Invariants de graphes liés aux gaz imparfaits

Amel Kaouche, LaCIM - UQAM

Septembre 2008, 61^{e} Séminaire Lotharingien de Combinatoire

En collaboration avec Pierre Leroux

Contenu de l'exposé

- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes

Contenu de l'exposé

- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes
- Propriété de multiplicativité du poids de Mayer

CONTENU DE L'EXPOSÉ

- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes
- Propriété de multiplicativité du poids de Mayer
- Interprétation des poids en termes de volumes signés de polytopes

CONTENU DE L'EXPOSÉ

- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes
- Propriété de multiplicativité du poids de Mayer
- Interprétation des poids en termes de volumes signés de polytopes
- Méthodes des homomorphismes de graphes

Contenu de l'exposé

- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes
- Propriété de multiplicativité du poids de Mayer
- Interprétation des poids en termes de volumes signés de polytopes
- Méthodes des homomorphismes de graphes
- Formules explicites pour certaines familles infinies de graphes

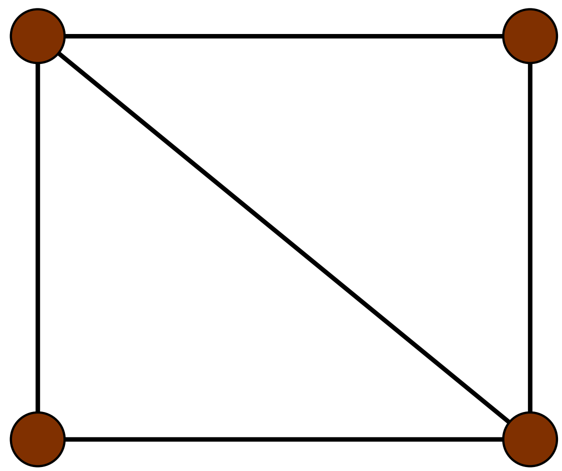
CONTENU DE L'EXPOSÉ

- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes
- Propriété de multiplicativité du poids de Mayer
- Interprétation des poids en termes de volumes signés de polytopes
- Méthodes des homomorphismes de graphes
- Formules explicites pour certaines familles infinies de graphes
- Poids de Mayer des graphes bipartis complets

Contenu de l'exposé

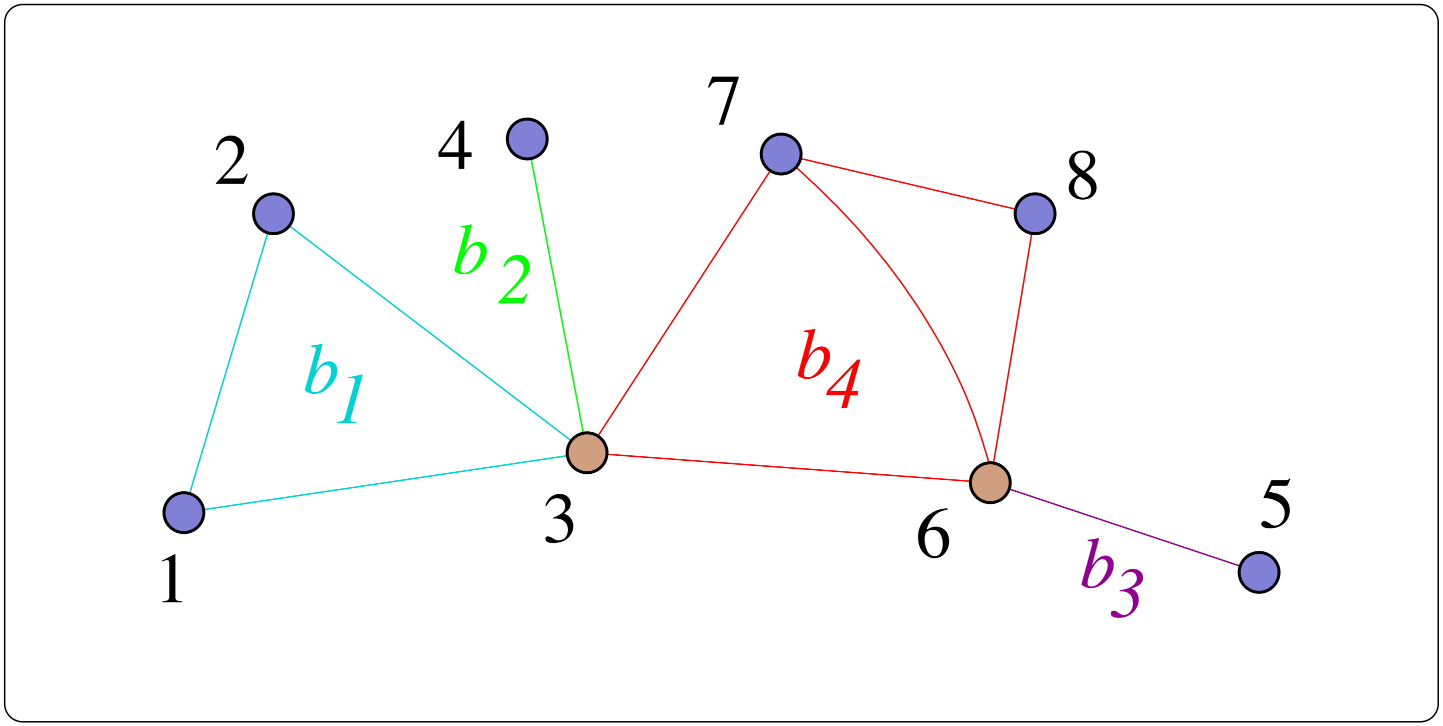
- Fonctions de poids de Mayer et de Ree-Hoover pour les graphes
- Propriété de multiplicativité du poids de Mayer
- Interprétation des poids en termes de volumes signés de polytopes
- Méthodes des homomorphismes de graphes
- Formules explicites pour certaines familles infinies de graphes
- Poids de Mayer des graphes bipartis complets
- $w_M(c)$ et $w_{RH}(c)$ sont des fonctions de quels paramètres?

GRAPHE 2-CONNEXE (BLOC)



Un graphe 2-connexe

Graphe connexe



Un graphe connexe avec ses blocs b_1, b_2, b_3, b_4

Développement du viriel

Développement du viriel:

$$\frac{P}{kT} = \rho + \beta_2\rho^2 + \beta_3\rho^3 + \cdots$$

DÉVELOPPEMENT DU VIRIEL

Développement du viriel:

$$\frac{P}{kT} = \rho + \beta_2\rho^2 + \beta_3\rho^3 + \cdots$$

- P : pression
- k : constante
- T : température
- ρ : densité

Coefficient du viriel:

$$\beta_n \quad = \quad \frac{1-n}{n!} \sum_{b \in B[n]} w_M(b)$$

DÉVELOPPEMENT DU VIRIEL

Développement du viriel:

$$\frac{P}{kT} = \rho + \beta_2 \rho^2 + \beta_3 \rho^3 + \cdots$$

• P : pression • k : constante • T : température • ρ : densité

Coefficient du viriel:

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{1-n}{n!} \sum_{b \in B[n]} w_M(b) \\ &= \frac{1-n}{n!} \sum_{b \in B[n]} \overline{a}_n(b) w_{RH}(b)\end{aligned}$$

$B[n]$ = l'ensemble des graphes 2−connexes (blocs) sur $[n]$

POIDS DE GRAPHES

Poids de graphes: fonctions sur les graphes invariantes sous les réétiquetages des sommets

Poids de Mayer:

$$w_M(c) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} f(\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|)\, d\overrightarrow{x_1} \cdots d\overrightarrow{x_{n-1}}$$

Poids de graphes

Poids de graphes: fonctions sur les graphes invariantes sous les réétiquetages des sommets

Poids de Mayer:

$$w_M(c) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in c} f(\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|)\, d\overrightarrow{x_1} \cdots d\overrightarrow{x_{n-1}}$$

avec

- $\overrightarrow{x_n} = 0$
- c : graphe connexe avec n sommets
- $\overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_n} \in \mathbb{R}^d$: positions des n particules
- $f = f(r)$: fonction à valeurs réelles associée à l'intéraction des particules deux-à-deux

