+1)$ en posant $\psi(w) = a \tau(w) b$.

Ces langages ont été abondamment étudiés. C'est en particulier devenu un simple exercice d'application des théories élaborées dès 1960 par Schützenberger [31] de trouver les nombres de ces mots en fonction de leur longueur. Ce sont les coefficients de séries de $\mathbb{Z}[[x]]$ solutions de systèmes algébriques déduits des *grammaires* non ambiguës qui engendrent ces langages. Si l'on nomme respectivement c_n (appelé *nombre de Catalan*), m_n et bm_n les nombres des mots de longueur $2n$ de Dyck, de longueur n de Motzkin et de Motzkin bicolores, et fd_n , fm_n et fbm_n , les nombres de facteurs gauches de longueur n de chacun de ces langages, on trouve, (voir par exemple [18]) :

$$c_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad m_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k+1} \binom{n}{2k} \binom{2k}{k}, \quad mb_n = c_{n+1}, \quad (1)$$

$$fd_n = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \quad fm_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, \quad fmb_n = \binom{2n+1}{n}, \quad (2)$$

Pour terminer ces rappels énonçons le lemme suivant, dû à Chottin et Cori [6] dans le cas d'un alphabet à deux lettres (et qui s'étend de façon immédiate au cas de trois lettres ou plus),

Lemme I-3. (dit lemme de la *factorisation de Catalan* [6]).

Tout mot f de $(a,b,c)^*$ a une unique factorisation $f = f_1 z_1 \dots f_k z_k f_{k+1}$ telle que,

- (i) f_1, f_2, \dots, f_{k+1} sont des mots de Motzkin, éventuellement vides,
- (ii) z_1, z_2, \dots, z_k sont les lettres a ou b ,
- (iii) il existe un entier p , $0 \leq p \leq k$, tel que pour $i \leq p$, $z_i = b$, et pour $i > p$, $z_i = a$.

Considérons le *plan combinatoire* $\Pi = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ munis des deux axes Ox et Oy . On peut alors définir la notion de chemin dans Π .

Définition I-4. Un *chemin* w de Π est une suite $w = (s_0, s_1, s_2, \dots, s_p)$ de points de Π ; s_0 est l'*origine* du chemin, s_p l'*extrémité*, et l'entier p la *longueur* de w que l'on note $|w|$. Les couples (s_i, s_{i+1}) , pour $0 \leq i < p$ sont les *pas élémentaires* du chemin.

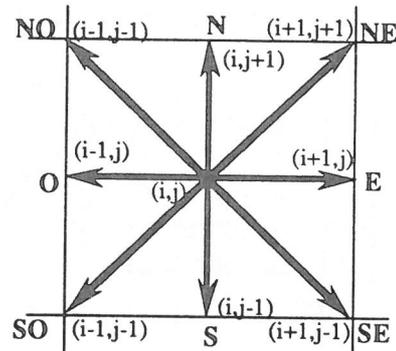


Figure 1.

Dans la suite de ce papier nous considérons comme pas élémentaires, définis à une translation près, uniquement les couples (x, y) formés d'un point de Π et de l'un de ses 8 voisins dont les coordonnées sont égales à celles de x à un près. Nous les noterons comme les 8 points cardinaux de la rose des vents, en prenant l'axe Oy comme la direction Nord ainsi que le montre la figure 1.

Si l'on prend le point O comme origine des chemins, ainsi qu'un ensemble fini de pas élémentaires distincts (à une translation près), il est alors usuel d'associer à chacun des pas élémentaires une lettre distincte d'un alphabet X et à tout chemin un mot de X^* , appelé le *code* du chemin, obtenu en concaténant les lettres associées aux pas élémentaires dans l'ordre où on les rencontre à partir de l'origine, et la correspondance est clairement bijective. En particulier, si l'on se fixe comme pas élémentaires, les pas Nord-Est, Sud-Est et le pas Est, encore appelé palier, et si l'on code les pas NE, SE et les paliers (éventuellement k -colorés), respectivement par les lettres a, b, c (éventuellement d, e, \dots, l) de X_{k+2} , nous pouvons énoncer dans la proposition suivante, de preuve évidente, les résultats bien connus,

Proposition I-5.

Les mots f du langage F_k des facteurs gauches de Motzkin k -colorés codent les chemins w du quart de plan non négatif de Π allant de l'origine au point (p, q) par pas NE, SE ou E éventuellement k -colorés. De plus, on a $|f| = p+q$, et $\theta(f) = q$.

En particulier les mots de Motzkin de longueur m codent les chemins du quart de plan non négatif allant de l'origine au point $(m, 0)$, et les mots de Dyck, de longueur nécessairement paire $2n$, les chemins de ce quart de plan allant de l'origine au point $(2n, 0)$, sans palier. La figure 2 montre un mot de Motzkin et le chemin associé.

a a c a a a b b c c b b b a a c b b

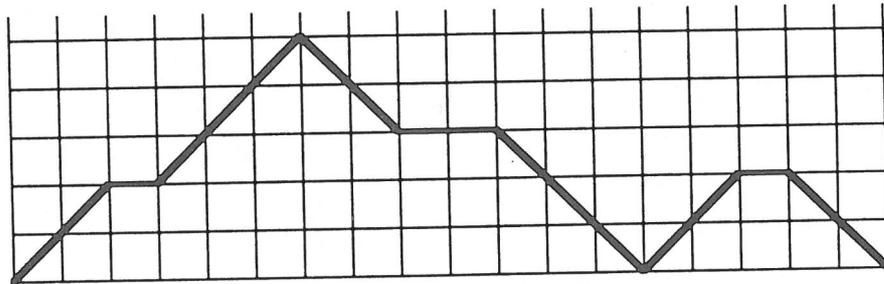


Figure 2.

-- II ANIMAUX DIRIGES --

La notion d'*animaux dirigés* désigne une configuration de points du plan combinatoire $\Pi = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, se développant dans la direction de la première bissectrice.

Définition II-1. Un *animal dirigé à une source* \mathcal{A} est un ensemble de points de Π tel que

- i) l'origine $O = (0,0)$ appartient à \mathcal{A} ; c'est la *source* de \mathcal{A} ,
- ii) tout point (x,y) de \mathcal{A} peut être atteint depuis la source par un chemin dont tous les sommets sont dans \mathcal{A} et dont les pas élémentaires sont soit Est, soit Nord, soit Nord-Est.

Si on n'utilise que les pas Nord et Est, on dit que l'on a un animal sur réseau *carré*, tandis que si l'on autorise le pas diagonal Nord-Est, le réseau est dit *triangulaire*.. La direction Nord-Est est la *direction privilégiée*. La *longueur* et la *largeur* de l'animal sont les dimensions du plus petit rectangle aux côtés parallèles à la direction privilégiée et à sa perpendiculaire, qui le contienne; la longueur est prise sur le côté parallèle à la direction privilégiée; longueur et largeur sont mesurées avec pour unité le demi-pas diagonal. Il est possible de généraliser au cas de plusieurs sources, en plaçant celles-ci sur une perpendiculaire à la direction privilégiée; en particulier, un animal à k *sources compactes*, est un ensemble de points que l'on peut atteindre par des chemins ayant comme origines les points O_s de coordonnées $(-s,s)$ pour $0 \leq s \leq k-1$.

La figure 3 montre un animal dirigé à 4 sources compactes sur réseau carré. Il possède 33 points, sa largeur est 11 et sa longueur 14.

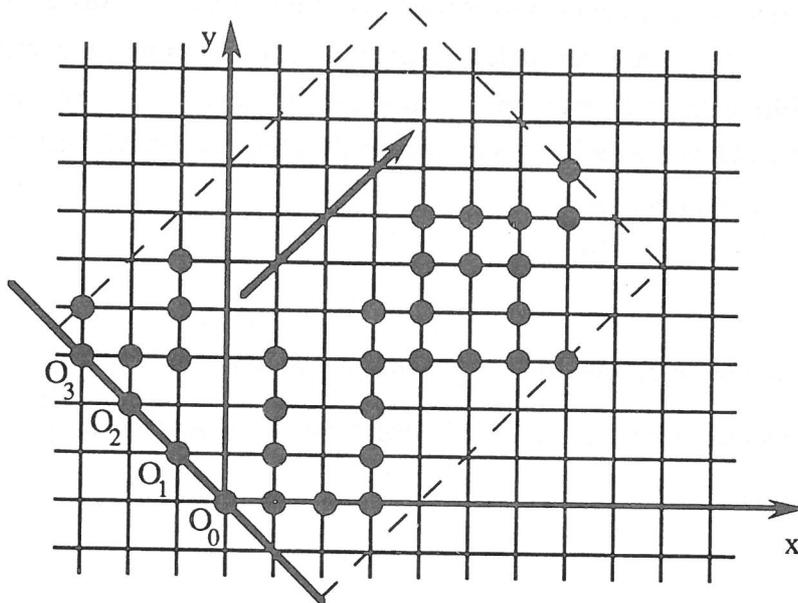


Figure 3.

problématique des physiciens.

Soient a_n le nombre d'animaux de taille n d'une certaine classe, l_n et L_n les longueur et largeur moyennes des animaux de cette classe de taille n . Les physiciens s'intéressent à la fonction génératrice $f(t) = \sum_{n \geq 1} a_n t^n$ qui donne la densité thermodynamique du modèle et aux valeurs asymptotiques de a_n , l_n et L_n conjecturées égales à

$$a_n \approx \mu^n n^{-\theta}, \quad l_n \approx n^{v_l}, \quad L_n \approx n^{v_l}, \quad (3)$$

où θ , v_l et v_l sont les *exposants critiques* et μ la *constante de connectivité*. Pour les animaux dirigés à un point source, sur réseau carré, Dhar, Phani et Barma d'une part, Nadal, Derida et Vanimendus d'autre part ainsi que Hakim ont conjecturé, pour des raisons physiques, puis prouvé par diverses méthodes de mécanique statistique dans les papiers [11],[12], [13], [14], [19] et [27], les résultats suivants,

$$\sum_{n \geq 1} a_n t^n = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1+t}{1-3t}} - 1 \right), \quad (4)$$

$$\theta = v_l = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

En définissant trois opérateurs dont l'un est relativement complexe, Gouyou-Beauchamps et Viennot dans [18] ont établi une bijection entre des chemins du plan codés par trois lettres et les animaux à sources compactes sur réseau carré, sur lequel les paramètres nombre de sources et largeur peuvent se lire. Ils ont ainsi prouvé de manière

bijective les relations (4) et (5) et de plus montré que le nombre d'animaux carrés à n points sont comptés par 3^n . Dans un article ultérieur [33] Viennot, en composant trois bijections, établit une correspondance entre les animaux à une source sur réseau triangulaire et exactement la moitié des mots f sur 2 lettres a et b et tels que $|f|_a = |f|_b$, et ainsi établit que leur nombre était,

$$\frac{1}{2} \binom{2n}{n}. \quad (6)$$

Notons que la détermination de la valeur exacte du coefficient v_n , dont Nadal, Derida et Vanimendus donnent, dans [27], une estimation voisine de $\frac{9}{11}$, reste encore un problème ouvert.

— III EMPILEMENT DE DOMINOS —

Dans cette section, nous rappelons la notion d'*empilement de dominos*, introduite par X.G.Viennot dans le cadre plus général des *empilements de pièces*. Le lecteur trouvera dans [35] une présentation formelle de cette théorie et de ses applications et dans [33] une version simplifiée. Nous en ferons ici une présentation intermédiaire, adaptée à notre propos.

Donnons en d'abord une image intuitive. Considérons dans un plan vertical des dominos rectangulaires horizontaux composés de deux carrés unitaires accolés. Ils peuvent se déplacer de façon individuelle verticalement, les centres des carrés occupant les sommets d'un réseau carré à maille unitaire, sans s'intersecter. Un tel ensemble de dominos est représenté sur la partie gauche de la figure 4. Un empilement de dominos est ce que l'on obtient lorsque les dominos deviennent soudain pesants et s'empilent sur un plancher, comme sur la partie droite de la figure 4.

Pour définir formellement cet objet, nous procéderons par étapes en considérant d'abord les systèmes de p -dominos de Π , puis des équivalences associées aux translations et à d'autres transformations, et par passage au quotient, les empilements proprement dits.

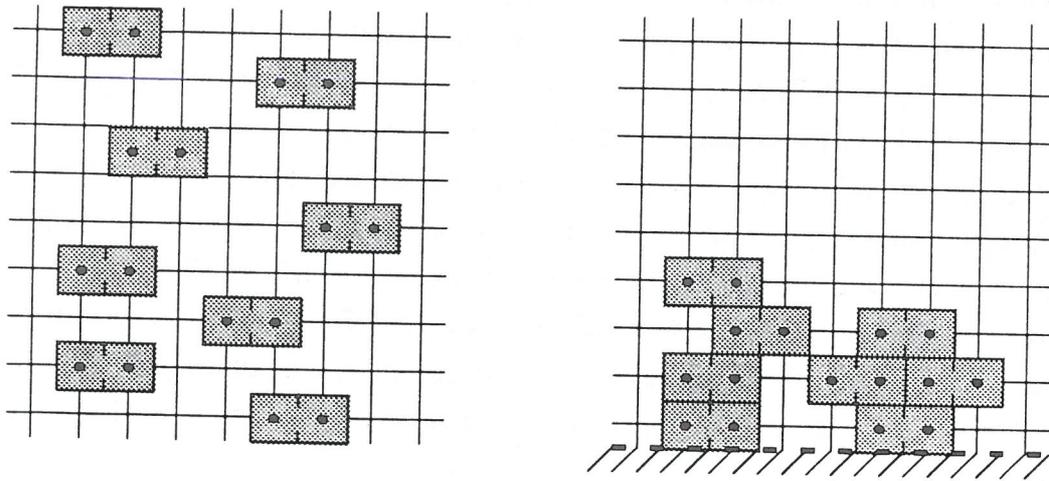


Figure 4.

