

MODELES A SPINS, INVARIANTS D'ENTRELACS, ET SCHEMAS D'ASSOCIATION

François Jaeger,
Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique,
IMAG, Grenoble.

1. INTRODUCTION

Depuis la découverte du polynôme de Jones en 1984 [Jo1] on a assisté en Théorie des Noeuds à une floraison d'idées qui établissent des relations nouvelles entre Topologie, Algèbre, Physique et Combinatoire. L'une des plus intéressantes de ces idées, dont les premiers inventeurs ont été Jones [Jo2], Kauffman [K2] et Turaev [Tur], consiste à utiliser des modèles de Mécanique Statistique pour définir des invariants de noeuds ou d'entrelacs. Dans ce contexte l'utilisation des modèles à vertex est étroitement liée à la théorie des groupes quantiques qui depuis les travaux de Drinfeld [Dr] a connu un développement considérable. En ce qui concerne l'utilisation des modèles à spins la situation n'est pas aussi claire mais il semble bien que la théorie des schémas d'association puisse jouer un rôle important. Le but de cet exposé est de donner quelques arguments à l'appui de cette dernière affirmation, en présentant rapidement au préalable les notions de base du sujet.

2. INVARIANTS DE NOEUDS ET D'ENTRELACS

Pour une présentation plus détaillée ou plus rigoureuse de ce qui suit le lecteur pourra se reporter à [BZ], [C], [K1], [K3], [L], [LM].

Un *entrelacs* est constitué d'un nombre fini de *composantes* qui sont des courbes simples fermées disjointes plongées dans l'espace usuel \mathbb{R}^3 . Un entrelacs est dit *orienté* si chaque composante est munie d'une orientation. Un *noeud* est un entrelacs à une seule composante. Deux entrelacs seront dits

équivalents s'il existe une isotopie de l'espace ambiant \mathbb{R}^3 qui transforme l'un en l'autre, en préservant les orientations s'il s'agit d'entrelacs orientés. Cette relation d'équivalence est l'objet central d'étude de la Théorie des Noeuds.

On s'intéressera ici seulement aux entrelacs dits "apprivoisés" qui sont équivalents à des entrelacs formés de courbes polygonales. Un tel entrelacs peut être représenté par un *diagramme*, c'est à dire une projection plane "générique" ne comportant qu'un nombre fini de points multiples qui sont tous des croisements simples. Pour chaque croisement on indique sur le diagramme quel segment de l'entrelacs passe au-dessus de l'autre, et s'il y a lieu l'orientation des composantes est représentée par des flèches (on parlera alors de *diagramme orienté*). Des exemples sont présentés à la Figure 1.

Il est possible d'aborder la Théorie des Noeuds d'un point de vue combinatoire grâce au Théorème de Reidemeister. Ce Théorème affirme que deux diagrammes représentent des entrelacs équivalents si et seulement si l'un peut s'obtenir à partir de l'autre par une suite finie de transformations élémentaires très simples appelées *mouvements de Reidemeister*. Ces mouvements peuvent être classés en trois types qui sont décrits Figure 2. Un mouvement s'effectue en sélectionnant une région du plan (homéomorphe à un disque) à l'intérieur de laquelle le diagramme se comporte comme l'une des configurations de la Figure 2, et en remplaçant localement cette configuration par une configuration équivalente sans modifier l'extérieur de la région concernée. Pour les diagrammes orientés on devra considérer plusieurs versions pour chaque mouvement, obtenues en considérant toutes les orientations possibles des configurations échangées par ce mouvement.

On peut donc identifier une classe d'équivalence d'entrelacs à une classe d'équivalence de diagrammes pour la relation engendrée par les mouvements de Reidemeister. Il n'est évidemment pas question de réduire la Théorie des Noeuds à cette formulation qui écarte d'emblée l'approche classique très fructueuse consistant à étudier avec les méthodes de la

Topologie Algébrique ou de la Géométrie diverses variétés de dimension 3 associées à l'entrelacs (en particulier son complémentaire dans \mathbf{R}^3). Toutefois le point de vue combinatoire s'avère très utile en ce qui concerne la construction, l'étude et le calcul effectif d'*invariants* (que l'on définit alors comme des valuations des diagrammes qui sont invariantes par mouvements de Reidemeister). C'était déjà le cas quand Alexander introduisait son célèbre polynôme [A], cela l'est encore davantage aujourd'hui, après les avancées spectaculaires qui ont suivi la découverte du polynôme de Jones [Jo1]. En particulier la construction d'invariants à partir de modèles de Mécanique Statistique se prête bien à une description combinatoire (parallèlement à d'autres descriptions algébriques en termes de groupes de tresses, catégories tensorielles, groupes quantiques...). Signalons enfin que l'approche combinatoire a permis la résolution de vieilles conjectures issues des travaux de Tait au siècle dernier. Par exemple l'étude du polynôme de Jones des "diagrammes alternés réduits" (qui peut se voir comme une évaluation particulière du classique polynôme de Tutte [Tut] d'un graphe planaire associé) permet de montrer que ces diagrammes réalisent le nombre minimum de croisements dans leur classe d'équivalence ([K2], [M], [Thi]).

