Die Rendezvous-Zahl eines endlichen, zusammenhängenden Graphen

Wolf, Salzburg

Im Jahr 1964 entdeckte O. Gross folgendes erstaunliche geometrische Resultat:

<u>Theorem</u> (O. Gross)
Sei (X,d) ein kompakter, zusammenhängender, metrischer Raum. Dann gibt es genau eine positive reelle Zahl $r(X)$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ und zu beliebigen Punkten (nicht unbedingt verschieden) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in X, gibt es ein $x \in X$, sodaß gilt:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x_i, x) = r(X).$$

Beweis: Siehe [2] oder [5].

<u>Definition 1</u> Die in diesem Theorem eindeutig bestimmte positive reelle Zahl $r(X)$ heißt die <u>Rendezvous-Zahl</u> des kompakten, zusammenhängenden, metrischen Raumes X. Der Ausdruck $m(X) := \frac{r(X)}{D(X)}$ heißt <u>Magic-number</u> des kompakten, metrischen Raumes X, wobei $D(X)$ den Durchmesser von X bezeichnet.
Dazu folgende

<u>Bemerkung 1</u> a) Aus dem Mini-Max Theorem (siehe [1]) folgt:

$$r(X) = \inf_{n, x_1, \ldots, x_n \in X} \max_{y \in X} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y) =$$
$$= \sup_{n, x_1, \ldots, x_n \in X} \min_{y \in X} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y) .$$

Zum Beweis siehe [5].

b) Es gilt:

$$\frac{1}{2} \le m(X) < 1.$$

Zum Beweis siehe Theorem 2 in [2].

Sei nun $G = (V,E)$ ein endlicher, zusammenhängender Graph, ausgestattet mit seiner natürlichen Metrik d: Seien x,y zwei Ecken von G: $d(x,y) :=$ Minimum aller Weglängen von x nach y, wobei $d(x,y) = 1 \Longleftrightarrow x$ benachbart zu y.

(G,d) stellt einen kompakten, metrischen Raum dar und in Anlehnung an Bemerkung 1.a.) wählen wir folgende

<u>Definition 2</u> Sei $G = (V,E)$ ein endlicher, zusammenhängender Graph, ausgestattet mit seiner natürlichen Metrik d. $D(G)$ bezeichnet den Durchmesser von G. Der Ausdruck

$$r(G) := \inf_{k,x_1,\dots,x_k \in V} \max_{y\in V} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} d(x_i,y)$$

heißt die <u>Rendezvous-Zahl</u> von G.

$$m(G) := \frac{r(G)}{D(G)}$$ heißt die <u>Magic-number</u> von G.

<u>Bemerkung 2</u>

Sei $V = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ die Eckenmenge von G. Aus dem Mini-Max Theorem (siehe [1]) und da $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht liegt, folgt:

$$r(G) = \min_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1}} \max_{y\in V} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d(x_i,y) =$$

$$= \max_{\substack{\alpha_1,\dots,\alpha_n \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1}} \min_{y\in V} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i d(x_i,y).$$

<u>Bemerkung 3</u> Es gilt:

$$\frac{1}{2} \leq m(G) \leq 1 - \frac{1}{n} \quad (n = |V|).$$

<u>*Beweis:*</u> Seien $x_0,y_0 \in V$ so, daß: $D(G) = d(x_0,y_0)$

$$\Longrightarrow d(x_0,y_0) \leq d(x_0,y) + d(y_0,y) \qquad \forall\, y \in V.$$

$$\Longrightarrow \frac{D(G)}{2} \leq \min_{y\in V} \frac{d(x_0,y)+d(y_0,y)}{2} \leq r(G)$$

(nach Bemerkung 2)

$$\Longrightarrow m(G) \geq \frac{1}{2}.$$

Weiters gilt:

$$r(G) \le \max_{y \in V} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x_i, y) \le \frac{n-1}{n} D(G) \qquad \text{(nach Bemerkung 2)}$$

$$\Longrightarrow \quad m(G) \le 1 - \frac{1}{n}$$

□

Es stellt sich nun die Frage, ob mit $r(G)$ eine metrische Eigenschaft von G verbunden ist. (Ähnlich wie $r(X)$ mit X im anfangs genannten Theorem von O. Gross). Da G diskreter Natur ist, erhalten wir eines der Aussage dieses Theorems verwandte Eigenschaft von G:

Proposition 1

Zu je endlich vielen Ecken $x_1, x_2, \ldots, x_k \in V$ (nicht unbedingt verschieden) gibt es eine Ecke $y \in V$ mit:

$$\left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} d(x_i, y) - r(G) \right| \le \frac{1}{2}.$$

Beweis: siehe [4]

Das nächste Ergebnis beschäftigt sich mit der Berechnung der Magic-number einiger bekannter Graphen:

Proposition 2 Es gilt:

a) $m(K_n) = 1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

b) $m(C_n) = \begin{cases} 1/2 & n \text{ gerade} \\ (1/2).\frac{n+1}{n} & n \text{ ungerade} \end{cases}$

c) $m(K_{n,m}) = \dfrac{3nm-4n-4m+4}{2n(m-2)+2m(n-2)} \qquad \forall\, n,m > 2$

und

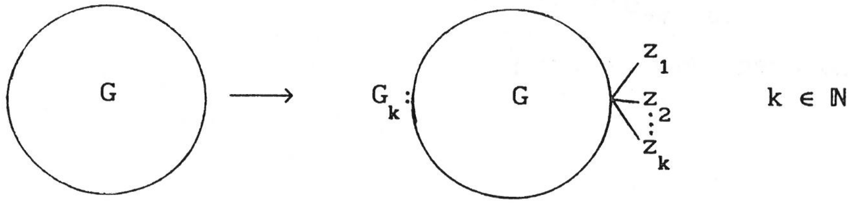
$m(K_{n,m}) \le \frac{3}{4} \qquad \forall\, n,m \in N.$

d) $m(T) = \frac{1}{2}, \quad T$ Baum.

Wobei K_n den vollständigen Graphen mit n Ecken, $K_{n,m}$ den vollständigen bipartiten Graphen mit $n+m$ Ecken und C_n den Kreis mit n Ecken bezeichnet.

Beweis: siehe [4]

Das folgende Resultat studiert das Änderungsverhalten der Magicnumber, wenn man an eine Ecke von G endlich viele Ecken (welche beliebig verbunden werden können) anhängt:



Es gilt:

Proposition 3 $\quad r(G) \le r(G_k) \le r(G) + \frac{1}{2}, \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}.$

Beweis: siehe [4]

Zu dieser Proposition folgendes

Korollar 1 a) $m(G_k) \ge m(G)$, wenn $D(G_k) = D(G)$

b) $m(G_k) \le m(G)$, wenn $D(G_k) = D(G) + 1$.

Beweis: siehe [4]

Definieren wir für zwei endliche, zusammenhängende Graphen G_1 und G_2 ihr herkömmliches Produkt $G_1 \times G_2$:

$$(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow \begin{array}{l} x = x' \text{ und } y \sim y' \\ \quad\text{oder} \\ x \sim x' \text{ und } y = y', \end{array}$$

dann gilt folgende Beziehung:

Proposition 4 Es gilt:

$$r(G_1 \times G_2) = r(G_1) + r(G_2)$$

Beweis: siehe [4]

Als Folgerung dazu erhalten wir das

Korollar 2 Zu jeder rationalen Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ gibt es einen endlichen, zusammenhängenden Graphen G mit: $m(G) = \alpha$.

(Dies ist eine Art "rationales Analogon" für Graphen zur Proposition auf Seite 277 in [3]).

Beweis: siehe [4]

Abschließend möchte ich noch die Frage aufwerfen, ob sich die Abschätzung $m(G) \leq 1 - \frac{1}{n}$ $(n = |V|)$ nicht vielleicht in folgender Weise verbessern läßt:

$$m(G) \leq 1 - \frac{1}{s+1},$$ wobei s den maximalen Eckengrad von G bezeichnet.

Zu dieser Frage fand ich vor kurzem folgendes Gegenbeispiel: Betrachten wir den Moore-Graphen vom Typ (7,2), d.h. dieser Graph hat Durchmesser 2 und ist regulär vom Grad 7 und für die Eckenanzahl gilt folgende Formel:

$$n(G) = 1 + 7 \cdot \frac{6^2-1}{5}$$ (siehe Seite 114 in [6]).

Daraus folgt $n(G) = 50$. Da dieser Graph regulär ist und Durchmesser 2 hat, folgt:

$$\frac{1}{50} \sum_{i=1}^{50} d(x_i, x) = \frac{7.1+(50-7-1).2}{50} = \frac{91}{50},$$

für alle Ecken x, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_{50}$ die Ecken dieses Moore-Graphen bezeichnen.

Daraus folgt nun, daß die Magic-number dieses Moore-Graphen 91/100 beträgt, wobei 91/100 > 7/8 ist.

Literaturverzeichnis

[1] Burger, E.: Einführung in die Theorie der Spiele
Walter de Gruyter & Co. Berlin 1966.

[2] Gross, O.: The Rendezvous Value of a Metric Space.
Advances in game theory, 49-53 (Annals of Mathematics Studies, 52. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1964).

[3] Stadje, W.: A property of compact connected spaces. Arch. Math. Vol. 36 (1981) Birkhäuser Verlag, Basel.

[4] Wolf, R.: Die Rendezvous-Zahl eines kompakten, zusammenhängenden, metrischen Raumes. Dissertation (Salzburg, 1990).

[5] Yost, D.: Average Distances in Compact Connected Spaces.
Bull. Austr. Math. Soc. Vol. 26 (1982), 331-342.

[6] Walther,H./H.-J. Voss: Über Kreise in Graphen
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1974.

Reinhard Wolf

Institut für Mathematik
Universität Salzburg
Hellbrunnerstrasse 34
A-5020 Salzburg / Austria