III-1. Systèmes de p -dominos .

Considérons le plan combinatoire $\Pi = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. On peut alors définir,

III-1-1. Premières définitions et vocabulaire de base.

Un *domino-placé*, ou plus brièvement un *p -domino*, est un paire de points (i,j) et $(i+1,j)$ du plan Π .

Soit δ un tel p -domino; on le notera $\delta = \langle i,j \rangle$. L'entier i est son *abscisse*, notée $abs(\delta)$ et l'entier j son *niveau*, noté $h(\delta)$. Le couple $(i,i+1)$ de \mathbb{Z} sera appelé la *projection horizontale* de δ et sera noté $\pi(\delta)$. On note Π_δ l'ensemble des p -dominos de Π .

Introduisons alors des ensembles particuliers de ces objets, les *système de p -dominos*, définis comme ensembles finis de p -dominos 2 à 2 disjoints. L'ensemble des systèmes de Π_δ sera noté Σ et Σ_n l'ensemble des systèmes de n p -dominos.

Soit $\mathcal{A} \in \Sigma$ un tel système. Il est inscrit dans un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes et définis par les droites d'équations $y = a_1, y = a_2+1, x = h_1$ et $x = h_2$, a_1 et a_2 , (respectivement h_1 et h_2) étant les abscisses (resp. hauteurs) minimales et maximales des domino-placés de \mathcal{A} ; a_1 sera dit l'*abscisse* de \mathcal{A} et h_1 son *niveau*.

On dit que δ *domine directement* δ' si δ et δ' sont 2 p -dominos de \mathcal{A} tels que $\pi(\delta) \cap \pi(\delta') \neq \emptyset$ et $h(\delta) > h(\delta')$. La fermeture réflexive et transitive de cette relation sera appelée la *relation de dominance* et sera notée \geq . Le système \mathcal{A} sera dit *strict* si pour tout couple de p -dominos distincts δ et δ' tels que $\delta \geq \delta'$ et $\pi(\delta) = \pi(\delta')$, il existe un p -domino δ_1 tel que $\delta \geq \delta_1 \geq \delta'$ et $\pi(\delta_1) \neq \pi(\delta)$. Un p -domino δ de \mathcal{A} sera dit *maximal* (respectivement *minimal*) si \mathcal{A} ne contient aucun autre p -domino qui domine (resp n'est dominé par) δ . L'ensemble des p -dominos de \mathcal{A} que domine δ sera noté $dom(\delta)$. Un système n'ayant qu'un élément maximal sera appelé

pyramide. Enfin on appelle *demi-largeur gauche* (respectivement *droite*) de \mathcal{A} la différence entre l'abscisse d'un élément maximal de \mathcal{A} d'abscisse minimale (c'est-à-dire le plus à gauche) et celle de \mathcal{A} , (resp. entre l'abscisse maximale d'un p-domino de \mathcal{A} et l'abscisse d'un élément maximal de \mathcal{A} d'abscisse maximale).

Exemple. La figure 5 montre un système composé de 24 p-dominos. Le p-domino $\langle i, j \rangle$ est représenté par une petite haltère recouvrant les points de coordonnées (i, j) et $(i+1, j)$. Les p-dominos maximaux, en noir, sont les p-dominos de numéros 1, 3, 7, 12, 22, et les p-dominos minimaux sont ceux de numéros 11, 21, 23 et 24. Le p-domino de numéro 8 est l'élément maximal d'une sous-pyramide constituée des p-dominos 8, 9, 10, 11, 17, 20 et 21 colorés en gris. Ce système est de demi-largeur gauche nulle et de demi-largeur droite 1.

III-1-2. Numérotation canonique (cf [35]).

Considérons un système de p-domino \mathcal{A} , et soit δ le p-domino maximal d'abscisse minimale de \mathcal{A} . Soit 1 son numéro. En répétant ce procédé pour le système $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \setminus \{\delta\}$, on obtient une *numérotation* de tous les p-dominos de \mathcal{A} par les entiers de 1 à n qui vérifie la propriété suivante, (en notant $num(\delta)$ le numéro de δ).

Proposition III-1-1.

$num(\delta) < num(\delta')$ si et seulement si δ domine δ' sinon $abs(\delta) < abs(\delta')$.

La figure 5 montre un exemple d'une telle numérotation

III-2. Systèmes équivalents.

A l'aide d'applications élémentaires de Π_δ dans Π_δ nous allons définir des relations dans $\Sigma_n \times \Sigma_n$.

notations.

— Pour tout couple d'entiers relatifs (l, m) , notons $T_{l, m}$ la translation de Π_δ de vecteur (l, m) , c'est-à-dire, pour tout p-domino δ tel que $\delta = \langle i, j \rangle$,

$$T_{l, m}(\delta) = \langle i+l, j+m \rangle .$$

— Soit $\xrightarrow{\rho}$ une relation de $\Sigma_n \times \Sigma_n$; on note $\overleftarrow{\rho}$ sa fermeture réflexive, $\xrightarrow{\rho}$ la p ième itérée, $\xrightarrow{\rho^*}$ l'équivalence associée et $\overleftarrow{\rho}$ la relation inverse. Si $\xrightarrow{\rho}$ et $\xrightarrow{\sigma}$ sont deux relations de $\Sigma_n \times \Sigma_n$, $\xrightarrow{\rho \cdot \sigma}$ est la relation composée notée en abrégé $\xrightarrow{\rho \cdot \sigma}$, $\xrightarrow{\rho} \cup \xrightarrow{\sigma}$ la réunion notée plus brièvement $\xrightarrow{\rho \cup \sigma}$. Enfin $[\delta]_\rho$ est la classe d'équivalence de \mathcal{A} pour la relation $\overleftarrow{\rho^*}$.

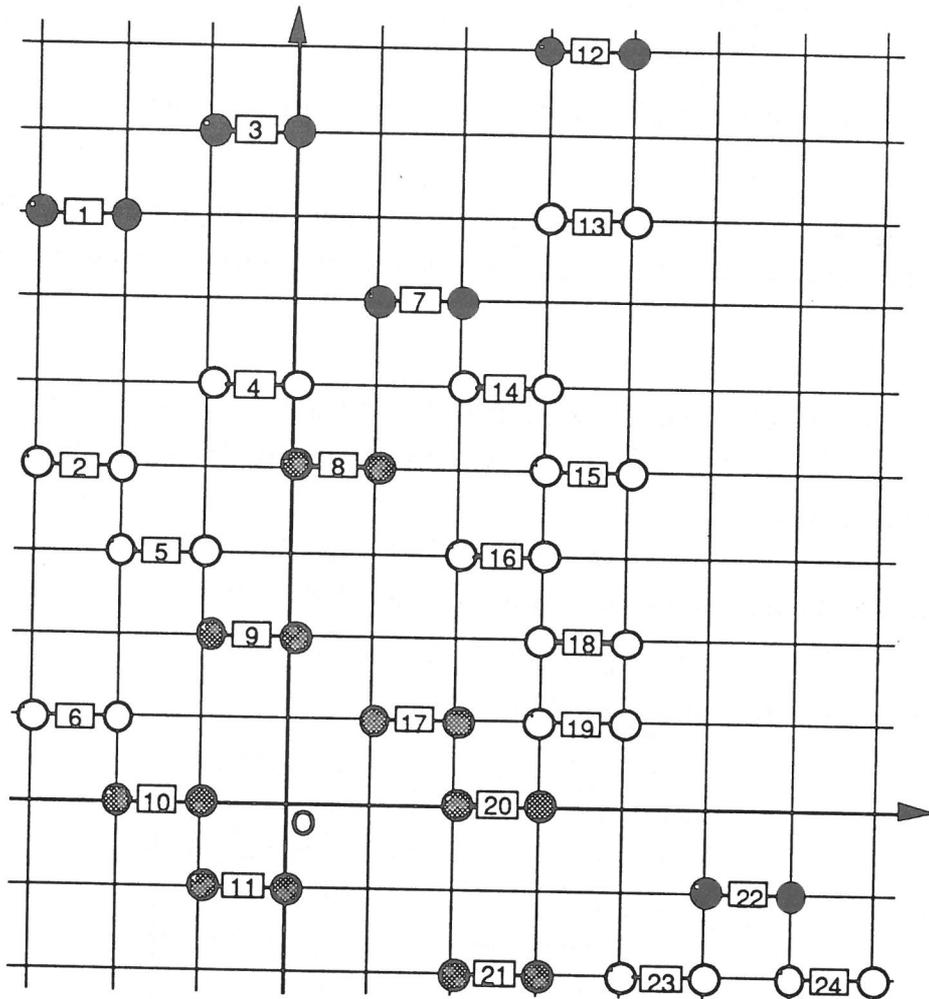


Figure 5 (avec la numérotation canonique).

a) relation de translation. Soit $T_{l,m}$ la bijection de Σ_n dans Σ_n définie par,

$$T_{l,m}(\delta) = \bigcup_{\delta \in \delta} T_{l,m}(\delta),$$

et \xrightarrow{t} la relation associée,

$$\delta \xrightarrow{t} \delta' \iff \{ \exists (l,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ tel que } \delta' = T_{l,m}(\delta) \};$$

c'est clairement une relation d'équivalence, et $[\delta]_t$ sera la classe des systèmes t -équivalents à δ . Dans cette classe on distinguera le système d'abscisse et de niveau nuls.

b) relation de déformation.

Au lieu de déplacer globalement les p -dominos 2 à 2 disjoints constituant un système δ , considérons de façon plus subtile les translations verticales d'un seul p -domino δ tels qu'il n'intersecte dans son déplacement aucuns des autres p -dominos de

\mathcal{A} . Plus précisément, définissons pour tout p-domino δ d'un système \mathcal{A} , 2 paramètres, m^+ et m^- , respectivement *marge supérieure* et *inférieure* de δ dans \mathcal{A} par les relations,

$$m^+(\delta) = \inf_{\substack{\delta' \in \mathcal{A}, \\ \delta' > \delta}} \{h(\delta') - h(\delta)\} - 1 \text{ si un tel } \delta' \text{ existe, sinon } \infty,$$

$$m^-(\delta) = \inf_{\substack{\delta' \in \mathcal{A}, \\ \delta > \delta'}} \{h(\delta) - h(\delta')\} - 1 \text{ si un tel } \delta' \text{ existe, sinon } \infty.$$

La figure 6, où les p-dominos sont placés dans des rectangles de dimensions 1x2 pour matérialiser leur encombrement, montre un p-domino (en noir) tel que $m^+ = 2$ et $m^- = 1$.

Définition III-2-1. Etant donné un système \mathcal{A} contenant un p-domino δ , et un entier k tel que $-m^-(\delta) \leq k \leq m^+(\delta)$, on appelle *déformation* de \mathcal{A} , la transformation $\mathcal{D}(\mathcal{A}, \delta, k)$ suivante,

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}, \delta, k) = \mathcal{A} \setminus \{\delta\} \cup T_{0,k}(\delta).$$

On notera la relation associée \xrightarrow{d} dans $\Sigma_n \times \Sigma_n$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{A} \xrightarrow{d} \mathcal{A}' \iff \mathcal{A}' = \mathcal{D}(\mathcal{A}, \delta, k).$$

C'est une relation réflexive et symétrique.

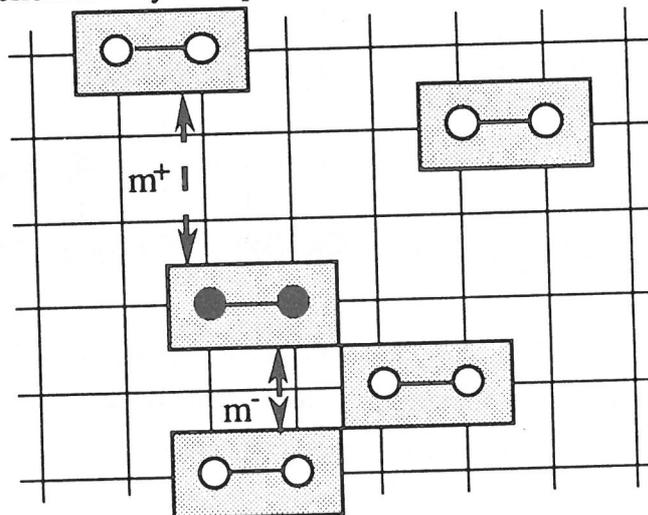


Figure 6.

c) relation de réduction.

En réalité, on limitera les déformations au cas particulier où

- i) le p-domino pointé δ n'est pas de niveau minimal,
- ii) l'entier k est tel que $-\min\{h(\delta) - h(\delta), m^-(\delta)\} \leq k < 0$.

Nous appellerons *réduction* cette transformation de Σ_n qui conserve le niveau, et la noterons $\mathbb{R}(\delta, \delta, k)$. La relation associée, $\delta \xrightarrow{r} \delta'$, est clairement antisymétrique.

