

Sur le nombre de graphes connexes fixés par l'action d'une permutation donnée.

Ivan Constantineau
IMMD1, Universität Erlangen-Nürnberg.

Résumé. Pour tout entier $n \geq 0$, soit $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ si $n > 0$ et $[0] = \emptyset$. Soit β une permutation de $[n]$. Dans cet article, nous calculons, de manière explicite (sous forme close) le nombre de graphes (simples) connexes sur $[n]$ laissés fixes par β .

Abstract. For any integer $n \geq 0$, let $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ if $n > 0$ and $[0] = \emptyset$. Let β be any permutation of $[n]$. In this paper, we compute explicitly (obtaining a closed formula) the number of connected (simple) graphs on $[n]$ fixed by β .

§ 0. Introduction

L'énumération des graphes connexes n'est pas un problème nouveau. Plusieurs auteurs y ont apporté leur contribution. Habituellement, pour y parvenir, on utilise soit les séries génératrices et le logarithme formel, soit une récurrence qui tient au fait qu'en pointant un graphe, on pointe en même temps une composante connexe du graphe.

L'étude de ces deux méthodes peut se ramener à celle de l'équation combinatoire d'espèces de structures [voir 14] suivante:

$$Grs = Exp(Grx), \quad (1)$$

où Grs est l'espèce des graphes (simples) et Grx la sous-espèce des graphes (simples) connexes. En effet, la première méthode (dûe à Riddell — voir [8,18]), peut être retrouvée simplement en passant aux cardinalités des deux membres de (1). Pour la seconde (dûe à Gilbert [7]), il s'agit (en termes d'espèces) d'abord de pointer les deux membres de (1), puis de passer ensuite aux cardinalités des expressions obtenues. Après quelques manipulations élémentaires, on trouve aisément la récurrence de Gilbert.

L'idée d'utiliser le logarithme formel pour lier les graphes à leurs composantes connexes s'étend, comme l'a montré Robinson dans [18], au niveau des polynômes (et séries) indicateurs de cycles. En effet, Robinson parvient, à l'aide d'une formule dûe à Cadogan [1], à exprimer les polynômes indicateurs de cycles des graphes simples connexes en termes de ceux des graphes simples.

Le travail de Robinson a été généralisé par G. Labelle [11] qui calcule, pour toute espèce A telle que, pour une certaine espèce B , $A = Exp(B)$, la série indicatrice de cycles Z_B de l'espèce B en termes de celle de A . Plus

précisément, G.Labelle obtient, *analytiquement*, la formule suivante:

$$Z_B = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log Z_A(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots),$$

où, pour toute espèce F , la série indicatrice de F est définie comme suit:

$$Z_F = Z_F(x_1, x_2, \dots) = \sum_{\beta_1 + 2\beta_2 + \dots < \infty} \text{fix}_F(\beta_1, \beta_2, \dots) \frac{x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots}{1^{\beta_1} \beta_1! 2^{\beta_2} \beta_2! \dots},$$

les coefficients $\text{fix}_F(\beta_1, \beta_2, \dots)$ étant les nombres de F -structures sur $[n]$ laissées fixes par une permutation de $[n]$ ayant, pour tout i , β_i cycles de longueur i .

Tous les résultats que nous venons de présenter concernant l'énumération de graphes connexes dépendent et se ramènent plus ou moins directement à l'équation combinatoire (1). Dans le présent article nous abordons cette énumération d'un tout autre point de vue.

Nous trouvons une formule close du nombre de graphes connexes (simples) laissés fixes par une permutation β de $[n]$ (arbitraire) en *construisant* ces derniers graphes. Pour y parvenir, nous utilisons une méthode que nous avons appelée l'auto-similarité dont nous donnons un aperçu dans la section 1. Cette formule explicite est basée sur un algorithme qui permet de générer tous les graphes connexes sur un ensemble fini arbitraire. Nous présentons cet algorithme à la section 2. La section 3 est consacrée au calcul final de la formule.

§ 1. Le principe d'auto-similarité

Ce que nous avons désigné par *auto-similarité* est une méthode générale servant à dénombrer des structures combinatoires laissées fixes par une permutation donnée de l'ensemble sous-jacent à ces structures.

Désignons par Rel l'espèce des relations binaires. Pour tout ensemble fini U , on a que $Rel[U] = \{s | s \subseteq U \times U\}$. De plus si U et V sont des ensembles finis, $f : U \rightarrow V$ une bijection et $s \in Rel[U]$ alors la bijection $Rel[f] : Rel[U] \rightarrow Rel[V]$ est définie, pour tout s dans $Rel[U]$, par la règle suivante:

$$(f(x_1), f(x_2)) \in Rel[f](s) \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in s. \quad (2)$$

Cette règle est appelée le *transport des Rel-structures le long de f*. Lorsque $U = V$, le groupe symétrique sur U , dénoté $\Sigma(U)$, agit sur $Rel[U]$ par transport de structures. Pour toute $\beta \in \Sigma(U)$, on désigne par $Fix_{Rel}(\beta)$ l'ensemble des Rel -structures laissées fixes par β . On pose aussi $\text{fix}_{Rel}(\beta) =$

$|Fix_{Rel}(\beta)|$. Il est facile de montrer que $fix_{Rel}(\beta)$ ne dépend que du type cyclique $(\beta_1, \beta_2, \dots)$ de la permutation β . Notons que tout ce que nous venons d'énoncer au sujet de l'espèce Rel s'applique à toute sous-espèce F de Rel , $F \subseteq Rel$.

Soit $n \geq 0$ et β une permutation de $[n]$. Dénotons par $C(\beta)$ l'ensemble des cycles sous-jacents à β . Toute relation $s \in Rel[n]$ induit une relation quotient s/β sur $C(\beta)$ définie par la règle suivante: $\forall (c, d) \in C(\beta) \times C(\beta)$,

$$(c, d) \in s/\beta \Leftrightarrow \exists x \in c, \exists y \in d \text{ tels que } (x, y) \in s. \quad (3)$$

En général, la relation s/β obtenue de cette manière présente peu d'intérêt. Par contre, dès que la structure s est un membre de $Fix_{Rel}(\beta)$, la relation s/β se "régularise" et, ce qui est remarquable, hérite alors de certaines propriétés de s .

On a, par exemple, pour toute permutation β et toute relation s fixée par β :

1. s symétrique $\Rightarrow s/\beta$ symétrique;
2. s fonctionnelle $\Rightarrow s/\beta$ fonctionnelle;
3. s arborescente $\Rightarrow s/\beta$ arborescente;
4. s est une permutation $\Rightarrow s/\beta$ est une permutation;
5. s connexe $\Rightarrow s/\beta$ connexe;
6. ...et ainsi de suite.

Pour toute espèce $F \subseteq Rel$, on dénote par $Q_F(\beta)$ l'ensemble des structures quotients obtenues de $Fix_F(\beta)$ par la règle donnée en (3) et par $\Psi_{F,\beta} : Fix_F(\beta) \rightarrow Q_F(\beta)$ la surjection définie, pour toute s dans $Fix_F(\beta)$, par $\Psi_{F,\beta}(s) = s/\beta$. Si on dénote par Sym, End, Con, Per , respectivement les espèces *Relations Symétriques, Endofonctions, Arborescences, Permutations*, on peut réécrire les 4 premières implications de la liste précédente en termes d'espèces de structures pour obtenir:

1. $Q_{Sym}(\beta) \subseteq Sym[C(\beta)];$
2. $Q_{End}(\beta) \subseteq End[C(\beta)];$
3. $Q_{Con}(\beta) \subseteq Con[C(\beta)];$
4. $Q_{Per}(\beta) \subseteq Per[C(\beta)].$

Cette "auto-similarité" entre les structures s fixées par β et les structures quotients correspondantes s/β s'explique en partie par le fait que, pour toute structure $s \in Fix_{Rel}(\beta)$ et pour entier k , on a

$$(x, y) \in s \Rightarrow (\beta^k(x), \beta^k(y)) \in s. \quad (4)$$

En effet, cette dernière implication entraîne que la première coupe de s suivant x , $\langle x|s \rangle = \{z : (x, z) \in s\}$ (la coupe en première composante), détermine entièrement la première coupe de s suivant chaque point du cycle de

β qui contient x . Une relation fixée par une permutation β est donc entièrement déterminée quand, pour tout cycle c de $C(\beta)$ la première coupe d'un seul point de c a été déterminée.

