

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Stefan Haller

Dies ist ein Skriptum zu meiner Vorlesung im Sommersemester 2019. Es steht unter <http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html> zur Verfügung.

INHALTSVERZEICHNIS

Literatur	2
1. Hilberts Axiomensystem	3
1.1. Axiome der Verknüpfung (Inzidenzaxiome)	3
1.2. Axiome der Anordnung	5
1.3. Kongruenzaxiome für Strecken	14
1.4. Kongruenzaxiome für Winkel	18
1.5. Das Parallelenaxiom	43
1.6. Vollständigkeit	65
1.7. Isometrien	72
2. Koordinaten	77
2.1. Teilverhältnis	77
2.2. Koordinaten auf Geraden	84
2.3. Koordinaten der Ebene	86
2.4. Trigonometrie	104
2.5. Isometrien	113
3. Lineare Algebra	121
3.1. Lineare Abbildungen und Matrizen	122
3.2. Teilräume und Dimension	129
3.3. Elimination	141
3.4. Determinanten	164
3.5. Hauptachsentransformation	184
Anhang A. Die komplexen Zahlen	189
A.1. Der Körper der komplexen Zahlen	189
A.2. Algebraische Vollständigkeit	192
A.3. Komplexe Zahlen als konforme lineare Abbildungen	194
A.4. Polardarstellung	195

Literatur

- [Euklid] Euklid, *Die Elemente*. Akademische Verlagsgesellschaft m.b.H., Leipzig, 1933.
- [Todhunter] Isaac Todhunter, *The Elements of Euclid for the Use of Schools and Colleges*. MacMillan and Co, 1872. https://en.wikisource.org/wiki/The_Elements_of_Euclid_for_the_Use_of_Schools_and_Colleges
- [Hilbert] David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*. 13. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1987.
- [Hartshorne] Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*. Springer-Verlag, 2000.
- [Harvey] Matthew Harvey, *Geometry Illuminated. An Illustrated Introduction to Euclidean and Hyperbolic Plane Geometry*. The Mathematical Association of America, 2015.
- [Greenberg] Marvin Jay Greenberg, *Euclidean and non-Euclidean Geometries: Development and History*. Third Edition, W. H. Freeman and Company, 1993.
- [Moise] Edwin E. Moise, *Elementary Geometry from an Advanced Standpoint*. 3rd Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [Jänich] Klaus Jänich, *Lineare Algebra*. Elfte Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.
- [Agricola] Ilka Agricola und Thomas Friedrich, *Elementargeometrie*. Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht. 4. überarbeitete Auflage, Springer-Verlag, 2015.

1. Hilberts Axiomensystem

In diesem Abschnitt skizzieren wir einen axiomatischen Zugang zur ebenen Euklidischen Geometrie. Alle Sätze sollen aus wenigen, grundlegenden Annahmen, den Axiomen, hergeleitet werden. Die Geometrie wird dadurch auf eine solide Basis gestellt und ihrer innere Struktur transparenter.

Der erste axiomatische Aufbau der Geometrie findet sich in Euklids Elementen [**Euklid**]. Ein modernes Axiomensystem wurde Ende des neunzehnten Jahrhunderts von Hilbert vorgeschlagen [**Hilbert**]. Neben den Texten von Euklid und Hilbert orientieren wir uns hier auch an der Darstellung in [**Hartshorne**], siehe weiters [**Harvey**] und [**Greenberg**].

Geometrische Begriffe wie Punkt, Gerade und Ebene bleiben unbestimmt, bloß ihre Eigenschaften und Beziehungen werden untersucht. Hilberts Axiome der Euklidischen Geometrie lassen sich in folgende Gruppen einteilen:

- (1) Inzidenzaxiome
- (2) Anordnungsaxiome
- (3) Kongruenzaxiome für Strecken
- (4) Kongruenzaxiome für Winkel
- (5) Parallelenaxiom
- (6) Vollständigkeitsaxiom

Aus diesen Grundannahmen alleine werden wir bekannte Eigenschaften von Dreiecken und Kreisen herleiten. Unter anderem behandeln wir hier: Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze für Dreiecke, die Sätze von Thales und Pythagoras, den Peripheriewinkelsatz, die Eulersche Gerade, Schnitt von Kreisen und Geraden, sowie Tangenten an Kreise.

In diesem synthetischen Zugang wird der geordnete Körper der reellen Zahlen nicht vorausgesetzt, sondern mit Hilfe der Geometrie konstruiert. Positive Zahlen werden als Kongruenzklassen von Strecken definiert; die Addition wird durch Konkatenation von Strecken erklärt; die Multiplikation ist durch den Strahlensatz motiviert; und die Ordnungsrelation entspricht der Inklusion von Strecken. Alle Axiome eines geordneten Körpers lassen sich aus den Axiomen der Geometrie herleiten. Das geometrische Vollständigkeitsaxiom entspricht genau dem Dedekind'schen Vollständigkeitsaxiom der reellen Zahlen.

In einem anderen axiomatischen Aufbau der Euklidischen Geometrie, siehe etwa [**Moise**], werden die reellen Zahlen vorausgesetzt, eine reellwertige Abstandsfunktion für Punkte sowie ein reellwertiges Winkelmaß postuliert, und ihre Eigenschaften durch entsprechende Axiome charakterisiert. Ein Vergleich der beiden Zugänge findet sich in [**Moise**, Section 8].

1.1. Axiome der Verknüpfung (Inzidenzaxiome). Sei \mathcal{E} eine Menge, und \mathcal{G} eine Menge von Teilmengen von \mathcal{E} . Die Menge \mathcal{E} heißt *Ebene*, Elemente von \mathcal{E} werden *Punkte* genannt, Elemente von \mathcal{G} als *Geraden* bezeichnet. Wir sagen ein "*Punkt A liegt auf einer Geraden g* ", falls $A \in g$ gilt. Wir drücken dies auch durch "*die Gerade trifft den Punkt A* " oder "*die Gerade g geht durch den Punkt A* " aus. Wenn im Folgenden von Punkten und Geraden gesprochen wird, sind stets Elemente von \mathcal{E} bzw. \mathcal{G} gemeint.