POIDS DE GRAPHES

Poids de Ree-Hoover:

$$w_{RH}(b) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in b} f(\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|) \prod_{\{i,j\}\in \overline{b}} \overline{f}(\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|)\, d\overrightarrow{x_1} \cdots d\overrightarrow{x_{n-1}}$$

POIDS DE GRAPHES

Poids de Ree-Hoover:

$$w_{RH}(b) = \int_{(\mathbb{R}^d)^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in b} f(\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|) \prod_{\{i,j\}\in \overline{b}} \overline{f}(\|\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j}\|)\, d\overrightarrow{x_1} \cdots d\overrightarrow{x_{n-1}}$$

avec

- $\overrightarrow{x_n} = 0$
- b : graphe 2-connexe avec n sommets
- $\overline{f}(r) = 1 + f(r)$
- $\overline{b} = K_n \backslash b$: graphe complémentaire de b

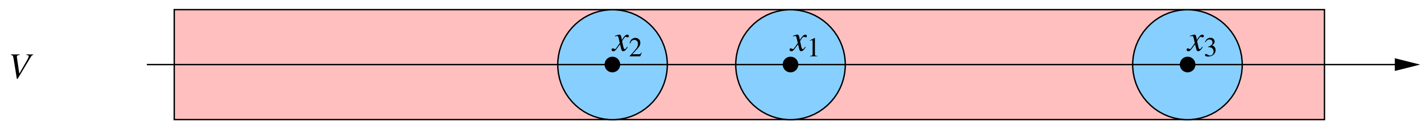
RELATION ENTRE w_M ET w_{RH}

Pour tout graphe 2-connexe b, on a

- $w_{RH}(b) = \sum_{b \subseteq d \subseteq K_n} w_M(d)$ (par définition)
- $w_M(b) = \sum_{b \subseteq d \subseteq K_n} (-1)^{e(d)-e(b)} w_{RH}(d)$ (par inversion de Möbius)
- $|w_M(b)| = \sum_{b \subseteq d \subseteq K_n} |w_{RH}(d)|$ (dans le cas d'un gaz à noyaux durs)

CAS SPÉCIAL : GAZ À NOYAUX DURS POUR $d = 1$

Particules dures dans $V = [-\frac{v}{2}, \frac{v}{2}]$

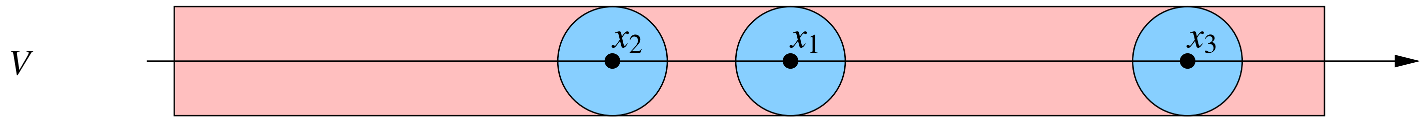


$f(x,y) = -\chi(|x-y| < 1)$

$\overline{f}(x,y) = \chi(|x-y| \geq 1)$

CAS SPÉCIAL : GAZ À NOYAUX DURS POUR $d = 1$

Particules dures dans $V = [-\frac{v}{2}, \frac{v}{2}]$



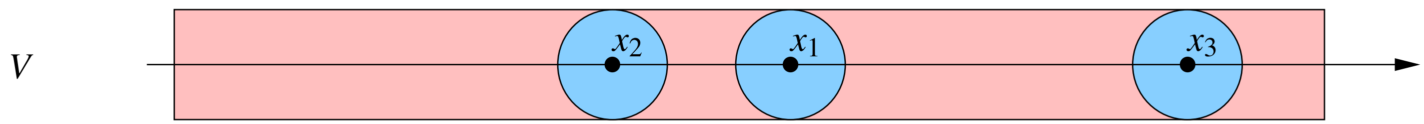
$f(x,y) = -\chi(|x-y| < 1)$

$\overline{f}(x,y) = \chi(|x-y| \geq 1)$

$$w_M(b) = (-1)^{e(b)} \int_{R^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in b} \chi(|x_i - x_j| < 1)\, dx_1 \dots dx_{n-1}$$

Cas spécial : gaz à noyaux durs pour $d = 1$

Particules dures dans $V = [-\frac{v}{2}, \frac{v}{2}]$



$f(x,y) = -\chi(|x-y| < 1)$ $\qquad$ $\overline{f}(x,y) = \chi(|x-y| \geq 1)$

$$w_M(b) = (-1)^{e(b)} \int_{R^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in b} \chi(|x_i - x_j| < 1)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$$w_{RH}(b) = (-1)^{e(b)} \int_{R^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in b} \chi(|x_i - x_j| < 1) \cdot$$

$$\cdot \prod_{\{i,j\} \in \overline{b}} \chi(|x_i - x_j| \geq 1)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

POIDS ET VOLUME DE POLYTOPES

$$\begin{aligned} w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \ldots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} Vol(P(c)) \end{aligned}$$

POIDS ET VOLUME DE POLYTOPES

$$\begin{aligned} w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in c} \chi(|x_i - x_j| < 1)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} Vol(P(c)) \end{aligned}$$

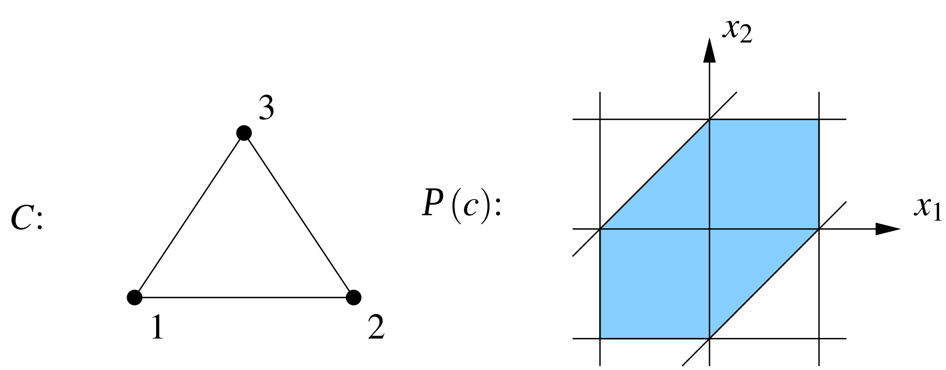
où $P(c) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \quad \text{et} \quad |x_i - x_j| \leq 1 \;\; \forall \{i,j\} \in c\}$

POIDS ET VOLUME DE POLYTOPES

$$\begin{aligned} w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in c} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \ldots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} Vol(P(c)) \end{aligned}$$

où $P(c) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \quad \text{et} \quad |x_i - x_j| \leq 1 \;\; \forall \{i,j\} \in c\}$

Exemple



Le polynôme d'Ehrhart

Théorème d'Ehrhart

$$\#\left(N\cdot P(c)\bigcap \mathbb{Z}^n\right) = a_0N^n + a_1N^{n-1} + \cdots + a_n$$

