# Fibonaccis aufsteigende Kettenbrüche, ein elegantes Werkzeug mittelalterlicher Rechenkunst

von

Heinz Lüneburg

Der *liber abbaci* des *Leonardo pisano*, alias *Fibonacci*, hat offenbar auch nach mehr als hundert Jahren nach seiner Edition durch *B. Boncompagni* (*Boncompagni* 1857) noch keine Gesamtwürdigung erfahren. *M. Cantor* widmet der Beschreibung dieses Buches zwar dreiunddreißig Seiten seiner Vorlesungen über Geschichte der Mathematik (*Cantor* 1907, S. 3–35), doch dreiundreißig Seiten reichen nicht, um der Fülle dieses Buches gerecht zu werden. *Juschkewitsch* räumt dem *liber abbaci* vierzehn Seiten ein (*Juschkewitsch* 1964, S. 371–384), sagt also weniger als *Cantor*, wenn er auch die Arbeit von *Vogel* (1940) berücksichtigt. Die Beschreibung von *Vogel* (1971) ist wiederum im wesentlichen die gleiche wie die von *Juschkewitsch*.

Einzelnes aus dem *liber abbaci* ist jedoch schon detailliert dargestellt worden. So wurde von *G. Friedlein* (1869) die im *liber abbaci* dargestellte Arithmetik beschrieben. *K. Vogel* (1940) untersuchte, was *Fibonacci* im fünften Teil des zwölften Kapitels zu linearen Gleichungssystemen schrieb, und *A. Favaro* (1874) kam in seinem Artikel über die Geschichte der Kettenbrüche auch auf die aufsteigenden Kettenbrüche von *Fibonacci* zu sprechen. Er versuchte dort zu zeigen, daß diese Kettenbrüche bei *Fibonaccis* Algorithmus zur Approximation der Quadratwurzel einer natürlichen Zahl eine Rolle gespielt haben müssen, obgleich sie in *Fibonaccis* Buch an dieser Stelle nicht explizit auftreten. Dies ist, soweit ich sehe, die einzige Stelle in der Literatur, wo diese Kettenbrüche nicht nur als Kuriositäten erwähnt sind. Die Arbeit *Vogel* (1982), auf die mich Herr Folkerts dankenswerterweise aufmerksam machte, gibt einige interessante Literaturhinweis zu den aufsteigenden Kettenbrüchen, behandelt sie im übrigen aber so, als seien sie erfunden, um die Division mit großen Divisoren einfacher gestalten zu können. Dies mag sein, ihr Sinn und Zweck erschöpfte sich jedoch zumindest für *Fibonacci* nicht allein darin. Dies möchte ich in dieser Note belegen. Eine Würdigung des gesamten Buches behalte ich mir für die Zukunft vor.

*Fibonacci* hat für die aufsteigenden Kettenbrüche eine eigene Notation. Er schreibt nämlich ebensoviele Zahlen auf wie unter den Bruchstrich.

Diese Notation werden wir beibehalten, uns jedoch auch moderner Notation bei ihrer Definition und Diskussion nicht begeben. Definiert werden die aufsteigenden Kettenbrüche wie folgt. Zunächst ist $\frac{a_1}{b_1}$ der übliche Bruch mit dem Zähler $a_1$ und dem Nenner $b_1$. Ist $t > 1$, so ist

$$\frac{a_1 \ldots a_t}{b_1 \ldots b_t} := \frac{a_1 \ldots a_{t-1}}{b_1 \ldots b_{t-1}} \cdot \frac{1}{b_t} + \frac{a_t}{b_t}.$$

Dabei sind die $b_i$ allesamt natürliche Zahlen, während die $a_i$ nicht negative ganze Zahlen sind.

Uns Heutige verwundert es nicht, daß die $a_i$ auch Null sein dürfen. *Fibonacci* sagt jedoch zu Beginn seines Buches, Zahlen seien Bündel von Einheiten. Er übernimmt also die Definition, die sich schon bei den Griechen findet, die dann explizit weiter sagen, daß die Eins keine Zahl sondern der Ursprung aller Zahl sei. Demzufolge ist die Null erst recht keine Zahl. Doch das kümmert *Fibonacci* nicht. Er rechnet mit der Null und der Eins so, wie wir es heute auch tun. Er akzeptiert die Null als Summanden, als Faktor und auch als Ergebnis einer Rechnung. Wie souverän er mit ihr umgeht, zeigt das Beispiel der Multiplikation einer drei- mit einer sechsstelligen Zahl, nachdem er gerade einen Algorithmus formuliert hat, zwei sechsstellige Zahlen miteinander zu multiplizieren. Damit der Algorithmus funktioniert, versieht er die dreistellige Zahl mit drei führenden Nullen. Doch dies nur so nebenbei.

Die Definition der aufsteigenden Kettenbrüche ergibt unmittelbar, daß

$$\frac{a_1 \ldots a_t}{b_1 \ldots b_t} = \frac{a_t + \dfrac{a_1 \ldots a_{t-1}}{b_1 \ldots b_{t-1}}}{b_t}$$

gilt. Dies erklärt den Namen ‚aufsteigender Kettenbruch'.

