INFORMATIONEN ZUR PRÜFUNG GEOMETRIE UND LINEARE ALGEBRA FÜR DAS LEHRAMT

SOMMERSEMESTER 2018 (LVN 250039)

STEFAN HALLER

Die Leistungskontrolle erfolgt durch eine 2-stündige schriftliche Prüfung ohne Hilfsmittel über den gesamten Inhalt der Vorlesung. Bei der Prüfung wird erwartet, dass Sie

- Definitionen aller Begriffe sinngemäß wiedergeben können,
- die Aussagen aller Sätze, Korollare, Propositionen, Lemmas und Bemerkungen sinngemäß wiedergeben können,
- von ausgewählten (s.u.) Resultaten Beweise nachvollziehbar reproduzieren können,
- und die Begriffe und Methoden an konkreten Beispiele anwenden können.

BEWEISE BEI DER PRÜFUNG

Zur Prüfung werden Beweise nur von folgenden Resultaten der Vorlesung erwartet:

Aus Abschnitt 1:

- Winkel-Seiten-Winkel (WSW) Kongruenzsatz (Satz 1.4.2)
- Seiten-Seiten-Seiten (SSS) Kongruenzsatz (Satz 1.4.17)
- Existenz der Winkelsymmetrale (Satz 1.4.19)
- Existenz des Streckenmittelpunkts (Satz 1.4.21)
- Satz vom Außenwinkel (Satz 1.4.23)
- Größerer Winkel liegt gegenüber größerer Seite gegenüber (Satz 1.4.24)
- Dreiecksungleichung (Satz 1.4.25)
- Seiten-Winkel-Winkel (SWW) Kongruenzsatz (Satz 1.4.26)
- Seiten-Seiten-Winkel (SSW) Kongruenzsatz (Satz 1.4.27)
- Existenz des Lots (Satz 1.4.35)
- Winkelsumme im Dreieck (Satz 1.5.10)
- Parallelogramm (Satz 1.5.13)
- Existenz des Umkreismittelpunkts (Satz 1.5.17)
- Tangenten stehen normal auf den Radius (Satz 1.5.23)
- Existenz des Inkreismittelpunkts (Satz 1.5.29)
- Satz von Thales (Satz 1.5.31)
- Peripheriewinkelsatz (Satz 1.5.32)
- Seiten-Winkel-Seiten (S:W:S) Ähnlichkeitssatz (Satz 1.5.44)
- Strahlensatz (Satz 1.5.47)
- Satzgruppe des Pythagoras (Satz 1.5.49)
- Existenz des Höhenschnittpunkts (Satz 1.5.53)
- Existenz des Schwerpunkts (Satz 1.5.56)
- Euler Gerade (Satz 1.5.58)

- Schnitt von Kreis und Gerade (Satz 1.6.8)
- Existenz der Tangenten an Kreis (Satz 1.6.15)

Aus Abschnitt 2:

- Orientierter Strahlensatz (Satz 2.1.10)
- Satz von Menelaos (Satz 2.1.11)
- Geraden in Koordinaten (Satz 2.3.6)
- Cauchy–Schwartz Ungleichung (Lemma 2.3.43)
- Dreiecksungleichung (Lemma 2.3.44)
- Abstand von Punkten in kartesischen Koordinaten (Satz 2.3.46)
- Normalabstand eines Punktes von einer Geraden (Proposition 2.3.55)
- Höhenschnittpunkt mit kartesischem Koordinatensystem (Ende von Abschnitt 2.3)
- Sinussatz (Satz 2.4.13)
- Kosinussatz (Satz 2.4.14)
- Winkel in kartesischen Koordinaten (Proposition 2.4.16)
- Additionstheoreme (Satz 2.4.20)
- Inkreismittelpunkt mit trigonometrischen Formeln (Ende von Abschnitt 2.4)
- Absolutbetrag der Determinante (Bemerkung 2.5.7)
- Heron’sche Flächenformel (Bemerkung 2.5.9)
- Flächeninhalt von Dreiecken mittels kartesischer Koordinaten (Proposition 2.5.10)

Aus Abschnitt 3:

- Rechenregeln für Matrizenmultiplikation (Lemma 3.1.25)
- Kern und Injektivität linearer Abbildungen (Lemma 3.2.7)
- Existenz einer Basis (Korollar 3.2.44)
- Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 3.2.54)
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig (Lemma 3.4.26)

EINIGE TYPISCHE PRÜNGSFRAGEN

- Was verstehen wir unter dem Inneren eines Winkels? Gib eine präzise Definition.
- Formuliere und beweise den Seiten-Winkel-Winkel (SWW) Kongruenzsatz.
- Sei g eine Gerade und A ein Punkt, der nicht auf g liegt.
 - Was verstehen wir unter dem Lot auf g durch A ?
 - Zeige, dass dieses Lot existiert und eindeutig ist.
- Wann werden zwei Dreiecke ähnlich genannt? Gib eine präzise Definition.
- Formuliere den Winkel-Winkel-Winkel (W:W:W) Ähnlichkeitssatz.
- Sei M der Mittelpunkt einer Strecke AB . Gib folgende Teilverhältnisse an:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AB}{BM} = \frac{MA}{AB} =$$

- Formuliere den Satz von Ceva.
- Was verstehen wir unter einem affinen Koordinatensystem auf einer Geraden, und was ist mit der Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems auf einer Geraden gemeint?

- Sei $x: g \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems auf einer Geraden g . Wie kann das Teilverhältnis $\frac{AB}{BC}$ dreier Punkte $A, B, C \in g$ durch ihre Koordinaten $x(A), x(B), x(C) \in \mathbb{R}$ berechnet werden?

$$\frac{AB}{BC} =$$

- Formuliere und beweise die Dreiecksungleichung für Vektoren in $\mathbb{R}^2$.
- Gib eine (2×2) -Matrix mit Determinante 17 an.
- Erkläre was mit folgender Aussage gemeint ist: "Die Determinante einer (2×2) -Matrix ist schiefsymmetrisch in den Spalten."
- Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Eckpunkte A, B, C folgende kartesische Koordinaten haben:

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

- Berechne die Koordinaten des Schwerpunkts eines Dreiecks, dessen Eckpunkte A, B, C in einem affinen Koordinatensystem folgende Koordinaten haben:

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

- Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcccccc} 2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & & -10x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & -x_2 & -7x_3 & -2x_4 & -21x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & -4x_3 & +2x_4 & -2x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & +5x_2 & -x_3 & +3x_4 & +22x_5 & = & 0 \end{array}$$

Bestimme $\dim(L)$ und eine Basis von L . Gib ein minimales Gleichungssystem für L an.

- Zeige, dass das System von Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 17 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig ist.

- Zeige, dass das System von Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bildet. Gib drei der Vektoren v_i an, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

- Bezeichne W den von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ -6 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -2 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 8 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraum in $\mathbb{R}^5$. Bestimme $\dim(W)$. Gib geeignete der Vektoren v_i an, die eine Basis von W bilden.

- Bestimme den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ -1 & 2 & 5 & 8 & 11 \end{pmatrix}.$$

- Zeige, dass das System

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bildet.

- Bestimme alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{ccccrc} 3x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +6x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & & +10x_3 & +8x_4 & = & 12 \\ 2x_1 & +x_2 & +13x_3 & +10x_4 & = & 19 \\ 3x_1 & -5x_2 & & +2x_4 & = & -17 \end{array}$$

Beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung. Gib ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum an.

- Bestimme die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Bestimme eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$