Punkte und Geraden sollen folgender Axiomengruppe [**Hilbert**, §2] genügen:

- I1.** Zu zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es stets genau eine¹ Gerade, die A und B enthält.

¹d.h. eine und nur eine

I2. Jede Gerade enthält wenigstens zwei verschiedene Punkte.

I3. Es existieren drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

BEMERKUNG 1.1.1 (Schnitt zweier Geraden). Sind g und h zwei Geraden, dann tritt genau einer der folgenden Fälle ein:

- (a) Die beiden Geraden schneiden sich nicht, d.h. es gilt $g \cap h = \emptyset$.
- (b) Die beiden Geraden schneiden sich in genau einem Punkt, d.h. es existiert ein Punkt A mit $g \cap h = \{A\}$.
- (c) Die beiden Geraden stimmen überein, d.h. es gilt $g = h$.

Besteht die Schnittmenge $g \cap h$ aus zwei oder mehr Punkten, dann folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom I1 schon $g = h$. Weitere Fälle sind daher nicht möglich. Aus Axiom I2 folgt, dass sich die drei Fälle gegenseitig ausschließen. Zwei verschiedene Geraden haben also höchstens einen Punkt gemeinsam.

DEFINITION 1.1.2 (Parallele Geraden). Zwei Geraden g und h werden *parallel* genannt, falls $g = h$ oder $g \cap h = \emptyset$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall $g \parallel h$.

BEMERKUNG 1.1.3. Für zwei Geraden sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die beiden Geraden sind nicht parallel.
- (b) Die beiden Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Dies folgt sofort aus Bemerkung 1.1.1.

DEFINITION 1.1.4 (Kollineare Punktmenge). Eine Menge von Punkten wird *kollinear* genannt, wenn sie in einer Geraden enthalten ist.

DEFINITION 1.1.5 (Konkurrente Geradenmenge). Eine Menge von Geraden wird *konkurrent* genannt, wenn diese Geraden einen gemeinsamen Punkt enthalten.

BEMERKUNG 1.1.6. Aus den Inzidenzaxiomen lassen sich leicht folgende Aussagen herleiten: (siehe Übungen)

- (a) Durch jeden Punkt gehen wenigstens zwei verschiedene Geraden.
- (b) Es existieren drei nicht konkurrente Geraden.
- (c) Zu jedem Punkt existiert eine Gerade, die diesen Punkt nicht enthält.
- (d) Zu jeder Geraden existiert ein Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt.

DEFINITION 1.1.7. Sind A und B zwei verschiedene Punkte, dann bezeichnen wir die nach Axiom I1 eindeutig bestimmte Gerade durch A und B mit $g(A, B)$.

BEMERKUNG 1.1.8. Seien O, A, B drei Punkte mit $A \neq O$ und $B \neq O$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) $g(O, A) \neq g(O, B)$.
- (b) O ist der einzige Schnittpunkt von $g(O, A)$ und $g(O, B)$.
- (c) A liegt nicht auf $g(O, B)$.
- (d) B liegt nicht auf $g(O, A)$.
- (e) O, A, B sind nicht kollinear.

Dies folgt sofort aus Axiom I1.

1.2. Axiome der Anordnung. Es wird eine Anordnungsrelation zwischen je drei Punkten der Ebene postuliert. Formal ist dies eine Teilmenge $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{E}$. Wir sagen ein Punkt B liegt zwischen den Punkten A und C falls $(A, B, C) \in \mathcal{Z}$ gilt. Wir drücken dies auch durch die Schreibweise $A * B * C$ aus.

Diese Anordnungsrelation soll folgender Axiomengruppe [Hilbert, §3] genügen:

- A1.** Wenn ein Punkt B zwischen einem Punkt A und einem Punkt C liegt, dann sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, und B liegt dann auch zwischen C und A .²
- A2.** Zu zwei verschiedenen Punkten A und B gibt es stets wenigstens einen Punkt C , sodass B zwischen A und C liegt.³
- A3.** Sind A, B, C drei paarweise verschiedene Punkte einer Geraden, dann tritt einer und nur einer der folgenden Fälle ein: Entweder $A * B * C$, oder $B * C * A$, oder $C * A * B$.

BEMERKUNG 1.2.1. Gilt $A * B * C$ dann auch $g(A, B) = g(B, C) = g(C, A)$. Dies folgt aus Axiom A1 und der Eindeutigkeitsaussage in Axiom I1.

DEFINITION 1.2.2. Für beliebige Punkte A und B definieren wir

$$(AB) := \{X \in \mathcal{E} : A * X * B\} \quad \text{und} \quad [AB] := \{A, B\} \cup (AB).$$



BEMERKUNG 1.2.3. Für beliebige Punkte A, B und C gilt:

- (a) $(AB) \subseteq [AB]$. Sind A und B verschieden, dann gilt auch $[AB] \subseteq g(A, B)$.
- (b) A und B liegen nicht in (AB) .
- (c) $(AB) = (BA)$ und $[AB] = [BA]$.
- (d) $(AA) = \emptyset$ und $[AA] = \{A\}$.
- (e) Ist $B \in (AC)$, dann $A \notin [BC]$ und $C \notin [AB]$.

Die ersten vier Aussagen folgen aus Axiom A1, die letzte aus Axiom A3 sowie (b) und (d).

DEFINITION 1.2.4 (Strecken). Unter einer Strecke verstehen wir ein ungeordnetes Paar verschiedener Punkte AB . Da es nicht auf Reihenfolge der Punkt ankommt gilt $AB = BA$. Unter dem Inneren der Strecke AB verstehen wir die Punktmenge (AB) . Unter der abgeschlossenen Strecke zwischen A und B verstehen wir die Punktmenge $[AB]$. Die beiden Punkte A und B werden End- oder Randpunkte der Strecke AB genannt.