*Fibonacci* benutzt nun diese aufsteigenden Kettenbrüche bei seinem Divisionsalgorithmus für natürliche Zahlen. Hier tut er etwas, was uns befremdlich erscheint. Er zerlegt nämlich zunächst den Divisor in ein Produkt von möglichst großen einstelligen Faktoren, von Faktoren, die gleich Zehn sind, und ggf. noch vorhandenen, mehrstelligen Primzahlen, um dann die Division mit Hilfe der Faktoren des Divisors durchzuführen. Wie das geschieht, wird gleich klar werden

Um es gleich vorweg zu sagen. Diese Idee ist nicht so absurd, wie sie auf den ersten Blick erscheint, da in den späteren Aufgaben der Divisor sich häufig als Produkt ergibt, so daß man um die Mühe des Faktorisierens herumkommt. Es steckt aber mehr dahinter, wie wir noch sehen werden.

Dividiert man die natürliche Zahl $n$ durch $b_1$, so erhält man zwei nicht negative ganze Zahlen $q_1$ und $a_1$ mit $a_1 < b_1$ und

$$\frac{n}{b_1} = q_1 + \frac{a_1}{b_1}.$$

Hat man nun schon $q_{t-1}$ und $a_1, \ldots, a_{t-1}$ mit $a_i < b_i$ gefunden und gilt

$$\frac{n}{b_1 \cdots b_{t-1}} = q_{t-1} + \frac{a_1 \ldots a_{t-1}}{b_1 \ldots b_{t-1}},$$

ist ferner $\frac{q_{t-1}}{b_t} = q_t + \frac{a_t}{b_t}$, so folgt, daß

$$\frac{n}{b_1 \cdots b_t} = q_t + \frac{a_1 \ldots a_t}{b_1 \ldots b_t}$$

ist. Man beachte, daß es bei diesem Verfahren auf die Numerierung der $b_i$ ankommt.

Aus der Gleichung, die den Namen aufsteigende Kettenbrüche begründete, folgt mittels Induktion, daß

$$\frac{a_1 \ldots a_t}{b_1 \ldots b_t} = \frac{a_t}{b_t} + \frac{a_{t-1}}{b_t \cdot b_{t-1}} + \cdots + \frac{a_1}{b_t \cdots b_1}$$

ist. Bezeichnet man die linke Seite dieser Gleichung mit $|a_t \ldots a_1$, so ist $|a_t \ldots a_1$ nichts anderes als die Darstellung des gebrochenen Anteils bei der Division von $n$ durch das Produkt der $b_i$ bezüglich der Mischbasis

$$(b_t^{-1}, \ldots, b_1^{-1}).$$

Das ist nun genau das, worauf es ankommt.

Es seien $d_1, \ldots, d_s$ natürliche Zahlen und es gebe eine weitere natürliche Zahl $k$, so daß

$$\prod_{i:=1}^{s} d_i = k \cdot \prod_{i:=1}^{t} b_i$$

gilt. Dann ist natürlich

$$\frac{k \cdot n}{\prod_{i:=1}^{s} d_i} = \frac{n}{\prod_{i:=1}^{t} b_i}.$$

Andrerseits ist

$$\frac{k \cdot n}{\prod_{i:=1}^{s} d_i} = Q_s|c_s \ldots c_1$$

mit nicht negativen ganzen Zahlen $Q_s$ und $c_i$, wobei die $c_i$ die Ungleichung $c_i < d_i$ erfüllen. Es folgt $q_t = Q_s$ und $|c_s \ldots c_1 = |a_t \ldots a_1$, dh., der Bruchteil, der bei der Division durch das Produkt der $b_i$ entsteht, ist nun in der durch die $d_i$ definierten Mischbasis dargestellt. Und genau diesen Vorteil nutzt *Fibonacci* bei seinen Rechnungen, wobei er mit Nachdruck auf diesen Vorteil hinweist. Dies wollen wir nun belegen.

Die Seitenzahlen, die im folgenden angegeben werden, beziehen sich auf die Ausgabe des *liber abbaci* von *Boncompagni*.

Die erste Aufgabe, wo von den vorstehenden Ideen Gebrauch gemacht wird, steht auf S. 86. Dort kosten 100 Leichtpfund Pfeffer $\frac{3}{4}13l$. Dabei steht $l$ für das pisanische Pfund, welches aus 20 Schilling ($s$) besteht, wobei der Schilling wiederum 12 Denaren ($d$) entspricht. Zu beachten ist ferner, daß *Fibonacci* die Brüche in unserem Sinne *vor* die Zahl schreibt, aber sagt, daß er sie *hinter* die Zahl schriebe. Er liest die Zahlen also von rechts nach links, oder tut zumindest so, als ob er sie so läse. Gefragt ist nun nach dem Preis von $\frac{1}{3}46$ Pfund Pfeffer. Die Brüche werden eingerichtet und ihre Zähler 55 und 139 miteinander multipliziert. Das Produkt 7645 ist dann durch $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 6\ 10\ 10}$ zu dividieren, wie *Fibonacci* sagt. Wir würden sagen, daß das Produkt mit diesem Bruch zu multiplizieren sei. Hier tritt also das ein, was ich oben schon erwähnte, daß der Divisor auf Grund der Aufgabenstellung gleich $4 \cdot 3 \cdot 100$ ist, was *Fibonacci* unmittelbar in $2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 10$ umwandelt. Weil im Zähler des aufsteigenden Kettenbruches nur am Anfang eine 1 sonst aber lauter Nullen stehen, kann man die Zahlen im Nenner beliebig vertauschen, was *Fibonacci* an anderer Stelle schon bemerkt hat. Da es überdies nur auf das Produkt der im Nenner stehenden Zahlen ankommt, kann man dieses Produkt auch auf andere Weise faktorisieren. *Fibonacci* tut dies und formt den gegebenen aufsteigenden Kettenbruch um in $\frac{1\ 0\ 0}{5\ 12\ 20}$. Führt man nun die Division aus, so erhält man $\frac{0\ 5\ 7}{5\ 12\ 20}6l$. Der Preis für die besagten Pfund Pfeffer beträgt also $6l\ 7s\ 5d$, was von *Fibonacci* ausdrücklich begründet wird. Dieses Beispiel zeigt gleichzeitig, daß *Fibonacci* die Null auch als Ergebnis akzeptiert.