Soit $F \subseteq Rel$. En général, plusieurs structures s_1, s_2, \dots , dans $Fix_F(\beta)$ peuvent induire la même structure quotient $q = \Psi_{F,\beta}(s_1) = \Psi_{F,\beta}(s_2) = \dots$. La régularité intrinsèque de ces structures fait qu'il est possible *toutes* de les retrouver (de même que leur nombre) à partir de q en ajoutant de l'information pertinente. Ainsi pour calculer $fix_F(\beta)$, on peut procéder d'abord en construisant l'ensemble $Q_F(\beta)$ puis en sommant ensuite les cardinalités des fibres de $\Psi_{F,\beta}$. On obtient la formule suivante:

$$fix_F(\beta) = \sum_{q \in Q_F(\beta)} \left| \Psi_{F,\beta}^{-1}(q) \right|. \quad (5)$$

Le paragraphe précédent donne l'essentiel de notre méthode de dénombrement. Nous l'avons appelée "auto-similarité" parce que la grande majorité des espèces F que nous avons traitées jusqu'à maintenant sont telles que $Q_F(\beta) \subseteq F[C(\beta)]$, comme on a pu en voir quelques exemples plus haut. On peut tenter de formuler, en termes d'espèces, un *principe* un peu plus rigoureux:

1.1 Principe d'autosimilarité. Soit F une sous-espèce de l'espèce Rel des relations. Nous disons que F est *auto-similaire* ssi pour tout entier $n \geq 0$ et toute permutation β de $[n]$, il existe un ensemble de couples (δ, Δ) que l'on dénote $Sim(F, \beta)$, tel que:

1. Il existe une bijection $\Phi_{F,\beta}$ de $Fix_F(\beta)$ à $Sim(F, \beta)$,

$$\Phi_{F,\beta} : Fix_F(\beta) \leftrightarrow Sim(F, \beta);$$

2. Si $\Phi_{F,\beta}(s) = (\delta, \Delta)$ alors

- a. $\delta = \Psi_{F,\beta}(s)$;
- b. $\delta \in F[C(\beta)]$;
- c. Δ est une construction sur δ qui permet de retrouver la structure s sans ambiguïté.

Pour calculer $fix_F(\beta)$ il suffit donc de construire $Sim(F, \beta)$ et d'en trouver la cardinalité. C'est ce en quoi consiste le principe.

Remarquons maintenant qu'il y a de nombreux contre-exemples d'espèces qui ne sont pas telles que $Q_F(\beta) \subseteq F[C(\beta)]$, c'est-à-dire qui ne remplissent pas la condition 2.b du principe que nous venons d'énoncer. En termes de relations, cela signifie que la relation quotient s/β n'hérite pas, en général, de

toutes les propriétés de s . Par exemple si s est une involution *sans point fixe* laissée fixe par β alors s/β est, en général une involution (qui *peut avoir des points fixes*). Dans le même ordre d'idées, une relation symétrique *anti-réflexive* g sur $[n]$ (un graphe simple) fixée par β peut induire une relation quotient g/β symétrique et *réflexive* (graphes simples avec boucles). Nous dénoterons cette dernière espèce des graphes simples avec boucles par Grb .

1.2 Exemple. Nous illustrons maintenant les vertus énumératives de cette auto-similarité avec l'exemple de l'espèce Per des *permutations*.

Soit β une permutation de $[n]$ de type $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$. Il est bien connu que le nombre de permutations σ sur $[n]$ invariantes par conjugaison avec β , c'est-à-dire qui sont telles que $\sigma = \beta\sigma\beta^{-1}$ (la conjugaison correspond ici au transport le long de β , donné par la règle en (2)) est donné par l'expression suivante:

$$fix_{Per}(\beta) = \prod_{j=1}^n j^{\beta_j} \beta_j! \quad . \quad (6)$$

Montrons d'abord que si $\sigma \in Fix_{Per}(\beta)$ alors σ/β doit non seulement être une permutation de $C(\beta)$ mais que, pour tout i , la restriction de σ/β aux cycles de longueur i , doit aussi en être une. Supposons $x \in c \in C(\beta)$, $y \in d \in C(\beta)$, et $(x, y) \in \sigma \in Fix_{Per}(\beta)$. Pour que σ soit une endofonction de $[n]$, c'est-à-dire que pour tout $x \in [n]$, la première coupe de σ suivant x soit un singleton ($|\langle x|\sigma \rangle| = 1$), il est clair, en se servant de (4), que $|c|$ doit diviser $|d|$. Sinon, forcément, on a $|\langle x|\sigma \rangle| \neq 1$. Si on exige en plus que σ soit une permutation de $[n]$, alors, de manière analogue, on doit aussi avoir que $|d|$ divise $|c|$.

Ainsi la permutation quotient σ/β ne permute entre eux que des cycles de même longueur. De plus, si (c, d) est un couple de σ/β , alors il suffit de connaître l'image par σ d'un seul point de c pour connaître entièrement la restriction de σ au cycle c . Il suffit, par exemple, de spécifier l'ensemble $\{\sigma(\min(c)) | c \in C(\beta)\}$ pour connaître entièrement σ .

Réciproquement si on donne sur $C(\beta)$ une permutation δ qui ne permute que des cycles de même longueur et une fonction $\Delta : C(\beta) \rightarrow [n]$, telle que, pour tout $c \in C(\beta)$, $\Delta(c) \in \delta(c)$, alors, on peut retrouver, de manière évidente, une permutation laissée fixe par β qui est associée au couple (δ, Δ) . En dénotant $Sim(Per; \beta)$ l'ensemble des couples (δ, Δ) que nous venons de décrire, on a démontré la proposition suivante:

Proposition 1. Pour tout entier $n \geq 0$ et toute permutation β de $[n]$, on a l'isomorphisme suivant:

$$Fix_{Per}(\beta) \simeq Sim(Per, \beta).$$

Il est maintenant aisé de retrouver (6) à partir de l'ensemble $Sim(Per, \beta)$.

1.3 Indications “historiques”. Le principe d'auto-similarité a, en quelque sorte, ses prédécesseurs. En effet, pour énumérer les *tournois* laissés fixes par une permutation β donnée, Moon [17] commence par construire les tournois sur les cycles de $C(\beta)$, avec l'aide de (3) (ajustée aux tournois). Il en déduit ensuite le nombre de tournois fixes en ajoutant l'information (les choix) nécessaire. De même, Lovász [16], pour trouver le nombre d'*arbres* (sur un nombre impair de points) laissés fixes par β , se donne d'abord un arbre sur les cycles de $C(\beta)$ et termine son calcul à l'aide du théorème connu sous le nom de “Matrix-tree”. On peut aussi citer Hanlon [10] qui, sans aller jusqu'à énumérer les *partitions* (d'ensembles) fixées par β , n'en induit pas moins une partition de $C(\beta)$ à partir de la même règle (3) pour *construire* les partitions de $Fix_{Partition}(\beta)$.

Comme on peut le voir, les calculs particuliers de chacun de ces prédécesseurs s'est toujours réalisé lors de l'étude d'une espèce bien déterminée.

§ 2. Une construction des graphes connexes sur $[n]$.

Pour pouvoir construire les graphes connexes sur $[n]$ laissés fixe par une permutation β donnée (mais arbitraire) de $[n]$ on doit d'abord pouvoir construire tous les graphes connexes sur $[n]$. En effet lorsque $\beta = 1_{[n]}$, on a $Fix_{Grx}(\beta) = Grx[n]$. Cette section est consacrée à la description d'un algorithme qui construit tous ces graphes connexes et qui permet d'en donner le nombre, sous *forme close*.

Cette construction repose essentiellement sur la notion usuelle de distance dans un graphe simple. Si g est un tel graphe et si u et v sont deux sommets de g alors la distance de u à v , dénotée $d(u, v)$, est la longueur de la plus petite chaîne qui va de u à v .

Soit $n \geq 1$ un entier, $g = ([n], A) \in Grx[n]$ et u_0 fixé dans $[n]$. La notion de distance que nous venons d'introduire induit des partitions de $[n]$ et de A relativement à u_0 . En premier lieu, si on désigne par $D_k(u_0)$, $k \geq 0$, l'ensemble de sommets de g qui sont à distance k de u_0 alors on obtient la réunion disjointe suivante:

$$[n] = \bigcup_{k \geq 0} D_k(u_0).$$

Nous dénotons cette partition *ordonnée* de $[n]$ par $\pi(g, u_0)$.

Si $a_1 = \{u_1, v_1\}$ et $a_2 = \{u_2, v_2\}$ sont deux arêtes de A , alors on définit une relation d'équivalence \equiv_{u_0} sur A en posant $a_1 \equiv_{u_0} a_2 \Leftrightarrow \{d(u_0, u_i) \leq d(u_0, v_i), i = 1, 2; d(u_0, u_1) = d(u_0, u_2), d(u_0, v_1) = d(u_0, v_2)\}$.