Wenn immer wir von einer Strecke AB sprechen wird stets vorausgesetzt, dass A und B zwei verschiedene Punkte sind. Die Mengen $(AA) = \emptyset$ und $[AA] = \{A\}$ werden zur Abgrenzung als *degenerierte Strecken* bezeichnet.

DEFINITION 1.2.5 (Dreieck). Unter einem Dreieck verstehen wir ein Tripel von nicht kollinearen Punkten ABC . Die Strecken AB, BC und CA werden als *Seiten des Dreieckes* ABC bezeichnet. Die Punkte A, B, C werden *Eckpunkte* des Dreiecks genannt.

²Inbesondere gilt mit $A * B * C$ auch $C * B * A$.

³In anderen Worten: Sind A und B verschieden, dann existiert C mit $A * B * C$.

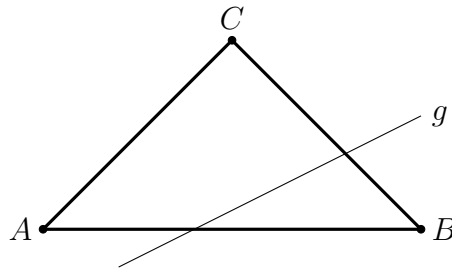
BEMERKUNG 1.2.6. In jedem Dreieck ABC gilt:

- (a) Die Eckpunkte A, B, C sind paarweise verschieden.
- (b) $(AB) \cap (BC) = \emptyset$, $(BC) \cap (CA) = \emptyset$, und $(CA) \cap (AB) = \emptyset$.
- (c) $[AB] \cap [BC] = \{B\}$, $[BC] \cap [CA] = \{C\}$, und $[CA] \cap [AB] = \{A\}$.

Die erste Aussage folgt sofort aus Axiom I1, die anderen beiden aus den Bemerkungen 1.1.8 und 1.2.3.

Es wird nun noch folgendes ebene Anordnungsaxiom [**Hilbert**, §3] postuliert:

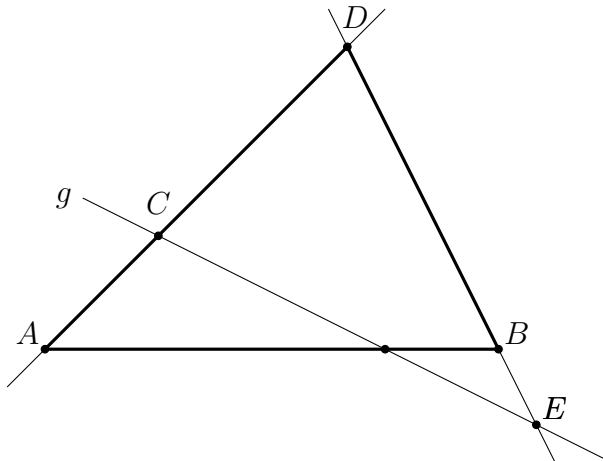
- A4.** (Pasch) Sei ABC ein Dreieck, und sei g eine Gerade, die keinen der Eckpunkte A, B, C enthält. Wenn in dieser Situation g die Seite (AB) trifft, dann muss g auch die Seite (BC) oder die Seite (CA) treffen.



Als erste Folgerung aus den Axiomen zeigen wir, dass jede Strecke innere Punkte besitzt:

PROPOSITION 1.2.7. *Zu zwei verschiedenen Punkten existiert stets wenigstens ein Punkt, der zwischen den beiden liegt.*

BEWEIS. Wir folgen dem Beweis in [**Hilbert**, Satz 3 in §4]. Seien A und B zwei verschiedene Punkte. Nach Bemerkung 1.1.6(d) existiert ein Punkt C , der nicht auf $g(A, B)$ liegt. Nach Axiom A2 existiert ein Punkt D , sodass $A * C * D$. Nach Axiom A1 sind A, C, D drei verschiedene Punkte auf der Geraden $g(A, C) = g(A, D) = g(C, D)$. Da C nicht auf $g(A, B)$ liegt, bildet ADB ein Dreieck, siehe Bemerkung 1.1.8. Insbesondere sind D und B verschieden, nach Axiom A2 existiert daher ein Punkt E , sodass $D * B * E$. Nach Axiom A1 sind D, B, E drei verschiedene Punkte auf der Geraden $g(D, B) = g(D, E) = g(B, E)$. Da ADB ein Dreieck bildet, muss auch CDE ein Dreieck sein, siehe Bemerkung 1.1.8.

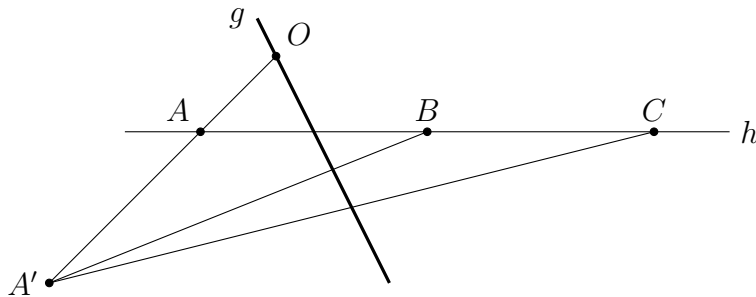


Wir wollen nun Axiom A4 auf das Dreieck ADB und die Gerade $g := g(C, E)$ anwenden. Nach Konstruktion schneidet g die Seite (AD) im Punkt C . Da CDE ein Dreieck bildet, ist dies der einzige Schnittpunkt von g und $g(A, D)$. Insbesondere liegt A nicht auf g . Da CDE ein Dreieck bildet, ist E der einzige Schnittpunkt von g und $g(D, E)$. Wir schließen $g \cap [DB] = \emptyset$, denn $[DB] \subseteq g(D, E)$ aber $E \notin [DB]$ nach Bemerkung 1.2.3(e). Aus Axiom A4 folgt nun, dass g die Seite (AB) schneiden muss. Ihr Schnittpunkt ist der gesuchte Punkt zwischen A und B . \square

Wir überlegen uns nun, dass Paschs Axiom auch für degenerierte Dreiecke gilt.

