Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 1991, 476/S-26
Actes 26^{e} Séminaire Lotharingien, p. 43-48

Ein Evolutionsspiel im Partitionengraph

von

Arnulf Hirschelmann

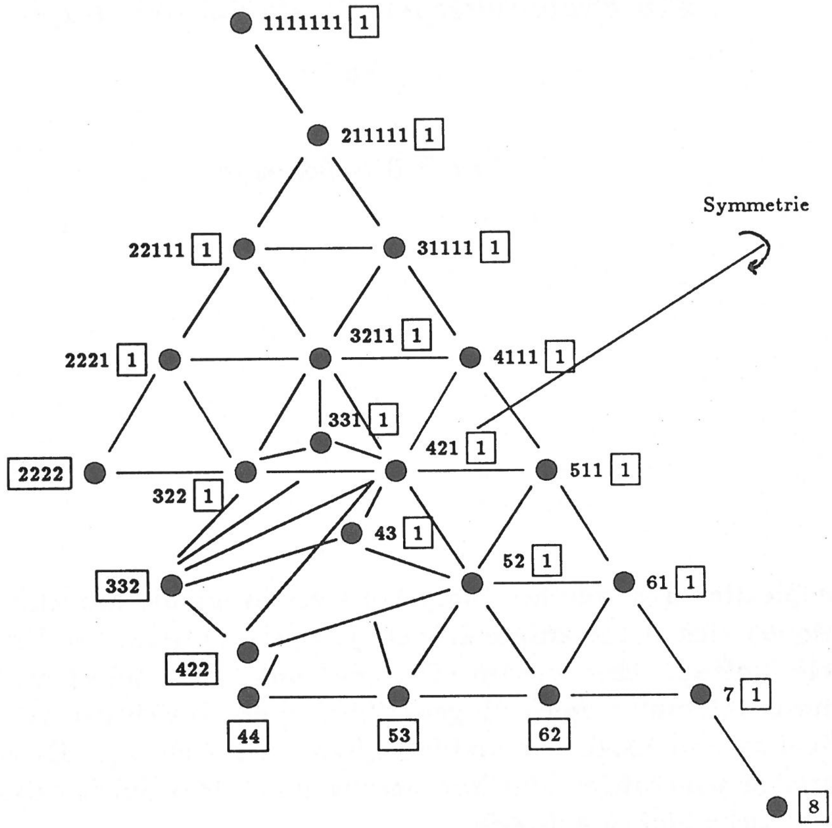
Die Komplexität dynamischer Biosysteme erschwert die Modellbildung. Jedoch Spiele eignen sich dafür ausgezeichnet; ja nach schrittweiser Verfeinerung, was die Spiele umfangreicher werden läßt, erscheint Leben selbst als Spiel. Bei der Betrachtung relevanter Spiele [Eigen/Winkler] ergab sich der Wunsch nach Vereinheitlichung und möglicher mathematischer Darstellung. Es zeigte sich, daß nach Verallgemeinerungen und Normierungen nur zwei Spiele existieren, die neue kombinatorische Fragen aufwerfen.

Die Elemente der beiden Spiele bestehen ohne Einschränkung der Allgemeinheit aus n Kugeln in n Urnen mit Marken zur Identifizierung, z.B. durch Ziffern oder Farben. Die Regeln bestimmen für einen Spielschritt jeweils zwei Wahlvorgänge: stets wird zuerst eine Kugel gewählt, die entweder zu einer weiter gewählten Kugel (es kann zufällig dieselbe sein) in die zugehörige Urne oder in eine direkt gewählte Urne gelegt wird. Je nachdem ist definiert der Spielschritt der Selektion oder Entropie: $1K \leadsto 2K$, bzw. $1K \leadsto 2U$.

Es gilt ferner die Vereinbarung, nach jedem Spielschritt die Urnen ihrem Kugelinhalt gemäß zu ordnen, was eine Permutation der Urnen bedeutet, aber auch einen Identitätsverlust. Gleichartige Spielschritte definieren die Spiele *Selektion* oder ***Entropie***.

Wichtig ist die Beobachtung, daß die übrigen Spiele $1U \leadsto 2K$ und $1U \leadsto 2U$ wieder äquivalent zu Selektion bzw. Entropie sind, wodurch deren Universalität bewiesen wird.