On en déduit immédiatement les propriétés suivantes.

Proposition III-2-1.

1°. La relation \xrightarrow{t} commute avec les relations \xrightarrow{d} et \xrightarrow{r} .

2°. Si $\delta \xrightarrow{d} \delta'$, c'est-à-dire $\delta' = \mathbb{D}(\delta, \delta, k)$, alors il existe un entier p dépendant de δ , δ et k , compris entre 0 et $n-1$, tel que, suivant le signe de k , on ait,

$$\delta \xrightarrow{\frac{p}{r}} \xrightarrow{t} \delta', \text{ ou bien } \delta \xrightarrow{t} \xrightarrow{\frac{p}{r}} \delta'.$$

Exemple. Soient $\delta = \{ \langle 1,5 \rangle, \langle 2,3 \rangle \}$, $\delta' = \{ \langle 1,5 \rangle, \langle 2,1 \rangle \}$ deux systèmes de p -dominos disjoints. On a clairement $\delta' = \mathbb{D}(\delta, \langle 2,3 \rangle, -2)$. Soit $\delta_1 = \{ \langle 1,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle \}$; on a alors, $\delta_1 = \mathbb{T}_{0,-2}(\delta)$ et $\delta_1 = \mathbb{R}(\delta', \langle 1,5 \rangle, -2)$.

Corollaire III-2-2.

Pour tout δ dans Σ on a,

1° $[\delta]_{\cup d} = [\delta]_{\cup r}$.

2° $[\delta]_{\cup r} = \bigcup_{\sigma \in [\delta]_t} [\sigma]_r = \bigcup_{\sigma \in [\delta]_r} [\sigma]_t$.

Nous dirons que deux systèmes sont *équivalents* s'ils appartiennent à la même classe $[\delta]_{\cup r}$. Nous allons considérer un élément privilégié dans chaque classe $[\delta]_r$, c'est-à-dire modulo la relation de réduction seulement, puis la classe modulo les translations de ces éléments privilégiés.

Définition III-2-2. Appelons *longueur d'étirement* de δ , en abrégé $\text{lde}(\delta)$, la somme, pour tous les p -dominos de δ , de la différence de leur niveau avec le niveau minimal.

Il est clair qu'alors

$$\delta \xrightarrow{r} \delta' \Rightarrow \text{lde}(\delta') < \text{lde}(\delta).$$

La proposition suivante permet de définir les empilements de p -dominos, comme systèmes que l'on ne peut réduire,

Proposition III-2-3. Chaque classe $[\delta]_r$ contient un élément irréductible unique. On l'appellera *empilement de p -dominos*.

Preuve. L'existence d'un élément irréductible paraît intuitivement évidente comme le montre la figure 4 et l'unicité ne heurte pas l'expérience physique que l'on peut avoir de dominos solides.

Pour conforter cette intuition mettons à contribution la théorie des relations (voir à ce sujet l'article de G. Huet [20]). La relation \xrightarrow{r} est noetherienne, (c'est-à-dire ne possède pas de chaîne infinie décroissante), car la longueur d'étirement décroît strictement d'au moins une unité à chaque réduction.

Il suffit alors de vérifier que la relation est localement confluente, c'est-à-dire que le schéma représenté sur la figure ci-contre est vérifié, ce qui se constate aisément, que les deux transformations s'appliquent sur le même p -domino de δ ou non. La théorie des relations confluentes ([20]) nous assure l'existence d'un élément irréductible unique dans sa classe, que l'on appellera *empilement de p -dominos*, par analogie avec des dominos réalisés par des barres pesantes mobiles dans un plan vertical et empilés sur un plancher horizontal. ■

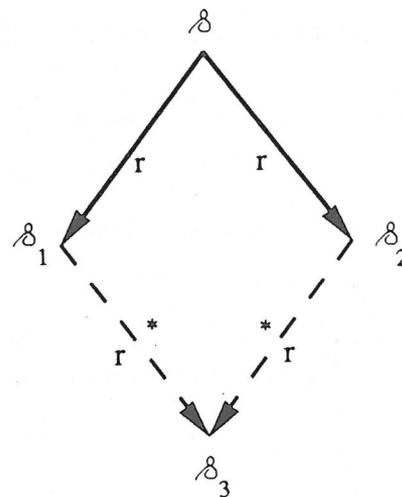


Figure 7.

On en déduit immédiatement la proposition suivante qui caractérise cette forme canonique,

Proposition III-2-4.

Un système de p -dominos de Π de niveau minimal k_0 est un empilement de p -dominos si et seulement si

- (i) les p -dominos sont 2 à 2 disjoints,
- (ii) si un p -domino δ est au niveau $k > k_0$, il repose sur un p -domino du niveau $k-1$.

Remarque.

On peut obtenir de façon analogue un autre représentant dans chaque classe d'équivalence, dit *réduit vers le haut*, en minimisant le critère $e'(\delta)$ défini comme la somme, pour tout p -domino de δ , de la différence entre le niveau maximal et son niveau. Il vérifie clairement une proposition symétrique de la précédente.

La figure 8 suivante montre trois systèmes équivalents, celui en-bas à droite est réduit vers le bas, ou *empilé*, celui en-haut à droite est réduit vers le haut.

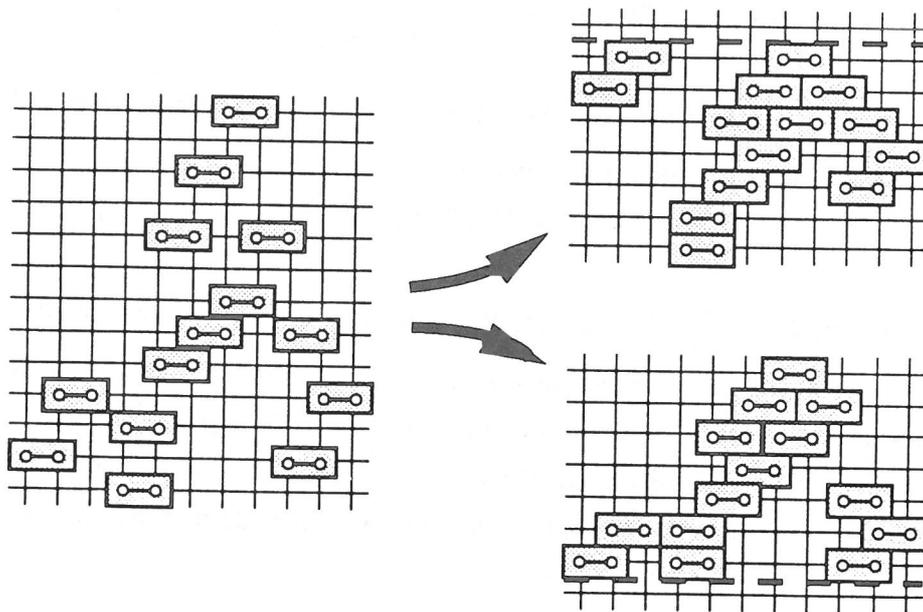


Figure 8. Trois systèmes équivalents.

III-3. Empilements.

D'après le corollaire III-2-2, la classe des systèmes équivalents un système donné \mathcal{A} est égal à la réunion des classes, modulo la réduction, des systèmes équivalents à \mathcal{A} , modulo la translation, et chacune de ces classes contient un empilement de p-dominos. Ces empilements de p-dominos sont clairement équivalents par translation. On distinguera parmi ceux-ci l'*empilement d'abscisse et de niveau nul* qui sera considéré comme l'élément privilégié de la classe $[\mathcal{A}]_{\text{UR}}$. Par un léger abus de langage, on écrira, en confondant la partie et le tout, c'est-à-dire la classe avec l'élément privilégié,

Définition III-3-1. On appelle *empilement de dominos* tout élément de Σ_{UR} .

La notion de *domino* qui correspond à l'idée intuitive de composant élémentaire d'un empilement, apparaît alors comme la "trajectoire" d'un p-domino d'un système \mathcal{A} au cours des transformations qui conduisent de \mathcal{A} à un système équivalent. Plus formellement, à chaque couple $(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ tel que $\mathcal{A} \xrightarrow{t} \mathcal{A}'$ ou $\mathcal{A} \xrightarrow{r} \mathcal{A}'$ est associée, par définition de ces relations, une bijection $\varphi_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'}$ de \mathcal{A} dans \mathcal{A}' . Considérons les couples (δ, \mathcal{A}) formés d'un p-domino et d'un système qui le contient, couples que l'on peut aussi appeler *systèmes pointés* et soit $\dot{\Sigma}$ l'ensemble des systèmes pointés.

Définissons dans $\dot{\Sigma} \times \dot{\Sigma}$ la relation,

$$\langle \delta, \mathcal{A} \rangle \xrightarrow{\varphi} \langle \delta', \mathcal{A}' \rangle \iff \begin{cases} \mathcal{A} \xrightarrow{r} \mathcal{A}' \text{ ou } \mathcal{A} \xrightarrow{r'} \mathcal{A}', \\ \delta' = \varphi_{\mathcal{A}, \mathcal{A}'}(\delta) . \end{cases}$$

Le lemme suivant montre que chaque p-domino d'un système définit une classe différente de $\dot{\Sigma}$ pour la relation d'équivalence associée $\xrightarrow{\varphi^*}$.

Lemme III-3-2. Si $\langle \delta, \mathcal{A} \rangle \xrightarrow{\varphi^*} \langle \delta', \mathcal{A}' \rangle$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ alors $\delta = \delta'$.

preuve:

Supposons $\mathcal{A} \xrightarrow{r \text{ ut } r'} \mathcal{A}'$ et soit ψ la bijection de \mathcal{A} dans \mathcal{A}' définie par composition des bijections élémentaires associées aux relations de la chaîne qui va de \mathcal{A} à \mathcal{A}' . Faisons l'hypothèse qu'il existe deux p-dominos δ_1 et δ_2 de \mathcal{A} tels que $\psi(\delta_1) = \delta_2$. L'égalité $\delta_1 = \delta_2$ résulte du fait que par définition des translations, comme des réductions, des p-dominos de même abscisse ont des images de même abscisse, et l'ordre relatif de leurs hauteurs est conservé. ■

Si l'on note $[\langle \delta, \mathcal{A} \rangle]_{\varphi}$ les classes d'équivalence, l'ensemble des classes,

$$\bigcup_{\delta \in \mathcal{A}} [\langle \delta, \mathcal{A} \rangle]_{\varphi}$$

contient exactement autant d'éléments que le système \mathcal{A} ; de plus il ne dépend pas du choix de \mathcal{A} dans sa classe; il est en bijection avec $[\mathcal{A}]$, d'où la définition,

Définition III-3-3. On appelle *domino* d'un empilement $[\mathcal{A}]_{\text{tur}}$ toute classe d'équivalence $[\langle \delta, \mathcal{A} \rangle]_{\varphi}$ telle que δ soit dans \mathcal{A} .

Parmi tous les empilements, on distinguera la classe des systèmes réduits à un élément, c'est-à-dire l'*empilement à un domino*, que l'on désignera par la lettre grecque Δ .

III-4. Opérations définies sur les empilements.

Il est clair que les notions de demi-largeur droite et gauche, de dominance et d'élément maximal ou minimal, de numérotation, définies pour les systèmes de p-dominos, s'étendent directement aux empilements. Nous allons définir des opérations élémentaires sur les empilements en les définissant d'abord sur les systèmes de p-dominos et en vérifiant qu'elles donnent des résultats équivalents si les opérands sont équivalents.

glissement d'une sous-pyramide.

Voici une autre opération qui transforme un système de p-dominos en un système équivalent, donc qui est, pour un empilement, équivalente à la transformation identique.

Elle s'énonce par le lemme suivant, qui traduit le fait qu'en "baissant" la sous-pyramide constituée par un p-domino δ et tous les p-dominos qu'il domine, on obtient un système équivalent.

Lemme III 4-1. Pour tout entier positif h , pour tout p-domino δ de \mathcal{R} , l'ensemble \mathcal{R}' ainsi défini,

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R} \setminus \text{dom}(\delta) \cup \mathbb{T}_{0,h} \text{dom}(\delta)$$

est un système équivalent à \mathcal{R} .

Preuve. Il est clair que $\mathcal{R} \xrightarrow{p/d} \mathcal{R}'$ où p est le nombre de p-dominos dominés par δ . D'après le corollaire III-2-2, on a donc $\mathcal{R} \xleftrightarrow{\text{rut}}^* \mathcal{R}'$. ■

m-superposition

On désigne ainsi l'opération qui consiste à "laisser choir" un système sur un autre, ce dernier ayant éventuellement été translaté horizontalement. Plus précisément,

Notation III-4-2. Etant donnés deux systèmes \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , \mathcal{R}_1 d'abscisse a_1 et de niveau minimal h_1 , et \mathcal{R}_2 d'abscisse a_2 et de niveau maximal h_2 , et un entier relatif m , on appelle *m-superposition* de , l'opération notée $\mathcal{R}_1 \Downarrow_m \mathcal{R}_2$ ainsi définie:

$$\mathcal{R}_1 \Downarrow_m \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cup \mathbb{T}_{a_2-a_1+m, h_1-h_2-1}(\mathcal{R}_2).$$

Il est clair que l'ensemble $\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1 \Downarrow_m \mathcal{R}_2$ est formé de p-dominos 2 à 2 disjoints. De plus on a la propriété, de preuve évidente,

Propriété III-4-2.

$$\text{Si } \mathcal{R}_1 \xleftrightarrow{\text{rut}}^* \mathcal{R}'_1 \text{ et } \mathcal{R}_2 \xleftrightarrow{\text{rut}}^* \mathcal{R}'_2, \text{ alors } (\mathcal{R}_1 \Downarrow_m \mathcal{R}_2) \xleftrightarrow{\text{rut}}^* (\mathcal{R}'_1 \Downarrow_m \mathcal{R}'_2).$$

Nous sommes alors en mesure d'étendre la définition aux classes d'équivalence,

Définition III-4-3. La *m-superposition de 2 empilements* est la classe d'équivalence de la m-superposition de 2 systèmes de p-dominos pris dans chacune des classes.