3. MODELES A SPINS

Nous ne présenterons pas ici les modèles à spins tels qu'ils sont définis et étudiés en Mécanique Statistique ou en Théorie des Graphes (le lecteur pourra consulter [Ba], [Bi], [Tem] pour le premier domaine et [HJa], [HJo], [Tut] pour le deuxième). Nous étudierons leur application à la construction d'invariants d'entrelacs telle qu'elle est décrite dans l'article fondamental de Jones [Jo3], nous limitant donc aux modèles à spin symétriques. Signalons cependant que des extensions non symétriques très intéressantes ont été introduites récemment ([KMW], [BB1]) et que certains des résultats donnés ci-dessous peuvent être généralisés dans ce contexte [BB3].

Considérons un diagramme non orienté connexe L et colorions les régions du plan délimitées par le diagramme en deux couleurs, blanc et noir, de sorte que deux régions adjacentes n'ont jamais la même couleur (il est facile de voir que ceci est toujours possible) et que la région infinie est blanche. Associons à tout croisement c du diagramme L son *signe* $s(c) \in \{+, -\}$ qui est défini comme indiqué à la Figure 3. Appelons *état* du diagramme L toute application σ de l'ensemble $N(L)$ de ses régions noires dans un ensemble fini non vide X de *spins*. Dans la suite on posera $n = |X|$. Introduisons deux *matrices de poids* $n \times n$ complexes symétriques W^+ et W^- dont les lignes et les colonnes sont indexées par X et définissons pour tout croisement c du diagramme L incident aux régions noires r et s (éventuellement confondues) le *poids* $w(c/\sigma)$ du croisement c relativement à l'état σ comme l'élément de matrice $W^{s(c)}[\sigma(r), \sigma(s)]$. Le *poids* $w(\sigma)$ de l'état σ est alors le produit des $w(c/\sigma)$ sur tous les croisements c (par convention ce poids est 1 si le diagramme L n'a pas de croisements) et la *fonction de partition* $Z(L)$ est la somme des poids $w(\sigma)$ sur tous les états σ .

Considérons maintenant un diagramme orienté L^\wedge ayant pour diagramme non orienté sous-jacent L . On affecte à chaque croisement de L^\wedge la valeur $+1$ ou -1 comme indiqué à la Figure 4. Le *nombre de Tait* $T(L^\wedge)$ de L^\wedge est la somme de ces valeurs sur tous les croisements. Etant donnés deux nombres complexes a et D avec $D^2 = n = |X|$, on associe à L^\wedge la fonction de partition normalisée $Z'(L^\wedge) = a^{-T(L^\wedge)} D^{-|N(L)|} Z(L)$. On étend la définition de $Z'(L^\wedge)$ aux diagrammes non connexes en associant à un tel diagramme le produit des fonctions de partition de ses composantes connexes.

Notons I la matrice identité, J la matrice dont tous les éléments valent 1 (les dimensions seront données par le contexte), et $A \circ B$ le *produit d e Hadamard* des matrices A et B (de même type) défini par $(A \circ B)[i,j] = A[i,j] B[i,j]$ pour tous les indices i,j . Le résultat suivant est dû à Jones [Jo3].

Proposition 1 : La fonction Z' est un invariant d'entrelacs orientés si les équations suivantes sont satisfaites.

$$(1) I_0 W^+ = a I, I_0 W^- = a^{-1} I.$$

$$(2) J W^+ = W^+ J = D a^{-1} J, J W^- = W^- J = D a J.$$

$$(3) W^+ W^- = n I.$$

$$(4) W^+ \circ W^- = J.$$

(5) Quels que soient α, β, γ dans X ,

$$\sum_{x \in X} W^+[\alpha, x] W^+[x, \beta] W^-[x, \gamma] = D W^+[\alpha, \beta] W^-[\alpha, \gamma] W^-[\beta, \gamma].$$