PROPOSITION 1.2.8 (Pasch). *Seien A, B, C drei beliebige Punkte und g eine Gerade. Gilt in dieser Situation $g \cap (AB) \neq \emptyset$ und $g \cap [BC] = \emptyset$, dann auch $g \cap (CA) \neq \emptyset$.*

BEWEIS. O.B.d.A. sei $B \neq C$. Aus den Voraussetzungen folgt sofort $A \neq B$ und $A \neq C$. Offensichtlich liegen B und C nicht auf g . Da g die Strecke (AB) schneidet, kann auch A nicht auf g liegen, denn andernfalls müsste nach Axiom I1 die Gerade g mit $g(A, B)$ übereinstimmen, was $B \notin g$ widerspräche. Sind A, B, C nicht kollinear, dann folgt die Proposition also aus Axiom A4. O.B.d.A. seien daher A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden h .



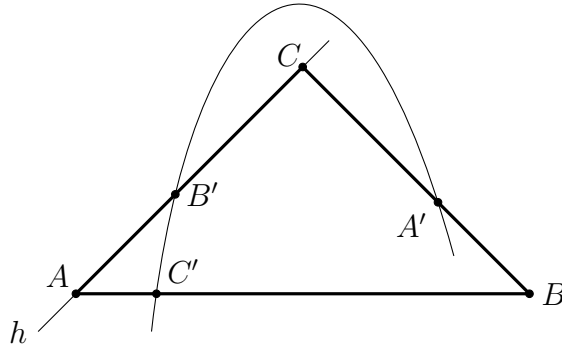
Da $B \in h \setminus g$ sind die Geraden g und h verschieden, also existiert auch ein Punkt $O \in g \setminus h$. Insbesondere ist $O \neq A$, also existiert nach Axiom A2 ein Punkt A' mit $O * A * A'$. Beachte, dass A' weder auf g noch auf h liegt, denn $A \notin g$ und $O \notin h$. Die beiden Geraden g und $g(A, A') = g(A, O)$ schneiden sich nur im Punkt O . Wir schließen $g \cap [AA'] = \emptyset$, denn $[AA'] \subseteq g(A, A')$ und nach Konstruktion $O \notin [AA']$, siehe Bemerkung 1.2.3(e).

Wenden wir Axiom A4 auf das Dreieck $AA'B$ an, erhalten wir $g \cap (A'B) \neq \emptyset$. Erneutes Anwenden von Axiom A4 auf das Dreieck $A'BC$ liefert $g \cap (A'C) \neq \emptyset$. Wenden wir Axiom A4 schließlich auf das Dreieck $AA'C$ an, so folgt $g \cap (CA) \neq \emptyset$. \square

PROPOSITION 1.2.9. *Eine Gerade kann nicht alle drei Seiten eines Dreiecks im Inneren treffen.*

BEWEIS. Wir folgen dem Beweis in [Hilbert, Supplement I.1]. Sei ABC ein Dreieck und g eine Gerade. Wir nehmen indirekt an, g schneidet alle drei Seiten im Inneren. Es existieren daher Punkte $A' \in g \cap (BC)$, $B' \in g \cap (CA)$ und $C' \in g \cap (AB)$. Da ABC ein Dreieck bildet, müssen die Punkte A', B' und C' paarweise verschieden sein, siehe Bemerkung 1.2.6(b). Da sie alle auf einer Geraden liegen, muss nach Axiom A3 einer von ihnen zwischen den anderen beiden liegen. O.B.d.A. liege B' zwischen A' und C' .

Wir wollen nun Axiom A4 auf das Dreieck $A'BC'$ und die Gerade $h := g(A, C)$ anwenden. Da A der einzige Schnittpunkt von h und $g(A, B)$ ist, folgt $h \cap [BC'] = \emptyset$, denn

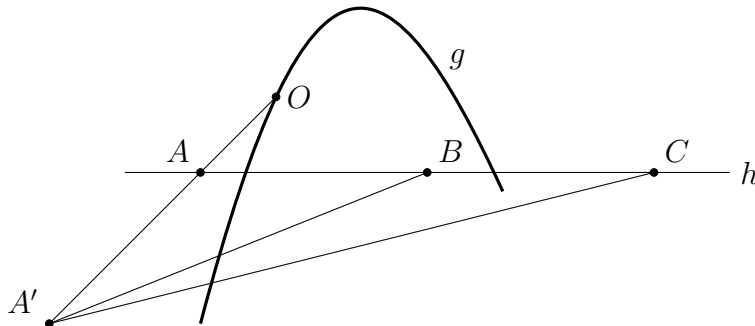


$[BC'] \subseteq g(A, B)$ aber $A \notin [BC']$, siehe Bemerkung 1.2.3(e). Analog sehen wir $h \cap [BA'] = \emptyset$. Andererseits wird $(A'C')$ von h im Punkt B' getroffen, und wir erhalten einen Widerspruch zu Axiom A4. Somit kann g nicht alle drei Seiten im Inneren treffen. \square

Wir benötigen auch folgende Version von Proposition 1.2.9 für degenerierte Dreiecke

PROPOSITION 1.2.10. *Seien A, B, C drei beliebige Punkte. Trifft eine Gerade g sowohl (AB) , (BC) und (CA) , dann müssen schon alle drei Punkte A, B, C auf g liegen.*

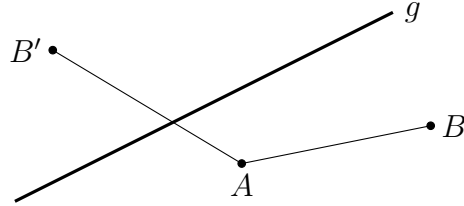
BEWEIS. Nach Proposition 1.2.9 dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass diese drei Punkte auf einer Geraden h liegen. Nach Voraussetzung sind A, B, C paarweise verschieden. Wir nehmen indirekt an, einer der Punkte liege nicht auf g . Dann folgt sofort, dass keiner der Punkte A, B, C auf g liegen kann.