*Fibonacci* nimmt diese Aufgabe zum Anlaß, die Division durch 12 und durch 20 zu erklären. Vorher hatte er nur die Division durch Primzahlen erklärt, wobei er von der Primzahleigenschaft des Divisors jedoch keinen Gebrauch machte. Die Division durch 12 bietet also nichts Neues. Die

Division durch 20 führt er zurück auf die Formel

$$\frac{a \cdot 10 + b}{20} = \frac{a}{2} + \frac{b}{20} = a \,\mathrm{DIV}\, 2 + \frac{(a \,\mathrm{MOD}\, 2) \cdot 10 + b}{20},$$

wobei die Operatoren DIV und MOD dadurch definiert seien, daß sie für gegebene ganze Zahlen $a$ und $b$ mit $b \neq 0$ ganze Zahlen liefern mit

$$a = (a \,\mathrm{DIV}\, b) \cdot b + a \,\mathrm{MOD}\, b$$

und $0 \leq a \,\mathrm{MOD}\, b < |b|$. Er schreibt die 2 unter die Ziffer zweiten Grades, dh. unter die vorletzte Ziffer des Dividenden um anzudeuten, daß er ihn nur bis zu dieser Stelle durch 2 dividiert. Den Rest, falls er gleich 1 ist, schreibt er dann vor die Einerstelle des Dividenden, um so den Rest der Zahl modulo 20 zu erhalten. Als Beispiel dient 1234 : 20. Diese Erläuterung der Division durch zwei so spezielle Divisoren lässt schon erahnen, daß diese Divisoren in Zukunft häufiger vorkommen werden.

Bei der nächsten Aufgabe (S. 88) kostet ein Zentner ***maximutini***, die auch ***massamutini*** genannt werden, $\frac{1}{2}53l$. Gefragt ist nach dem Preis von $\frac{1}{9}23$ Pfund ***massamutini***. Hier ist durch $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{2\ 9\ 10\ 10}$ zu teilen. Dieser Bruch ist aber gleich $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{3\ 5\ 6\ 20}$. Sein Nenner ist also nicht durch $12 \cdot 20$ teilbar. Nach unseren allgemeinen Ausführungen zu Beginn ist klar, was ***Fibonacci*** tut, er erweitert mit 2.

Es folgen drei weitere Aufgaben gleichen Typs, bei denen der Preis von 100 Häuten, bzw. von 100 Rotuli einer nicht näher bezeichneten Ware in Pfunden und Bruchteilen von Pfunden angegeben ist. In all diesen Fällen ist also 100 und damit 20 ein Teiler des Divisors. Die Aufgaben sind aber so eingerichtet, daß man mit 4 bzw. 3 bzw. 12 erweitern muss, damit der Divisor durch $12 \cdot 20$ teilbar ist.

Hier zeigt sich einmal mehr das didaktische Geschick ***Fibonaccis***, daß er nämlich an Hand von typischen Situationen das Allgemeine klar hervortreten lässt.

Weitere Aufgaben dieser Art lassen den Leser mit dem, was zu tun ist, immer vertrauter werden. Auf S. 92 heißt es dann: „Nun ist genug gesagt über den Verkauf von ***Cantaria*** und verschiedenen anderen Gewichten zu Preisen in Pfunden, bei denen wir $\frac{1\ 0}{12\ 20}$ im Divisor haben müssen, um Pfunde, Schillinge und Denare in einer Multiplikation zu erhalten: Nun geht es um den Verkauf zu Preisen in Schillingen, bei denen wir nur $\frac{1}{12}$ im Divisor benötigen, damit, was bei der Division über der 12 verbleibt, Denare sind; wie das, was nach der Division außerhalb des Bruches steht, Schillinge sind."

Eine weitere Aufgabe sei hier noch näher kommentiert. Sie steht auf S. 107 und lautet: Ein Pfund Silber kostet $7l$. Gefragt ist, wieviel Silber man für $4l$ erhält. Hier ist zu sagen, daß ein Pfund in diesem Falle 12 Unzen umfasst und eine Unze wiederum 25 Gewichtsdenare. Der Dreisatz liefert zunächst, daß man $\frac{4\cdot 12}{7} = \frac{6}{7}6$ Unzen Silber für die $4l$ erhält. ***Fibonacci*** fragt nun, wieviel Gewichtsdenare $\frac{6}{7}$ Unzen denn seien. Um dies zu ermitteln, ist 6 mit 25 zu multiplizieren und das Produkt durch 7 zu teilen. Man erhält $\frac{3}{7}21$ Gewichtsdenare. Der Gewichtsdenar ist aber noch weiter unterteilt, nämlich in 6 ***Carrubae***. Wieviel Carrubae sind also $\frac{3}{7}$ Gewichtsdenare? Nun, $\frac{4}{7}2$. Nachdem dies geklärt ist, fährt ***Fibonacci*** fort: „Wenn du nun dies, gemäß höherer Lehre (***secundum maiorem magisterium***), in nur einer Multiplikation und Division haben willst, so multipliziere obige 48 mit den Teilen einer Unze, dh., mit der Anzahl der Denare und der Carrubae, das heißt mit 25 und mit 6, was 7200 ergibt. Dies dividierst du durch $\frac{1\ 0\ 0}{7\ 6\ 25}$, das ist durch $\frac{1\ 0\ 0\ 0}{7\ 6\ 5\ 5}$, was leichter ist, und du wirst dieselbe Größe haben, wie in der Frage oben beschrieben: Was wirklich über der 7 steht, sind Teile einer Carruba, was über der 6 steht, sind Carrubae, und was über der $\frac{1\ 0}{5\ 5}$ steht, sind Gewichtsdenare. Was außerhalb des Bruchstriches steht, sind Unzen".