Les membres de la partition A/\equiv_{u_0} peuvent être regroupées en deux classes disjointes. En effet, si $a = \{u, v\} \in A$, $d(u_0, u) \leq d(u_0, v)$, alors on a soit, pour un certain entier $j \geq 0$,

1. $d(u_0, u) = d(u_0, v) = j$ et on écrit $a \in \Omega_j(g, u_0)$,

soit, (les deux cas s'excluant mutuellement),

2. $d(u_0, u) = j$, $d(u_0, v) = j+1$ et on écrit plutôt $a \in \Upsilon_j(g, u_0)$. On dira aussi que $\Upsilon_j(g, u_0)$ est la j -ième saturation de g relativement à u_0 .

Bien sûr, les $\Omega_i(g, u_0)$ sont deux à deux disjoints, de même que les $\Upsilon_j(g, u_0)$. On pose $\Omega(g, u_0) = \cup_{j \geq 0} \Omega_j(g, u_0)$ et $\Upsilon(g, u_0) = \cup_{j \geq 0} \Upsilon_j(g, u_0)$. Alors on a :

$$A = \Omega(g, u_0) \cup \Upsilon(g, u_0).$$

L'ensemble $\Upsilon(g, u_0)$ ne peut être vide que si $||[n]|| = 1$. Si $||[n]|| > 1$ alors le sommet u_0 est connecté à au moins un autre sommet du graphe g et ainsi $\Upsilon_1(g, u_0) \neq \emptyset$. Remarquons aussi que si, pour un certain indice j_0 , on a $\Upsilon_{j_0}(g, u_0) = \emptyset$ alors, pour tout indice $j \geq j_0$, on a $\Upsilon_j(g, u_0) = \emptyset$. On définit l'*amplitude*, relativement à u_0 , du graphe g , $\alpha_{u_0}(g)$, comme étant le plus grand indice j_{max} pour lequel $\Upsilon_{j_{max}}(g, u_0) \neq \emptyset$.

Si $k \geq 0$ et x est un sommet de $D_{k+1}(u_0)$, alors x est adjacent à au moins un sommet de $D_k(u_0)$, sinon x n'est pas à distance k de u_0 . Ainsi pour $0 \leq k \leq \alpha(g) - 1$, le sous-graphe de g obtenu en prenant la réunion $D_k(u_0) \cup D_{k+1}(u_0)$ comme sommets et $\Upsilon_k(g, u_0)$ comme ensemble d'arêtes est une relation (symétrique) qui sature $D_{k+1}(u_0)$. Cela mène à la définition suivante :

Définition 2. Soient V et W des ensembles finis disjoints. L'ensemble des graphes simples g sur $V \cup W$ dont les arêtes $\{x, y\}$ ont un sommet dans V et l'autre dans W et, qui, de plus, saturent W , c'est-à-dire que pour tout sommet w dans W , il y a au moins une arête $\{v, w\}$ dans g , est l'ensemble des saturations de V dans W que l'on dénote $Sat(V, W)$.

En fait la décomposition d'un graphe connexe que nous venons de décrire peut se ramener aux définitions et à la proposition suivantes.

Définitions 3. Soient U un ensemble fini, $|U| \geq 1$, $u_0 \in U$ et $j \geq 0$.

1. L'ensemble des partitions ordonnées $\pi = (U_0, U_1, \dots, U_j)$ de U en $j + 1$ classes (non-vides) telles que $U_0 = \{u_0\}$ est dénoté $Par_j(U, u_0)$.

Pour toute $\pi = (U_0, U_1, \dots, U_j) \in \text{Par}_j(U, u_0)$, on pose

$$2. \text{Gra}(\pi) = \{(g_0, g_1, \dots, g_j) : \forall i, g_i \in \text{Grs}[U_i]\} \text{ et}$$

$$3. \text{Sat}(\pi) = \{(s_0, s_1, \dots, s_{j-1}) : \forall i, s_i \in \text{Sat}(U_i, U_{i+1})\}.$$

On définit alors l'ensemble $\text{Decomp}_j(U; u_0)$ comme l'ensemble des triplets (π, G, S) où $\pi \in \text{Par}_j(U, u_0)$, $G \in \text{Gra}(\pi)$, $S \in \text{Sat}(\pi)$. Finalement on pose:

$$\text{Decomp}(U; u_0) = \bigcup_{0 \leq j \leq |U|-1} \text{Decomp}_j(U; u_0).$$

Proposition 4. Pour tout ensemble fini U et tout $u_0 \in U$ on a:

$$\text{Grx}[U] \simeq \text{Decomp}(U; u_0).$$

Preuve: La preuve est évidente. Le lecteur peut s'en convaincre à l'aide de la figure 1. Lorsqu'il y en a, on a indiqué les arêtes des graphes g_i par des traits gras.

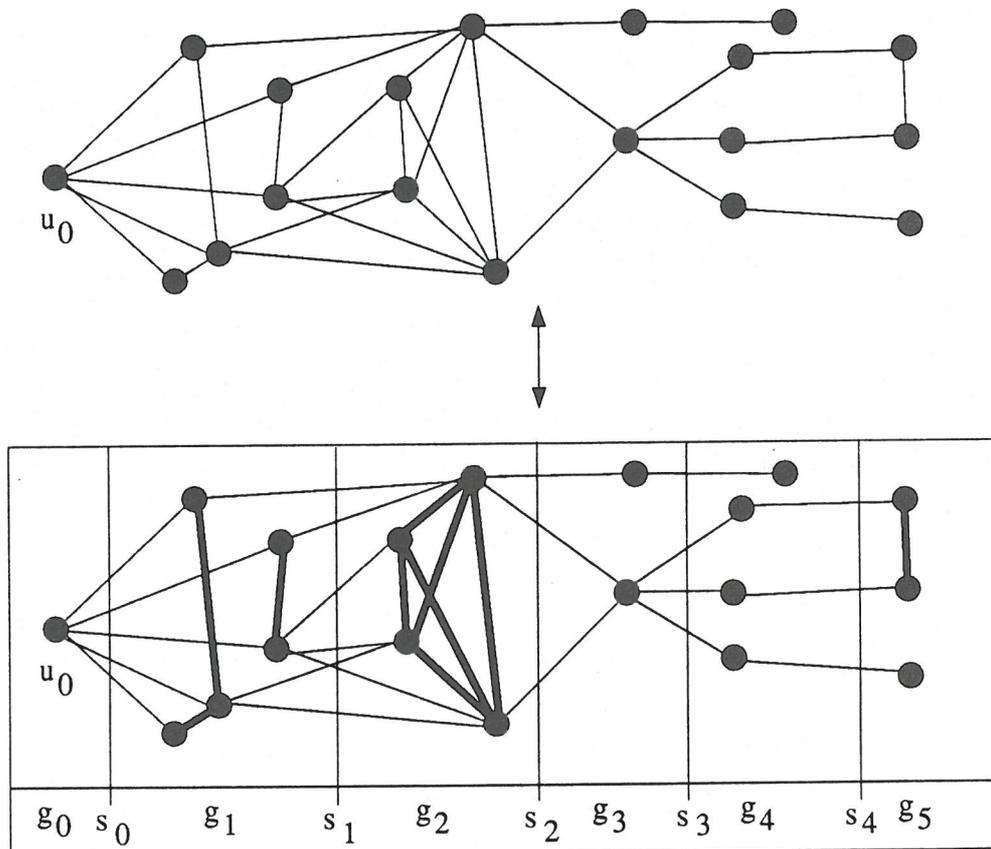


Figure 1

Corollaire 5. Soit $n \geq 1$. Alors le nombre de graphes connexes sur $[n]$ est donné par l'expression suivante:

$$|Grx[n]| = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{(t_1, \dots, t_k) \\ t_i \geq 1}} \binom{n-1}{t_1, \dots, t_k} \prod_{j=1}^k 2^{\binom{t_j}{2}} \prod_{j=1}^{k-1} (2^{t_j} - 1)^{t_{j+1}}. \quad (7)$$

Preuve. Le centre c d'un graphe en forme d'étoile sur n points, disons E est tel que $\alpha_c(E) = 1$. De plus, si u est un des deux sommets pendants d'une chaîne C sur $[n]$ alors $\alpha_u(C) = n - 1$. Ainsi, l'amplitude k de tout graphe connexe g varie de 1 à $n - 1$. Une fois l'amplitude k fixée, on doit choisir les k familles, toutes non-vides, de points qui formeront les D_i , $1 \leq i \leq k$. Cela explique la seconde sommation et le coefficient multinomial de la formule. On construit ensuite k graphes simples, 1 pour chacun des D_i , $1 \leq i \leq k$, ce qui se fait, évidemment de $\prod_{j=1}^k 2^{\binom{t_j}{2}}$ manières. Les saturations sont dénombrées par le dernier produit de la formule.