Preuve : On vérifie facilement que le nombre de Tait est invariant par les mouvements de Reidemeister de type II et III, augmente de 1 pour l'un des mouvements de type I et diminue de 1 pour l'autre. Plus précisément, avec les notations de la Figure 2, le nombre de Tait augmente de 1 si on remplace C par C' et diminue de 1 si on remplace C par C'' . Considérons la configuration C' et supposons d'abord que la boucle entoure une région blanche. Le croisement incident a donc le signe $+$. Il y a une bijection évidente entre les états du diagramme L' correspondant à C' et les états du diagramme L correspondant à C . Si $I_0 W^+ = a I$, c'est à dire si chaque élément diagonal de W^+ est égal à a , le poids d'un état quelconque de L' est égal au poids de l'état correspondant de L multiplié par a , et donc $Z(L') = aZ(L)$. Ceci implique l'invariance de Z' puisque $|N(L')| = |N(L)|$. Si maintenant la boucle entoure une région noire r (le croisement incident a donc le signe $-$), on peut associer à chaque état σ de L les n états de L' qui coïncident avec σ sur les régions noires autres que r . Si $J W^- = W^- J = D a J$, c'est à dire si la somme des éléments de chaque ligne ou colonne de W^- est égale à $D a$, il est facile de voir que la contribution de ces n états à $Z(L')$ est égale au poids de σ multiplié par $D a$. On en déduit que $Z(L') = D a Z(L)$ et l'invariance de Z' s'ensuit puisque $|N(L')| = |N(L)| + 1$. En analysant de la même manière les relations entre les configurations C et C'' on voit que les équations (1) et (2) impliquent l'invariance de Z' par les mouvements de Reidemeister de type I.

On procède de même pour montrer l'invariance par les autres mouvements de Reidemeister : on compare les contributions aux fonctions de partition de deux ensembles d'états définis par l'affectation des mêmes valeurs aux régions noires communes aux deux diagrammes considérés. Les équations (3) et (4) correspondent aux deux cas possibles de coloration des régions pour un mouvement de type II (pour (3) le cas où le nombre de composantes connexes est modifié par le mouvement nécessite une attention particulière). Les deux cas de coloration des régions pour le mouvement de type III se confondent par symétrie et correspondent à l'équation (5). ||

Dans la suite dans un souci de concision nous appellerons *modèle à spins de module a et variable de boucle D* un triplet (X, W^+, W^-) où X est un ensemble fini avec $|X| = D^2 = n \geq 2$, et W^+, W^- sont deux matrices $n \times n$ complexes symétriques dont les lignes et les colonnes sont indexées par X vérifiant les équations (1)-(5) de la Proposition 1.

La classification complète de ces objets et des invariants d'entrelacs associés semble tout à fait hors de portée. Toutefois un certain nombre de résultats partiels ont été obtenus et font intervenir de façon naturelle la structure de schéma d'association beaucoup étudiée en Combinatoire Algébrique. C'est ce dernier point que nous nous proposons d'illustrer maintenant.

4. LE POLYNÔME DE JONES

Le modèle à spins le plus classique en Mécanique Statistique est le modèle de Potts (qui dans le cas de deux spins n'est autre que le célèbre modèle d'Ising). Il se caractérise par des matrices de poids dont les éléments peuvent prendre seulement deux valeurs, l'une sur la diagonale et l'autre en dehors. Dans le contexte de la Théorie des Graphes ce type de modèle à spins a été introduit par Tutte sous le nom de polynôme dichromatique [Tut].

Si l'on s'intéresse à ce type de modèles dans le contexte des invariants d'entrelacs, on est conduit à chercher des solutions W^+ , W^- aux équations (1)-(5) qui soient des combinaisons linéaires de I et J . Les équations (1) et (4) conduisent à poser $W^+ = aI + b(J-I)$ et $W^- = a^{-1}I + b^{-1}(J-I)$. Les équations (2) donnent alors $a + (n-1)b = D a^{-1}$, $a^{-1} + (n-1)b^{-1} = D a$, d'où l'on tire (en utilisant le fait que $n \neq 1$) $a = b + D b^{-1}$ et $a^{-1} = b^{-1} + D b$. On en déduit que $D = -b^2 - b^{-2}$ et $a = -b^{-3}$. On vérifie alors facilement les équations (3) et (5); l'invariant d'entrelacs associé à ce modèle à spins n'est autre que le polynôme de Jones (voir par exemple [H]).

5. LE POLYNÔME DE KAUFFMAN

Cet invariant introduit dans [K4] associe à tout diagramme orienté L^\wedge un polynôme de Laurent $F(L^\wedge, a, z)$ à deux variables a, z et généralise le polynôme de Jones. Le polynôme de Laurent $a^{T(L^\wedge)} F(L^\wedge, a, z)$ ne dépend pas de l'orientation de L^\wedge et nous le noterons $F(L, a, z)$, où L désigne le diagramme non orienté sous-jacent à L^\wedge . $F(L, a, z)$ peut être caractérisé par la "relation d'échange" suivante : si quatre diagrammes (non orientés) L^+ , L^- , L^0 et L^∞ se comportent comme indiqué à la Figure 5 dans un disque et sont identiques à l'extérieur de ce disque, $F(L^+, a, z) + F(L^-, a, z) = zF(L^0, a, z) + zF(L^\infty, a, z)$ (il existe une autre version où les additions sont remplacées par des soustractions mais elle est essentiellement équivalente à la précédente). Il est alors naturel, si l'on cherche des modèles à spins (X, W^+, W^-) dont l'invariant associé est une évaluation du polynôme de Kauffman, d'adjoindre aux équations (1)-(5) l'équation

$$(6) \quad W^+ + W^- = z D I + z J.$$

En effet l'équation (6) exprime que la quantité $D^{-|N(L)|} Z(L)$ associée au modèle à spins considéré vérifie "localement" la relation d'échange ci-dessus ([Ja1], Section 3.1).