et

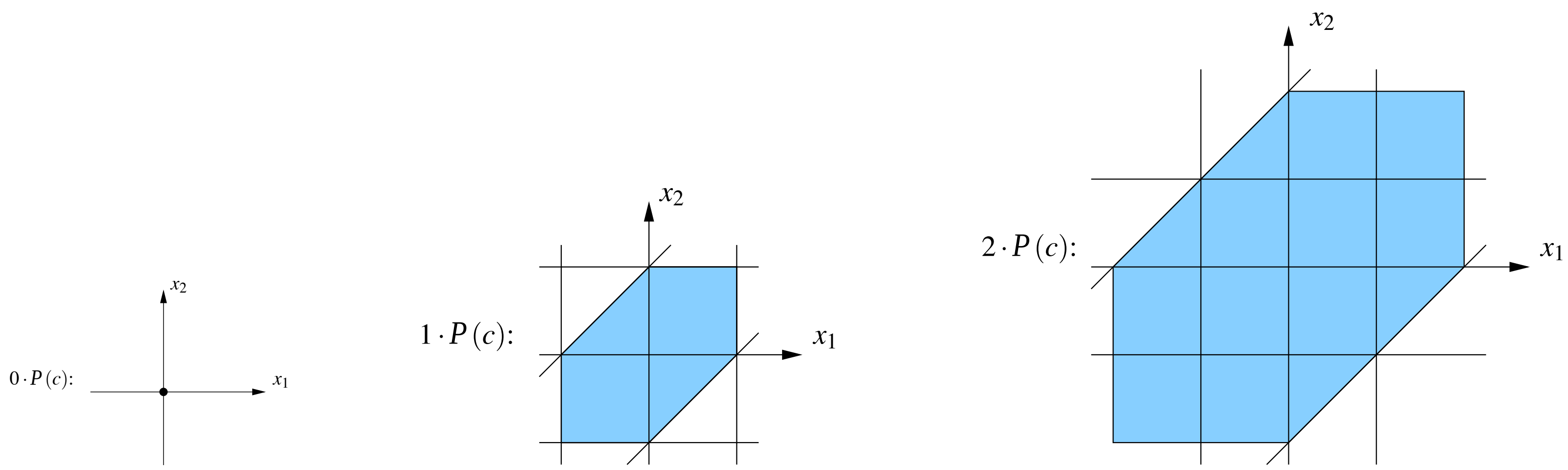
$$a_0 = Vol(P(c))$$

avec

$a_0N^n + a_1N^{n-1} + \cdots + a_n$: polynôme d'Ehrhart

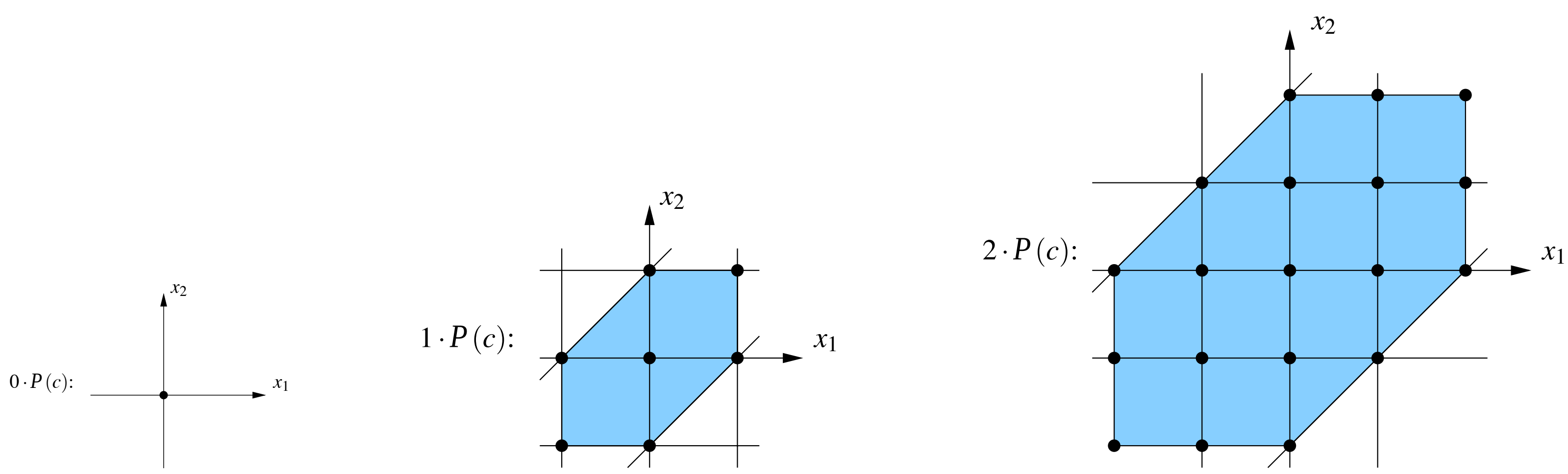
Le polynôme d'Ehrhart

Exemple



LE POLYNÔME D'EHRHART

Exemple



1 7 19

Le polynôme d'Ehrhart

Exemple

N	$\#(N \cdot P(c) \bigcap \mathbb{Z}^2)$
0	1
1	7
2	19

LE POLYNÔME D'EHRHART

Exemple

N	$\#(N \cdot P(c) \bigcap \mathbb{Z}^2)$
0	1
1	7
2	19

Donc

le polynôme d'Ehrhart$= 3N^2 + 3N + 1$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHES

$$\begin{aligned} w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in c} \chi(|x_i - x_j| < 1)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} Vol(P(c)) \end{aligned}$$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHES

$$\begin{aligned} w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in c} \chi(|x_i - x_j| < 1)\, dx_1 \dots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} Vol(P(c)) \end{aligned}$$

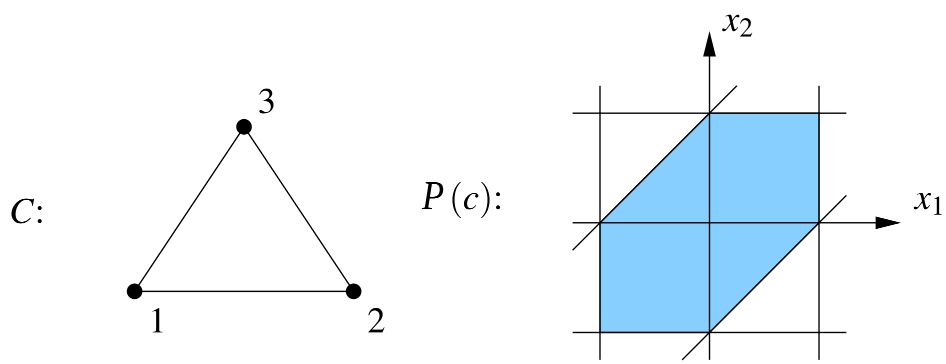
où $P(c) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \quad \text{et} \quad |x_i - x_j| \leq 1 \ \ \forall \{i,j\} \in c\}$

Méthode des homomorphismes de graphes

$$\begin{aligned} w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in c} \chi(|x_i - x_j| < 1)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} Vol(P(c)) \end{aligned}$$

où $P(c) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \quad \text{et} \quad |x_i - x_j| \leq 1 \ \ \forall \{i,j\} \in c\}$

Exemple

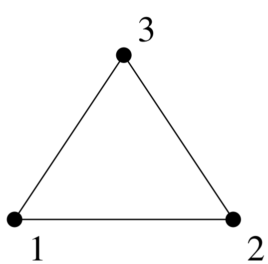


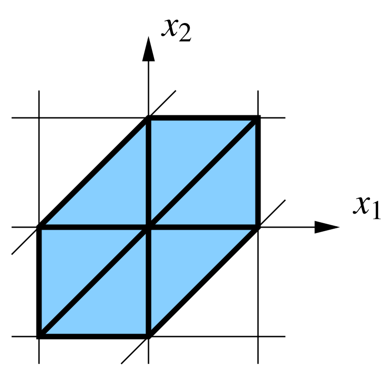
Méthode des homomorphismes de graphes

$$\begin{aligned} w_M(c) &= (-1)^{e(c)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in c} \chi(|x_i - x_j| < 1) dx_1 \ldots dx_{n-1}, \quad x_n = 0 \\ &= (-1)^{e(c)} Vol(P(c)), \end{aligned}$$

où $P(c) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0 \quad \text{et} \quad |x_i - x_j| \leq 1 \;\; \forall \{i,j\} \in c\}$

Exemple

C: 

$P(c)$: 