§ 3. Le calcul de $fix_{Grx}(\beta)$.

3.1 Introduction. Soit β une permutation de $[n]$. Si le graphe simple g sur $[n]$ est connexe alors le graphe induit g/β sur $C(\beta)$ est lui aussi connexe (en général, bien que cela n'ait aucun effet sur la connexité de g/β , ce dernier est un graphe "simple" avec boucles permises, i.e une relation symétrique). A fortiori, il en va de même si $g \in Fix_{Grx}(\beta)$. Ici, appliquer le principe d'auto-similarité consiste donc à construire tous les graphes connexes sur $C(\beta)$ et ajouter ensuite l' "information" nécessaire (perdue en passant aux structures quotients) pour retrouver tous les graphes de $Fix_{Grx}(\beta)$.

Cependant, bien que nous suivions essentiellement cette dernière méthode, elle ne suffira pas à résoudre entièrement le problème. On doit aussi procéder par inclusion-exclusion. La difficulté tient au fait que nous n'avons pas trouvé de moyen "heureux" (en existe-t-il un?) d'ajouter de l'information aux graphes quotients (connexes) sans éviter d'obtenir des graphes disconnexes. En fait, pour obtenir le résultat final, on commence par construire tous les graphes connexes sur $C(\beta)$, on ajoute l'information nécessaire pour retrouver tous les graphes connexes laissés fixes par la permutation β et on soustrait de cette construction les cas qui mènent à des graphes disconnexes. Cette soustraction, ensembliste, mène directement au principe d'inclusion-exclusion quand vient le temps d'en dénombrer les membres.

3.2 Le calcul de $fix_{Grx}(\beta)$. Comme on l'a vu dans la section précédente, les graphes simples interviennent naturellement dans la construction des graphes

connexes: si le graphe g est d'amplitude k relativement à un de ses sommets u_0 alors on associe à g un triplet (π, G, S) où $G = (g_1, \dots, g_k)$ est précisément un n -uplet de k graphes simples. Si le graphe g est laissé fixe par β alors chaque graphe simple g_i dans G est lui aussi laissé fixe par β . Il importe donc de pouvoir calculer, pour toute permutation β , les coefficients $fix_{Gr_s}(\beta)$.

Nous reprenons ici ce dernier calcul, bien connu [6], ce qui permettra de voir clairement la nature l'information perdue lorsqu'on passe au quotient d'un graphe simple défini par la règle (2).

Proposition 6. Soit β une permutation de $[n]$, de type $(\beta_1, \dots, \beta_n)$. Alors le nombre de graphes simples laissés invariants β est donné par l'expression suivante:

$$fix_{Gr_s}(\beta) = 2^{\sum_{1 \leq u < v \leq n} \beta_u \beta_v pgcd(u,v) + \sum_{u=1}^n u \binom{\beta_u}{2}} \times 2^{\sum_{u=1}^n \beta_u \lfloor u/2 \rfloor} \quad (8)$$

Preuve. Supposons d'abord que la permutation β soit constituée d'un seul cycle C de longueur u . Manifestement, le graphe trivial (sans arête) sur $[u]$ est fixé par β . Fixons $\alpha = \{i, j\}$, $i, j \in [u]$, une arête quelconque. Si l'arête α fait partie d'un graphe g laissé fixe par β alors l'ensemble d'arêtes suivant $\{\beta^k(\alpha) = \{\beta^k(i), \beta^k(j)\} : k \geq 0\}$, que nous dénotons $\Theta_\beta(\alpha)$ et que nous appelons la β -orbite de α , doit aussi faire partie de l'ensemble des arêtes de g .

Remarquons maintenant que le fait que β soit constituée d'un seul cycle n 'intervient pas vraiment dans ce que nous venons de dire. C'est-à-dire que si $i, j \in [n]$, $i \in C \in C(\beta)$, $j \in D \in C(\beta)$, $C \neq D$, alors on peut définir la β -orbite de $\{i, j\}$, $\Theta_\beta(\{i, j\})$, de la même manière et le même phénomène se produit: si $\{i, j\}$ est dans $g \in Fix_{Gr_s}(\beta)$ alors $\Theta_\beta(\{i, j\})$ doit aussi y être.

On voit donc que ce qui tient lieu d'arête dans un graphe fixé par une permutation donnée est "équivalent" à une orbite complète d'arêtes. En effet, toute arête détermine une et une seule orbite et, réciproquement, toute arête dans une orbite donnée peut servir de représentant à cette dernière.

Ainsi, lorsque nous passons au graphe quotient g/β ($g \in Fix_{Gr_s}(\beta)$), l'information perdue est précisément un certain ensemble d'orbites. Les arêtes présentes dans le graphe g/β indiquent entre quelles paires de cycles $\{C, D\}$ on trouve un choix *non-vidé* d'orbites que l'on doit ajouter à g/β pour obtenir le graphe g d'origine. On comprend maintenant pourquoi on peut retrouver, en général, des boucles sur le graphe quotient. En effet, pour tout cycle C dans $C(\beta)$, si $i \in C$, alors la seule orbite qu'il est impossible d'obtenir est celle définie par $\Theta_\beta(\{i, i\})$, car c'est la seule qui mènerait à des boucles dans le graphe g d'origine. Toutes les autres orbites (elles existent dès que $|C| > 1$)

dans C peuvent toutes intervenir et elles mènent toutes à une boucle sur le cycle C dans le graphe quotient g/β .

Supposons maintenant que, dans un graphe quotient h sur $C(\beta)$, nous ayons obtenu une arête $\{C, D\}$. Combien existe-t-il d'orbites distinctes qui peuvent induire cette arête?

Examinons d'abord le cas où $|C| = c, |D| = d, C \neq D$. On peut former, à partir des points de C et D , un total de $c \times d$ arêtes $\{x, y\}$ telles que $x \in C$ et $y \in D$. Fixons-en une, disons $\{x_0, y_0\}$. Il est clair que la cardinalité de l'orbite $\Theta_\beta(\{x_0, y_0\})$ est égale au $ppcm(c, d)$, par définition même de $ppcm$. Puisque deux orbites distinctes ont une intersection vide on obtient que le cardinal de l'ensemble des orbites qui peuvent induire l'arête $\{C, D\}$, dénoté $\Theta_\beta(\{C, D\})$, est de $(c \times d)/ppcm(c, d) = pgcd(c, d)$. Ainsi on obtient $2^{pgcd(c, d)} - 1$ choix de sous-ensembles *non-vides* d'orbites qui pourront induire l'arête $\{C, D\}$ dans le graphe quotient h .

Par un raisonnement analogue, il est aisé de voir, dans le cas où $C = D$ qu'il y a $2^{\lfloor c/2 \rfloor} - 1$ choix de sous-ensembles d'orbites qui pourront induire la boucle $\{C, C\} = \{C\}$ dans un graphe quotient h .

Posons maintenant

$$Sim(Gr_s; \beta) = \{(\delta, \Delta) \mid \delta \in Gr_b[C(\beta)], \Delta : \delta \rightarrow \cup_{\{C, D\} \in g} \wp^*(\Theta_\beta(\{C, D\}))\},$$

où Δ est une fonction qui assigne à chaque arête $\{C, D\}$ (avec, possiblement, $C = D$) de δ une partie non-vide (\wp^*) de l'ensemble $\Theta_\beta(\{C, D\})$. Nous avons donc obtenu, pour toute permutation β , une bijection Γ_β ,

$$\Gamma_\beta : Fix_{Gr_s}(\beta) \rightarrow Sim(Gr_s; \beta),$$

$$g \mapsto (\delta_g, \Delta_g),$$

où $\delta_g = g/\beta$ et où $\Delta_g = \Delta(g)$ est l'ensemble des orbites de g "perdus" en passant au quotient. Il est maintenant aisé de retrouver (8). En effet, construire un membre de $Sim(Gr_s; \beta)$ revient d'abord, pour tout $C, D \in C(\beta)$ et toute arête $\{C, D\}$, $C \neq D$ à choisir ou non cette arête et, advenant le cas où elle est choisie, de lui assigner un membre de $\wp^*(\Theta_\beta(\{C, D\}))$. Puisque, pour tout i , la permutation β est constituée de β_i cycles de longueur i , il y a bien

$$\sum_{2 \leq u < v \leq n} \beta_u \beta_v(u, v) + \sum_{u=1}^n u \binom{\beta_u}{2}$$

manières de faire ces choix. Ensuite, on complète la formule avec un traitement analogue pour les boucles que l'on choisit ou non sur chaque cycle C de $C(\beta)$.