On a de plus le lemme suivant, de démonstration évidente:

Lemme III-4-4. (dit *lemme de simplification*).

$$\text{Si } \mathcal{E}_1 \Downarrow_m \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2 \Downarrow_m \mathcal{E}_3 \text{ ou } \mathcal{E}_3 \Downarrow_m \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_3 \Downarrow_m \mathcal{E}_2 \text{ alors } \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2.$$

La figure 9 illustre la 1-superposition de 2 empilements, en prenant des systèmes réduits d'abscisse nulle comme représentants.

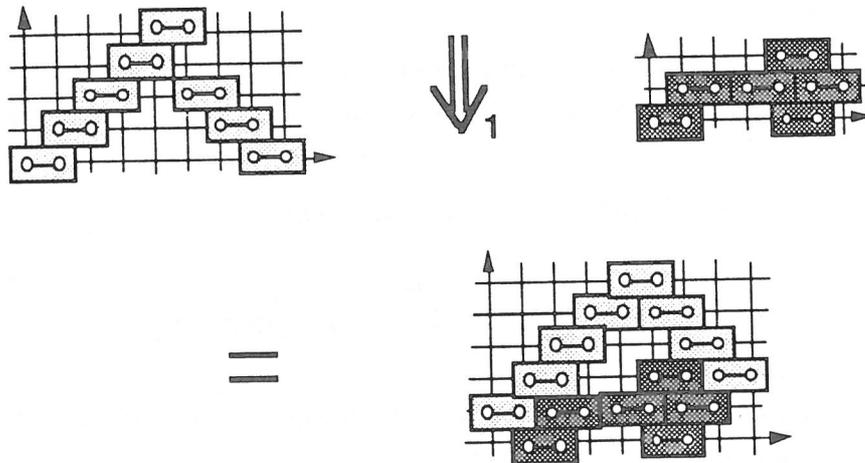


Figure 9.

IV CODAGE DES ANIMAUX.

IV-1. Bijection animaux empilements.

Rappelons la correspondance entre empilements de dominos et animaux énoncée dans [33]. Considérons un animal \mathcal{A} ; par un changement de repère nous pouvons considérer que la direction privilégiée devient la direction Sud, que les points de l'animal ont pour coordonnées les couples $(i + 1/2, j)$, et que les pas autorisés sont alors,

soit Sud-Ouest joignant les points $(i+1/2, j)$ et $(i-1/2, j-1)$,

soit Sud-Est joignant les points $(i+1/2, j)$ et $(i+3/2, j-1)$,

soit Sud (pas diagonal) joignant les points $(i+1/2, j)$ et $(i+1/2, j-2)$.

Les points de l'animal sont alors sur un réseau carré de maille $\sqrt{2}$. A tout point $(i+1/2, j)$ de \mathcal{A} associons le p-domino $\langle i, j \rangle$ dont il est le centre. Il est clair que l'ensemble de p-dominos ainsi définis forme un système de p-dominos \mathcal{B} car il ne peut exister dans \mathcal{A} deux points de même ordonnée et d'abscisses qui diffèrent de 1. L'ensemble des sources de \mathcal{A} sont les p-dominos de \mathcal{B} , et en particulier si \mathcal{A} n'a qu'une source, alors \mathcal{B} est une pyramide. Enfin si les pas diagonaux sont interdits, le système \mathcal{B} est strict, c'est-à-dire rappelons le, sans superposition de p-dominos de même abscisse. De plus il est aisé de vérifier que cette correspondance est bijective, et l'on peut énoncer,

Théorème IV-1-1(Viennot [33]). *Les animaux à sources compactes à n points sont en bijection avec les empilements dont les dominos maximaux sont à projection consécutive et ayant n dominos.*

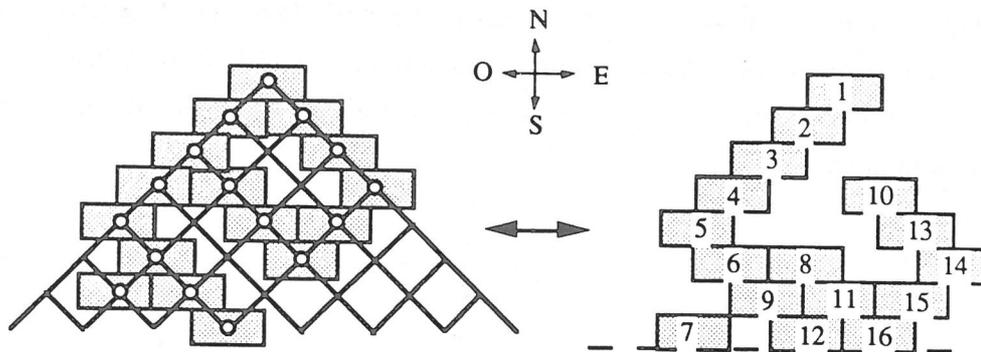


Figure 10.

Cette correspondance est illustrée par la figure 10 où l'on voit une pyramide stricte de dominos avec leur numérotation canonique, en bijection avec un animal à une source, sans pas diagonaux. Il est clair que par une suite de transformations autorisées sur tout système de p-dominos représentant l'empilement, on peut amener les centres des p-dominos en coïncidence avec les points de l'animal.

numérotation de l'animal.

Par définition, le *numéro* d'un point de l'animal est le numéro du domino associé dans l'empilement correspondant, tel qu'il a été défini en III 4 2.

Remarque IV-1-2.

Un conséquence importante de cette numérotation est de permettre la définition d'une nouvelle famille d'arbres asymétriques, les *arbres boîteux*, en bijection avec les animaux à une source, famille dont nous reportons l'étude dans un autre papier.

Notons cependant que cette famille permet une représentation aisée des animaux, et un dessin en temps linéaire de ceux-ci, en les faisant *pousser par le bas*. De plus en codant ces arbres par le parcours préfixe usuel on retrouve un codage des animaux trouvé récemment par Bétréma.

IV-2. Les opérateurs de codage.

Appelons *demi-largeur droite* (respectivement *gauche*) d'un animal à direction privilégiée Nord-Sud la différence entre l'abscisse d'un domino d'abscisse maximale et celle du domino associé à la source la plus à droite, (resp. la différence d'abscisse entre le domino associé à la source la plus à gauche et celle du domino d'abscisse minimale), dans l'empilement correspondant. Ainsi l'animal de la figure 12 a 3 comme demi-largeur droite et 4 comme demi-largeur gauche.

La relation de dominance s'étend trivialement aux points de l'animal; nous ne dessinerons plus désormais les dominos sur les figures, mais l'on devra garder présent à l'esprit que les points de l'animal ont un "encombrement invisible" de dimension 2×1 .

Nous définissons alors quatre opérateurs qui ajoutent chacun un point à un animal à source unique.

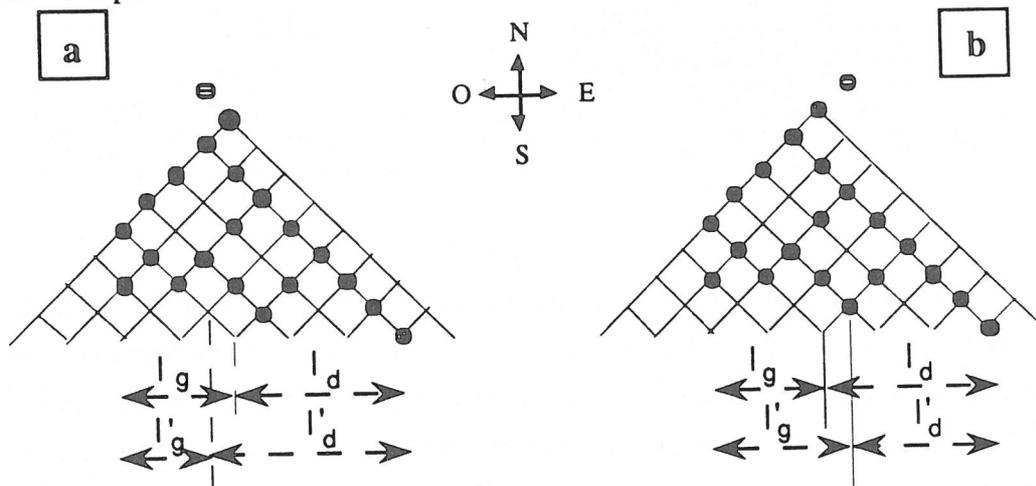


Figure 12.

opérateur a

Soit \mathcal{A} un animal à source unique à n points ($n \geq 1$), l_g et l_d ses demi-largeurs gauche et droite et \mathcal{E} l'empilement associé; on définit alors, en rappelant que Δ désigne l'empilement à un seul domino, et en utilisant l'opération de m -superposition introduite en III-4,

Définition IV-2-1.

L'animal $\mathcal{A}' = a(\mathcal{A})$ est l'animal défini par l'empilement $\mathcal{E}' = \Delta \Downarrow_{1-l_g} \mathcal{E}$.

Ce qui en termes d'animal signifie que \mathcal{A}' s'obtient en ajoutant un point au Nord-Ouest de la source de \mathcal{A} , ce point devenant la nouvelle source de \mathcal{A}' , comme le montre la figure 12.

Il est clair qu'alors $l_d(\mathcal{A}') = l_d(\mathcal{A}) + 1$.

opérateur b

C'est un opérateur défini uniquement pour les animaux qui ont une demi-largeur droite strictement positive, soit,

Définition IV-2-2.

L'animal $\mathcal{A}' = b(\mathcal{A})$ est l'animal défini par l'empilement $\mathcal{E}' = \Delta \Downarrow_{-1-l_g} \mathcal{E}$.

Plus simplement, \mathcal{A}' s'obtient en ajoutant un point au Nord-Est de la source de \mathcal{A} , ce point devenant la nouvelle source de \mathcal{A}' , comme le montre la figure 8.

Il est clair qu'alors $l_d(\mathcal{A}') = l_d(\mathcal{A}) - 1$.

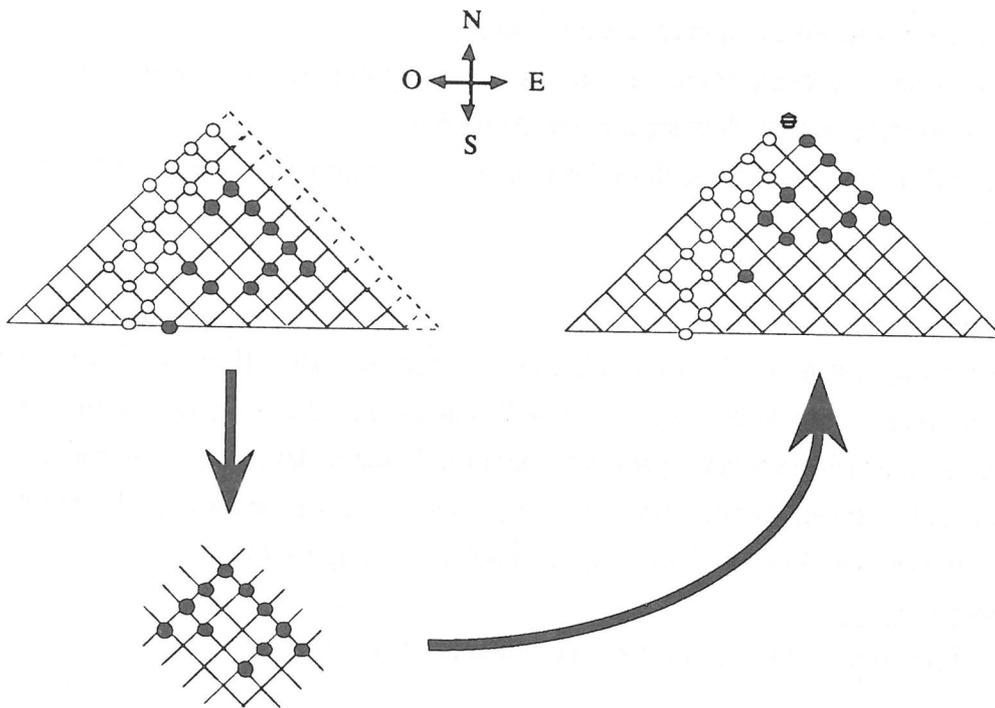


Figure 13.

opérateur c

Cet opérateur laisse invariant la demi-largeur gauche de l'animal. On peut distinguer deux cas:

a) $l_d(\mathcal{Q}) = 0$.

Il se confond alors avec l'opérateur b, c'est-à-dire ajout d'une nouvelle source au Nord-Est de l'ancienne, mais la demi-largeur droite reste égale à zéro.

b) $l_d(\mathcal{Q}) > 0$.