Méthode des homomorphismes de graphes

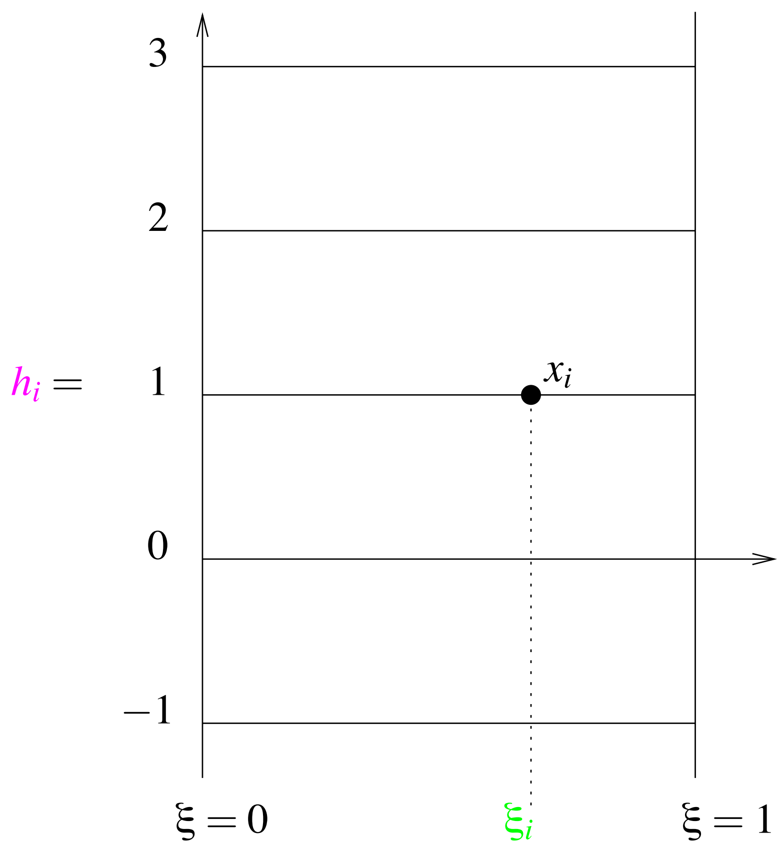
Représentation fractionnaire: $x_i = h_i + \xi_i$