Dans ce qui suit nous supposerons que les matrices W^+ , I et J sont linéairement indépendantes (sinon nous sommes ramenés au cas étudié au paragraphe précédent qui correspond au polynôme de Jones).

En considérant les éléments de matrice diagonaux dans l'équation (6) et en utilisant (1) on obtient la relation $a+a^{-1} = zD + z$, qui déterminera la variable z de Kauffman puisque $D \neq -1$. Par ailleurs il est facile de voir que la variable a du polynôme de Kauffman s'identifiera au module a (intervenant dans les équations (1) et (2)) du modèle à spins. Pour plus de détails on pourra se reporter à [H], [Ja1].

Considérons maintenant les éléments de matrice non diagonaux et posons $W^+[x,y] = u$ pour deux éléments différents x, y de X . D'après (4) $u \neq 0$ et $W^-[x,y] = u^{-1}$. L'équation (6) donne alors $u + u^{-1} = z$. Cette dernière équation a deux solutions t et t^{-1} qui sont distinctes (sinon on aurait $W^+ = aI \pm (J - I)$).

Soient alors A_1 et A_2 deux matrices à lignes et colonnes indexées par X définies comme suit :

- (i) $A_1[x,x] = A_2[x,x] = 0$ pour tout x dans X .
- (ii) Pour deux éléments différents x, y de X , $A_1[x,y] = 1$, $A_2[x,y] = 0$ si $W^+[x,y] = t$, et $A_1[x,y] = 0$, $A_2[x,y] = 1$ si $W^+[x,y] = t^{-1}$.

Il est clair que l'on peut alors écrire

$$(7) \quad W^+ = aI + t A_1 + t^{-1} A_2, \quad W^- = a^{-1}I + t^{-1} A_1 + t A_2.$$

Remarquons que les matrices A_1 et A_2 peuvent s'interpréter comme les matrices d'adjacence de deux graphes simples G et \bar{G} complémentaires sur l'ensemble de sommets X . Nous souhaitons donc savoir quels graphes permettent de définir un modèle à spins par les relations (7).

Soit \mathcal{A} l'espace vectoriel sur \mathbf{C} engendré par I, J , et W^+ . Ces trois matrices forment donc une base de \mathcal{A} . Il est facile de déduire de (7) et de la relation évidente $J = I + A_1 + A_2$ que I, A_1, A_2 forment aussi une base de \mathcal{A} . Posons $A_0 = I$. Comme $A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker) pour tous i, j dans $\{0,1,2\}$, \mathcal{A} est fermé par produit de Hadamard (ceci découle aussi

directement des équations (1), (4) et (6)). Il est également facile de vérifier en utilisant les équations (2), (3), et (6) que \mathcal{A} est fermé par produit ordinaire de matrices. En exprimant cette propriété dans la base $\{I, A_1, A_2\}$ on voit que ceci implique l'existence d'entiers naturels k, λ, μ tels que

$$(8) \quad A_1^2 = kI + \lambda A_1 + \mu A_2 .$$

L'équation (8) peut s'interpréter combinatoirement de la façon suivante : le graphe G de matrice d'adjacence A_1 (qui a donc n sommets) est régulier de degré k ; de plus deux sommets distincts quelconques ont exactement λ voisins communs s'ils sont adjacents et exactement μ voisins communs s'ils sont non adjacents. Autrement dit (voir par exemple [BCN], [S1]), G est un *graphe fortement régulier* de paramètres (n, k, λ, μ) .

Le graphe G a une autre propriété très intéressante, il est (*formellement*) *autodual*. Classiquement cette propriété est définie comme suit. On montre que \mathcal{A} admet une base $\{E_0, E_1, E_2\}$ de matrices vérifiant $E_i E_j = \delta_{ij} E_i$ (pour tous i, j dans $\{0,1,2\}$), $E_0 = \frac{J}{n}$, $E_0 + E_1 + E_2 = I$. Cette base est constituée d'idempotents orthogonaux pour le produit ordinaire, tout comme la base $\{A_0, A_1, A_2\}$ est constituée d'idempotents orthogonaux pour le produit de Hadamard. On introduit alors la matrice P de passage entre ces deux bases définie par $A_j = \sum_{i=0,1,2} P_{ij} E_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Le graphe fortement régulier G est dit *formellement autodual* si l'on peut choisir les indices des idempotents de sorte que $P^2 = n I$. On montrera sans difficulté (en se plaçant dans la base $\{E_0, E_1, E_2\}$) que ceci équivaut à l'existence d'une application linéaire Ψ de \mathcal{A} dans \mathcal{A} , que nous appellerons une *dualité*, satisfaisant les propriétés suivantes:

$$(9) \quad \Psi(MN) = \Psi(M) \circ \Psi(N), \text{ pour tous } M, N \text{ dans } \mathcal{A} ,$$

$$(10) \quad \Psi^2 = n \text{ Id.}$$

Considérons alors l'unique application linéaire Ψ de \mathcal{A} dans \mathcal{A} telle que $\Psi(I) = J$, $\Psi(J) = n I$ et $\Psi(W^+) = D W^-$. On peut vérifier que Ψ est une dualité. En effet (10) se ramène à la relation $\Psi(W^-) = D W^+$, qui découle immédiatement de (6). D'autre part (9) s'obtient en comparant (voir ci-dessous) la table du

produit ordinaire dans la base $\{I, J, W^+\}$ et la table du produit de Hadamard dans la base $\{J, nI, DW^-\}$.

$$\begin{array}{cccc}
 & I & J & W^+ \\
 I & I & J & W^+ \\
 J & J & nJ & Da^{-1}J \\
 W^+ & W^+ & Da^{-1}J & -nI + zDa^{-1}J + zDW^+
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 o & J & nI & DW^- \\
 J & J & nI & DW^- \\
 nI & nI & n(nI) & Da^{-1}(nI) \\
 DW^- & DW^- & Da^{-1}(nI) & -nJ + zDa^{-1}(nI) + zD(DW^-)
 \end{array}$$

Le principal résultat de [Ja1] (voir également [H]) affirme qu'un graphe fortement régulier G est associé à un modèle à spins correspondant à une évaluation du polynôme de Kauffman (distincte du polynôme de Jones) si et seulement si :

- (i) G est autodual,
- (ii) G et \bar{G} sont tous deux connexes pour $n \geq 5$,
- (iii) pour tout sommet v , les voisins de v induisent un sous-graphe fortement régulier de G , et les autres sommets (v exclu) induisent également un tel sous-graphe.

En outre les matrices de poids du modèle peuvent être calculées facilement à partir du graphe.

Les exemples actuellement connus de tels graphes (en se limitant aux évaluations topologiquement non triviales du polynôme de Kauffman) sont (voir [CGS]) le carré, le pentagone (les modèles associés sont étudiés dans [Jo4]), les "lattice graphs" (somme cartésienne de deux graphes complets de même taille) et le graphe de Higman-Sims [HiS] de paramètres (100, 22, 0, 6).

6. MODELES A SPINS ET SCHEMAS D'ASSOCIATION

La notion de graphe fortement régulier a une généralisation naturelle, celle de schéma d'association symétrique (pour plus de détails le lecteur pourra consulter [BI], [BCN], [De], [S2], [Ter]). Un schéma d'association symétrique à d classes sur un ensemble fini non vide X est une partition de $X \times X$ en $d+1$ relations symétriques non vides R_i , $i = 0, \dots, d$, où $R_0 = \{(x,x) / x \in X\}$, qui satisfait la propriété suivante:

(i) Pour tous i, j, k dans $\{0, \dots, d\}$ il existe un entier p_{ij}^k tel que, pour tous x, y dans X avec (x,y) dans R_k , $|\{z \in X / (x,z) \in R_i, (z,y) \in R_j\}| = p_{ij}^k$.

La notion de graphe fortement régulier correspond au cas $d = 2$.

Soit \mathcal{A} l'espace vectoriel sur \mathbf{C} engendré par les matrices d'adjacence A_i des relations R_i , $i = 0, \dots, d$. Il est clair que \mathcal{A} contient I et J et est fermé par produit de Hadamard. De plus (i) implique que \mathcal{A} est également fermé par produit ordinaire de matrices. \mathcal{A} est l'algèbre de Bose-Mesner du schéma d'association [BM]. Inversement on peut montrer ([BCN], Th. 2.6.1) que tout espace vectoriel sur \mathbf{C} de matrices symétriques contenant I et J et fermé par produit de Hadamard et par produit ordinaire est l'algèbre de Bose-Mesner d'un schéma d'association symétrique.

Dans [Ja1] on s'intéresse aux modèles à spins (X, W^+, W^-) tels que W^+, W^- appartiennent à l'algèbre de Bose-Mesner \mathcal{A} d'un schéma d'association symétrique sur X . On montre en particulier que si W^+ et J suffisent à engendrer \mathcal{A} par produit ordinaire, il existe une (et une seule) dualité Ψ (la définition est la même que pour les graphes fortement réguliers) telle que $\Psi(I) = J$, $\Psi(J) = n I$, $\Psi(W^+) = D W^-$ et $\Psi(W^-) = D W^+$. De plus les équations (1)-(5) prennent alors une forme plus simple.