Il existe alors des points dont l'abscisse dépasse celle de la source d'une unité. Soit δ celui de ces points d'ordonnée maximale et $\text{dom}(\delta)$ l'ensemble de points de l'animal qu'il domine. Si l'on nomme encore \mathcal{E} l'empilement associé et m le nombre défini par,

$$m = \max \left(l_g(\mathcal{E} \setminus \text{dom}(\delta)), l_g(\text{dom}(\delta)) + 1 \right),$$

on peut définir l'opérateur c de la manière suivante (qui rend compte du cas où la demi-largeur droite est nulle car alors $\text{dom}(\delta)$ est vide),

Définition IV-2-3.

L'animal $\mathcal{Q}' = c(\mathcal{Q})$ est l'animal défini par l'empilement

$$\mathcal{E}' = \Delta \downarrow_{-m-1} \left((\mathcal{E} \setminus \text{dom}(\delta)) \downarrow_1 \text{dom}(\delta) \right).$$

Ici encore nous pouvons décrire l'opération c de façon plus imagée en ces termes:
 -- enfoncez "très loin vers le bas" le point maximal juste à droite de la source, afin de "récupérer" les points qu'il domine éventuellement "coincés" sous la partie gauche de l'animal,

- décaler l'ensemble de ces points d'une position vers la droite,
- laisser remonter individuellement ces points le plus haut possible jusqu'à ce que le plus haut soit au même niveau que l'ancienne source,
- "chapeauter" les deux points maximaux que constituent ce point et l'ancienne source par un nouveau point qui devient la nouvelle source.

Enfin il est clair que la demi-largeur droite n'a pas varié. La figure 13 décrit cette opération.

opérateur d

Cet opérateur est associé au pas diagonal du réseau carré. Il consiste simplement à rajouter un point exactement au dessus de l'ancienne source; ce point devient la nouvelle source de l'animal. Il est clair que cette opération laisse la demi-largeur droite de l'animal constante. En termes d'opération sur les dominos, on peut énoncer la définition suivante, où l_g représente toujours la demi-largeur gauche, (voir figure 14),

Définition IV-2-4.

L'animal $\mathcal{A}' = d(\mathcal{A})$ est l'animal défini par l'empilement $\mathcal{E}' = \Delta \downarrow_{l_g} \mathcal{E}$.

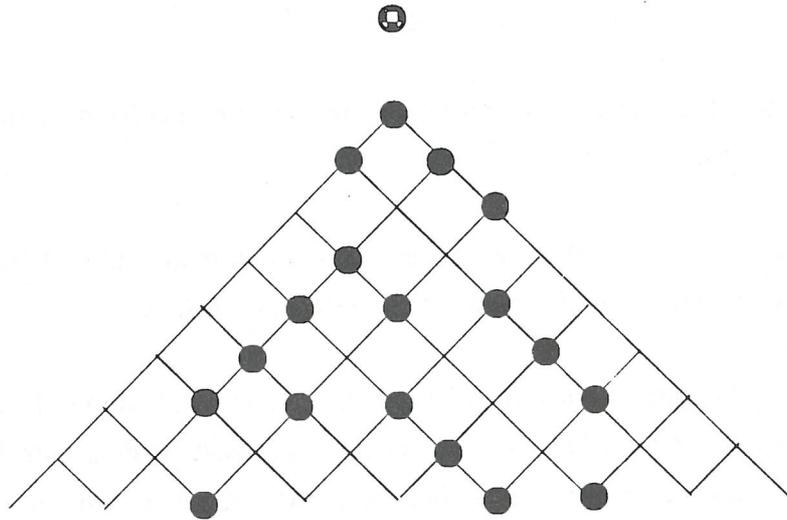


Figure 14.

Nous venons d'associer à tout animal à une source de taille n et à un opérateur choisi parmi les trois (respectivement quatre pour les réseaux triangulaires) précédemment définis, avec une restriction pour l'opérateur b , un animal unique à une source de taille $n+1$. Ces opérateurs permettent d'établir le résultat fondamental de ce travail,

Théorème IV-2-5. *Tout animal ayant une source et $n+1$ ($n \geq 0$) points sur réseau carré (respectivement triangulaire) s'obtient de façon unique comme résultat de l'application d'un produit de composition de n opérateurs pris parmi a, b, c (resp. d).*

Preuve: Il suffit de vérifier que tout animal \mathcal{Q}' à une source et $n+1$ points ($n \geq 1$), est le résultat de l'application d'un opérateur o choisi parmi a, b, c (ou d dans le cas de réseau triangulaire) à un animal \mathcal{Q} à une source et n points et que ce couple (\mathcal{Q}, o) soit le seul tel que $\mathcal{Q}' = o(\mathcal{Q})$. ■

Soit \mathcal{Q}' un animal à une source et $n+1$ points ($n \geq 1$); 4 cas se présentent de façon évidente, comme le montre la figure 15.

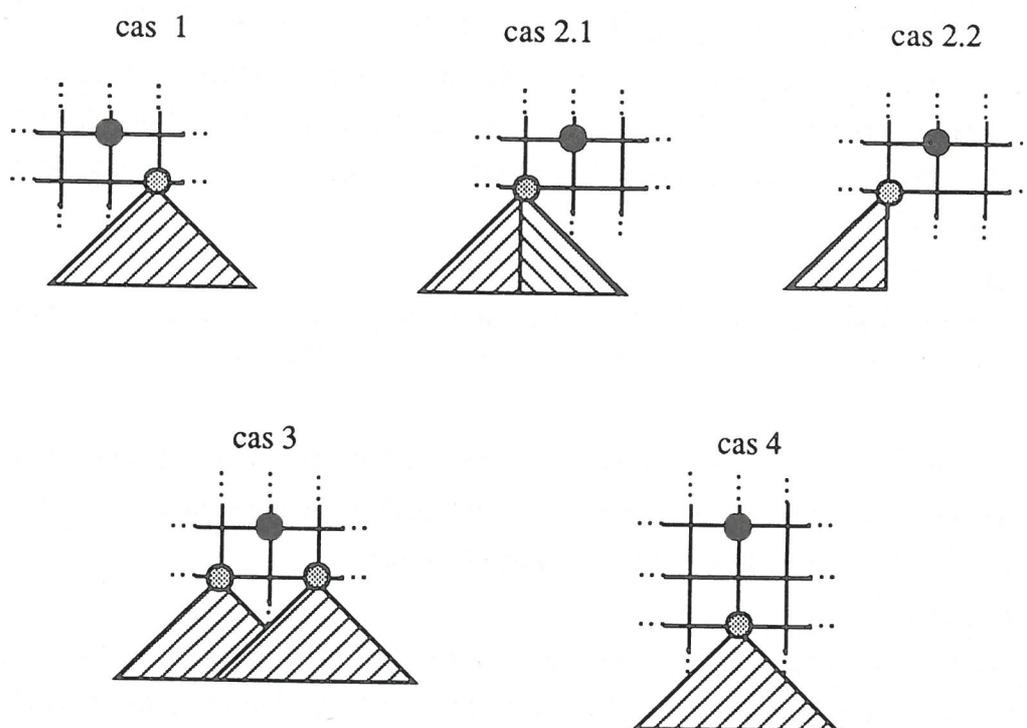


Figure 15.

--cas 1. La source de \mathcal{Q}' n'a qu'un voisin, et celui-ci est atteint par un pas Sud-Ouest.

--cas 2. La source de \mathcal{Q}' n'a qu'un voisin, et celui-ci est atteint par un pas Sud-Est. On distingue alors 2 sous-cas, selon que l'animal obtenu en enlevant la source de \mathcal{Q}' a une demi-largeur gauche strictement positive (cas 2.1) ou nulle (cas 2.2).

--cas 3. La source de \mathcal{Q}' a deux voisins.

--cas 4. (réseau triangulaire). La source de \mathcal{Q}' n'a qu'un voisin atteint par un pas diagonal Sud.

Il est clair que dans les cas 1, 2.1, 2.2 et 4, l'animal \mathcal{Q} est l'animal obtenu en enlevant la source de \mathcal{Q}' , l'unique voisin de celle-ci devenant la nouvelle source et les opérateurs associés étant respectivement a, b, c et d.

Pour le cas 3, l'opérateur associé ne peut être que c. Appelons \mathcal{Q}_1 l'animal obtenu en enlevant la source de \mathcal{Q}' , \mathcal{E}_1 l'empilement associé, δ le domino associé à la source droite de \mathcal{Q}_1 ; l'antécédent \mathcal{Q} est alors défini par l'empilement \mathcal{E} donné par l'expression,

$$\mathcal{E} = (\mathcal{E}_1 \setminus \text{dom}(\delta)) \Downarrow_{-1} \text{dom}(\delta),$$

et comme $\text{dom}(\delta)$ est déterminé par \mathcal{E}_1 , l'antécédent \mathcal{Q} est unique en raison du lemme de simplification. ■

Remarque IV-2-6. Les points sont ajoutés à l'animal dans l'ordre inverse de leur numérotation dans l'animal final.

Considérons alors les alphabets $X_3 = \{a, b, c\}$ et $X_4 = X_3 \cup \{d\}$, et les ensembles notés classiquement X_3^* et X_4^* de tous les mots possibles sur ces alphabets (cf I). On peut alors associer à tout produit de composition des opérateurs a, b, c ou d, le mot formé des lettres qui nomment ces opérateurs. Ce mot, en bijection avec l'animal engendré par le produit d'opérateurs correspondant appliqué à l'animal réduit à un point, est appelé *code* de l'animal.

Corollaire IV-2-7.

Tout animal à une source sur réseau carré (respectivement triangulaire) et possédant n points a un code de longueur n-1 dans X_3^ (respect. X_4^*).*

Dans le cas des deux réseaux carré et triangulaire dessinés dans le plan, on peut caractériser le langage des mots codes. La proposition suivante est une généralisation d'un résultat de Gouyou-Beauchamps et Viennot ([18]).

Proposition VI-2-7.

Les codes des animaux ayant une source et n points sur réseau carré (respectivement triangulaire) sont les mots de longueur n-1 du langage des facteurs gauches de Motzkin (resp. bicoloré) sur l'alphabet $\{a, b, c\}$ (resp $\{a, b, c, d\}$).

De plus, un animal de demi-largeur droite h est codé par un mot w tel que

$$|w|_a - |w|_b = h.$$

Preuve. Soit $w = z_1 z_2 \dots z_p$ le mot code d'un animal \mathcal{Q} de taille $p+1$ et $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_{p+1}$ la suite d'animaux définie par le corollaire du lemme 4, c'est-à-dire telle que \mathcal{Q}_1 est l'animal à un sommet, $\mathcal{Q}_{p+1} = \mathcal{Q}$, et $\mathcal{Q}_{i+1} = z_i(\mathcal{Q}_i)$. Par définition des opérateurs a, b, c, ou d, lorsque i varie de p à 1, la hauteur finale $|w_i|_a - |w_i|_b$ des mots $w_i = z_1 z_2 \dots z_i$ varie comme la demi-largeur droite de l'animal \mathcal{Q}_i , donc w est un facteur gauche de Motzkin

(cf I-2), bicolore si l'animal contient un pas diagonal. Réciproquement il est clair, par induction sur la longueur, que tout mot w facteur gauche de Motzkin (respectivement bicolore) définit une suite d'opérations applicables à l'animal réduit à un point sur réseau carré (resp triangulaire). ■

La figure 16 décrit la construction d'un animal à partir d'un mot. Les points de l'animal qui sont déplacés par l'opération c sont représentés en gris-clair, avant et après application.

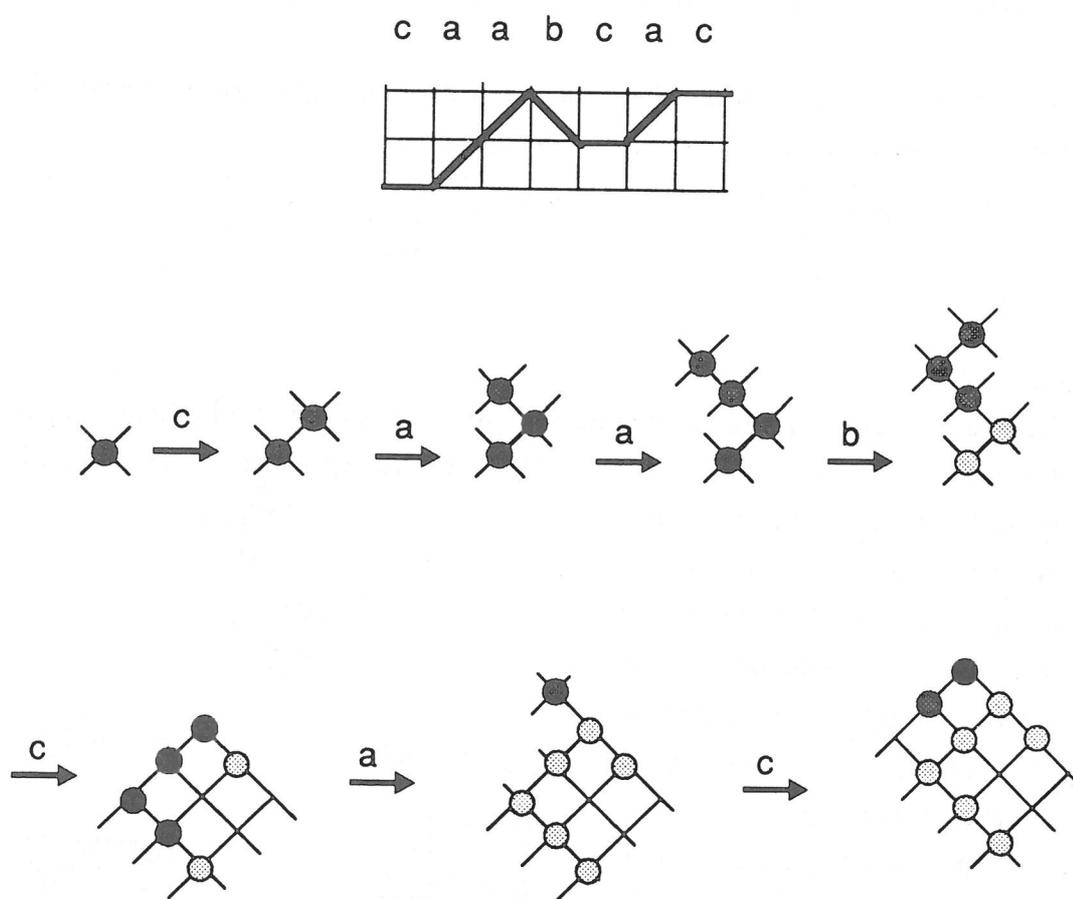


Figure 16.