h_i : partie entière de x_i ξ_i : partie fractionnaire de x_i

Méthode des homomorphismes de graphes

Représentation fractionnaire: $x_i = h_i + \xi_i$

h_i : partie entière de x_i ξ_i : partie fractionnaire de x_i

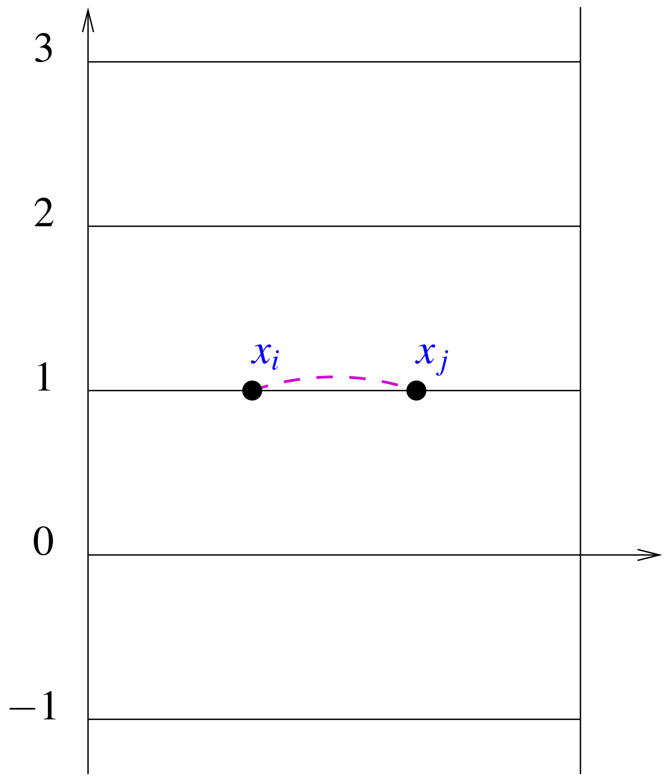


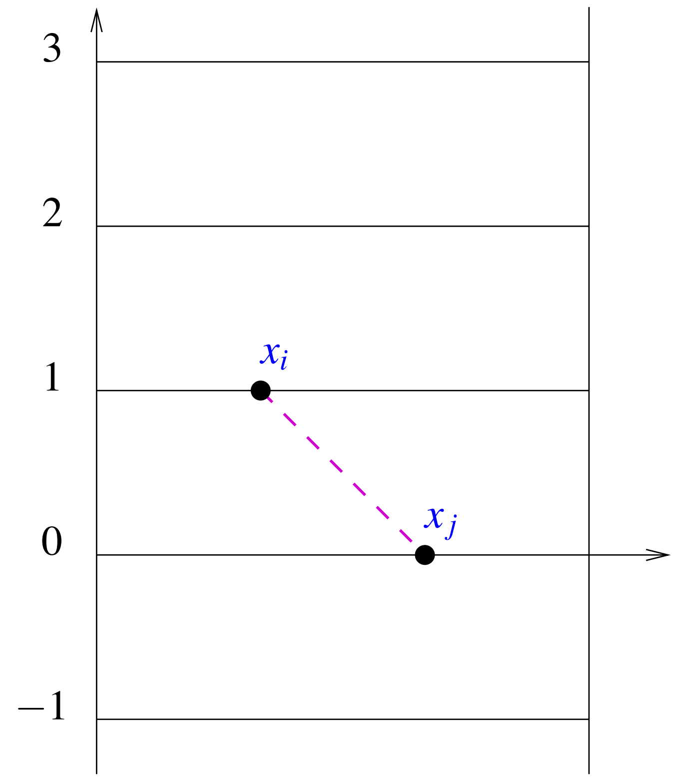
Méthode des homomorphismes de graphes

$$|x_i - x_j| < 1 \iff$$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHES

$$|x_i - x_j| < 1 \iff$$



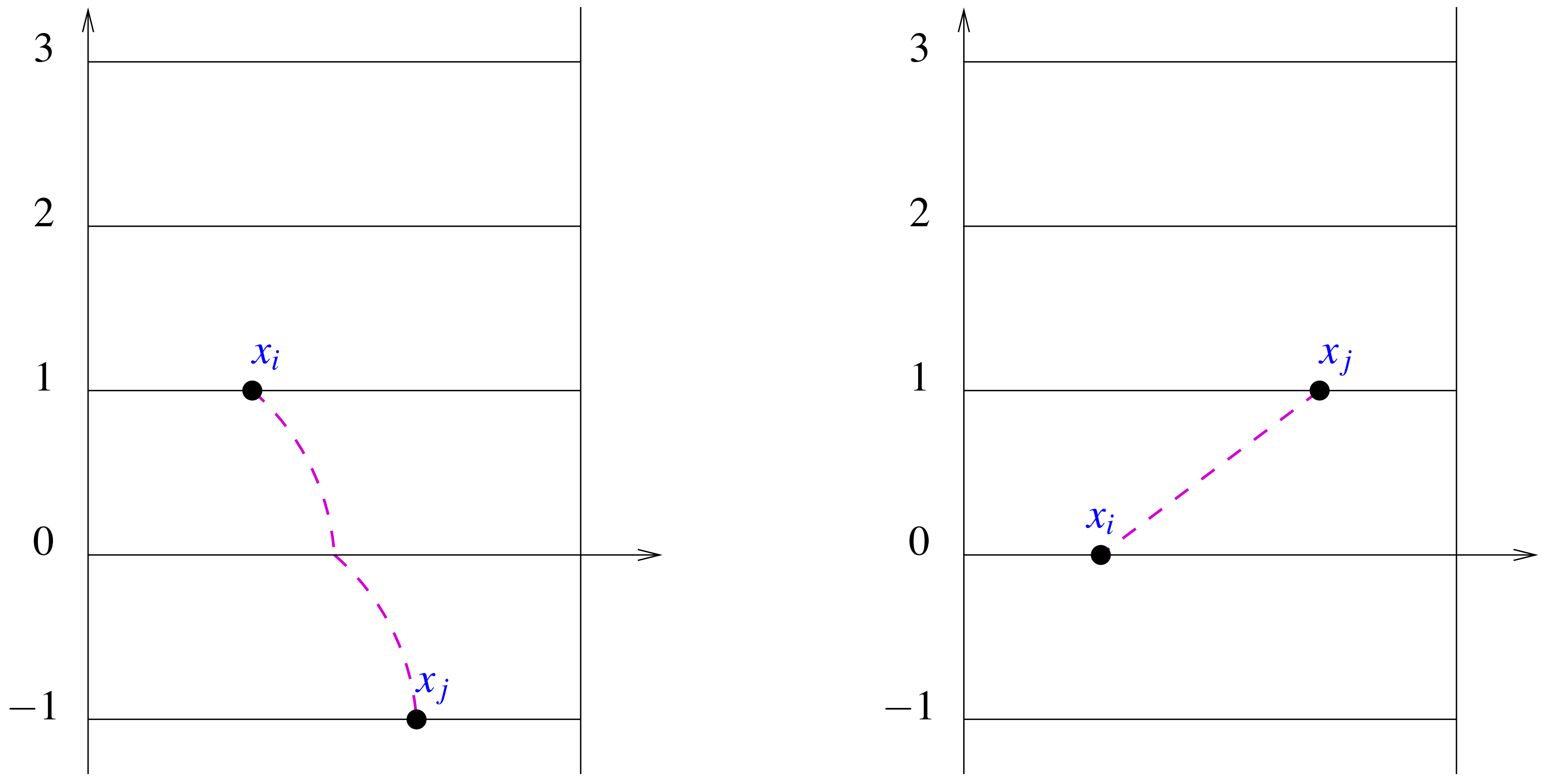


Méthode des homomorphismes de graphes

$$|x_i - x_j| > 1 \iff$$

Méthode des homomorphismes de graphes

$$|x_i - x_j| > 1 \iff$$



MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHES

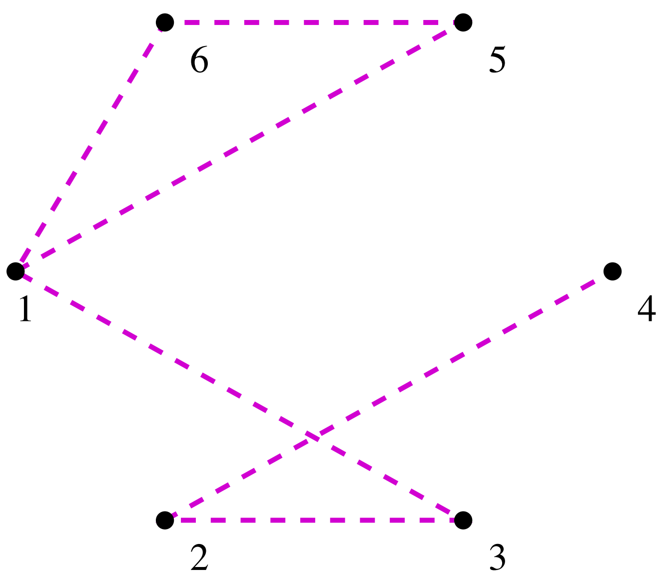
• Idée [Bodo Lass]: Évaluer le volume du polytope $P(c)$ en le décomposant en $\nu(c)$ simplexes (valides) chacun de volume $\frac{1}{(n-1)!}$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHES

• Idée [Bodo Lass]: Évaluer le volume du polytope $P(c)$ en le décomposant en $\nu(c)$ simplexes (valides) chacun de volume $\frac{1}{(n-1)!}$

• Comment: Ces simplexes sont classifiés en fixant les parties entières $(h_1, h_2, \cdots, h_n)$ et les positions relatives des parties fractionnaires $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ des coordonnées des points $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in P(c)$

Méthode des homomorphismes de graphes



$h_1 = 0$

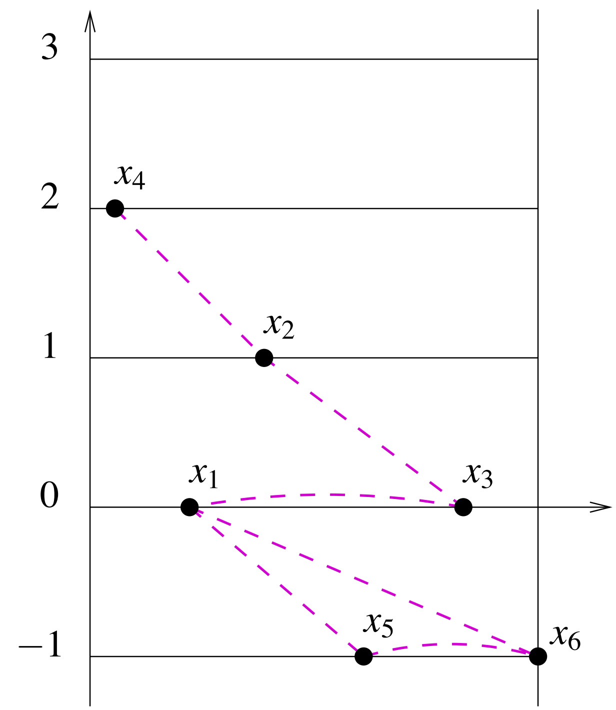
$h_2 = 1$

$h_3 = 0$

$h_4 = 2$

$h_5 = -1$

$h_6 = -1$



$$\xi_4 < \xi_1 < \xi_2 < \xi_5 < \xi_3 < \xi_6$$

MÉTHODE DES HOMOMORPHISMES DE GRAPHES

- Simplexes valides:

$$\forall \{i, j\} \in c, \;\; \xi_i < \xi_j \text{ implique } h_i = h_j \text{ ou } h_i = h_j + 1$$

Méthode des homomorphismes de graphes

- Simplexes valides:

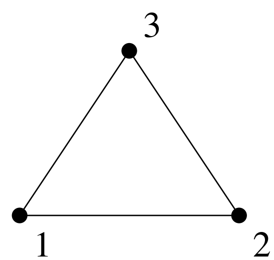
$$\forall \{i,j\} \in c, \ \ \xi_i < \xi_j \ \text{ implique } \ h_i = h_j \text{ ou } h_i = h_j + 1$$

- Prop [Bodo Lass]: $Vol(P(c)) = \dfrac{\nu(c)}{(n-1)!}$ où

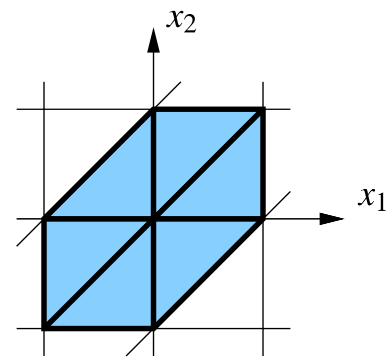
$$\begin{aligned} \nu(c) &= \#\text{ de simplexes valides de } P(\mathrm{c}) \\ &= \#\text{ de configurations pour le graphe c} \end{aligned}$$

NOMBRE DE CONFIGURATIONS

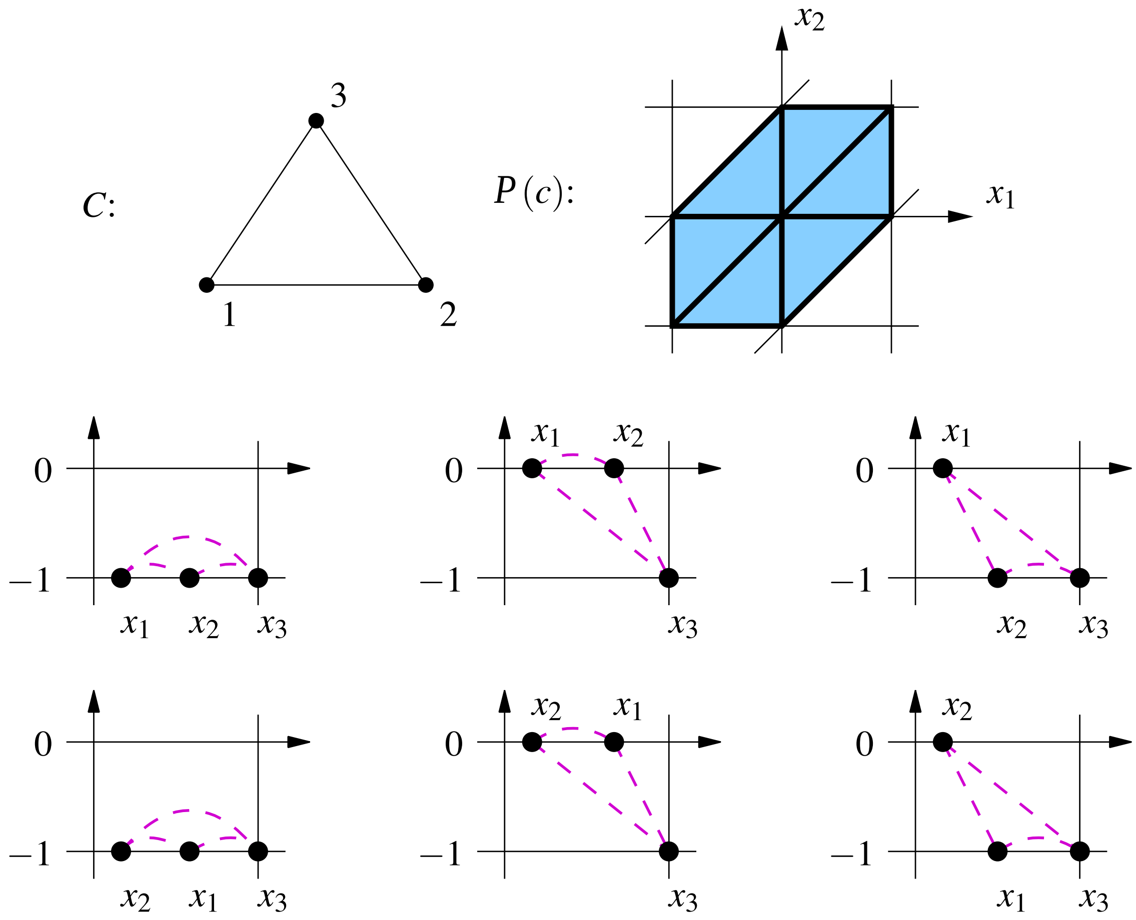
C:



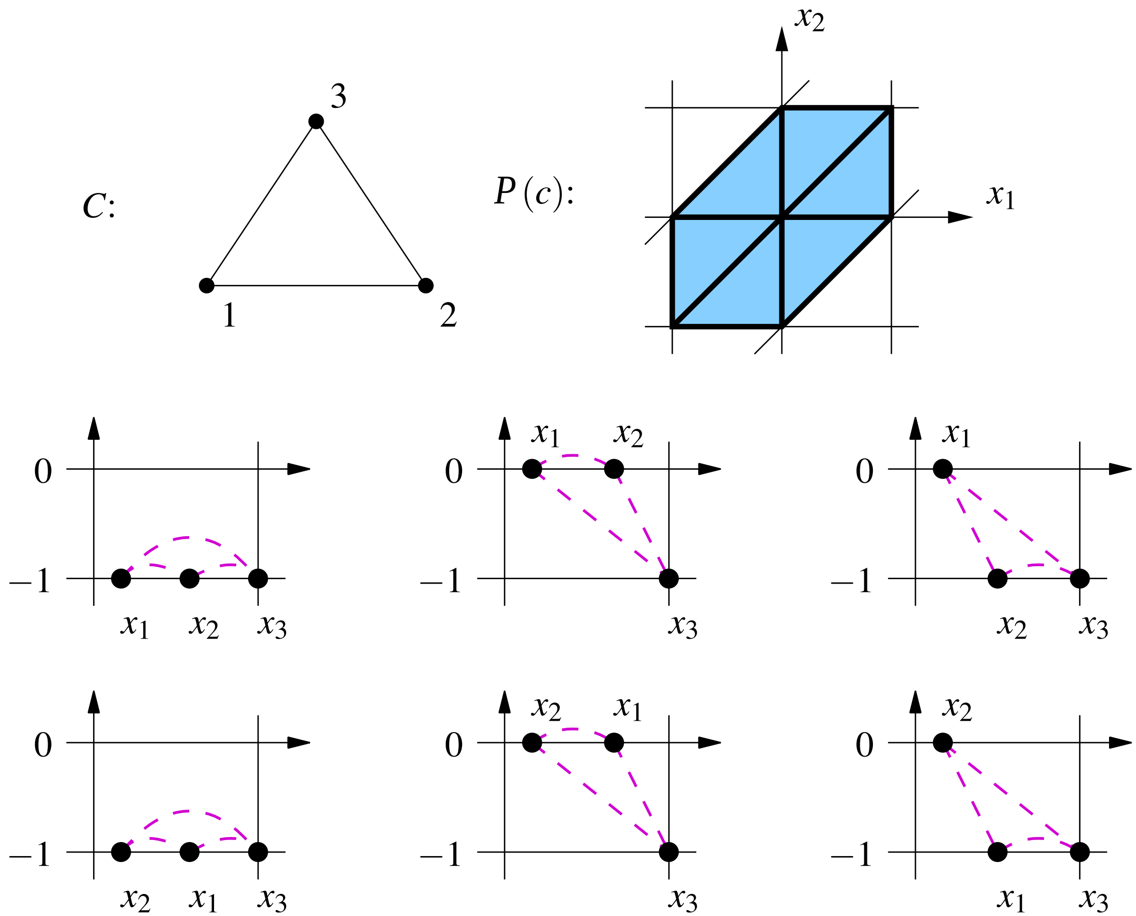
$P(c)$:



NOMBRE DE CONFIGURATIONS



Nombre de configurations

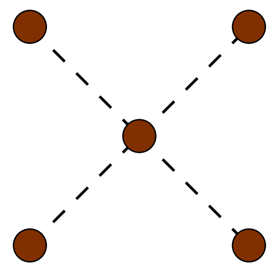


Le poids de chaque configuration est $\frac{(-1)^{e(c)}}{(n-1)!}$

NOUVELLES FORMULES EXPLICITES

Soit S_k le graphe k-étoile

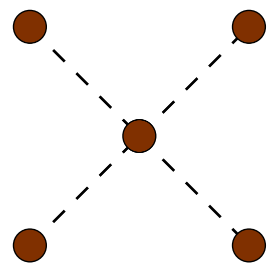
Le graphe S_4



NOUVELLES FORMULES EXPLICITES

Soit S_k le graphe k-étoile

Le graphe S_4



Pour $k \geq 1, \quad n \geq k+3,$ on a

$$|w_M(K_n \backslash S_k)| = n + 2\sum_{j=1}^{k} \frac{j!\binom{k}{j}}{(n-1)(n-2)\cdots(n-j)}$$

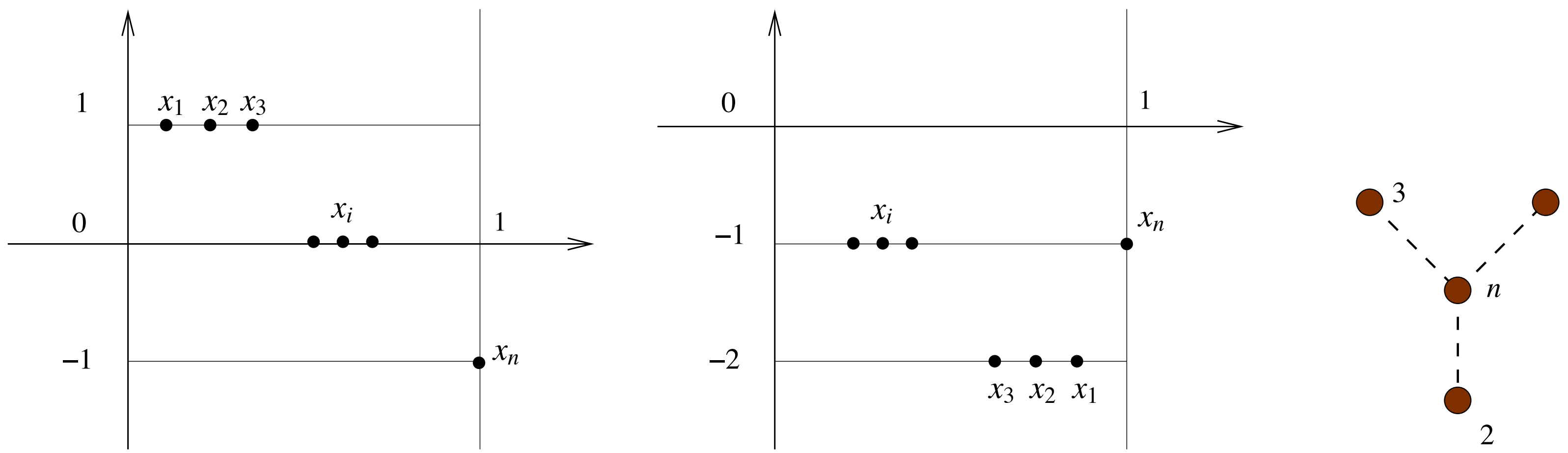
$$|w_{RH}(K_n \backslash S_k)| = \frac{2k!}{(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}$$