Stochastische Berechnungen [Dahr] liefern für beide Spiele klare Vorzugsrichtungen. Dazu wird die Tatsache benutzt, daß die Kugelverteilung in den Urnen genau einer Partition von n entspricht. Die Zustände der Spiele durchlaufen im Prinzip die Menge der Partitionen.



Die Partitionen mit der Anzahl $p(n)$ [Gupta, Andrews] sind deshalb im Partitionengraph angeordnet, der eine gewisse Ähnlichkeit zu dem von Ruch [Lit.] aufweist. Jener Graph ist bis $n = 6$ planar, ab $n = 7$ nicht mehr. Es herrscht eine ausgeprägte Symmetrie.

Durch ihre entgegengesetzten Vorzugsrichtungen sind beide Spiele fast komplementär und zur Simulation extremer Naturvorgänge geeignet. Stationäre Zustände in der Natur werden durch das Zusammenspiel der Selektion und Entropie realisiert, was als Evolutionsspiel definiert wird. Wie das Problem der Selbstorganisation ist es allgemein ungelöst, immerhin lassen sich einige Spezialfälle untersuchen [Dahr, Hirschelmann]. Die Endsituationen der beiden Spiele sind oben im Graphen für die Entropie (pendeln um das absolute Gleichgewicht) und entsprechend unten für die Selektion (dieses Spiel kann nur in einer Richtung verlaufen, da einmal leer gewordene Urnen "kugelsicher" sind. Computer-Berechnungen zeigen, daß das Spiel gegen Ende immer langsamer wird). Ein stationärer Zustand bedeutet im Graphen, daß das Zusammenspiel um eine "innere" Partition kreist.

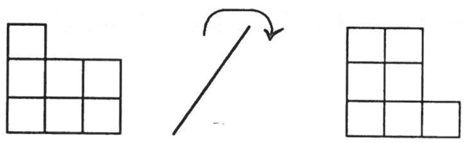
Satz $\Gamma_{n+1} = \Gamma^{(1)}_{n+1} \cup \Gamma^{(2)}_{n+1}$ mit $\Gamma^{(1)}_{n+1} \cong \Gamma_n$ und $\Gamma^{(2)}_{n+1} = \{\sum_{i=2}^{n+1} a_i i \mid a_i \geq 0\}$

Einbettung eines Graphen für die Partition n in den nächsten für $n+1$:

1) Isomorphe Einbettung durch Hinzufügen einer Urne mit einer Kugel.
2) Extension des Graphen durch Hinzufügen einer Kugel in eine bereits besetzte Urne, so daß in jeder Urne mindestens 2 Kugeln liegen.

Dabei heißt 1) Hinzufügen einer 1 als Summand bei der Partition; 2) entsteht durch Addition einer Eins auf einen bereits vorhandenen Summanden, so daß dann der kleinste Summand stets größer als 1 ist.

Bemerkenswert ist, daß die Einbettung unsymmetrisch erfolgt, indem durch die Extension ein Saum am Graphen angesetzt wird, alles insgesamt symmetrisch bleibt. Diese Symmetrie ist Folge des Satzes von Euler



und der Anordnung der Young-Tableaux im Graphen: die Anzahl der Partitionen von n in k Summanden ist die gleiche wie diejenige mit dem größten Teil k.

Zur Abzählung der Knoten im Graphen werden wie üblich die Anzahl der Partitionen $P(n,m)$ benutzt, die mindestens ein m als kleinsten Summanden besitzen. Ferner wird mit $p(n,m)$ die Anzahl der Partitionen mit genau m Summanden bezeichnet. Es gelten folgende Rekurrenzrelationen

$$\begin{aligned} P(n,k) &= P(n-k,k) + P(n+1,k+1), \\ p(n,k) &= p(n-k,k) + p(n-1,k-1). \end{aligned}$$

Die letzte Identität ergibt sich aus

$$p(n,k) = p(n-k,0) + p(n-k,1) + p(n-k,2) + \cdots + p(n-k,k)$$

mit

$$\begin{aligned} p(0,0) &= 1 \\ p(n,0) &= 0,\ n \geq 1 \\ p(n,k) &= 0,\ 0 < n < k \end{aligned}$$

und der Substitution von n nach $n-1$ bzw. k in $k-1$, was zur Folge hat

$$p(n-1,k-1) = p(n-k,0) + p(n-k,1) + p(n-k,2) + \cdots + p(n-k,k).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} p(n) &= P(n+1,1), \\ p(n+1) &= P(n+1,1) + P(n+2,2) + P(n+1,3) + \cdots , \end{aligned}$$