Corollaire IV-2-8.

1. Le nombre a_n d'animaux à une source et n points sur réseau carré, le nombre b_n de ceux sur réseau triangulaire et leur distribution $a_{n,k}$ et $b_{n,k}$ selon la demi-largeur k sont donc respectivement,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \binom{k}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, \quad b_n = \frac{1}{2} \binom{2n}{n}, \quad (7)$$

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \frac{k+1}{k+2i+1} \binom{n}{k+2i} \binom{k+2i+1}{i}, \quad b_{n,k} = \frac{k+1}{n} \binom{2n}{n+k+1}. \quad (8)$$

Preuve. Les deux premiers déjà connus, sont des conséquences immédiates du codage; les deux derniers, à notre connaissance nouveaux, se déduisent simplement d'une propriété combinatoire des facteurs gauches de Dyck et de Motzkin. ■

2. Les nombres a_n et b_n vérifient les récurrences suivantes, où c_n désigne le nombre de Catalan, et m_n le nombre de mots de Motzkin de longueur n .

$$a_n = 2 a_{n-1} + \sum_{\substack{p,q \geq 1, \\ p+q=n-1}} a_p m_{q-1}, \quad b_n = 3 b_{n-1} + \sum_{\substack{p,q \geq 1, \\ p+q=n-1}} b_p c_q. \quad (9)$$

Remarque IV-2-9.

Au lieu de définir l'opérateur b comme celui qui fait décroître la demi-largeur droite et c comme celui qui la laisse constante, on peut aussi regrouper les cas 2.1 et 2.2

de la figure 15 et les coder par un seul opérateur b_1 réalisant l'ajout d'une nouvelle source au Nord-Est, l'opérateur c_1 réalisant uniquement l'opération du cas 3, les autres opérateurs a et d restant inchangés. La figure 17 montre un exemple des deux codages

Si le mot w de $(a,b,c,d)^*$ code l'animal \mathcal{A} , le mot w_1 de $(a,b_1,c_1,d)^*$ qui le code se déduit aisément de w en codant les pas horizontaux du chemin associé à w par la lettre c_1 s'ils sont de niveau strictement positif, et par b_1 s'ils sont de niveau nul.

Ce nouveau langage est clairement égal à $(b_1 (aM^1b_1 + \epsilon))^* aF^1$ où M^1 et F^1 sont ici respectivement le langage de Motzkin et celui des facteurs gauches de Motzkin sur l'alphabet $\{a,b_1,c_1\}$. Le paramètre qui augmente de un avec l'opérateur a , reste constant avec l'opérateur c_1 et décroît avec l'opérateur b_1 est alors l'abscisse par rapport à la

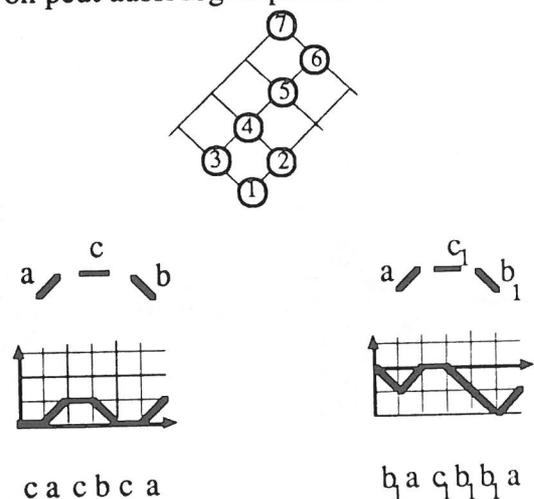


Figure 17.

source courante du point initial de l'animal. Notons enfin qu'avec ces nouveaux opérateurs, chaque lettre correspond à une configuration particulière des points voisins de la source dans l'animal résultant, codant exactement ce qui "apparaît" lorsqu'on enlève la source, notion que l'on retrouvera dans le codage des animaux dans l'espace.

IV-3. Animaux à plusieurs sources compactes.

Pour les animaux à plusieurs sources compactes, nous avons une propriété de décomposition analogue à la factorisation de Catalan, valable sur réseau carré ou triangulaire, dite *décomposition de Pünade*, illustrée par la figure 18, et qui s'énonce, en numérotant les sources suivant les abscisses croissantes,

Lemme IV-3-1.

Tout animal \mathcal{A} ayant s sources compactes O_1, O_2, \dots, O_s , se décompose de façon unique en un s -uplet d'animaux à une source, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_s$ tel que

- i) les \mathcal{A}_i , $1 \leq i \leq s-1$, sont de demi-largeur droite nulle,
- ii) si l'on appelle l_i la demi-largeur gauche de \mathcal{A}_i , alors

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \Downarrow_{l_1-1_2+1} \mathcal{A}_2 \Downarrow_{l_2-1_3+1} \dots \mathcal{A}_{s-1} \Downarrow_{l_{s-1}-1_s+1} \mathcal{A}_s .$$

Preuve. Il suffit de prendre $\mathcal{A}_i = \text{dom}(O_i) \setminus \text{dom}(O_{i+1})$, $1 \leq i \leq s-1$, $\mathcal{A}_s = \text{dom}(O_s)$, pour obtenir une décomposition. L'unicité découle du lemme de simplification. ■

Remarquons que la demi-largeur droite de \mathcal{A} est égale à celle de \mathcal{A}_s .

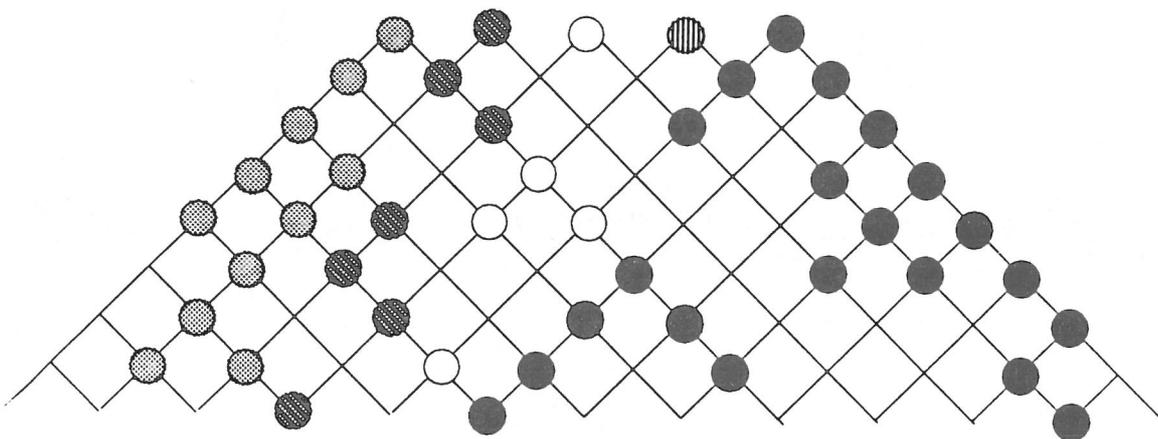


Figure 18. Décomposition de Pünade.

notations . A tout mot w de $(a,b,c)^*$ (ou $(a,b,c,d)^*$), associons deux entiers positifs ou nuls, la *hauteur gauche*, h_g , et la *hauteur droite*, h_d , par les égalités,

$$h_g = \left| \min_{w \leq w} (|w|_a - |w|_b) \right|, \quad h_d = h_g + |w|_a - |w|_b,$$

ces nombres sont aussi égaux aux entiers p et $k-p$ de la factorisation de Catalan de w .

Appelons ϕ_1 la bijection définie par la décomposition de Pünade qui associe à l'animal \mathcal{Q} de taille n ayant s sources la liste ordonnée des s animaux à une source \mathcal{Q}_i de taille n_i , ϕ_2 la bijection déduite du codage par les 4 opérateurs a, b, c et d , qui envoient la liste des s animaux $(\mathcal{Q}_i, 1 \leq i \leq s)$ sur une liste de s mots w_i de longueur n_i-1 dont les $s-1$ premiers sont de Motzkin, et le dernier un facteur gauche de Motzkin de hauteur finale égale à $h_d(\mathcal{Q}_s)$, et enfin ϕ_3 la bijection déduite de la décomposition de Catalan qui associe à la suite des w_i le mot w de longueur $n-1$ tel que,

$$w = \phi_3(w_1, w_2, \dots, w_s) = w_1 b w_2 b \dots w_{s-1} b w_s;$$

il est clair que ,

$$h_g(w) = s-1 \text{ et } h_d(w) = h_d(w_s) = |w_s|_a - |w_s|_b.$$

Nous avons donc le théorème, dont la preuve est illustrée par la figure 19, ci-dessous, où les mots sont représentés par des chemins,

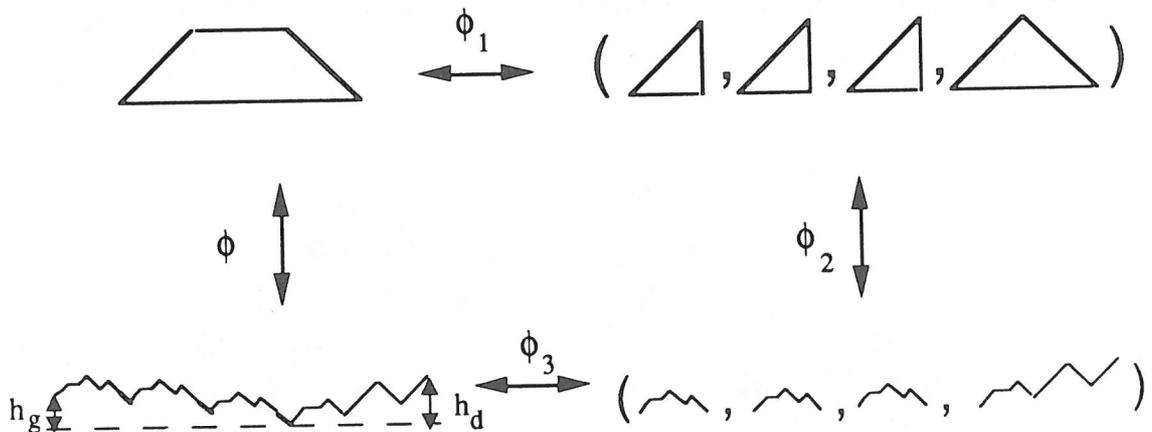


Figure 19.

Théorème IV-3-2.

La fonction $\phi = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \phi_3$ est une bijection entre l'ensemble des animaux à sources compactes et les mots sur un alphabet à trois lettres (quatre pour les réseaux triangulaires). De plus, si \mathcal{Q} est un animal à n points, s sources et de demi-largeur

droite l_d , alors $w = \phi(\mathcal{Q})$ a pour longueur $n-1$, pour hauteur droite l_d et hauteur gauche $s-1$.

Remarque IV-3-3.

Ce théorème redonne le résultat de Gouyou-Beauchamps et Viennot [18] pour les réseaux carrés, établi par une autre bijection. On retrouve ainsi le nombre des animaux à sources compactes et n points sur réseau carré, $A_n = 3^{n-1}$.

On en déduit aussi les résultats suivants pour les animaux sur réseau triangulaire,

Corollaire IV-3-4. 1° Le nombre d'animaux à sources compactes et n points sur réseau triangulaire est

$$B_n = 4^{n-1}. \quad (10)$$

2° La distribution $B_{n,s}$ du nombre d'animaux sur réseau triangulaire en fonction du nombre de sources compactes, clairement égale par symétrie à $B'_{n,l+1}$, où $B'_{n,l}$ est la distribution selon la demi-largeur droite, vaut, pour s variant de 1 à n ,

$$B_{n,s} = \binom{2n-1}{n-s}. \quad (11)$$

Preuve. Le premier point du corollaire est évident. Pour établir le second, il suffit de montrer une bijection entre les mots f de $\{a,b,c,d\}^*$ de longueur $n-1$ et tels que $|f|_a - |f|_b = s-1$, et les mots g de $\{a,b\}^*$, de longueur $2n-1$ et tels que $|g|_a - |g|_b = 2s-1$.