3.3 Disconnexité. Jusqu'à maintenant nous avons obtenu un algorithme qui construit tous les graphes connexes sur un ensemble fini arbitraire et nous

connaissions aussi la nature de l'information perdue quand on passe au graphe-quotient d'un graphe simple g laissé fixe par une permutation β donnée. Cette information est bien entendu de même nature si on demande en plus que le graphe g soit connexe. D'autre part, le quotient d'un graphe connexe est toujours connexe. Ainsi, il semble a priori possible que l'on puisse retrouver tous les membres de $Fix_{Gr\alpha}(\beta)$, et *uniquement ces derniers*, en se restreignant au sous-ensemble, dénoté $Dis(1, \beta)$ (pour des raisons qui apparaîtront plus tard), des couples $(\delta, \Delta) \in Sim(Gr\alpha, \beta)$ qui sont tels que δ soit un graphe connexe sur $C(\beta)$ (c'est-à-dire qu'il semble possible que l'on ait $Fix_{Gr\alpha}(\beta) = \Gamma^{-1}(Dis(1, \beta))$).

Malheureusement, ce n'est pas le cas en général. En fait, cela dépend de la nature de la permutation β . En effet, on aura $Fix_{Gr\alpha}(\beta) = \Gamma^{-1}(Dis(1, \beta))$ si, et seulement si le *pgcd* de toutes les longueurs de cycles présents dans β , ce que nous dénoterons $pgcd(\beta)$, est égal à 1. Dès que $pgcd(\beta) \neq 1$, on peut toujours trouver un couple $(\delta, \Delta) \in Dis(1, \beta)$ tel que le graphe $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$ soit disconnexe, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple Soient $[n] = [4]$, $\beta = \{A, B\}$ où A et B sont les transpositions $A = (1, 4)$ et $B = (2, 3)$. Considérons le couple $(\delta_0, \Delta_0) \in Fix_{Gr\alpha}(\beta)$ où δ_0 est le graphe connexe sur $C(\beta)$ constitué de l'unique arête $\{A, B\}$:



Figure 2. Le graphe δ_0 , connexe.

et où $\Delta_0(\{A, B\}) = \Theta_\beta(\{1, 2\}) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Alors $\Gamma^{-1}(\delta_0, \Delta_0)$ est bien disconnexe:

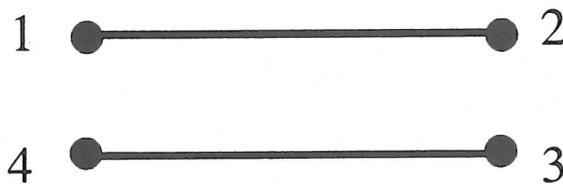


Figure 3. Le graphe $\Gamma^{-1}(\delta_0, \Delta_0)$.

Puisque $Fix_{Gr\alpha}(\beta) \subseteq Dis(1, \beta)$, il suffit, pour trouver $fix_{Gr\alpha}(\beta)$, de trouver la cardinalité de l'ensemble $Dis(1, \beta)$ et de lui soustraire le nombre de ses membres (δ, Δ) qui sont tels que $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$ soit disconnexe. Puisque nous

savons construire (et dénombrer) $Dis(1, \beta)$, il ne reste plus qu'à caractériser le sous-ensemble de ses éléments disconnexes.

Soit $(\delta, \Delta) \in Dis(1, \beta)$. Nous dénotons l'ensemble des *composantes connexes* de $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$ par $CC(\delta, \Delta)$ et la cardinalité de ce dernier par $NCC(\delta, \Delta)$. Pour toute permutation β et tout $(\delta, \Delta) \in Sim(Gr s, \beta)$ la permutation β induit une permutation β' de $CC(\delta, \Delta)$ définie, pour toutes composantes C, D dans $CC(\delta, \Delta)$, par la règle suivante:

$$\beta'(C) = D \Leftrightarrow \exists x \in C, \beta(x) \in D. \quad (9)$$

La permutation β' est circulaire lorsque $(\delta, \Delta) \in Dis(1, \beta)$.

Le nombre $NCC(\delta, \Delta)$ de composantes connexes de $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$ dépend, en général, de $pgcd(\beta)$, δ et Δ . Pour le déterminer, il suffit de connaître, pour toute arête $\{A, B\}$ du graphe δ , le nombre de composantes du graphe $\Gamma^{-1}(\delta_{\{A, B\}}, \Delta_{\{A, B\}})$ et de calculer ensuite le $pgcd$ des nombres obtenus. C'est l'objet des propositions et corollaires suivants.

Proposition 7. Soit β une permutation de $[n]$ constituée de deux cycles A, B respectivement de longueur a et b où $A = (r_0, r_1, r_2, \dots)$, $B = (s_0, s_1, s_2, \dots)$. Supposons que (δ, Δ) soit dans $Sim(Gr s, \beta)$ et que δ soit le graphe simple constitué de l'unique arête $\{A, B\}$. Supposons aussi que l'image de Δ contienne au moins l'orbite $\Theta_\beta(\{r_0, s_0\})$ et peut-être d'autres orbites $\{\Theta_\beta(\{r_0, s_{c_j}\}) : 1 \leq j \leq u\}$. Alors on a:

(i) $NCC(\delta, \Delta) = pgcd(a, b, c_1, c_2, \dots, c_u)$.

(ii) La permutation β induit une permutation circulaire β' de $CC(\delta, \Delta)$ définie par (9).

Preuve. La preuve, par récurrence sur le nombre d'orbites contenues dans l'image de Δ , dénoté $|\Delta|$, est distincte selon que $A \neq B$ ou non.

1.a) Examinons d'abord le cas où $|\Delta| = 1$ et $A \neq B$. Soit $k = pgcd(a, b)$. Il est bien connu que la congruence $gx \equiv w \pmod{h}$, où g, h, w sont des entiers fixés, n'a de solution (entière) que si, et seulement si, $pgcd(g, h)$ divise w . Si, dans cette dernière congruence, on pose $g = a$, $h = b$ et $w = t \cdot k$, t étant ici un entier naturel quelconque, on obtient alors la congruence suivante

$$ax \equiv t \cdot k \pmod{b} \quad (10)$$

qui admet, quelque soit t , une solution $x \geq 0$.

Puisque $\Delta(\delta) = \Theta_\beta(\{r_0, s_0\})$, on a pour tous entiers $j, m \geq 0$, que

$$\{r_{jk+ma \pmod{a}}, s_{jk+ma \pmod{b}}\} = \{r_{jk \pmod{a}}, s_{jk \pmod{b}}\} \in \Theta_\beta(\{r_0, s_0\}).$$

Ainsi, par (10), pour tout j tel que $0 \leq jk \leq a - 1$, les seules arêtes issues de r_{jk} sont les arêtes $\{r_{jk}, s_{tk}\}, 0 \leq tk \leq b - 1$. De même, pour tout i , $0 \leq i \leq k - 1$, les seules arêtes issues de r_{jk+i} sont les arêtes $\{r_{jk+i}, s_{tk+i}\}, 0 \leq tk \leq b - 1$.

Les ensembles d'arêtes, $\{\{r_{jk+i}, s_{tk+i}\} : 0 \leq jk \leq a - 1, 0 \leq tk \leq b - 1\}, 0 \leq i \leq k - 1$, constituent les k composantes connexes du graphe $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$.

Bien entendu, si, au lieu de prendre $\Theta_\beta(\{r_0, s_0\})$ comme orbite on avait plutôt choisi $\Theta_\beta(\{r_0, s_j\})$, pour un certain s_j dans B on aurait aussi obtenu k composantes connexes dans $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$. Remarquons aussi que l'orbite déterminée par $\{r_0, s_0\}, \Theta_\beta(\{r_0, s_0\})$, est la même que celle déterminée par $\{r_0, s\}$, pour tout $s \in B$ qui se trouve dans la même composante connexe que r_0 .

Notons finalement, pour terminer ce premier cas, que la relation (9) définit bien une permutation circulaire β' des k composantes que l'on vient d'obtenir. De plus, en prenant l'ensemble $R = \{r_0, r_1, \dots, r_{k-1}\}$ comme ensemble de représentants de ces composantes, on peut tout aussi bien considérer la permutation β' comme une permutation circulaire de R .