LE POIDS DE REE-HOOVER DE $K_n \backslash S_3$

Pour $\quad n \geq 3 \quad$ et $\quad g_n = K_n \backslash S_3 :\quad |w_{RH}(g_n)| \quad = \quad \dfrac{12}{(n-1)(n-2)(n-3)}$

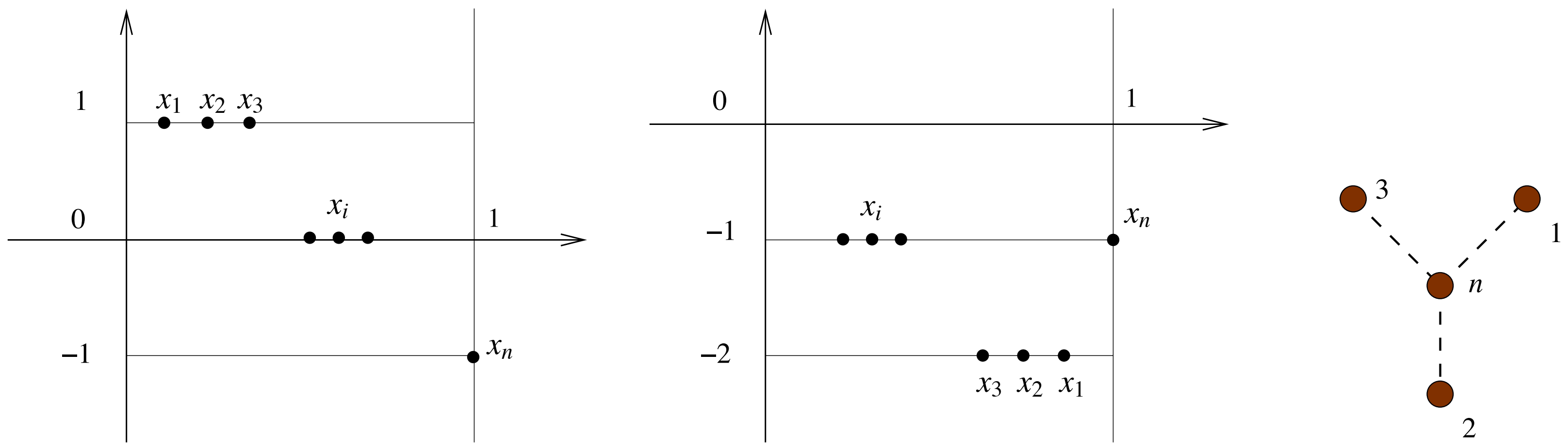
LE POIDS DE REE-HOOVER DE $K_n \backslash S_3$

Pour $\quad n \geq 3 \quad$ et $\quad g_n = K_n \backslash S_3 : \quad |w_{RH}(g_n)| \quad = \quad \dfrac{12}{(n-1)(n-2)(n-3)}$



Le poids de Ree-Hoover de $K_n \backslash S_3$

Pour $n \geq 3$ et $g_n = K_n \backslash S_3$: $|w_{RH}(g_n)| = \dfrac{12}{(n-1)(n-2)(n-3)}$



$2 \cdot 3! \cdot (n-4)!$ RH-configurations

LE POIDS DE MAYER DE $K_n \backslash S_3$

On a $$|w_M(g_n)| \quad = \quad n + \frac{6}{(n-1)} + \frac{12}{(n-1)(n-3)}$$

LE POIDS DE MAYER DE $K_n \backslash S_3$

On a $$|w_M(g_n)| = n + \frac{6}{(n-1)} + \frac{12}{(n-1)(n-3)}$$

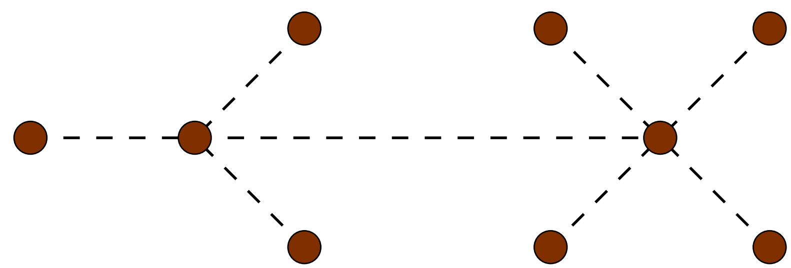
En effet

$$\begin{aligned}
|w_M(g_n)| &= \sum_{g_n \subseteq d \subseteq K_n} |w_{RH}(d)| \\
&= |w_{RH}(K_n)| + 3|w_{RH}(K_n \backslash S_1)| + \binom{3}{2}|w_{RH}(K_n \backslash S_2)| + 1|w_{RH}(K_n \backslash S_3)| \\
&= n + 3\frac{2}{n-1} + \binom{3}{2}\frac{4}{(n-1)(n-2)} + 1\frac{12}{(n-1)(n-2)(n-3)} \\
&= n + \frac{6}{(n-1)} + \frac{12}{(n-1)(n-3)}
\end{aligned}$$

AUTRES FORMULES EXPLICITES

Soit $(S_j–S_k)$ le graphe obtenu en joignant par une nouvelle arête les centres d'une j-étoile et d'une k-étoile

Le graphe S_3–S_4



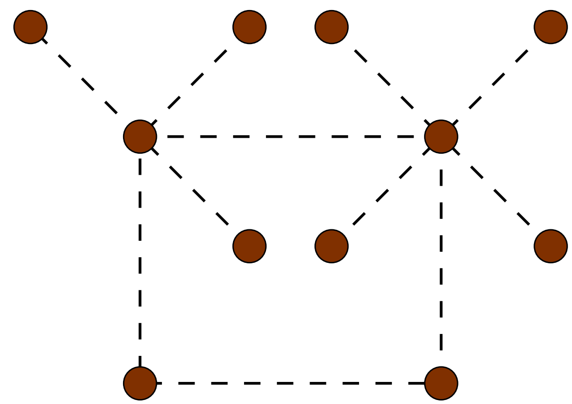
Pour $\quad j \geq k \geq 1, \quad n \geq k+j+3 \quad$ et $\quad g_n = K_n \backslash (S_j - S_k)$

$$
\begin{aligned}
|w_{RH}(g_n)| &= \frac{2k!\,j!}{(n-1)(n-2)\cdots(n-(k+j+1))} \\
|w_M(g_n)| &= n + \sum_{l=1}^{j+1} 2\left[\binom{j+1}{l} + \binom{k+1}{l}\right] \frac{l!}{(n-1)\cdots(n-l)} - \frac{2}{(n-1)} \\
&\quad + \sum_{m=1}^{j} \sum_{l=1}^{k} 2\binom{j}{m}\binom{k}{l} \frac{m!\,l!}{(n-1)\cdots(n-(m+l+1))}
\end{aligned}
$$

FORMULES EXPLICITES (SUITE)

Soit $(S_j \cdot C_4 \cdot S_k)$ le graphe obtenu en joignant par une arête du graphe C_4 les centres d'une j-étoile et d'une k-étoile