D'après la factorisation de Catalan rappelée en I-3, f s'écrit de façon unique,

$$f = f_0 b f_1 b \dots f_{r-1} b f_r a f_{r+1} a f_{r+2} \dots a f_{r+s-1},$$

où r est un entier positif ou nul, et les f_i , $0 \leq i \leq r+s-1$, des mots de M_2 . Posons,

$$u = f_0 b f_1 b \dots f_{r-1} b f_r, \quad v = a f_{r+1} a f_{r+2} \dots a f_{r+s-1}.$$

Par le morphisme τ tel que $\tau(a)=aa$, $\tau(b)=bb$, $\tau(c)=ab$ et $\tau(d)=ba$, le mot $V = \tau(v)$ est un facteur gauche de Dyck tel que $|V|_a - |V|_b = 2s-2$ et $|V'|_a - |V'|_b > 0$ pour tout facteur gauche V' de V .

Définissons le mot w , en changeant dans le mot u , la dernière moitié des b de la décomposition par des a . Selon la parité de r , w s'écrit,

$$w = f_0 b f_1 b \dots f_p a f_{p+1} \dots a f_{2p-1} a f_{2p},$$

ou

$$w = f_0 b f_1 b \dots f_p a f_{p+1} \dots a f_{2p-1} a f_{2p} a f_{2p+1}.$$

Alors $|w|_a - |w|_b = 0$ ou 1 , et en posant $W = \tau(w)$, $|W|_a - |W|_b = 0$ ou 2 .

Si r est pair, on posera $g = W a V$, et si r est impair, on posera $g = W b V$. ■

V LES ANIMAUX DANS L'ESPACE

Plaçons nous dans l'espace combinatoire à trois dimensions, $\mathbb{E} = \mathbb{Z}^3$, pavé par des cubes unitaires. Les notions d'animal et d'empilement de pièces s'étendent de façon naturelle, et nous admettrons sans démonstration des résultats techniques analogues à ceux du paragraphe III.

V-1 Animaux dirigés 3D et empilements d'hexagones, de carrés ou de triangles.

Les physiciens considèrent essentiellement deux réseaux à trois dimensions, comme le montre la figure 20,

- le *réseau cubique* avec comme sommets les points à coordonnées entières de \mathbb{E} , comme direction privilégiée la direction $(1,1,1)$ de la diagonale principale du cube unitaire.
- le *réseau cubique centré* avec comme points en plus des sommets, les centres des cubes, comme direction privilégiée l'axe Oy de \mathbb{E} .

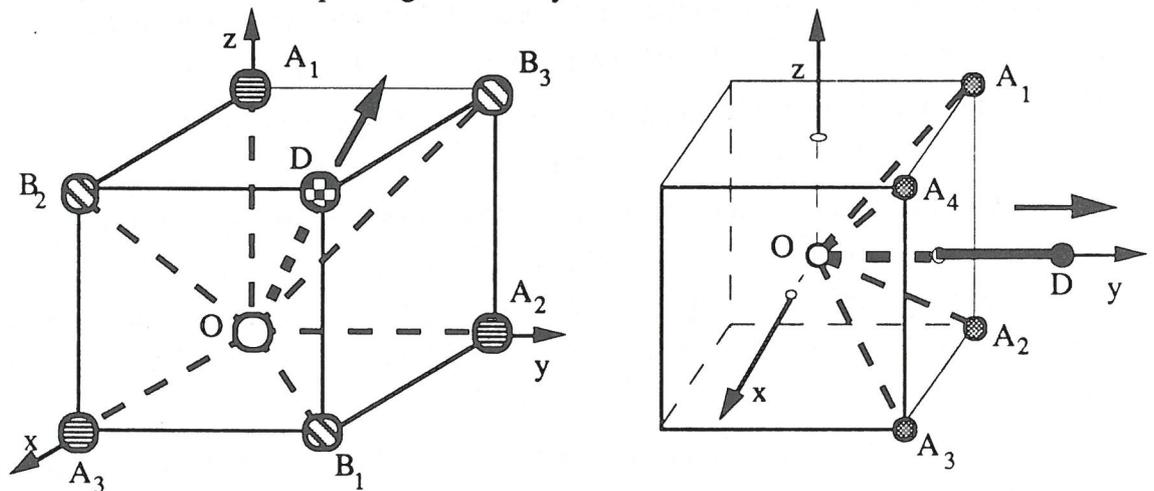


Figure 20.

Les projections des points sur un plan perpendiculaire à la direction privilégiée se font selon un réseau triangulaire de maille $\sqrt{\frac{2}{3}}$ pour le réseau cubique, et un réseau carré de maille 1 pour le réseau cubique centré, comme le montre la figure 21.

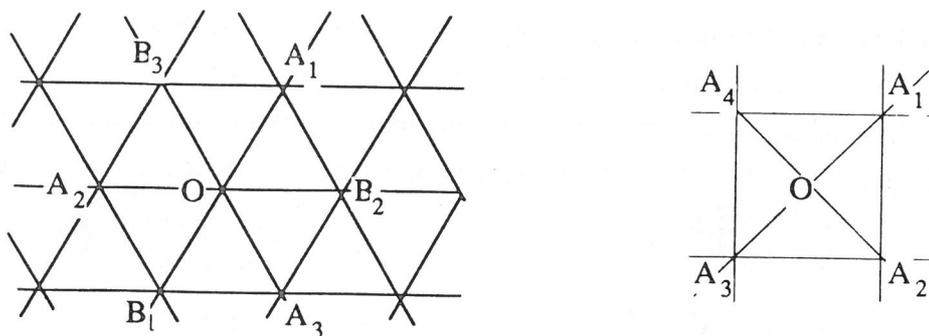


Figure 21.

Comme dans le cas à deux dimensions (Définition II-1), nous pouvons définir un animal dirigé à une source comme l'ensemble des points de \mathbb{E} que l'on peut atteindre à partir d'un point distingué, la source, par des chemins dont tous les pas appartiennent à un ensemble de pas autorisés et dont tous les sommets sont dans l'animal.

En fait nous définirons trois ensembles de pas autorisés, deux pour le réseau cubique, et un sur le réseau cubique centré, déterminant trois types d'animaux.

animaux de type I (réseau cubique)

- les pas autorisés en tout point P sont les trois pas selon les arêtes du cube incidentes à P, soit $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$,
- éventuellement un pas diagonal $(1,1,1)$, selon la direction privilégiée, à condition qu'il n'y en ait pas selon une arête de ce cube.

animaux de type II (réseau cubique)

- on ajoute à l'ensemble précédent les pas selon les diagonales des faces incidentes à P, soit $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ et $(1,1,0)$, un pas selon la diagonale d'une face étant autorisé s'il n'y en a pas selon les arêtes de cette face.

animaux de type III (réseau cubique centré)

- Quatre pas selon les demi-diagonales joignant le centre du cube aux sommets de la face voisine, perpendiculaire à Oy , soit,

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ et } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

- un pas diagonal éventuel, selon Oy , soit $(0,1,0)$, à condition qu'il n'y ait pas déjà l'un des quatre pas précédents.

empilements de "carreaux".

On considère alors des empilements dont les éléments appelés *pièces*, toutes identiques, ne sont plus des figures à une dimension comme les dominos du paragraphe IV, mais des figures horizontales régulières à deux dimensions, dont la projection des contours forme un pavage régulier du plan. Ces pièces, en forme de carreaux, sont donc

soit des hexagones, soit des carrés, soit des triangles. Leurs centres se projettent en formant un réseau régulier, triangulaire, carré, ou hexagonal. Pour les empilements d'hexagones et de carrés, on peut considérer deux sortes de contraintes de superposition selon que deux pièces s'intersectent si et seulement si elles ont en commun un tiers ou un quart de leur surface, ou seulement une arête en commun, comme le montre la figure 22,

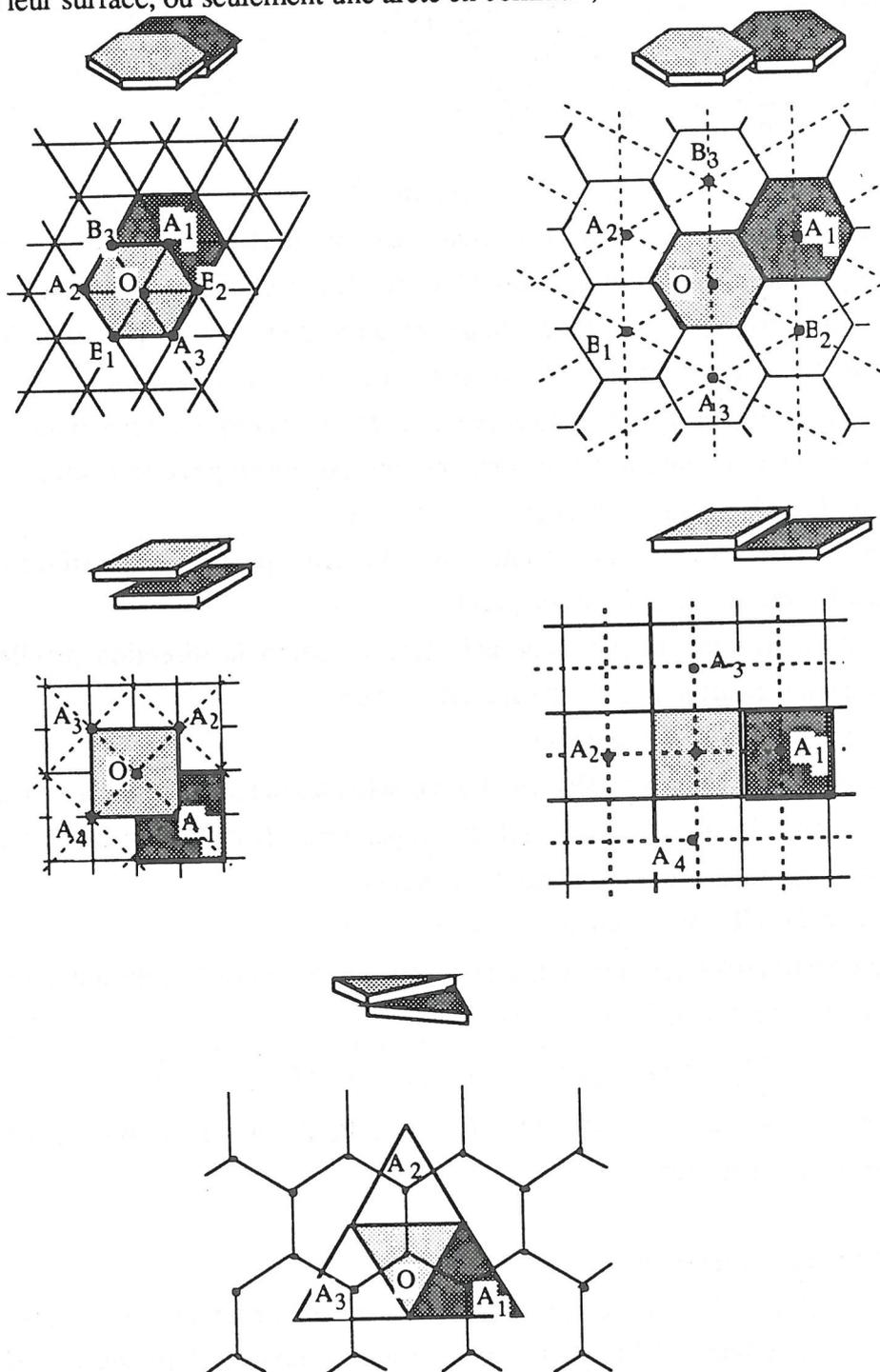


Figure 22.

mais ces deux façons conduisent à des réseaux isomorphes, tandis que deux triangles distincts ne s'intersectent que s'ils ont un côté en commun. Un empilement d'hexagones est représenté sur la figure 23.

Il est clair que les notions de dominance, de pièce maximale, de numérotation canonique (en numérotant dans l'ordre la pièce maximale, d'ordonnée puis d'abscisse la plus grande), d'empilement strict (deux pièces de numéros consécutifs ne se superposent pas exactement), s'étendent immédiatement à trois dimensions. Il en est de même pour la notion de pyramide (empilement n'ayant qu'une pièce maximale), et des opérations de glissement d'une sous pyramide, et de superposition de deux empilements. Dans ce dernier cas, le paramètre de l'opération sera non plus un scalaire, comme dans le cas planaire, mais un vecteur déterminé par deux points du réseau (triangulaire ou carré), précisant la translation horizontale à effectuer sur le second empilement.