also

$$p(n+1) = p(n) + P(n+3,2).$$

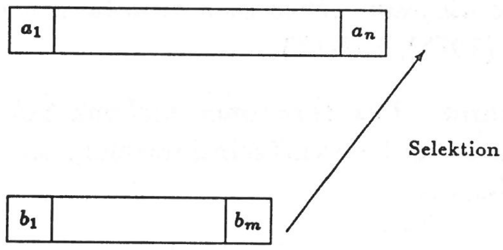
Die letzte Form berechnet die Extension, indem eine Formel von Gupta herangezogen wird

$$\begin{aligned} P(n,k) &= \sum_{j=1}^{[\frac{n}{k}]} p(n-jk+j-1,j-1). \\ P(n+3,2) &= \sum_{j=0}^{[\frac{n+3}{2}]} p(n+2-j,j-1) = \sum_{j=0}^{[\frac{n+3}{2}]} p(n+1-(j-1),j-1) \\ &= \sum_{j=1}^{[\frac{n+3}{2}]} p(n+1-j,j) = p(n,1) + \sum_{j=2}^{[\frac{n+1}{2}]} p(n+1-j,j) \\ &= 1 + \sum_{j=2}^{[\frac{n+1}{2}]} p(n+1-j,j) = 1 + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \sum_{j=2}^{[\frac{n+1}{2}]} p(n+1-j,j) \\ p(n+1-j,j) &= p(n+1-m,m) = \sum_{k=1}^{[\frac{n-m}{2}]} p(n-mk,m-1) \end{aligned}$$

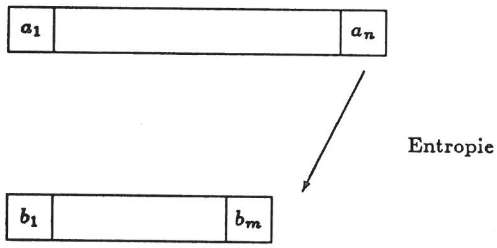
$$\boxed{P(n+3,2) = 1 + \left[\frac{n-1}{2}\right] + \sum_{j=3}^{[\frac{n+1}{2}]} \sum_{k=1}^{[\frac{n-j}{j}]} p(n-jk,j-1)}$$

Durch die letzte Doppelsumme wird die Rechnung, wie angestrebt, stark reduziert. Leider ist sie für große n immer noch sehr aufwendig. Offensichtlich strebt für große n das Verhältnis zwischen Einbettung und Extension einem konstanten Wert > 0 zu.

Außer der genannten Symmetrie gibt es im Graphen keinen Automorphismus, d.h. der Graph ist sehr starr gegenüber Gruppenoperationen. Das Problem ist nämlich, die Spielschritte algebraisch zu fassen, also ein Kästchen in einem bestimmten Tableau unabhängig von seinem Inhalt zu verändern. Bisher gelingt das nur unter Berücksichtigung des Inhalts:



$$(a_1 b_m b_1)(a_1 ... a_n)(b_1 ... b_m) = (a_1 ... a_n b_m)(b_1 ... b_{m-1}),$$



$$(a_1 b_1 a_n)(a_1 ... a_n)(b_1 ... b_m) = (a_1 ... a_{n-1})(b_1 ... b_m a_n).$$

Die typische Operation ist der Dreierzyklus. J. Riguet (Paris) wies auf die Möglichkeit hin, die Operation auch frei vom Inhalt zu beschreiben.

Literatur

M. Eigen/R. Winkler , *Das Spiel.* Piper (1985), München.

M. Dahr , *Modellierung Dynamischer Systeme im Fall der Synaptischen Transmission.* Informatik Berichte, Universiät Bonn, Nr. 69, Februar 1989.

H. Gupta , *Tables of Partitions.* Indian Math. Soc. (1939), Madras.

G.E. Andrews , *The theory of partitions.* Addison-Wesley Publ. Comp. (1976).

E. Ruch , *The diagram lattice as a structural principal.* Theoret. chim. Acta, Berlin 38 (1975), 167-183.

A. Hirschelmann , *Das Zusammenspiel von Selektion und Entropie.* Interdisziplinäre Hirn- und Bewußtseinsforschung an der Universität Bonn; Symposium 1988.

ADDRESS:
A.Hirschelmann
Merler Allee 25
5300 Bonn 1
Germany