Dann faßt ***Fibonacci*** noch einmal alles zusammen. Diese Zusammenfassung möchte ich im Original zitieren, um dem Leser einen kleinen Eindruck von ***Fibonaccis*** schönem Buch zu geben. Zuvor sind jedoch noch einige Erläuterungen vonnöten. Der ***tarenus*** ist eine sizilianische Goldmünze zu 20 ***grana***. Der ***bizantius saracenatus***, wegen seines hohen Goldgehaltes auch ***yperperon***, d. i. der Überfeine, genannt, war eine in den Kreuzfahrerländern gängige Goldmünze, die in 24 ***carati*** unterteilt war. Der ***bizantius de garbo*** (Djerba in der kleinen Syrte, bzw. das Maghreb) war ebenfalls eine Goldmünze, die jedoch 10 ***miliarenses*** umfasste. Der ***rotulus*** ist ein Gewichtsmaß unterschiedlicher Schwere. Er war stets in 12 Unzen unterteilt. In Pisa galt eine dieser Unzen $\frac{1}{2}39$ Gewichtsdenare (***denarii de cantera***). Die ***carruba*** war nochmals unterteilt in 4 ***grana***. Ferner ist ***marca argenti*** die Mark Silber. Sie ist in 8 Unzen zu je 25 Gewichtsdenaren unterteilt. Zu beachten ist, daß kleine Gewichte bei weniger teuren Waren vernachlässigt werden, bei teureren Waren jedoch Berücksichtigung erfahren. Dieses Vernachlässigen von kleineren Einheiten findet sich auch an anderen Stellen des ***liber abbaci***. Der ***liber abbaci*** ist mit seinen vielen Algorithmen also nicht nur ein frühes Buch zur Computer-Algebra, sondern auch ein Buch, in dem sich Aspekte der numerischen Mathematik finden.

Hier nun das versprochene Zitat. Es findet sich auf S. 108. Die Unstimmigkeiten in der Schreibweise, die der Leser entdecken wird, finden sich auch im Original.

*Et ideo ex ipso numero, sub quo summa ponenda est, scilicet quartus numeros ignotus, comprehendens ea, que in capite uirgule diuisionis habere debeas: ut si fuerint libre denariorum, ea que super uacuum scribuntur, studebis habere* $\frac{1\;0}{12\;20}$ *propter soldos et denarios: que si fuerint soldi, studebatur habere* $\frac{1}{12}$ *propter denarios. Et si tareni, studebis habere* $\frac{1}{20}$ *propter grana. Et sunt bizantii saracenati, uel yperperi, studebis habere* $\frac{1\;0}{3\;8}$*; et si bizantii de garbo, studebis habere* $\frac{1}{10}$*; et si fuerint libre, uel rotuli alicuius mercis non multum care, ut piperis, studebis habere* $\frac{1}{12}$ *propter uncias: et si fuerint libre pisane alicuius mercis carioris, ut zaffarani, studebis habere* $\frac{1\;0\;0}{5\;5\;12}$ *propter uncias et denarios cantera; et si fuerint eiusdem ponderis alterius mercis carioris ut argenti, studebis habere* $\frac{1\;0\;0\;0}{6\;5\;5\;12}$ *propter uncias, et denarios, et carrubas: et si fuerint libre carioris rei, ut auri, studebis habere* $\frac{1\;0\;0\;0\;0}{4\;6\;5\;5\;12}$ *propter uncias, et denarios, et carrubas, et grana: et si fuerint uncie auri pisane libre, studebis habere* $\frac{1\;0\;0\;0}{4\;6\;5\;5}$ *propter denarios de cantera, et carrubas, et grana: et si fuerint denarii de cantera auri, studebis habere tantum* $\frac{1\;0}{4\;6}$ *propter carrubbas et grana: et si fuerint carrubbe auri, uel alicuius rei carioris, studebas habere tantum* $\frac{1}{4}$ *in uirgula propter grana: et si fuerint uncie argenti, sufficit ut habeas tantum* $\frac{1\;0\;0}{6\;5\;5}$ *propter denarios et carrubas, ut in prescripta questione ordinabimus. Et si fuerint denarii de cantera argentum, sufficit ut habeas tantum* $\frac{1}{6}$ *propter carrubas: et si fuerint marca argenti, studebis habere* $\frac{1\;0\;0\;0}{6\;5\;5\;8}$ *propter uncias, et denarios, et carrubbas; et si debet fieri de omnibus aliis rebus, secundum diuersitatem ponderum, et partium eorem, et secundum consuetudinem et ordinem illarum prouinciarum, in quibus operari debueris. Vnde, si hoc quod dictum est optime consideraueris, habebis in una multiplicatione et in una diuisione hoc quod tibi necessarium fuerit in rebus quesitis: et ne tradas obliuioni seruare ea, que quandoque habueris in diuisione ex parte, uel partibus presciptorum numerorum, quod in capite virgularum ponere indigebis et commiscere eam, uel eas cum his, que defficient tibi ex illis numeris et multiplicare cum eisdem.*

Dann geht *Fibonacci* noch einmal im einzelnen darauf ein, wie zu erweitern, bzw., wie der schon faktorisierte Nenner umzufaktorisieren sei, um die gewünschte Faktorisierung des Divisors zu erhalten.

