Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2018

VO 250039 (Stefan Haller)

4. Termin am 23. Jänner 2019, 16:45 Uhr (HS 1)

2-stündig

Name:

Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

1. Aufgabe (10P)

(a) Formuliere den Seiten-Seiten-Winkel (SSW) Kongruenzsatz. **(2P)**

(b) Beweise den Seiten-Seiten-Winkel Kongruenzsatz. **(6P)**

(c) Skizziere zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$, die nicht kongruent sind, für die jedoch $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $AB \equiv A'B'$ und $AC \equiv A'C'$ gilt. **(2P)**

2. Aufgabe (10P)

(a) Wann werden zwei Geraden parallel genannt? Gib eine präzise Definition. **(2P)**
(b) Formuliere das Parallelenaxiom. **(2P)**
(c) Zeige, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck $2R$ (zwei Rechte, $180°$) beträgt. **(6P)**

3. Aufgabe (10P)

Sei $x\colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems der Ebene. Weiters seien A, B, C drei Punkte der Ebene mit Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass A, B und C auf einer Gerade liegen. **(2P)**

(b) Berechne das Teilverhältnis $\frac{AB}{BC}$. **(2P)**

(c) Bestimme die Koordinaten eines Punktes P auf der Geraden durch A und C, für den $\frac{AP}{PC} = -1/3$ gilt. **(3P)**

(d) Formuliere die orientierte Version des Strahlensatzes. **(3P)**

4. Aufgabe (10P)

(a) Formuliere die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus. **(2P)**

(b) Bestimme Zahlen p und q, sodass

$$\sin(3\alpha) = p\,\sin(\alpha) + q\,\sin^3(\alpha)$$

für alle Winkel α gilt. **(3P)**

(c) Beweise das Additionstheorem für den Kosinus. **(5P)**

5. Aufgabe (10P)

(a) Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r\times s}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times q}$ drei Matrizen. Unter welchen Voraussetzungen an m, n, r, s, p, q sind die beiden Ausdrücke $(A + B)C$ und $AC + BC$ definiert? **(1P)**

(b) Zeige, dass unter den Voraussetzungen in (a) das Distributivgesetz $(A+B)C = AC+BC$ gilt. **(3P)**

(c) Zeige, dass die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ x + 3y + 5z \\ x + 3y + 6z \end{pmatrix}$$

invertierbar (bijektiv) ist und bestimme ihre Umkehrabbildung. **(6P)**

6. Aufgabe (10P)

(a) Wann wird ein System von Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ in $\mathbb{R}^n$ linear abhängig genannt? Gib eine präzise Definition. **(2P)**

(b) Bestimme eine reelle Zahl x, für die das System

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ x \\ 13 \end{pmatrix}$$

linear abhängig ist? **(3P)**

(c) Formuliere die Dimensionsformel für lineare Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. **(2P)**

(d) Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^5$ mit 3-dimensionalen Kern? Begründe die Antwort. **(3P)**

7. Aufgabe (10P)

(a) Was verstehen wir unter den Eigenwerten und Eigenvektoren einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? Gib präzise Definitionen. **(2P)**

(b) Bestimme alle Eigenwerte der folgenden Matrix: **(4P)**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

(c) Gib eine (2×2)-Matrizen A an, die nur einen reellen Eigenwerte besitzt. **(1P)**

(d) Gib eine (2×2)-Matrizen B an, die keinen einzigen reellen Eigenwert besitzt. **(1P)**

(e) Gib eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

besteht. **(2P)**

8. Aufgabe (10P)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$
\begin{array}{rrrrrcr}
x_1 & +2x_2 & & & +x_5 & = & 3 \\
-x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -4x_5 & = & 6 \\
-2x_1 & -4x_2 & +x_3 & +2x_4 & -4x_5 & = & -2 \\
-x_1 & -2x_2 & -x_3 & -5x_4 & +4x_5 & = & -10
\end{array}
$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(6P)**

(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assozierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(d) Gib ein System von drei linearen Gleichungen in den drei Variablen x, y, z an, das einen 2-dimensionalen Lösungsraum besitzt. **(2P)**

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
gesamt	

Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80