Wir gehen nun wie im Beweis von Proposition 1.2.8 vor. Da $A \in h \setminus g$, sind die Geraden g und h verschieden, es existiert daher auch in Punkt $O \in g \setminus h$. Insbesondere ist $A \neq O$, nach Axiom A2 existiert daher ein Punkt A' mit $O * A * A'$. Beachte, dass A' weder auf g noch auf h liegt. Da O der einzige Schnittpunkt von g und $g(O, A)$ ist, folgt $g \cap [AA'] = \emptyset$, denn $[AA'] \subseteq g(O, A)$, aber nach Konstruktion ist $O \notin [AA']$.

Wenden wir Axiom A4 auf das Dreieck $AA'B$ und die Gerade g an, folgt $g \cap (A'B) \neq \emptyset$. Wenden wir Axiom A4 auf das Dreieck $AA'C$ und die Gerade g an, folgt $g \cap (A'C) \neq \emptyset$. Also trifft g alle drei Seiten des Dreiecks $A'BC$ im Inneren, ein Widerspruch zu Proposition 1.2.9. Somit müssen A, B, C alle auf g liegen. \square

DEFINITION 1.2.11 ([Hilbert, §4]). Sei g eine Gerade. Weiters seien A und B zwei Punkte, die nicht auf g liegen. Wir sagen A und B liegen auf der selben Seite von g , wenn $g \cap (AB) = \emptyset$ gilt.



LEMMA 1.2.12. *Auf der selben Seite einer Geraden g zu liegen ist eine Äquivalenzrelation auf ihrem Komplement $\mathcal{E} \setminus g$ mit genau zwei Äquivalenzklassen.*

BEWEIS. Die Reflexivität der Relation folgt aus $(AA) = \emptyset$, ihre Symmetrie folgt aus $(AB) = (BA)$, und die Transitivität folgt aus Proposition 1.2.8.

Sei $A \notin g$ und $X \in g$. Nach Axiom A2 existiert B mit $A * X * B$. Es folgt $B \notin g$. Nach Konstruktion gilt $X \in g \cap (AB)$, also $g \cap (AB) \neq \emptyset$. Somit liegen A und B nicht auf der selben Seite von g und repräsentieren daher unterschiedliche Äquivalenzklassen. Dies zeigt, dass wenigstens zwei Äquivalenzklassen existieren.

Um zu zeigen, dass es nicht mehr als zwei Äquivalenzklassen geben kann, betrachten wir drei Punkte A, B, C , die nicht auf g liegen. Wir nehmen an, A und B liegen nicht auf der selben Seite von g , und wir nehmen auch an, dass B und C nicht auf der selben Seite von g liegen. Es genügt zu zeigen, dass dann A und C auf der selben Seite von g liegen. Nach Voraussetzung gilt $g \cap (AB) \neq \emptyset$ und $g \cap (BC) \neq \emptyset$. Mit Proposition 1.2.10 folgt $g \cap (AC) = \emptyset$, also liegen A und C tatsächlich auf der selben Seite von g . \square

DEFINITION 1.2.13 (Halbebenen). Unter einer *Seite einer Geraden g* verstehen wir eine Äquivalenzklasse der zuvor betrachteten Äquivalenzrelation auf $\mathcal{E} \setminus g$, vgl. Lemma 1.2.12. Jede Punktmenge dieser Form wird als *offene Halbebene* bezeichnet.

BEMERKUNG 1.2.14 (Ebenenteilung). Sei g eine Gerade, und bezeichnen ε_1 und ε_2 die beiden Seiten (Äquivalenzklassen) von g . Es gilt daher

$$\mathcal{E} \setminus g = \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \quad \text{und} \quad \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \emptyset.$$

Das Komplement der Geraden g zerfällt daher in zwei disjunkte (offene) Halbebenen, die beiden Seiten von g . Wir schreiben dafür auch $\mathcal{E} \setminus g = \varepsilon_1 \sqcup \varepsilon_2$.

So wie eine Gerade die Ebene in zwei Halbebenen zerlegt, zerlegt auch ein Punkt auf einer Geraden die Gerade in zwei Halbgeraden. Wir gehen analog vor:

DEFINITION 1.2.15 ([Hilbert, §4]). Sei O ein Punkt auf einer Geraden h und seien A, B zwei Punkte in $h \setminus \{O\}$. Wir sagen *A und B liegen auf der selben Seite von O in h* , wenn $O \notin (AB)$.

BEMERKUNG 1.2.16. Seien g und h zwei verschiedene Geraden, die sich im Punkt O schneiden. Weiters seien A und B zwei Punkte auf $h \setminus \{O\}$. In dieser Situation sind äquivalent:

- (a) A und B liegen auf der selben Seite von g .
- (b) A und B liegen auf der selben Seite von O in h .

Die Implikation (a) \Rightarrow (b) folgt aus $O \in g$. Die umgekehrte Implikation (b) \Rightarrow (a) folgt aus $(AB) \subseteq h$ und der Tatsache, dass O der einzige Schnittpunkt von g und h ist.