Man sieht, daß die aufsteigenden Kettenbrüche ein sehr nützliches Hilfsmittel sind, um mit Aufgaben, in denen die unterschiedlichsten Maßeinheiten auftreten, fertig zu werden, und daß *Fibonacci* dies klar herausstellt.

Doch damit ist noch nicht alles gesagt. Bei der Zinseszinsrechnung erweisen sich die aufsteigenden Kettenbrüche einmal mehr als nützliches Werkzeug und hier zeigt es sich, daß *Fibonacci* sie auf die ihnen gemäße Art zu addieren, zu subtrahieren und dann auch mit Brüchen zu multiplizieren versteht.

Die erste Zinsaufgabe findet sich auf S. 267. Sie lautet: Jemand mietet ein Haus für 30 Pfund Miete im Jahr, die jährlich am Neujahrstage nachträglich fällig werden. Er zahlt dem Vermieter bei Mietantritt 100 Pfund bei einem Zins (*usura*) von vier Denaren das Pfund im Monat. Gefragt ist, wie lange der Mieter wohnen kann. Die Rechnung zeigt, daß der Mieter zu Neujahr — damals in Pisa mit dem Fest Mariae Verkündigung identisch — eingezogen ist, was von *Fibonacci* nicht erwähnt wird. Er sagt auch nicht, daß die Miete erst nachträglich zum Jahresende fällig wird. Auch dieses entnehme ich *Fibonaccis* Rechnung.

Ein Pfund bringt im Monat vier Denare an Zinsen, im Jahr also das Zwölffache, das sind vier Schillinge. Nun sind vier Schillinge ein Fünftel eines Pfundes. Dies besagt, daß mit den Zinsen in einem Jahr aus fünf Pfund deren sechs werden. Aus 5 werden also 6 und die Unkosten betragen 30. Diese Formulierung verweist auf unmittelbar zuvor behandelte Aufgaben, wo ein Reisender in Städten, die er besucht, sein Geld einerseits vermehrt, andererseits aber auch Unkosten hat. *Fibonacci* hat damit diese Aufgabe auf früher behandelte Aufgaben zurückgeführt, was er ausdrücklich bemerkt. *Fibonacci* rechnet nun $\frac{1}{5}$ von 100 sind 20. Das ist der Gewinn. Also ergeben sich nach einem Jahr 120 Pfund. Davon gehen 30 ab, so daß 90 verbleiben. Das Kapital vermindert sich also um 10 Pfund. Er rechnet weiter: $\frac{1}{5}$ von 90 sind 18, so daß Kapital plus Gewinn sich am Ende des zweiten Jahres auf 108 Pfund beläuft. Um 30 vermindert ergeben sich 78 Pfund. Im zweiten Jahr vermindert sich das Kapital also um 12 Pfund. Nun bemerkt *Fibonacci*, daß

$$5 : 6 = 10 : 12 = d_i : d_{i+1}$$

gilt, wenn $d_i$ den Betrag bezeichnet, um den das Kapital im $i$ten Jahr vermindert wird. Es ist also $d_{i+1} = \frac{6}{5} \cdot d_i$. Hiermit rechnet *Fibonacci* dann weiter und erhält, zusammen mit den schon berechneten Werten für $d_1$

und $d_2$

$$\begin{aligned}
d_1 &= 10\\
d_2 &= 12\\
d_3 &= \frac{2}{5}14\\
d_4 &= \frac{2\ 1}{5\ 5}17\\
d_5 &= \frac{2\ 3\ 3}{5\ 5\ 5}20\\
d_6 &= \frac{2\ 0\ 2\ 4}{5\ 5\ 5\ 5}24
\end{aligned}$$

Nun wird es aufregend! Diese sechs Zahlen sind jetzt nämlich zu addieren.

Wie wir oben bemerkten, kann man die Folge $a_s \dots a_1$ der Zähler des aufsteigenden Kettenbruches

$$\frac{a_1 \dots a_s}{b_1 \dots b_s}$$

auffassen als die Entwicklung dieses Kettenbruchs nach der Mischbasis

$$(b_s^{-1}, \dots, b_1^{-1}).$$

Hier haben wir die Bruchteile der Zahlen $d_i$ nun dargestellt nach der Mischbasis $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. In obiger Notation ergibt sich, daß die Zahlen

10|0000
12|0000
14|2000
17|1200
20|3320
24|4202

zu addieren sind. Wir addieren Kolonne für Kolonne, wobei der Übertrag auf der rechten Seite des senkrechten Striches modulo 5 zu berechnen ist. Genau das tut *Fibonacci*, um als Ergebnis $\frac{2\ 2\ 2\ 1}{5\ 5\ 5\ 5}99$ zu erhalten. Diese Zahl ist dann von 100 zu subtrahieren. Auch dies geschieht nach unserer Weise. Hier das Zitat, welches sich auf den Seiten 267 und 268 findet.

