

SUL TEOREMA DI SHIRSHOV E SUI SEMIGRUPPI RIPETITIVI

Giuseppe Pirillo

1. Teorema di Shirshov.

In [16], recentemente apparso negli Atti del Séminaire Lotharingien de Combinatoire, con riferimento a [17] e [18] è presentato sinteticamente il contenuto di [13] e di [14]; in particolare è richiamato il seguente risultato.

Teorema 1. Siano A un alfabeto finito e totalmente ordinato ed s una parola infinita su A . Allora esiste una parola bi-infinita t tale che i fattori di t sono fattori di s e t è periodica oppure ω -divisa.

Questo teorema dice solo che, data una parola infinita, da essa si può estrarre un'altra parola con certe proprietà.

Uno degli scopi di questa nota è di annunciare il seguente teorema che invece fornisce informazioni su ogni parola infinita a destra anche senza fare l'ipotesi di finitezza sull'alfabeto.

Teorema 2. Siano A un alfabeto, R un ordine totale su A , R^{-1} l'ordine inverso, $L(R)$ ed $L(R^{-1})$ gli ordini lessicografici indotti sul monoide libero A^* dagli ordini R ed R^{-1} rispettivamente. Allora ogni parola infinita a destra su A è

ultimamente periodica

oppure

ultimamente ω -divisa per l'ordine $L(R)$

oppure

ultimamente ω -divisa per l'ordine $L(R^{-1})$.

Osservazione. La dimostrazione di questo teorema richiede l'uso del teorema di Ramsey.

2. Semigruppi ripetitivi.

La nozione di semigruppo ripetitivo è stata introdotta da Justin che l'ha studiata in [3-10] ed in collaborazione con l'autore di questa nota in [11,12]. Si veda anche [2].

Usando il teorema di van der Waerden sulle progressioni aritmetiche, Justin in particolare ha dimostrato che il gruppo additivo degli interi è

ripetitivo e pertanto la ripetitività non è condizione di finitezza per semigrupperi finitamente generati [8].

Alcune condizioni più forti della ripetitività ("forte ripetitività" [12] e "uniforme ripetitività" [15], per esempio) assicurano invece la finitezza di un semigruppero finitamente generato.

Un altro scopo di questa nota è di annunciare i seguenti risultati.

Teorema 3. Siano S e T due semigrupperi finitamente generati e sia ripetitivo il prodotto diretto $S \times T$. Allora almeno uno dei due semigrupperi S e T è finito.

Teorema 4. Sia S un semigruppero finitamente generato. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

- 1) S è finito;
- 2) il prodotto diretto $S \times S$ è ripetitivo.

Osservazione. I Teoremi 3 e 4 sono dimostrati usando un risultato di [1].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. F. M. DEKKING, Strongly non repetitive sequences and progression-free sets, *J. Comb. Theory, A*, 27, 181-185 (1979).
2. M. LOTHAIRE, *Combinatorics on words*, Addison-Wesley, 1983.
3. J. JUSTIN, Propriétés combinatoires de certains semigrupperi, *C.R. Acad. Sci. Paris, A*, 269, 1113-1115 (1969).
4. J. JUSTIN, Semigrupperi à générations bornées, in "Problèmes Mathématiques de la Théorie des Automates", Séminaire Schützenberger, Lentin, Nivat 69/70, Institut Henri Poincaré, Paris, exposé n. 7, 10 p. (1970).
5. J. JUSTIN, Sur une Construction de Bruck et Reilly, *Semigroup Forum*, 3, 148-155 (1971).
6. J. JUSTIN, Groupes et semigrupperi à croissance linéaire, *C. R. Acad. Sci. Paris, A*, 273, 212-214 (1971).
7. J. JUSTIN, Semigrupperi répétitifs in "Logique et Automates", Séminaires I.R.I.A., Institut de Recherche d'Informatique et d'Automatique, Le Chesnay, France, 101-108 (1971).
8. J. JUSTIN, Généralisation du théorème de van der Waerden sur les semigrupperi répétitifs, *J. Comb. Theory*, 12, 357-367 (1972).

- 9.J. JUSTIN, Characterization of repetitive commutative semigroups, *J. Algebra* 21 , 87-90 (1972).
10. J. JUSTIN, Groupes linéaires répétitifs, *C. R. Acad. Sci. Paris, I*, 292, 349-350 (1981).
- 11.J. JUSTIN e G. PIRILLO, Two combinatorial properties of partitions of the free semigroup into finitely many parts, *Discrete Mathematics*, 52, 299-303 (1984).
12. J. JUSTIN e G. PIRILLO, On a Natural Extension of Jacob's Ranks, *J. Comb. Theory*, 43, 205-218 (1986).
13. J. JUSTIN e G. PIRILLO, Shirshov's theorem and ω -permutability of semigroups, *Advances in Mathematics*, in corso di stampa.
14. J. JUSTIN e G. PIRILLO, Théorème de Shirshov et ω -permutabilité des semigroupes, *LITP- Univ. Paris VII*, 89-22 (marzo 1989).
15. J. JUSTIN , G. PIRILLO e S. VARRICCHIO, Unavoidable regularities and finiteness conditions for semigroups, *Proceedings of the Third Italian Conference "Theoretical Computer Science"*, Mantova, 2-4 november 1989, Edited by Bertoni-Böhm-Miglioli, World Scientific (1989).
16. G. PIRILLO, Su alcune recenti generalizzazioni del teorema di Shirshov, *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 22^e Session, Hesselberg, Gerolfingen, 28-30 septembre 1989.
17. C. REUTENAUER, Mots de Lyndon et Théorème de Shirshov, *Ann. Sc. Math.*, 10, 237-245 (1986).
18. S. VARRICCHIO, Factorizations of Free Monoids and Unavoidable Regularities, *Theoret. Comput. Sci.*, 73, 81-89 (1990).

Giuseppe Pirillo
 IAGA-IAMI (CNR)
 viale Morgagni 67/A
 50134 FIRENZE
 ITALIA