Pratiquement tous les modèles à spins (symétriques) découverts à ce jour entrent dans le cadre ci-dessus. Nous avons déjà parlé des modèles associés au polynôme de Jones (c'est le cas $d = 1$) et au polynôme de Kauffman (c'est le cas $d = 2$). Un autre modèle à spins intéressant dû à Goldschmidt et Jones

([GJ], [Jo3]) appartient au schéma d'association symétrique du groupe des entiers modulo n , n impair. Ce schéma est défini sur $X = \{0, \dots, n-1\}$ par les relations $R_i = \{(x, y) / x-y \equiv \pm i \pmod{n}\}$ pour $i = 0, \dots, d = \frac{n-1}{2}$. On pose $W^+[x, y] = \omega^{(x-y)^2}$, $W^-[x, y] = \omega^{-(x-y)^2}$, où ω est une racine primitive n ième de l'unité. De façon équivalente, $W^+ = \sum_{i=0, \dots, d} \omega^{i^2} A_i$ et $W^- = \sum_{i=0, \dots, d} \omega^{-i^2} A_i$. Les équations (1)-(5) peuvent être vérifiées sans difficulté ($a = 1$; D est donné par une somme de Gauss et son signe dépend du choix de ω). L'invariant d'entrelacs associé a une interprétation topologique de type classique (en termes de l'homologie d'une variété de dimension 3 associée à l'entrelacs). La dualité Ψ correspondante est définie par $\Psi(A_0) = \sum_{i=0, \dots, d} A_i$ (c'est à dire $\Psi(I) = J$) et $\Psi(A_j) = \sum_{i=0, \dots, d} (\omega^{2ij} + \omega^{-2ij}) A_i$ pour $j \neq 0$. Elle peut être considérée comme une transformée de Fourier discrète. Ces modèles de Goldschmidt et Jones ont été généralisés au cas non symétrique ([KMW], [BB2]).

Le cas des schémas de Hamming (X est un ensemble de mots de longueur donnée d sur un alphabet fini à q lettres et les relations R_i correspondent aux différentes valeurs possibles de la distance de Hamming) est étudié dans [BBIK]. Les modèles à spins obtenus peuvent être construits comme produits de modèles à q spins associés au polynôme de Jones (voir [H], Section 5.3).

Plus récemment Nomura [N1] a découvert des modèles à spins appartenant aux schémas d'association des graphes de Hadamard. Ces graphes, construits à partir de matrices de Hadamard, sont distance-réguliers de diamètre 4. Autrement dit (voir par exemple [BCN]), si X est l'ensemble des sommets d'un tel graphe G , et si l'on pose $R_i = \{(x, y) / x \text{ et } y \text{ sont à distance } i \text{ dans } G\}$, on obtient un schéma d'association symétrique à 4 classes. Les modèles de Nomura correspondent aux dualités de tels schémas. L'invariant d'entrelacs associé peut être calculé à partir des polynômes de Jones des différents "sous-diagrammes" d'un diagramme [Ja2].

Il est naturel de se demander si l'on perd beaucoup en généralité en se limitant aux modèles à spins dont les matrices de poids appartiennent à une algèbre de Bose-Mesner. Voici quelques éléments de réponse.

Les résultats suivants sont présentés dans [BJS]. Tout modèle à spins (symétrique) pour $n \leq 7$ appartient à une algèbre de Bose-Mesner. D'autre part pour tout modèle à spins (X, W^+, W^-) il existe une partition des arêtes du graphe simple complet sur X en graphes réguliers non vides de matrices d'adjacence $A_i, i = 1, \dots, d$, telles que W^+, W^- sont des combinaisons linéaires de I et des A_i . De plus si $d \leq 3$, I et les A_i engendrent une algèbre de Bose-Mesner.

Toutefois une construction récente de Nomura [N2] pourrait fournir des exemples de modèles à spins n'appartenant pas à une algèbre de Bose-Mesner.

En tout état de cause, se placer dans le cadre des algèbres de Bose-Mesner pour l'étude des modèles à spins présente un double intérêt [Ja3]. Du point de vue des invariants d'entrelacs, d'une part la résolution des équations de la Proposition 1 est simplifiée, et d'autre part on peut espérer obtenir des algorithmes de calcul plus performants que celui fondé sur l'énumération exhaustive des états. Par ailleurs, du point de vue des schémas d'association, cette approche conduit à introduire de nouvelles notions qui méritent d'être étudiées indépendamment de leurs applications éventuelles aux invariants d'entrelacs.