LEMMA 1.2.17. *Auf der selben Seite eines Punktes O in einer Geraden h zu liegen, ist eine Äquivalenzrelation auf dem Komplement $h \setminus \{O\}$ mit genau zwei Äquivalenzklassen.*

BEWEIS. Wir wählen eine von h verschiedene Gerade g so, dass $g \cap h = \{O\}$. Aus Lemma 1.2.12 und Bemerkung 1.2.16 folgt sofort, dass “auf der selben Seite von O zu liegen” eine Äquivalenzrelation auf $h \setminus \{O\}$ ist, die höchstens zwei Äquivalenzklassen besitzt.

Um einzusehen, dass es wenigstens zwei Äquivalenzklassen gibt, gehen wir wie im Beweis von Lemma 1.2.12 vor. Nach Axiom I2 existiert ein Punkt $A \in h \setminus \{O\}$, und nach Axiom A2 ein Punkt B , sodass $A * O * B$. Aus Axiom A1 folgt $B \in h \setminus \{O\}$, und nach Konstruktion gilt $O \in (AB)$. Also liegen A und B nicht auf der selben Seite von O , und repräsentieren daher verschiedene Äquivalenzklassen. \square

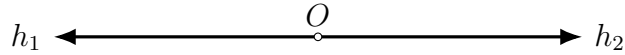
DEFINITION 1.2.18 (Halbgeraden). Unter einer *Seite eines Punktes O* auf einer Geraden h verstehen wir eine Äquivalenzklasse der zuvor betrachteten Äquivalenzrelation auf $h \setminus \{O\}$, vgl. Lemma 1.2.17. Jede Punktmenge dieser Form wird als *offene Halbgerade* oder als *offener Halbstrahl* bezeichnet. Der Punkt O als *Ausgangspunkt* der beiden Halbstrahlen bezeichnet, wir sagen auch die beiden Halbstrahlen gehen vom Punkt O aus.

BEMERKUNG 1.2.19 (Trägergerade). Aus Axiom A2 und Bemerkung 1.2.3(e) folgt sofort, dass jeder Halbstrahl wenigstens zwei verschiedene Punkte enthält. Jeder Halbstrahl ist daher in einer eindeutig bestimmten Geraden enthalten, die als *Trägergerade des Halbstrahls* bezeichnet wird. Es lässt sich auch leicht zeigen, dass ein Halbstrahl nur einen Ausgangspunkt haben kann.

BEMERKUNG 1.2.20 (Geradenteilung). Sei O ein Punkt auf einer Geraden h . Weiters bezeichnen h_1 und h_2 die beiden Seiten (Äquivalenzklassen) von O in h . Es gilt daher

$$h \setminus \{O\} = h_1 \cup h_2 \quad \text{und} \quad h_1 \cap h_2 = \emptyset.$$

Der Punkt O zerlegt die Gerade h daher in zwei disjunkte (offene) Halbgeraden, die beiden Seiten von O in h . Wir schreiben dafür auch $h \setminus \{O\} = h_1 \sqcup h_2$.



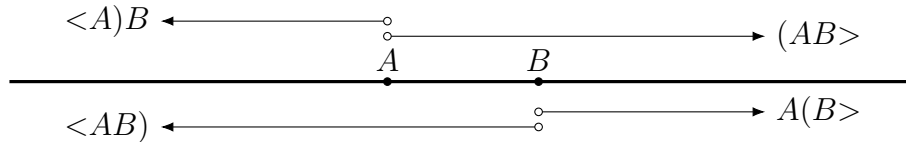
DEFINITION 1.2.21. Seien A und B zwei verschiedene Punkte. Wir bezeichnen die Seite von A in $g(A, B)$, die B enthält mit $(AB>$ oder $<BA)$. Es gilt daher

$$(AB> = \{X \in g(A, B) : A \notin [XB]\} = <BA).$$

Die andere Seite, die B nicht enthält, bezeichnen wir mit $B(A>$ oder $<A)B$. Es gilt daher

$$<A)B = \{X \in g(A, B) : A \in (XB)\} = \{X \in \mathcal{E} : X * A * B\} = B(A>.$$

Beachte, dass diese Halbstrahlen nur für verschiedene Punkte A und B definiert sind.



BEMERKUNG 1.2.22. Ist h ein von A ausgehender Halbstrahl und $B \in h$, dann gilt $h = (AB>$. Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

BEMERKUNG 1.2.23. Für zwei verschiedene Punkte A und B gilt stets

$$\langle AB \rangle \cap (AB) = (AB) \quad \text{und} \quad \langle AB \rangle \cup (AB) = g(A, B).$$

Die Inklusion \supseteq auf der linken Seite folgt aus Bemerkung 1.2.3(e). Die umgekehrte Inklusion \subseteq auf der linken Seite folgt aus Axiom A3. Nach Bemerkung 1.2.3(e) gilt auch $(AB) \supseteq A(B)$, woraus leicht die zweite Identität oben folgt. Schneiden wir (AB) mit der disjunkten Zerlegung $g(A, B) \setminus \{B\} = \langle AB \rangle \sqcup A(B)$ aus Bemerkung 1.2.20 erhalten wir daher

$$(AB) \setminus \{B\} = (AB) \cup A(B) \quad \text{und} \quad (AB) \cap A(B) = \emptyset.$$

Durch Herausnehmen eines Punktes zerfällt ein Halbstrahl daher in eine Strecke und einen dazu disjunkten Halbstrahl. Wir schreiben dafür auch $(AB) \setminus \{B\} = (AB) \sqcup A(B)$.

BEMERKUNG 1.2.24. Sei A ein Punkt auf einer Geraden g , und h ein von A ausgehender Halbstrahl, der nicht in g liegt. Dann muss h zur Gänze in einer der beiden Seiten von g (offenen Halbebenen) liegen. Dies folgt sofort aus Bemerkung 1.2.16.

BEMERKUNG 1.2.25. Sei A ein Punkt auf einer Geraden g , sei ε eine Seite von g und $B \in \varepsilon$. Dann gilt schon $(AB) \subseteq \varepsilon$. Dies folgt aus den beiden Bemerkungen 1.2.23 und 1.2.24.