*Addes quidem suprascripta sex minutiones in hunc modum: pones ex eis integra sub integris, et similes fractiones sub similibus, scilicet quintas sub quintas, et quintas quinte sub quintas quinte, et cetera; et protracte uirgam, sub qua sint 5 quater, scilicet secundum numerum ipsorum 5, que sunt sub maiori uirga minutionum predictarum; et pro 2, que sunt super 5, que sunt in quarto gradu uirge de 24, pone 2 super 5, que sunt in eodem gradu protracte uirge; et adde 0, quod est super 5 tercij gradus uirge de 24 cum 2, que sunt in eodem gradu uirge de 20, erunt 2; que pones super 5 tercij gradus protracte uirge; et adde 2, que sunt super 5 secundi gradus uirge de 24 cum 3, que sunt super 5 secundi gradus uirge de 20, et cum 2, que sunt super 5 eiusdem secundi gradus uirge de 17, erunt 7; que diuide per 5 secundi protracte uirge, exibit 1, et remanet 2: pone 2 super ipsa 5, et 1 serua in manu; que adde cum 4, que sunt super 5 primi gradus uirge de 24, et cum 3 que sunt super 5 eiusdem gradus uirge de 20, et cum 1, quod est in primo gradu de 17, et cum 2, que sunt super 5 post 14, erunt 11; que divide per 5 primi gradus protracte uirge, exibunt 2, et remanet 1: pone quidem 1 super ipra 5, et 2 serua; que adde cum integris, erunt 99; que pone ante protractam uirgam; et sic habebis* $\frac{2\ 2\ 2\ 1}{5\ 5\ 5\ 5}99$*: que si de centum extrahere uis, protrahes aliam uirgam, sub qua pone similiter 5 quater; et accipe 2, que sunt super 5 quarti gradus uirge de 99; et extrahe eam de 5, que sunt sub ipsis 2, remanent 3; que pone super 5 quarti gradus protracte uirge, et retine in manu 1; quod adde cum 2, que sunt super 5 tercij gradus, extrahe ex eisdem 5, remanent 2, que pone super 5 tercij gradus protracte uirge, et serua 1; quod adde cum 2, que sunt super 5 secundi gradus uirge de 99, erunt 3; que extrahe ex ipsis 5, remanent 2, que pone super 5 secundi gradus,et serua 1; quod adde cum 1, quod est super 5, que sunt in primo gradu uirge de 99, erunt 2: a quibus usque in 5 desunt 3, que pone super 5 primi gradu uirge protracte; et pro expleto quinario serua 1; quod adde cum 99, faciunt 100; que extrahe de 100, remanent 0 ante protractam uirgam, scilicet nichil; et sic habes* $\frac{3\ 2\ 2\ 3}{5\ 5\ 5\ 5}$ *pro quesito residuo unius libre, que sunt ex minutione septimi anni.*

Eine Begründung für sein Vorgehen gibt *Fibonacci* nicht.

Aus dem Text geht hervor, daß *Fibonacci* sieht, wie die Addition bei einem beliebigen Mischsystem funktioniert. Wenn nämlich die Summe der ‚Ziffern' des $i$ten Grades größer als 4 ist, so dividiert er die Summe durch die 5 des $i$ten Grades und nicht einfach nur durch 5.

Bevor *Fibonacci* diese Addition durchführen kann, muß er die $d_i$ berechnen. Er erklärt nicht, wie er $d_3$, $d_4$ und $d_5$ ausrechnet. Um $d_6$ auszurechnen muß er $\frac{6}{5}$ mit $\frac{2\ 3\ 3}{5\ 5\ 5}20$ multiplizieren. Dies erklärt er in aller Ausführlichkeit, stellvertretend für alle Multiplikationen dieser Art. Die 5 im Nenner von $\frac{6}{5}$ wird, wie könnte es anders sein, als Shiftoperator behandelt. Sie spielt darüberhinaus noch eine Rolle als Divisor bei der Bestimmung des ganzen Anteils der fraglichen Zahl. Wie das alles im einzelnen geschieht, wird der Leser ohne Mühe rekonstruieren können.

Der Vollständigkeit halber sei noch gesagt, wie es weitergeht, obgleich das Folgende mit den aufsteigenden Kettenbrüchen nichts mehr zu tun hat. Der Mieter kann also sechs Jahre in diesem Hause wohnen und noch ein bißchen länger, da am Ende des sechsten Jahres noch ein kleiner Rest des Kapitals vorhanden ist. Um die restliche Zeit auszurechnen, müssen wir zunächst $d_7$ berechnen. Diese Zahl ist das Produkt aus $\frac{6}{5}$ und $d_6$. Ausgerechnet ergibt sich $\frac{2\ 2\ 2\ 1\ 4}{5\ 5\ 5\ 5\ 5}29$. Dividiert man nun den noch verbliebenen Rest des Kapitals, dh. $\frac{3\ 2\ 2\ 3}{5\ 5\ 5\ 5} = \frac{438}{625}$ durch jene Zahl, so erhält man den Bruchteil des siebten Jahres, den der Mieter noch wohnen bleiben darf. Um diesen Bruchteil auszurechnen und in geläufigen Maßeinheiten auszudrücken, verwandelt *Fibonacci* das Jahr zunächst in Tage und dann in Stunden. Sein Jahr zählt 360 Tage und sein Tag 12 Stunden. Unser Bankjahr zählt wohl immer noch 360 Tage, unser Tag aber hat 24 Stunden. Dann ist $438 \cdot 360 \cdot 12 = 1892160$ auszurechnen, der für $d_7$ gefundene Ausdruck einzurichten und die gerade berechnete Zahl durch den Zähler dieses Bruches zu dividieren. Die dann gefundene Anzahl von Stunden ist schließlich in Tage und Stunden umzuwandeln. Herauskommen 8 Tage und $\frac{13}{29}5$ Stunden. Dies ist also die Zeit, die der Mieter im siebten Jahr im gemieteten Haus noch wohnen darf.