BIBLIOGRAPHIE

[A] J.W. ALEXANDER, Topological invariants of knots and links, Trans. Am. Math. Soc. 30 (1928), 275-306.

[BB1] E. BANNAI, E. BANNAI, Generalized generalized spin models (four-weight spin models), Pacific J. Math., à paraître.

- [BB2] E. BANNAI, E. BANNAI, Spin models on finite cyclic groups, prépublication, 1992.
- [BB3] E. BANNAI, E. BANNAI, Generalized spin models and association schemes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, à paraître.
- [BBIK] E. BANNAI, E. BANNAI, T. IKUTA, K. KAWAGOE, Spin models constructed from the Hamming association schemes $H(d,q)$, prépublication, 1992.
- [BI] E. BANNAI, T. ITO, Algebraic Combinatorics I, Association schemes, Benjamin/Cummings, Menlo Park, 1984.
- [BJS] E. BANNAI, F. JAEGER, A. SALI, Classification of small spin models, en préparation.
- [Ba] R.J. BAXTER, Exactly solved models in statistical mechanics, Academic Press, 1982.
- [Bi] N.L. BIGGS, Interaction models, London Math. Soc. Lecture Notes 30, Cambridge University Press, 1977.
- [BM] R.C. BOSE, D.M. MESNER, On linear associative algebras corresponding to association schemes of partially balanced designs, Ann. Math. Statist. 30 (1959), 21-38.
- [BCN] A.E. BROUWER, A.M. COHEN, A. NEUMAIER, Distance-regular graphs, Springer-Verlag, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Band 18, 1989.
- [BZ] G. BURDE, H. ZIESCHANG, Knots, de Gruyter, Berlin, New York, 1985.
- [C] P. CARTIER, Développements récents sur les groupes de tresses, applications à la topologie et à l'algèbre, Séminaire Bourbaki, 42ème année, 1989-90, n°716.
- [CGS] P. J. CAMERON, J. M. GOETHALS, J.J. SEIDEL, Strongly regular graphs having strongly regular subconstituents, J. Algebra 55 (1978), 257-280.
- [De] P. DELSARTE, An algebraic approach to the association schemes of coding theory, Philips Research Reports Supplements 10 (1973).

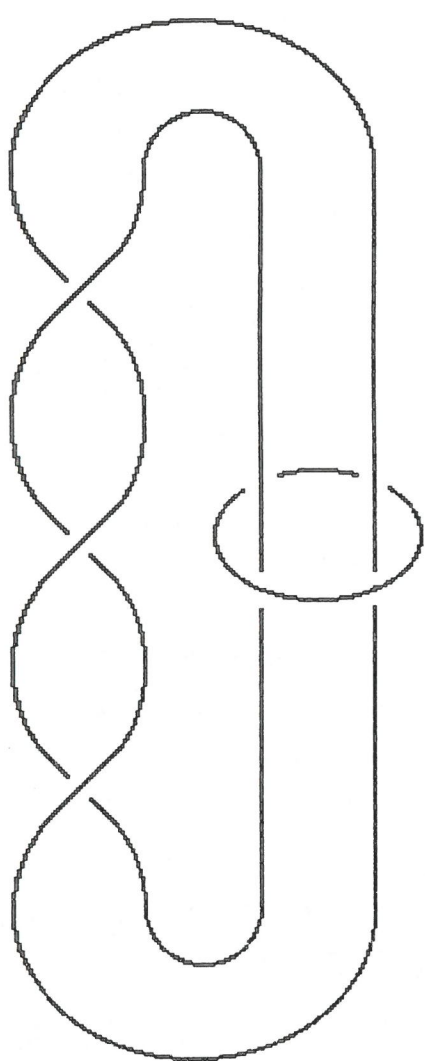
- [Dr] V.G. DRINFELD, Quantum Groups, Proc. Int. Congress Math., Berkeley, (1986), 798-820.
- [GJ] D.M. GOLDSCHMIDT, V.F.R. JONES, Metaplectic link invariants, Geom. Dedicata 31 (1989), 165-191.
- [H] P. de la HARPE, Spin models for link polynomials, strongly regular graphs and Jaeger's Higman's-Sims model, Pacific J. of Math. , à paraître.
- [HJa] P. de la HARPE, F. JAEGER, Chromatic invariants for finite graphs : theme and polynomial variations, soumis pour publication.
- [HJo] P. de la HARPE, V.F.R. JONES, Graph invariants related to statistical mechanical models : examples and problems, J. Combin.Th. B 57 (1993) 2, 207-227.
- [HiS] D.G. HIGMAN, C.C. SIMS, A simple group of order 44, 352, 000, Math. Zeitschr. 105 (1968), 110-113.
- [Ja1] F. JAEGER, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, Geom. Dedicata 44 (1992), 23 -52.
- [Ja2] F. JAEGER, On Nomura's Hadamard spin models and the Jones polynomial, en préparation.
- [Ja3] F. JAEGER, On spin models, triply regular association schemes, and duality, soumis pour publication.
- [Jo1] V.F.R. JONES, A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras, Bull. Am. Math. Soc. 12 (1985), 103-111.
- [Jo2] V.F.R. JONES, Notes on a talk in Atiyah's seminar, November 1986.
- [Jo3] V.F.R. JONES, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pacific J. of Math. 137 (1989) 2, 311 -334.
- [Jo4] V.F.R. JONES, On a certain value of the Kauffman polynomial, Comm. Math. Phys. 125 (1989), 459-467.
- [K1] L.H. KAUFFMAN, On Knots, Annals of Mathematical Studies 115, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1987.