Le graphe $S_3 \cdot C_4 \cdot S_4$



Pour $\quad j \geq k \geq 1, \quad n \geq k+j+5 \quad$ et $\quad g_n = K_n \backslash (S_j \cdot C_4 \cdot S_k)$

$$|w_{RH}(g_n)| = \frac{2k!\,j!}{(n-1)(n-2)\cdots(n-(k+j+3))}$$

Formules explicites (suite)

$$
\begin{aligned}
|w_M(g_n)| \quad = \quad & n + \sum_{l=1}^{j+2} 2\left[\binom{j+2}{l} + \binom{k+2}{l}\right] \frac{l!}{(n-1)\cdots(n-l)} \\
& + \frac{8}{(n-1)(n-2)} + \frac{10}{(n-1)(n-2)(n-3)} \\
& + \sum_{l=1}^{j} 4\left[\binom{j}{l} + \binom{k}{l}\right] \frac{l!}{(n-1)\cdots(n-(l+3))} \\
& + \sum_{m=1}^{j} \sum_{l=1}^{k} 2\binom{j}{m}\binom{k}{l} \frac{m!l!}{(n-1)\cdots(n-(m+l+3))} \\
& + \sum_{l=1}^{j+1} 2\left[\binom{j+1}{l} + \binom{k+1}{l}\right] \frac{l!}{(n-1)\cdots(n-(l+2))} \\
& + \sum_{m=1}^{j+1} \sum_{l=1}^{k+1} 2\binom{j+1}{m}\binom{k+1}{l} \frac{m!l!}{(n-1)\cdots(n-(l+1))}
\end{aligned}
$$

GRAPHES BIPARTIS COMPLETS

En collaboration avec Gilbert Labelle

$$w_M(K_{m,n}) = (-1)^{mn} \cdot \frac{2^{m+n-1} m!n!}{(m+n-1)!}$$

Preuve: Méthode des homomorphismes de graphes

$w_M(c)$ ET $w_{RH}(c)$ SONT FONCTIONS DE QUELS PARAMÈTRES?

Exemple 1: Le cas Gaussien en dimension d

$$f(r) = -\exp(-\alpha r^2), \quad \alpha > 0$$

$$w_M(c) = (-1)^{e(c)} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{d(n-1)}{2}} \gamma(c)^{-\frac{d}{2}}$$

$w_M(c)$ ET $w_{RH}(c)$ SONT FONCTIONS DE QUELS PARAMÈTRES?

Exemple 1: Le cas Gaussien en dimension d

$$f(r) = -\exp(-\alpha r^2), \quad \alpha > 0$$

$$w_M(c) = (-1)^{e(c)} \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{d(n-1)}{2}} \gamma(c)^{-\frac{d}{2}}$$

- $\gamma(c)$ = complexité du graphe c = # d'arbres couvrants de c
- n = # de sommets
- $e(c)$ = # d'arêtes

$w_M(c)$ ET $w_{RH}(c)$ SONT FONCTIONS DE QUELS PARAMÈTRES?

Exemple 2: Le cas d'un gaz à noyaux durs en dimension 1

$$f(r) = -\chi(|r| < 1)$$

$$w_M(c) = (-1)^{e(c)} \int_{R^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in c} \chi(|x_i - x_j| < 1)\, dx_1 \dots dx_{n-1}$$

$w_M(c)$ ET $w_{RH}(c)$ SONT FONCTIONS DE QUELS PARAMÈTRES?

Exemple 2: Le cas d'un gaz à noyaux durs en dimension 1

$$f(r) = -\chi(|r| < 1)$$

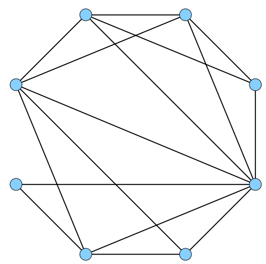
$$w_M(c) = (-1)^{e(c)} \int_{R^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in c} \chi(|x_i - x_j| < 1)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

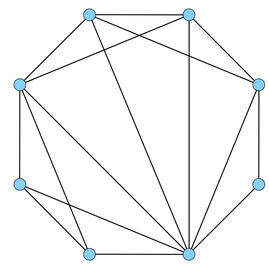
Analyse informatique avec Jérôme Tremblay

$w_M(c) \neq$ une fonction de seulement (# d'arbres couvrants, # de sommets, # d'arêtes, liste des degrés)

$w_M(c)$ ET $w_{RH}(c)$ SONT FONCTIONS DE QUELS PARAMÈTRES?

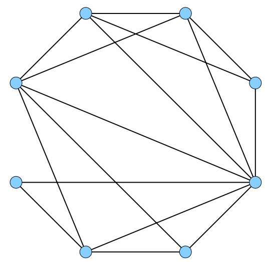
Exemple: $w_M = \frac{7921}{420}$ $\neq$ $w_M = \frac{848}{45}$

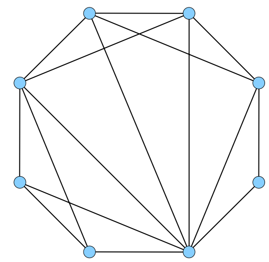




$w_M(c)$ ET $w_{RH}(c)$ SONT FONCTIONS DE QUELS PARAMÈTRES?

Exemple: $w_M = \frac{7921}{420}$ $\neq$ $w_M = \frac{848}{45}$





Mais

même # d'arbres couvrants: 2160

même # de sommets: 8

même # d'arêtes: 16

même liste des degrés: $(7,5,4,4,4,3,3,2)$

$w_M(c)$ ET $w_{RH}(c)$ SONT FONCTIONS DE QUELS PARAMÈTRES?

Exemple 3: Le cas d'un gaz à noyaux durs en dimension 1

$f(r) = -\chi(|r| < 1)$ $\quad\quad$ $\overline{f}(r) = \chi(|r| \geq 1)$

$$w_{RH}(b) = (-1)^{e(b)} \int_{R^{n-1}} \prod_{\{i,j\} \in b} \chi(|x_i - x_j| < 1) \cdot \\ \cdot \prod_{\{i,j\} \in \overline{b}} \chi(|x_i - x_j| \geq 1)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$w_M(c)$ ET $w_{RH}(c)$ SONT FONCTIONS DE QUELS PARAMÈTRES?

Exemple 3: Le cas d'un gaz à noyaux durs en dimension 1

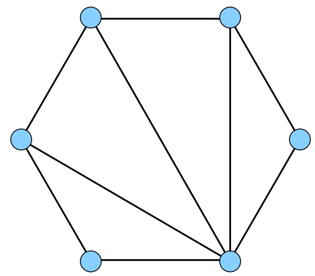
$f(r) = -\chi(|r| < 1)$ $\overline{f}(r) = \chi(|r| \geq 1)$

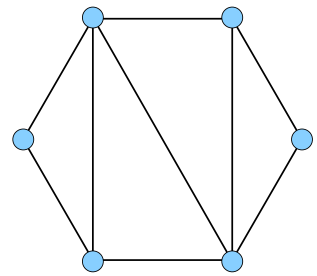
$$w_{RH}(b) = (-1)^{e(b)} \int_{R^{n-1}} \prod_{\{i,j\}\in b} \chi(|x_i - x_j| < 1) \cdot$$
$$\cdot \prod_{\{i,j\}\in \overline{b}} \chi(|x_i - x_j| \geq 1)\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$$

$w_{RH}(b) \neq$ une fonction de seulement (# d'arbres couvrants, # de sommets, # d'arêtes, |groupe d'automorphismes|)

$w_M(c)$ ET $w_{RH}(c)$ SONT FONCTIONS DE QUELS PARAMÈTRES?

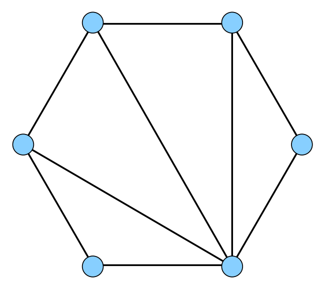
Exemple: $w_{RH} = 0 \neq w_{RH} = -\frac{1}{30}$

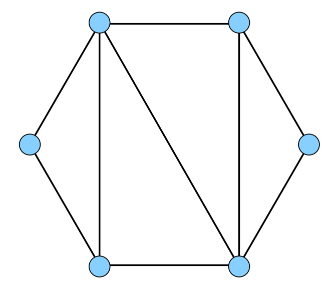




$w_M(c)$ ET $w_{RH}(c)$ SONT FONCTIONS DE QUELS PARAMÈTRES?

Exemple: $w_{RH} = 0$ $\neq$ $w_{RH} = -\frac{1}{30}$





Mais

même # d'arbres couvrants: 55

même # de sommets: 6

même # d'arêtes: 9

même $|$groupe d'automorphismes$|$: 2

MERCI