Der Leser wird sich sicherlich sofort überlegt haben, daß der Zins 20% *per annum* betrug. Nach *Schaube* (1906, S. 120) ist ist dies ein damals üblicher Zinssatz, wobei *Schaube* neben Verträgen der damaligen Zeit auch die gerade besprochene Stelle bei *Fibonacci* als Beleg angibt.

Eine weitere, hierher gehörige Aufgabe findet sich auf S. 313 ff. Sie ist hoch interessant und wird offenbar auch von *Fibonacci* als etwas Besonderes angesehen, da er sie mit großer Sorgfalt und Ausführlichkeit behandelt.

Jemand hat 100 Bizantiner. Er reist durch 12 Städte und gibt in jeder Stadt ein Zehntel seiner Barschaft aus. Wieviel verbleibt ihm nach Verlassen der zwölften Stadt? Nun, es bleiben ihm

$$100 \circ \frac{9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 9}{10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10}$$

Bizantiner. Dabei ist zu beachten, daß bei *Fibonacci* eine ganze Zahl gefolgt von einem Bruch bedeutet, daß diese beiden Zahlen zu multiplizieren sind. Ferner heißt der Kringel links vom Bruchstrich, daß die Zahlen im Zähler und auch die im Nenner miteinander zu multiplizieren sind. Um nun diese Zahl auszurechnen, berechnet *Fibonacci* erst $9^{12}$ zu

$$((9 \cdot 9) \cdot 9)^2)^2.$$

Sein Ergebnis ist 282439536481, zumindest steht dies im Text. Dieser Wert ist aber falsch. Richtig lautet das Ergebnis 282429536481 und mit dieser Zahl wird auch weitergerechnet. Sie ist noch mit 100 zu multiplizieren und durch alle Zehner, dh., durch $10^{12}$ zu dividieren. Wir wundern uns nicht zu erfahren, daß das Ergebnis gleich

$$\frac{1\ \ 8\ \ 4\ \ 6\ \ 3\ \ 5\ \ 9\ \ 2\ \ 4\ \ 2}{10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10}28$$

ist. *Fibonacci* verliert kein Wort über diesen Dezimalbruch und die simple Art seiner Entstehung. Bei dieser Rechnung macht sich zumindest für uns die Inkonsequenz in *Fibonaccis* Art, Zahlen zu schreiben, bemerkbar. Statt 28 müßte er 82 schreiben, um konsequent zu sein.

Nachdem *Fibonacci* weiß, was übrig bleibt, will er wissen, was insgesamt ausgegeben wurde. Dazu sind $\frac{1\ \ 8\ \ 4\ \ 6\ \ 3\ \ 5\ \ 9\ \ 2\ \ 4\ \ 2}{10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10}28$ von 100 zu subtrahieren. Zu diesem Zweck ziehe man zunächst einen Bruchstrich und schreibe unter ihn zehnmal die 10. Nach dieser Vorbereitung ist dann eine natürliche Zahl von einer natürlichen Zahl abzuziehen und die entstehenden Stellen von links beginnend über die Zehner des Bruches zu schreiben. Die Durchführung dieser Subtraktion wird Stelle für Stelle explizit durchgeführt und zwar nach der Methode, wie sie bei der Subtraktion natürlicher Zahlen gelehrt wurde. Das Ergebnis lautet:

$$\frac{9\ \ 1\ \ 5\ \ 3\ \ 6\ \ 4\ \ 0\ \ 7\ \ 5\ \ 7}{10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10\ 10}71.$$

Beim Rechnen ist an jeder Stelle ein Übertrag auszuführen.

Als nächstes will *Fibonacci* wissen, was in jeder einzelnen Stadt ausgegeben wurde. In der ersten Stadt wird der zehnte Teil von 100 also 10 ausgegeben. Es verbleiben 90. In der zweiten Stadt betragen die Ausgaben 9. Es verbleiben 81. Ein Zehntel von 81, die Ausgaben in der dritten Stadt, sind $\frac{1}{10}8$. Es verbleiben $\frac{9}{10}72$. Um ein Zehntel von $\frac{9}{10}72$ auszurechnen, benutzt *Fibonacci* zwei verschiedene Verfahren. Bei dem ersten richtet er den Bruch ein und wendet den Operator $\frac{1\ \ 0}{10\ 10}$ auf die Zahl 729 an. Das zweite Verfahren ist das, was bei der Einführung der aufsteigenden Kettenbrüche

Pate gestanden hat, nämlich einfach noch einmal durch 10 zu dividieren. Da 72 aber dezimal geschrieben ist, braucht man überhaupt nicht mehr zu rechnen. Man findet das Ergebnis unmittelbar zu $\frac{9}{10}\frac{2}{10}7$. Dies ist nun von der bis dahin noch vorhandenen Barschaft abzuziehen. Dies wird auf zwei Arten gemacht. Einmal nach der Art, die allen geläufig ist (***comunis omnium modus est***). Dies ist die Art, wie früher die Subtraktion von gemischten Zahlen gelehrt wurde: Einrichten, gleichnamig machen, usw. Die andere Art wird wie folgt beschrieben: Zunächst ist der Bruchstrich bei der 72 zu verlängern und eine zweite 10 darunter und eine 0 darüber zu schreiben. Dann haben wir also $\frac{0}{10}\frac{9}{10}72$ um $\frac{9}{10}\frac{2}{10}7$ zu vermindern. Wie das geschieht, ist uns, die wir von Kindesbeinen an an das Dezimalsystem gewöhnt wurden, völlig vertraut, so daß sich weitere Kommentare erübrigen. Bei der nächsten Stadt werden beide Verfahren noch einmal explizit vorgeführt, um dann bei den restlichen Städten nur noch die Ergebnisse anzugeben. Alle diese Zahlen werden schließlich noch einmal in einer Tabelle aufgeführt.