LEMMA 1.2.26 ([Hilbert, Satz 5 in §4]). Für beliebige Punkte A, B, C, D gilt:

- (a) Aus $A * B * C$ und $B * C * D$ folgt $A * B * D$ und $A * C * D$ und insbesondere $A \neq D$.
- (b) Aus $A * B * D$ und $B * C * D$ folgt $A * B * C$ und $A * C * D$ und insbesondere $A \neq C$.

BEWEIS. Gilt $A * B * C$ und $B * C * D$, dann liegen alle vier Punkte auf einer Geraden h , siehe Axiom A1. Da $B \in (AC)$ liegen A und C auf verschiedenen Seiten von B in h . Aus der zweiten Voraussetzung folgt $B \notin [CD]$, siehe Bemerkung 1.2.3(e), also liegen C und D auf der selben Seite von B . Aus der Transitivität der Relation in Lemma 1.2.17 folgt daher, dass auch A und D auf verschiedenen Seiten von B liegen, d.h. $B \in (AD)$, und daher $A * B * D$. Nach Axiom A1 müssen A und D verschieden sein. Analog, oder durch Vertauschen der Reihenfolge der Punkte A, B, C, D , erhalten wir auch $A * C * D$. Dies zeigt (a).

Sei nun $A * B * D$ und $B * C * D$. Wieder müssen alle vier Punkte auf einer Geraden h liegen. Die erste Voraussetzung besagt, dass A und D auf verschiedenen Seiten von B in h liegen. Wie zuvor, erhalten wir aus der zweiten Voraussetzung, dass C und D auf der selben Seite von B liegen. Mit der Transitivität folgt, dass A und C auf verschiedenen Seiten von B liegen, d.h. $B \in (AC)$, und daher $A * B * C$. Dies zeigt den ersten Teil in (b). Daraus erhalten wir auch, dass B und C auf der selben Seite von A liegen. Wegen $A * B * D$ liegen auch B und D auf der selben Seite von A . Mit der Transitivität schließen wir, dass C und D auf der selben Seite von A liegen, also $A \notin (CD)$. Aus den beiden Voraussetzungen folgt, dass A und B auf der selben Seite von D liegen, und auch B und C auf der selben Seite von D liegen. Somit liegen auch A und C auf der selben Seite von D , also $D \notin (AC)$. Mit Axiom A3 folgt nun $A * C * D$. \square

BEMERKUNG 1.2.27. Ist $B \in (AC)$, dann gilt

$$\langle AB \rangle \cap (AC) = (AB) \quad \text{und} \quad (AC) \cap \langle BC \rangle = (BC). \quad (1)$$

Die Inklusion $(BC) \subseteq \langle BC \rangle$ haben wir bereits in Bemerkung 1.2.23 festgehalten. Die Inklusion $(BC) \subseteq (AC)$ folgt aus der zweiten Aussage in Lemma 1.2.26(b). Somit $(BC) \subseteq (AC) \cap \langle BC \rangle$. Ist umgekehrt $X \in \langle BC \rangle$, dann liegen A und X auf verschiedenen Seiten von B , also $A * B * X$. Gilt darüber hinaus $X \in (AC)$, so erhalten wir $X \in (BC)$, wieder

aufgrund der zweiten Aussage in Lemma 1.2.26(b). Dies zeigt die umgekehrte Inklusion $(BC) \supseteq (AC) \cap (BC)$ und somit die Gleichung auf der rechten Seite in (1). Die andere Identität in (1) folgt analog, oder durch Vertauschen von A und C . Schneiden wir (AC) mit der disjunkten Zerlegung $g(A, C) \setminus \{B\} = \langle AB \rangle \sqcup (BC)$ aus Bemerkung 1.2.20, erhalten wir mit (1) nun

$$(AC) \setminus \{B\} = (AB) \cup (BC) \quad \text{und} \quad (AB) \cap (BC) = \emptyset. \quad (2)$$

Durch Herausnehmen eines Punktes zerfällt eine Strecke daher in zwei disjunkte Teilstrecken.

BEMERKUNG 1.2.28 (Trägergerade einer Strecke). Sind A und B zwei verschiedene Punkte, dann enthält die Strecke (AB) wenigstens zwei verschiedene Punkte. Dies folgt aus Proposition 1.2.7 und Lemma 1.2.26(b) oder (2). Insbesondere ist $g(A, B)$ die einzige Gerade, die (AB) enthält, wir bezeichnen sie daher als *Trägergerade* der Strecke.

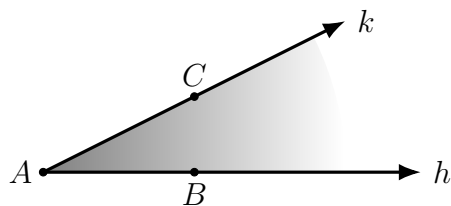
BEMERKUNG 1.2.29. Sind A und B zwei verschiedene Punkte, dann enthält die Strecke (AB) unendlich viele Punkte. (siehe Übungen)

DEFINITION 1.2.30. Sind A und B zwei verschiedene Punkte, dann werden

$$[AB> := \{A\} \cup (AB> \quad \text{und} \quad B[A> := \{A\} \cup B(A>$$

abgeschlossene Halbstrahlen oder *abgeschlossene Halbgeraden* genannt.

DEFINITION 1.2.31 (Winkel). Unter einem *Winkel* verstehen wir ein ungeordnetes Paar verschiedener Halbstrahlen, die vom selben Punkt ausgehen und nicht in einer Geraden liegen. Sind h und k zwei solche Halbstrahlen, dann schreiben wir $\angle(h, k)$ für den aufgespannten Winkel. Die beiden Halbstrahlen werden *Schenkel* des Winkels genannt und ihr gemeinsamer Ausgangspunkt als *Scheitel* des Winkels bezeichnet. Da es uns nicht auf die Reihenfolge ankommt gilt $\angle(h, k) = \angle(k, h)$. Sind A, B, C drei nicht kollineare Punkte, dann gehen die beiden Halbstrahlen $(AB>$ und $(AC>$ vom gleichen Punkt A aus und liegen nicht in einer Gerade, und wir schreiben $\angle CAB$ für den von ihnen aufgespannten Winkel.