- [K2] L.H. KAUFFMAN, State models and the Jones polynomial, *Topology* 26 (1987), 395-407.
- [K3] L.H. KAUFFMAN, New invariants in the theory of knots, *Amer. Math. Monthly* 95 n°3 (1988), 195-242.
- [K4] L.H. KAUFFMAN, An invariant of regular isotopy, *Trans. AMS*, 318 (2) 1990, 417-471.
- [KMW] K. KAWAGOE, A. MUNEMASA, Y. WATATANI, Generalized spin models, soumis pour publication.
- [L] W.B.R. LICKORISH, Polynomials for links, *Bull. London Math. Soc.* 20 (1988), 558-588.
- [LM] W.B.R. LICKORISH, K. MILLETT, The new polynomial invariants of knots and links, *Math. Magazine* 61 (1988), 3-23.
- [M] K. MURASUGI, Jones polynomials and classical conjectures in knot theory, *Topology* 26 (1987), 187-194.
- [N1] K. NOMURA, Spin models constructed from Hadamard matrices, *J. of Combin. Th. A*, à paraître.
- [N2] K. NOMURA, Twisted extensions of spin models, prépublication, Juin 1993.
- [S1] J.J. SEIDEL, Strongly regular graphs, in : *Surveys in Combinatorics*, Bela Bollobas editor, *London Math. Soc. Lecture Notes Series* 38, Cambridge University Press, 1979, 157-180.
- [S2] J.J. SEIDEL, Introduction to association schemes, *Actes du Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 26^{ième} Session, A. Kerber éditeur, publications de l'IRMA, Strasbourg, 1992, 77-92.
- [Tem] H.N.V. TEMPERLEY, Lattice models in discrete statistical mechanics, in "Applications of Graph Theory", R.J. Wilson and L.W. Beineke editors, pp. 149-175, Academic Press, London, 1979.
- [Ter] P. TERWILLIGER, The subconstituent algebra of an association scheme (Part I), *J. of Alg. Combin.* 1 (1992) 4, 363-388.

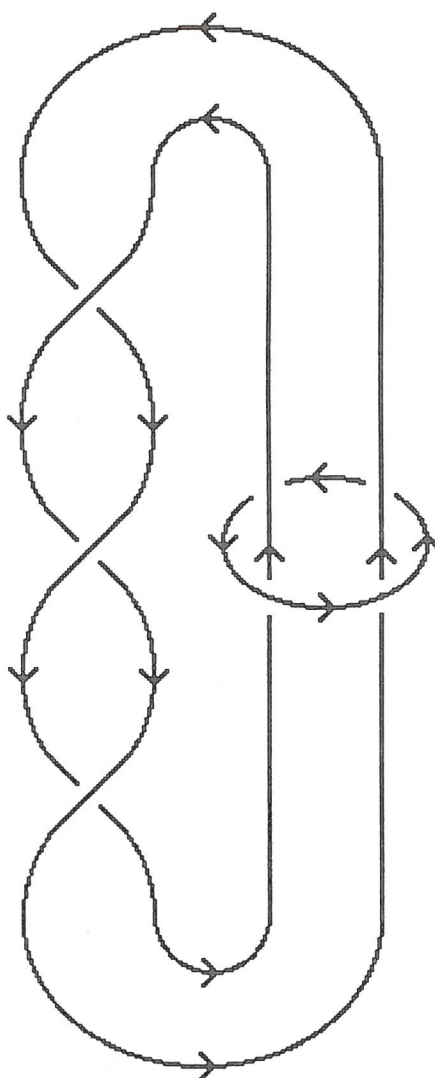
[Thi] M.B. THISTLETHWAITE, A spanning tree expansion of the Jones polynomial, *Topology* 26 (1987), 297-309.

[Tur] V.G. TURAEV, The Yang-Baxter equation and invariants of links, *Invent. Math.* 92 (1988), 527-553.

[Tut] W.T. TUTTE, On dichromatic polynomials, *J. Combinatorial Theory* 2 (1967), 301 - 320.



Un diagramme



Un diagramme orienté

Figure 1