1.b) Toujours avec $|\Delta| = 1$, considérons maintenant le cas où $A = B$. Choisissons une orbite $\Theta_\beta(\{r_0, r_i\})$ où $i \neq 0$, pour éviter les boucles dans $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$. Alors le plus petit indice k tel que $k > 0$ et pour lequel l'arête $\{r_0, r_k\}$ est dans $\Theta_\beta(\{r_0, r_i\})$ est précisément $k = \text{pgcd}(a, i)$. Ainsi, pour tout j , $0 \leq j < k$, l'ensemble d'arêtes $\{\{r_{(j+mk) \bmod a}, r_{(j+(m+1)k) \bmod a}\} : m \geq 0\}$ constitue une composante connexe de $\Gamma^{-1}(\delta, \Delta)$. Ici encore la permutation β' est bien définie par (9).

La proposition est donc démontrée dans le cas où $|\Delta| = 1$. Par hypothèse de récurrence, supposons la vraie pour $|\Delta| = u \geq 1$. Nous voulons la démontrer pour $|\Delta| = u + 1$.

2. Supposons que $\Delta(\delta)$ soit constitué des $u + 1$ orbites (distinctes) $\Theta_\beta(\{r_0, s_0\}) \cup \{\Theta_\beta(\{r_0, s_{h_j}\}) : 1 \leq j \leq u\}$ et que $\Delta'(\delta) = \Delta(\delta) - \Theta_\beta(\{r_0, s_{h_u}\})$. Par hypothèse de récurrence, on a que $NCC(\delta, \Delta') = \text{pgcd}(a, b, h_1, h_2, \dots, h_{(u-1)})$ et on obtient aussi la permutation β' de $CC(\delta, \Delta')$ décrite par (9).

L'idée maintenant est de se ramener au cas 1.b traité plus haut dans cette preuve. En effet, soient $K(r_0), K(b_{h_u}) \in CC(\delta, \Delta')$ définis par les relations d'appartenance $r_0 \in K(r_0)$ et $b_{h_u} \in K(b_{h_u})$. A l'orbite $\Theta_\beta(\{r_0, s_{h_u}\})$ que l'on ajoute à Δ' pour obtenir Δ il correspond de manière évidente une orbite $\Theta_{\beta'}(\{K(r_0), K(b_{h_u})\})$ relativement à β' qui est constituée de composantes de $CC(\delta, \Delta')$. On est alors précisément dans la situation traitée par le cas 1.b où le cycle est maintenant la permutation β' et où l'orbite est donnée par $\Theta_{\beta'}(\{K(r_0), K(b_{h_u})\})$. Puisque $K(b_{h_u}) = K(b_{h_u \bmod (\text{pgcd}(a, b, h_1, h_2, \dots, h_{u-1})})$

on obtient bien la suite d'identités suivante:

$$\begin{aligned}
NCC(\delta, \Delta) &= NCC\left((\delta, \Delta') \bigcup \Theta_\beta\{r_0, s_{h_u}\}\right) \\
&= \text{pgcd}(NCC(\delta, \Delta'), h_u \text{ mod}(\text{pgcd}(a, b, h_1, h_2, \dots, h_{u-1}))) \\
&= \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b, h_1, h_2, \dots, h_{u-1}), h_u \text{ mod}(\text{pgcd}(a, b, h_1, h_2, \dots, h_{u-1}))) \\
&= \text{pgcd}(a, b, h_1, h_2, \dots, h_{u-1}, h_u \text{ mod}(\text{pgcd}(a, b, h_1, h_2, \dots, h_{u-1}))) \\
&= \text{pgcd}(a, b, h_1, h_2, \dots, h_{u-1}, h_u).
\end{aligned}$$

Il est clair que la permutation β' de $CC(\delta, \Delta')$ induit, toujours avec (9), une permutation circulaire β'' de $CC(\delta, \Delta)$. Cela complète la récurrence et la preuve est terminée.

Corollaire 8. Pour tout (δ, Δ) dans $Dis(1, \beta)$ on a

$$NCC(\delta, \Delta) = \mathbf{PGCD}_{\{A, B\} \in \delta} (NCC(\delta|_{\{A, B\}}, \Delta|_{\{A, B\}})).$$

De plus (pour procéder par récurrence) la permutation β induit une permutation (circulaire) β' de $CC(\delta, \Delta)$ où β' est définie par (9).

Preuve. On procède par récurrence sur le nombre k d'arêtes de δ . Pour $k = 1$, la démonstration fait l'objet de la proposition précédente. Supposons la proposition vraie pour $k \geq 1$ et supposons aussi que δ ait $k + 1$ arêtes. Choisissons une arête arbitraire $\{A, B\}$ dans δ où $A = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ et $B = (b_0, b_1, b_2, \dots)$. On examine deux cas distincts pour établir la récurrence: 1. l'arête $\{A, B\}$ est un isthme (c'est-à-dire que soustraire l'arête $\{A, B\}$ à δ déconnecte ce dernier) et 2. ce n'en est pas un.

1. Lorsque $\{A, B\}$ est un isthme dans δ et qu'on soustrait $\{A, B\}$ à δ , on obtient deux sous-graphes δ' et δ'' (connexes) de δ où A est, disons, un sommet de δ' et B un sommet de δ'' . Par hypothèse de récurrence, la permutation β induit des permutations circulaires β' et β'' de $CC(\delta', \Delta')$ et $CC(\delta'', \Delta'')$ respectivement. Les diverses orbites constituant l'image $\Delta(\{A, B\})$, disons $\{\Theta_\beta(\{a_0, b_{h_j}\}) : 1 \leq j \leq u\}$, induisent un nouvel ensemble d'orbites (dont les arêtes ont pour sommets les composantes de $CC(\delta', \Delta')$ d'une part et celles de $CC(\delta'', \Delta'')$ de l'autre) bien déterminé entre les deux nouveaux cycles β' et β'' . En effet, en considérant les arêtes de $\{\Theta_\beta(\{a_0, b_{h_j}\}) : 1 \leq j \leq u\}$ "réduites" modulo $NCC(\delta'', \Delta'')$ et en identifiant les diverses composantes de $CC(\delta'', \Delta'')$ aux $NCC(\delta'', \Delta'')$ premiers point du cycle B , c'est-à-dire au cycle $(b_0, b_1, \dots, b_{NCC(\delta'', \Delta'')-1})$, on voit bien comment obtenir ces orbites induites. Pour simplifier la notation, posons, pour tout j , $1 \leq j \leq u$, $h_j' = h_j \text{ mod}(NCC(\delta'', \Delta''))$.

On se retrouve alors dans le cas 1.a de la proposition (7), avec des cycles de longueurs $NCC(\delta', \Delta')$ et $NCC(\delta'', \Delta'')$ ainsi qu'avec un ensemble d'orbites

déterminé par $\Delta(\{A, B\})$. On obtient alors que

$$\begin{aligned} NCC(\delta, \Delta) &= \text{pgcd}\left(NCC(\delta', \Delta'), NCC(\delta'', \Delta''), \text{pgcd}(h'_1, \dots, h'_u)\right) \\ &= \text{pgcd}\left(NCC(\delta', \Delta'), NCC(\delta'', \Delta''), \text{pgcd}(h_1, \dots, h_u)\right) \\ &= \text{pgcd}\left(NCC(\delta', \Delta'), NCC(\delta'', \Delta''), \text{pgcd}(a, b, h_1, \dots, h_u)\right) \\ &= \text{pgcd}\left(NCC(\delta', \Delta'), NCC(\delta'', \Delta''), NCC(\delta_{\{A, B\}}, \Delta_{\{A, B\}})\right). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, le corollaire (8) est démontré lorsque $\{A, B\}$ est un isthme.

2. Si l'arête $\{A, B\}$ n'est pas un isthme on procède essentiellement de la même manière qu'en 1, la seule différence (d'une certaine importance) étant qu'on doit maintenant considérer le cas 1.b de la proposition (7). C'est-à-dire qu'on obtient qu'un seul cycle $CC(\delta', \Delta')$ induit après avoir enlevé l'arête $\{A, B\}$. Le détail de cette partie est laissé au lecteur.

Supposons maintenant $(\delta, \Delta) \in \text{Dis}(1, \beta)$ tel que $NCC(\delta, \Delta) = q \geq 1$. Alors, évidemment, on a que q divise $\text{pgcd}(\beta)$. Convenons de dire, lorsque q divise $NCC(\delta, \Delta)$, que (δ, Δ) est q -déconnecté et, de plus, posons, pour toute permutation β de $[n]$ et tout entier $q > 0$,

$$\text{Dis}(q, \beta) = \{(\delta, \Delta) \in \text{Sim}(\text{Grs}; \beta) : \delta \text{ est connexe, } q | NCC(\delta, \Delta)\}.$$

Ainsi, on a $\text{Dis}(1, \beta) = \{(\delta, \Delta) \in \text{Sim}(\text{Grs}; \beta) : \delta \text{ est connexe}\}$. Posons aussi, pour tout q , $\text{dis}(q, \beta) = |\text{Dis}(q, \beta)|$.