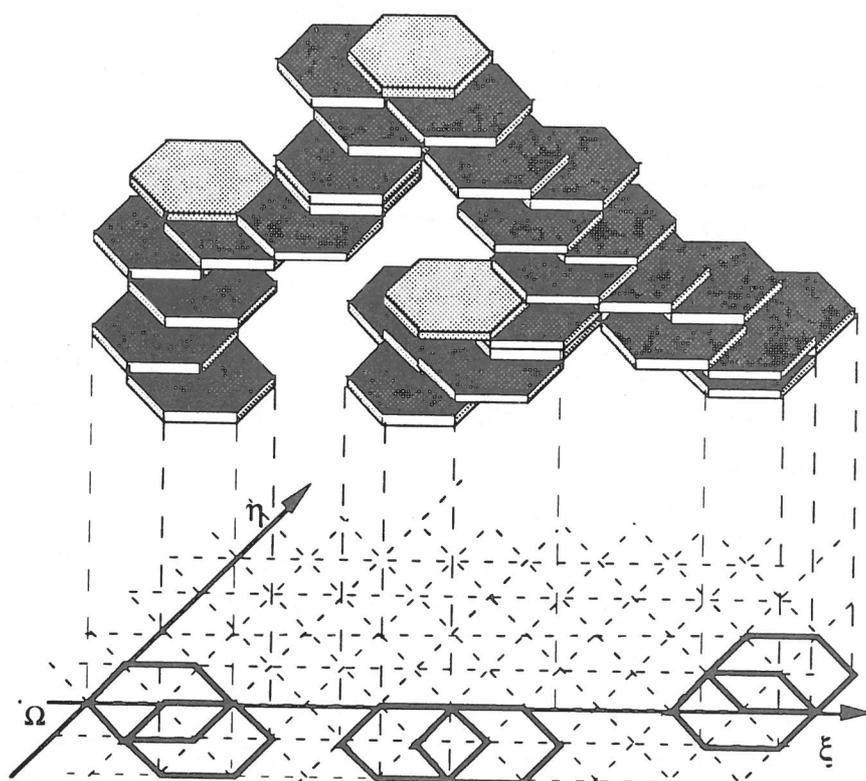


Figure 23. Un empilement d'hexagones à 3 pièces maximales.

V-2 Codage des Animaux dirigés 3D.

On a un résultat analogue au lemme IV-1-1, fondé lui aussi sur la numérotation canonique des empilements.

Proposition V-2-1.

Il y a bijection entre les animaux à une source et n points de type II (respectivement I, III) et les pyramides de n hexagones (resp. de n triangles, carrés).

Preuve. C'est la simple généralisation de la preuve du lemme IV-1-1. Considérons un animal à une source de type II, et orientons la direction privilégiée suivant la verticale descendante. Centrons en chaque point de l'animal un hexagone horizontal de côté $\sqrt{\frac{2}{3}}$, ou $\frac{\sqrt{2}}{2}$, suivant le type de chevauchement choisi. On obtient une pyramide d'hexagones en bijection avec l'animal. Réciproquement on montre par récurrence sur la numérotation que pour toute pyramide, le centre de tout hexagone peut être amené en coïncidence avec les points d'un animal dont la source est le centre de la pièce maximale.

Pour les animaux sur réseau cubique de type I, ou ceux de type III sur réseau cubique centré, on place un triangle équilatéral, de côté $\sqrt{2}$ ou un carré de côté unitaire ou $\frac{\sqrt{2}}{2}$, selon le chevauchement, centré sur chaque point de l'animal. ■

De cette bijection on déduit un codage des animaux à une source.

Théorème V-2-2.

Les animaux à un point source sont codés par des mots de longueur $n-1$ sur un alphabet ayant respectivement 18 lettres pour le type II, 16 pour le type III et 8 pour le type I

.Preuve (constructive). Soit \mathcal{A} un animal à n ($n > 1$) points et un point source sur réseau cubique. Considérons la pyramide d'hexagones associée. Pour déterminer la $n-1$ ème lettre du mot code, on procède ainsi:

- a) suppression de la pièce maximale,
- b) codage de la situation définie par les nouvelles pièces maximales,
- c) reconstitution si nécessaire d'une pyramide à $n-1$ points par une opération standard, dépendant de la situation.

Les centres des pièces hexagonales situées sous la pièce maximale, dites *pièces sous-maximales*, peuvent occuper l'un des six sommets d'un hexagone et le centre de celui-ci (pas diagonal). Numérotions ces positions comme indiqué sur la figure ci-contre, et appelons *azimuth* ce numéro. Un raisonnement géométrique élémentaire conduit donc à 18 configurations,

- 2 configurations à 3 pièces sous-maximales, $\{h_0, h_2, h_4\}$ et $\{h_1, h_3, h_5\}$, codées par les lettres a1 et a2,
- 6 configurations à 2 pièces sous-maximales non diamétralement opposées, $\{h_i, h_{i+2}\}$, $i \in \{0,5\}$, codées par b1, b2, ..., b6.
- 3 configurations à 2 pièces sous-maximales diamétralement opposées, $\{h_i, h_{i+3}\}$, $i \in \{0,2\}$, codées par c1, c2 et c3.

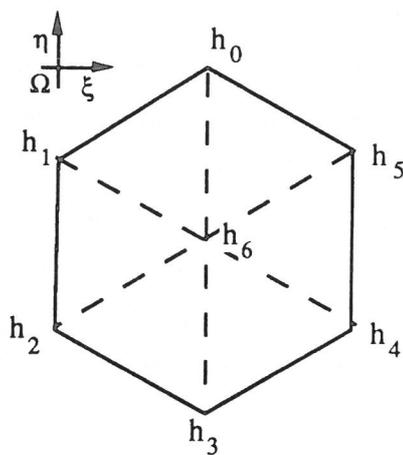


Figure 24.

- 7 configurations à une seule pièce sous-maximale, h_i , $i \in \{0,6\}$, codées par d1, ..., d6 et e pour la superposition exacte.

La figure 25 illustre ces différentes configurations dans le cas d'un chevauchement par arêtes.

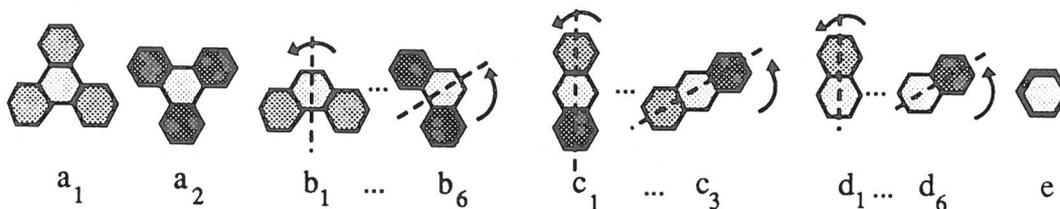


Figure 25.

Les opérateurs associés aux lettres d1, ..., d6 et e sont triviaux et la généralisation immédiate des opérateurs a et b1 du cas planaire (cf remarque IV-2-9). Pour les autres cas, l'opération qui fait passer d'un animal à n points à un animal à n-1 points est une extension de l'opération c1 ainsi définie,

tant qu'il reste plus d'une pièce sous-maximale, remplacer l'empilement \mathcal{E} représentant l'animal \mathcal{A} privé de la source par

$$\left(\mathcal{E} \setminus \left(\text{dom}(h_i) \right) \right) \Downarrow \xrightarrow{h_i h_j} \text{dom}(h_i),$$

où h_i et h_j sont respectivement la pièce sous-maximale de plus grand et de deuxième plus grand azimuth, et l'on est ainsi ramené à une pyramide ayant n-1 hexagones. Il est laissé au lecteur de vérifier que cette opération est réversible, tout comme c1.

Le même démarche s'applique au cas des empilements de carrés et de triangles. ■

CONCLUSION

A l'aide des empilements nous avons pu définir dans le cas planaire des opérateurs sur les animaux et ces opérateurs ont conduit à un codage par un langage classique dont l'énumération des mots est aisée. Ces mêmes méthodes, dans le cas des animaux sur réseau à trois dimensions conduisent également à un codage par des mots. Ces mots permettent un codage compact des animaux, mais malheureusement le problème de caractériser le langage qu'ils forment est encore ouvert. Or Dhar [13] de façon analytique, et Viennot [33] de façon bijective, ont montré que les animaux de type II dans l'espace sont un modèle équivalent aux *hexagones durs*, problème résolu par Baxter[1] à l'aide des identités de Ramanujan. Cette solution suggère que le langage des mots codes pourrait être dans le cas des animaux de type II, comme dans le cas planaire, un langage algébrique. Il est clair que la même méthode permettrait de caractériser le langage des mots codant les animaux de type III et permettrait ainsi de résoudre le modèle des carrés durs, qui ne possède encore aucune solution.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. J. BAXTER, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press, New-York, 1982.
- [2] D. BEAUQUIER et M. NIVAT, Codicity and simplicity in the plane, LITP, 88-65, Novembre 88.
- [3] D. BEAUQUIER et M. NIVAT, Tilling with polyominoes, LITP, 88-66, Novembre 88.
- [4] E. BENDER, Convex n-ominoes, Discrete Maths 8 (1974), pp 219-226.
- [5] P.CARTIER et D.FOATA, Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements, Lectures notes in Maths. n° 85, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [6] L.CHOTTIN, R. CORI, Une preuve combinatoire de la rationalité d'une série génératrice associée aux arbres, R.A.I.R.O. vol 16, n° 2, (1982), 113-128 .
- [7] M.P. DELEST, *Utilisation des langages algébriques et du calcul formel pour le codage et l'énumération des polyominos*, Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I, 1987.
- [8] M.P. DELEST, S. DULUCQ, Enumeration of directed column-convex animals with given perimeter and area, rapport n° 86-15, Université de Bordeaux I.
- [9] M.P. DELEST, J.M. FEDOU, Exact formulas for fully compact animals, rapport LABRI n°80-06

- [10] M.P.DELEST, G.X.VIENNOT, Algebraic langages and polyominoes enumeration, Theor. Comp.Sci. 34 (1984), 169-206 North-Holland.
- [11] B. DERRIDA, J.P. NADAL, On a model of directed compact animal, J. Physique Lett. 45 701, 1984.
- [12] D. DHAR, Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to Baxter hard-square lattice-gas model, Phys. Rev Lett. 49 (1982), 959-962.
- [13] D. DHAR, Exact solution of a directed-site animals enumeration in 3 dimension, Phys. Rev Lett. 59 (1983), 853-856.
- [14] D. DHAR, M.K. PHANI, M. BARMA, Enumeration of directed site animals on two-dimensional lattices, J.Phys.A : Math Gen.15, (1982), L 279 -L 284.
- [15] S. DULUCQ, *Etude combinatoire de problèmes d'énumération d'algorithmique sur les arbres et de codage par des mots*, Thèse d'Etat, Université de Bordeaux I, 1987.
- [16] S. GOLOMB, Tiling with sets of polyominoes, J. of Comb. Th. 9, 1970, 60-71.
- [17] S. GOLOMB, Polyominos Which Tile Rectangles, J. of Comb. Th., A 51,117-124, (1989).
- [18] D. GOUYOU-BEAUCHAMPS, X.G. VIENNOT, Equivalence of the two Dimensional Directed Animal Problem to a One-Dimensional Path Problem, Advances in applied Mathematics 9, 334-357 (1988).
- [19] V. HAKIM, J.P. NADAL, Exact result for 2D directed lattice animals on a strip of finite width, J. Phys. A: Math. Gen. 16 (1983), L 213-L 218.
- [20] G. HUET, Confluent Reductions: Abstract Properties and Applications to Term Rewriting Systems, J. of the A.C.M. vol 27, n° 4, (1980), 797-821.
- [21] D.A. KLARNER, My life among polyominoes, in *The Mathematical Gardner*, 243-262, Wadsworth, Belmont CA, (1981).
- [22] D.A. KLARNER, R.L. RIVEST, A procedure for improving the upper bound for the number of n-ominoes, Can. J. Math. 25(1973), 585-602.
- [23] D.A. KLARNER, R.L. RIVEST, Asymptotic bounds for the number of convex n-ominoes, Discrete Maths 8(1974), 31-40.
- [24] D. E. KNUTH, *The art of computers programming*, vol. 3, Sorting and Searching, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1973).
- [25] T.C. LUBENSKY et J.VANNIMENUS , Flory approximation for directed branched polymers and directed percolation, J. Physique, 43 (1982), L 377 - L 381.
- [26] Y. METIVIER, Une condition suffisante de reconnaissabilité dans un monoïde partiellement commutatif, RAIRO Inform. Théor. 20 (1986), 121-127.

- [27] J.P. NADAL, B.DERRIDA, J. VANNIMENUS, Directed lattices animals in 2 dimension: numerical and exact results, *J. Physique* 43 (1982), 1561.
- [28] S.REDNER et A. CONIGLIO, Flory theorie for directed lattice animals and directed percolation, *J Phys. A : Math. Gen.*, 15, (1982), L 273 - L 278.
- [29] M. SAHIMI, Critical exponents and thresholds for percolation and conduction, in *The mathematics and physics of disordered media*, Lecture Notes in Maths n° 1035, Springer Verlag, New-York/ Berlin, 1983, 314-346.
- [30] M.P.SCHÜTZENBERGER, Certain elementary families of automata, Proc. Symp. on Mathematical Theory of Automata (Polytechnic Institute of Brooklyn,1962) pp. 139-153.
- [31] M.P.SCHÜTZENBERGER, Context-free langages and pushdown automata, *Information and Control* 6 (1963), 246-264.
- [32] H.N.V. TEMPERLEY, *Graph Theory and Applications*, édité par Ellis Horwood, J. Wiley & Sons.
- [33] X.G.VIENNOT, Problèmes combinatoires posés par la physique statistique, Séminaire Bourbaki n° 626, 36^{ème} année, in *Astérisque* n°121-122 (1985) 225-246 Soc. Math. France.
- [34] X.G. VIENNOT, Enumerative combinatorics and algebraic langages, Proceedings FCT'85, ed. L. Budach, Lecture Notes in Computer Science n°199, Springer-Verlag, New-York/Berlin, 1985, 450-464.
- [35] X.G. VIENNOT, Heaps of pieces, I : Basic definitions and combinatorial lemmas, in *Combinatoire énumérative* eds G. Labelle et P. Leroux, Lectures Notes in Maths n° 1234, , Springer-Verlag, Berlin, 1986.

Talence, le 1° Octobre 1989.