Nun wird diese Aufgabe in anderer Einkleidung noch einmal gestellt. Hier befinden sich 100 Fässer Wein in einem Keller. Von diesem Wein wird Monat für Monat ein Zehntel des noch Vorhandenen abgezogen. Es bleibt offen, ob der Wein getrunken oder anderweitig verwertet wurde. Gefragt ist, wieviel nach 12 Monaten noch im Keller ist. ***Fibonacci*** sagt, daß dies das gleiche Problem sei. Er übernimmt die Lösung der vorhergehenden Aufgabe und sagt, wenn man sie mit $(\frac{10}{9})^{12}$ multipliziere, so erhielte man 100.

***Gericke*** und ***Vogel*** haben die Thiende von ***Stevin*** (***Stevin*** 1965) übersetzt und kommentiert. Es ist dies das Buch, in dem zum ersten Mal die Dezimalbruchrechnung erklärt wird. ***Vogel*** zitiert in seinem Beitrag über die Vorläufer ***Stevins*** auch drei Stellen des ***liber abbaci***. Einmal, daß ***Fibonacci*** die Rechnung $780 \cdot 780$ durchführt, indem er 78 quadriert und dann zwei Nullen anhängt, zum andern, daß ***Fibonacci*** die Wurzel aus 7234 dadurch besser approximiert, daß er $\frac{1}{100} \cdot \sqrt{72340000}$ rechnet. Schließlich wird in der Fußnote 64 auf Seite 51 noch auf die Division von 1234 durch 20 hingewiesen, die wir oben ebenfalls erwähnten. Viel wesentlicher in diesem Zusammenhange erscheinen mir aber die gerade vorgestellten Aufgaben, die zeigen, daß ***Fibonacci*** zumindest die Addition und Subtraktion von Zahlen beherrscht, die sich als endliche Brüche in ein und derselben Mischbasis darstellen lassen, und daß er ferner eine solche Zahl mit natürlichen Zahlen und mit Stammbrüchen zu multiplizieren versteht. Von der ***Stevin***schen Idee, alle Zahlen als Dezimalbrüche darzustellen, findet sich im *liber abbaci* keine Spur. Dafür ist ***Fibonacci*** jedoch flexibler, indem er die unterschiedlichsten Mischbasen benutzt, die stets dem gerade vorliegenden Problem angepaßt sind. Alle Darstellungen von Zahlen, die in den ersten dreizehn Kapiteln vorkommen, sind finitär. Das heißt nicht, daß in den restlichen zwei Kapiteln auch infinitäre Darstellungen vorkämen, es heißt nur, daß die Lektüre dieser beiden Kapitel (27. 9. 1990) noch vor mir liegt, ich also mit den Einzelheiten dieser beiden Kapitel noch nicht vertraut bin.

In diesem Zusammenhang ist von Interesse, daß ***Stevin*** nur die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von endlichen Dezimalbrüchen lehrt, dabei führt nur die Division aus dem Bereich der endlichen Dezimalbrüche heraus. Um dies zu belegen, benutzt ***Stevin*** das Beispiel $0,4 : 0,03$. Er führt ein paar der Schritte durch und sagt dann: „Daraus ist ersichtlich, daß unendlich viele Dreien herauskommen werden, ohne daß sie einmal genau ausreichen. In solchem Falle mag man soweit gehen, wie es die Sache erfordert." (***Stevin*** 1965, S. 19.)

## Literatur

Boncompagni, Baldassare

— I scritti di Leonardo pisano. Vol. I, Il liber abbaci. Rom 1857

Cantor, Moritz

— Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Bd. II. Neudruck der zweiten Auflage, Leipzig 1913

Favaro, Antonio

— Notizie storiche sulle frazione continue. Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche 7, 451–502, 533–596 (1874)

Friedlein, G.

— Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7. bis 13. Jahrhundert. Erlangen 1869. Nachdruck Schaan, Lichtenstein 1982.

Juschkewitsch, A. P.

— Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Aus dem Russischen übersetzt von Viktor Ziegler. Leipzig 1964

Schaube, Adolf

— Handelsgeschichte der romanischen Völker des Mittelmeergebiets bis zum Ende der Kreuzzüge. München und Berlin 1906

Stevin, Simon

— De Thiende. Übersetzt und erläutert von Helmut Gericke und Kurt Vogel. Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften. Neue Folge, Band 1. Frankfurt am Main 1965

Vogel, Kurt

— Zur Geschichte der linearen Gleichungen mit mehreren Unbekannten. Deutsche Mathematik 5, 217–240 (1940)

— Fibonacci, Leonardo. In: Dictionary of Scientific Biography, vol. IV, 604–613. New York 1971

— Zur Geschichte der Stammbrüche und der aufsteigenden Kettenbrüche. Sudhoffs Archiv 66, 1–19 (1982)

**Anschrift des Autors**

FB Mathematik der Universität
Pfaffenbergstraße 95
D–6750 Kaiserslautern