Maintenant, si $(\delta, \Delta) \in \text{Dis}(q, \beta)$ et si p est un nombre premier qui divise q , alors, par définition, (δ, Δ) est aussi p -déconnecté. Alors, clairement, on a

$$\begin{aligned} \text{Sim}(\text{Grx}, \beta) &= \text{Dis}(1, \beta) - \bigcup_{\substack{q | \text{pgcd}(\beta) \\ q > 1}} \text{Dis}(q, \beta) \\ &= \text{Dis}(1, \beta) - \bigcup_{\substack{p | \text{pgcd}(\beta) \\ p \text{ premier}}} \text{Dis}(p, \beta). \end{aligned}$$

La réunion qui intervient dans la dernière équation n'est pas disjointe en général. Par exemple, si p_1 et p_2 sont deux premiers distincts et si (δ, Δ) est $(p_1 p_2)$ -déconnecté alors (δ, Δ) est à la fois (p_1) -déconnecté et (p_2) -déconnecté. Ainsi apparaît l'inclusion-exclusion annoncée plus haut:

$$\begin{aligned} |\text{Sim}(\text{Grx}, \beta)| &= \text{dis}(1, \beta) - \sum_{\substack{p | \text{pgcd}(\beta) \\ p \text{ premier}}} \text{dis}(p, \beta) + \\ &\quad \sum_{\substack{p_1 p_2 | \text{pgcd}(\beta) \\ p_1, p_2 \text{ premiers distincts}}} \text{dis}(p_1 p_2, \beta) - \sum_{\substack{p_1 p_2 p_3 | \text{pgcd}(\beta) \\ p_1, p_2, p_3 \text{ premiers distincts}}} \text{dis}(p_1 p_2 p_3, \beta) + \dots \end{aligned} \tag{11}$$

Théorème 9. Pour tout entier $n \geq 1$ et toute permutation β de $[n]$, on a

$$fix_{Grx}(\beta) = \sum_{d|pgcd(\beta)} \mu(d) dis(d, \beta), \quad (12)$$

où μ est la fonction de Möbius usuelle.

Preuve. Avec (11), puisque $Fix_{grx}(\beta) \simeq Sim(grx, \beta)$, le résultat est immédiat.

Pour trouver $fix_{grx}(\beta)$ il suffit donc, par (12), de calculer, pour toute permutation β et tout diviseur d de $pgcd(\beta)$, les diverses expressions $dis(d, \beta)$. C'est ce que nous calculons dans le lemme 10 et la proposition 11.

Lemme 10. Soit β une permutation de $[n]$ constituée des cycles A et B où $|A| = a, |B| = b$, $A = (a_1, a_2, \dots)$ et $B = (b_1, b_2, \dots)$. Supposons que δ soit le graphe simple sur $C(\beta)$ constitué de la seule arête $\{A, B\}$ et soit $q > 0$ un entier divisant $pgcd(a, b) = k$. Alors il y a

$$q \left(2^{pgcd(a,b)/q} - 1 \right)$$

et, respectivement,

$$2^{\lfloor a/2q \rfloor} - 1$$

manières de définir $\Delta(\delta)$ pour faire en sorte que (δ, Δ) soit q -déconnecté lorsque $A \neq B$ et, respectivement, $A = B$.

Preuve. Considérons d'abord le cas où $A \neq B$. Supposons que $\Theta_\beta(\{a_0, b_0\})$ soit dans $\Delta(\delta)$, déterminant ainsi $pgcd(a, b)$ composantes connexes dans $\Gamma^{-1}(\Delta, \delta)$. Bien sûr, si on ne prend que cette orbite, le couple (Δ, δ) est q -déconnecté. Il en va de même si $\Delta(\delta)$ est constituée d'un sous-ensemble non-vide arbitraire de l'ensemble $\{\Theta_\beta(\{a_0, b_{sq}\}) : 0 \leq s < k/q\}$. De plus, si on ajoute toute autre orbite $\Theta_\beta(\{a_0, b_t\})$ à $\Delta(\delta)$ telle que $\Theta_\beta(\{a_0, b_t\}) \notin \{\Theta_\beta(\{a_0, b_{sq}\}) : 0 \leq s < k/q\}$, alors (Δ, δ) n'est pas q -déconnecté.

On a donc, en choisissant les orbites dans $\{\Theta_\beta(\{a_0, b_{sq}\}) : 0 \leq s < k/q\}$, $2^{pgcd(a,b)/q} - 1$ manières de déterminer $\Delta(\delta)$ qui q -déconnectent (δ, Δ) .

Ce raisonnement étant valide à translation près (c'est-à-dire que pour tout i fixé, $0 \leq i < q$, on choisit maintenant les orbites dans $\{\Theta_\beta(\{a_0, b_{sq+i}\}) : 0 \leq s < k/q\}$) on obtient bien, au total, $q(2^{pgcd(a,b)/q} - 1)$ manières de déterminer $\Delta(\delta)$ pouvant q -déconnecter (δ, Δ) .

On peut aussi voir cette "translation" comme le choix d'une *point initial* dans B . C'est-à-dire qu'on a *essentiellement* q choix de déterminer un premier point $b \in B$ (déterminant lui-même l'orbite initiale $\Theta_\beta\{a_0, b\}$) les autres choix d'orbites étant faits relativement à ce choix initial.

Lorsque $A = B$, en raisonnant sensiblement de la même façon, on trouve facilement un total de $2^{\lfloor a/2q \rfloor} - 1$ manières de choisir $\Delta(\delta)$ qui q -déconnectent (δ, Δ) (il n'y a pas de "translation" ici).

Par la proposition (7) et le corollaire (8), on a que le couple (δ, Δ) est d -déconnecté pour un certain entier $d > 0$ ssi, pour toute arête $\{A, B\}$ dans δ le couple $(\delta_{|\{A, B\}}, \Delta_{|\{A, B\}})$ est d -déconnecté. On est maintenant en mesure de calculer les expressions $dis(d, \beta)$.

Proposition 11. Soit β une permutation de $[n]$ de type $1^{\beta_1} 2^{\beta_2} \dots n^{\beta_n}$. Supposons que l'élément "1" de $[n]$ soit dans le cycle C_0 et que $|C_0| = c$. Soit β^* la permutation induite de β en lui ayant soustrait le cycle C_0 , c'est-à-dire que $\beta^* = \beta \setminus C_0$. Supposons de même que la permutation β^* soit de type $1^{\beta_1^*} 2^{\beta_2^*} \dots n^{\beta_n^*}$ où $\beta_i^* = \beta_i - 1$, si $i = c$ et $\beta_i^* = \beta_i$, autrement. Soit $K = |C(\beta)|$. Alors, pour tout entier $d \geq 1$ tel que d divise $pgcd(\beta)$, on a:

$$\begin{aligned} dis(d, \beta) &= d^{K-1} 2^{\lfloor c/2d \rfloor} \sum_{k=1}^{K-1} \sum_{[\alpha_{t,s}]} \prod_{s=1}^n \binom{\beta_s^*}{\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}, \dots, \alpha_{k,s}} \\ &\times \prod_{s=1}^n \left(2^{pgcd(c,s)/d} - 1 \right)^{\alpha_{1,s}} \times \prod_{t=1}^{k-1} \prod_{s=1}^n \left(2^{\sum_{m=1}^n \alpha_{t,m} pgcd(m,s)/d} - 1 \right)^{\alpha_{(t+1),s}} \\ &\times \prod_{t=1}^k \sum_{2^t \leq u < v \leq n} \alpha_{t,u} \alpha_{t,v} \frac{pgcd(u,v)}{d} + \sum_{u=1}^n \left(\frac{u \alpha_{t,u} (\alpha_{t,u} - 1)}{2d} + \lfloor u/2d \rfloor \right) \end{aligned} \quad (13)$$

où la seconde somme est indicée par la matrice $[\alpha_{t,s}]$, $1 \leq t \leq k$, $1 \leq s \leq n$, qui est telle que, pour tout s , on ait $\sum_{t=1}^k \alpha_{t,s} = \beta_s^*$ et, pour tout t , $\sum_{s=1}^n \alpha_{t,s} > 0$.

Preuve. Un membre de $Dis(d, \beta)$ est un couple (δ, Δ) où δ est un graphe connexe sur $C(\beta)$ et où Δ assigne à chaque arête $\{A, B\}$ de δ un ensemble d'orbites choisies dans $\Theta_\beta(\{A, B\})$, de manière à ce que, pour toute arête $\{A, B\}$, $(\delta_{|\{A, B\}}, \Delta_{|\{A, B\}})$ soit d -déconnecté.

Nous construisons d'abord les graphes connexes $\delta = (\pi, G, S)$ sur $C(\beta)$. Prenons $C_0 \in C(\beta)$ pour jouer le rôle du point u_0 dans la proposition 4.

Si $K = 1$ alors l'amplitude est nulle, la permutation β n'est constituée que de l'unique cycle C_0 . Par la proposition 10, il y a alors $2^{\lfloor c/2d \rfloor}$ graphes simples

qui sont laissés fixes par β et dont le nombre de composantes est divisible par d (il ne faut pas oublier le cas du graphe trivial qui n'est pas inclu dans l'analyse de la proposition 10). La proposition est démontrée dans ce cas.

Si $K > 1$, alors l'amplitude k peut varier de 1 à $K - 1$. Fixons k . On choisit une partition ordonnée π de $C(\beta^*)$ en k parts non-vides.

Ce choix doit tenir compte de la taille des cycles puisque, par la proposition 10, le nombre de manières d'obtenir des graphes d -déconnectés dépend de la taille des cycles avec lesquels on les construit. En fait, pour tout t , $1 \leq t \leq k$, et tout s , $1 \leq s \leq n$, on choisit $[\alpha_{ts}]$ cycles de longueur s pour constituer la t -ième part de la partition π . On voit alors pourquoi le terme

$$\prod_{s=1}^n \binom{\beta_s^*}{\alpha_{1,s}, \alpha_{2,s}, \dots, \alpha_{k,s}}$$

apparaît dans (12) et, de même, pourquoi la seconde somme est indicée par la matrice $[\alpha_{ts}]$.

Une fois la partition $\pi = (U_0, U_1, \dots, U_k)$ de $C(\beta)$ déterminée, il reste pour obtenir un membre de $Dis(d, \beta)$, à se donner d'abord un vecteur σ de k saturations $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_{k-1})$, $\forall i, \sigma_i \in Sat(U_i, U_{i+1})$, un vecteur g de $k + 1$ graphes simples (avec boucles) $g = (g_0, g_1, \dots, g_j)$, $\forall i, g_i \in Grb[U_i]$, ce qui donne un graphe connexe $G = (\pi, \sigma, g)$ sur $C(\beta)$, et, ensuite, à choisir pour chaque arête ϵ dans G , un ensemble d -déconnecté d'orbites $\Delta(\epsilon)$.

Commençons par énumérer le nombre de façon que l'on a de construire les saturations $\sigma \in Sat(\pi)$ ainsi que $\Delta(\epsilon)$, pour toute ϵ dans σ . On choisit d'abord les orbites initiales (au sens de la proposition 10). Puisqu'on veut obtenir un graphe d -déconnecté, il y a évidemment d^{K-1} manières de le faire. Soit $\xi \in C(\beta)$, $|\xi| = s_0$ tel que $\xi \in U_j$, $1 \leq j \leq k$. Si $j = 1$ alors il y a, par la proposition 10

$$\left(2^{pgcd(c, s_0)/d} - 1\right)$$

manières d'obtenir $\Delta(\{\xi, C_0\})$. Pour les mêmes raisons, si $j > 1$, alors on a

$$\prod_{s=1}^n \left(2^{\sum_{m=1}^n \alpha_{j,m} pgcd(m, s_0)/d} - 1\right)$$

choix possibles de déterminer $\{\Delta(\{\xi, C\}) : C \in U_{j-1}\}$. Ce qui donne un grand total de

$$\prod_{s=1}^n \left(2^{pgcd(c, s)/d} - 1\right)^{\alpha_{1,s}} \times \prod_{t=1}^{k-1} \prod_{s=1}^n \left(2^{\sum_{m=1}^n \alpha_{t,m} pgcd(m, s)/d} - 1\right)^{\alpha_{(t+1),s}}$$

façons de construire des saturations d —disconnectées une fois la partition π de $C(\beta^*)$ déterminée.

En se référant à la proposition 6, on voit facilement, toujours à l'aide de la proposition 10 que l'on a

$$2^{\lfloor c/2d \rfloor} \times \prod_{t=1}^k \sum_{2^1 \leq u < v \leq n} \alpha_{t,u} \alpha_{t,v} \frac{\text{pgcd}(u,v)}{d} + \sum_{u=1}^n \left(\frac{u \alpha_{t,u} (\alpha_{t,u} - 1)}{2d} + \lfloor u/2d \rfloor \right)$$

façon de construire la famille G de graphes simples d —disconnectés. Le choix des saturations étant indépendants du choix des graphes simples, la proposition 11 est démontrée.

Dans [11], p. 200, Gilbert Labelle donne la formule suivante: si M et N sont des espèces telles que $M = \exp(N)$ alors on a

$$Z_N(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log Z_M(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots).$$

Par (1), on obtient donc

$$Z_{Grz}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \log Z_{Grz}(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots).$$

D'autre part, par (12) et par définition de série indicatrice on a

$$\begin{aligned} Z_{Grz}(x_1, x_2, x_3, \dots) &= \sum_{\beta} \left(\sum_{d | \text{pgcd}(\beta)} \mu(d) \text{dis}(d, \beta) \frac{x^{\beta}}{\text{aut}(\beta)} \right) \\ &= \sum_{k \geq 1} \frac{\mu(k)}{k} \left(\sum_{\substack{\beta \\ k | \text{pgcd}(\beta)}} k \text{dis}(k, \beta) \frac{x^{\beta}}{\text{aut}(\beta)} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

où $x^{\beta} = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \dots x_n^{\beta_n}$ et $\text{aut}(\beta) = \prod_{i=1}^n i^{\beta_i} \beta_i!$. On peut donc faire la conjecture suivante:

$$\log Z_{Grz}(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots) = \left(\sum_{\substack{\beta \\ k | \text{pgcd}(\beta)}} k \text{dis}(k, \beta) \frac{x^{\beta}}{\text{aut}(\beta)} \right).$$

Bibliographie

1. C.C.Cadogan, *The Möbius Function and Connected Graphs*, J.Comb.Th., 11(1971), 193–200.
2. I.Constantineau, *Auto-similarité dans la combinatoire des polynômes orthogonaux*, Actes du Colloque: Séries Formelles et Combinatoire Algébrique, Bordeaux, Mai 1991 (à paraître).
3. I.Constantineau et J.Labelle, *Calcul Combinatoire du nombre d'endofonctions et d'arborescences laissées fixes par l'action d'une permutation*, Ann. Sc. Math. du Québec, Vol. XIII, no.2, (1989).
4. I.Constantineau et J.Labelle, *On Combinatorial Structures Kept Fixed by the Action of a Given Permutation*, Stu. in App. Maths., 84, 105–118 (1991).
5. I.Constantineau et J.Labelle, *On the Construction of Permutations of a Given Type Kept Fixed by Conjugation*, J.Comb.Th.A, (à paraître).
6. R.L.Davis, *The number of structures of finite relations*. Proc. Am. Maths. Soc., Vol.4, (1953), 486–494.
7. E.N.Gilbert, *Enumeration of Labelled Graphs*. Can.J.Maths., Vol.8, (1956), 405–411.
8. F.Harary, *The Number of Linear, Directed, Rooted, and Connected Graphs*, Trans. Am. Maths. Soc., 78 (1955), 445–463.
9. F.Harary et E.M.Palmer, "Graphical Enumeration", Academic Press, 1973.
10. P.Hanlon, *The Fixed-Point Partition Lattices*, Pac.J.Maths., Vol.96, No.2, 1981.
11. G.Labelle, *Some New Computational Methods in the Theory of Species*, dans *Combinatoire Énumérative, Montréal, Québec 1985, Proceedings*, G.Labelle et P.Leroux, éditeurs. LNM no. 1234, Springer-Verlag (1986), 192–209.
12. G.Labelle, *The computation on the cycle index series of some combinatorial species*, Notes: Combinatorial Year, MIT, (1984).
13. G.Labelle, *The Cyclic Type of Combinatorial Species*, Notes: Session on Enumerative Combinatorics, 819th Meeting of the AMS, (1985).
14. J.Labelle, *Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures*, Ann. Sc. Math. du Québec, Vol.7, No.1, (1983), 59–94.
15. P.Leroux, *Methoden der Anzahlbestimmung für einige Klassen von Graphen*, Bayreuther Mathematische Schriften, No.26, (1988), 1–36.
16. L.Lovász, "Combinatorial Problems and Exercises", North-Holland, 1979.
17. J.W. Moon, "Topics on Tournaments", Hewitt ed.; Athena Series; Holts, Rinehart and Winston, 1968.
18. R.W. Robinson, *Enumeration of non-separable Graphs*, J.Comb.Th., 9, 327–356 (1970).