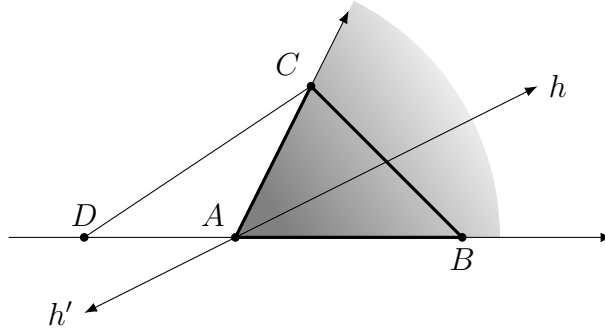
BEMERKUNG 1.2.32. Eine Orientierung ist in unserem Winkelkonzept nicht enthalten, denn keiner der Schenkel ist ausgezeichnet. Auch betrachten wir hier keine gestreckten oder überstumpfe Winkel.

DEFINITION 1.2.33 (Innere eines Winkels). Sei $\angle(h, k)$ ein Winkel. Es bezeichne ε_k die Seite der Trägergeraden von h (Halbebene), die k enthält, siehe Bemerkung 1.2.24, und es bezeichne ε_h die Seite der Trägergeraden von k , die h enthält. Unter dem Inneren des Winkels $\angle(h, k)$ verstehen wir die Teilmenge $\varepsilon_h \cap \varepsilon_k$.

BEMERKUNG 1.2.34. Das Innere des Winkels $\angle CAB$ besteht daher aus allen Punkten, die auf der selben Seite von $g(A, B)$ wie C liegen und die auf der selben Seite von $g(C, A)$ wie B liegen.

BEMERKUNG 1.2.35. Ist ABC ein Dreieck, dann liegt (BC) zur Gänze im Inneren des Winkels $\angle CAB$. Dies folgt aus Bemerkung 1.2.25.

PROPOSITION 1.2.36. Ist ABC ein Dreieck, dann trifft jeder Halbstrahl, der von A ausgeht und im Inneren des Winkels $\angle CAB$ liegt, die Seite (BC) .



BEWEIS. Wir folgen dem Beweis in [Hartshorne, Proposition 7.3]. Sei h ein Halbstrahl, der von A ausgeht und im Inneren des Winkels $\angle CAB$ liegt. Sei g die Trägergerade dieses Halbstrahls, und bezeichne h' die andere Seite von A auf g . Es gilt daher $g = h' \cup \{A\} \cup h$. Nach Axiom A2 existiert ein Punkt D mit $D * A * B$. Da C nicht auf $g(D, B)$ liegt, ist auch BCD ein Dreieck. Wir wollen Axiom A4 auf das Dreieck BCD und die Gerade g anwenden. Beachte, dass keiner der Eckpunkte B, C, D auf g liegt. Nach Konstruktion trifft g die Seite (DB) im Punkt A . Wir zeigen nun

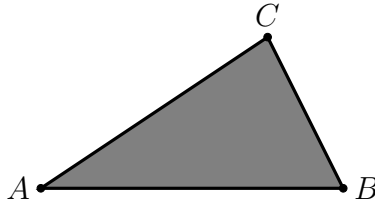
$$h' \cap (BC) = \emptyset, \quad h' \cap (CD) = \emptyset \quad \text{und} \quad h \cap (CD) = \emptyset. \quad (3)$$

Da h und C auf der selben Seite von $g(A, B)$ liegen, liegen h' und C auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$, siehe Bemerkung 1.2.16. Somit kann h' weder das Innere des Winkels $\angle CAB$ noch das Innere des Winkels $\angle CAD$ treffen. Mit Bemerkung 1.2.35 folgen die ersten beiden Identitäten in (3). Mit Bemerkung 1.2.16 sehen wir, dass B und D auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$ liegen. Da h und B auf der selben Seite von $g(A, C)$ liegen, liegen h und D auf verschiedenen Seiten dieser Geraden. Insbesondere trifft h das Innere des Winkels $\angle CAD$ nicht. Die dritte Identität in (3) folgt nun wie zuvor mit Bemerkung 1.2.35.

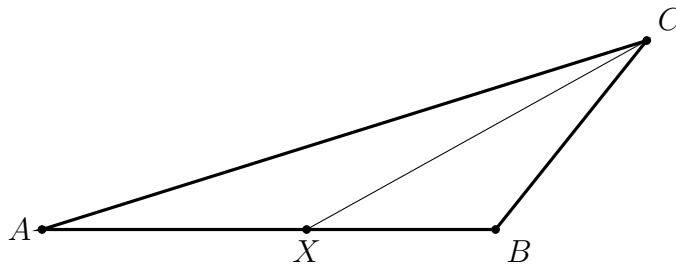
Da auch A nicht auf (CD) liegt, folgt aus der zweiten und dritten Gleichung in (3), dass die Gerade g die Seite (CD) nicht trifft. Nach Axiom A4 muss sie daher die Seite (BC) treffen. Da A nicht auf (BC) liegt, folgt aus der ersten Gleichung in (3) nun, dass der Halbstrahl h die Seite (BC) treffen muss. \square

DEFINITION 1.2.37 (Innere eines Dreiecks). Unter dem *Inneren* eines Dreiecks ABC verstehen wir die Menge aller Punkte, die gleichzeitig auf der selben Seite von $g(A, B)$ wie C liegen, und auf der selben Seite von $g(B, C)$ wie A liegen, und auf der selben Seite von $g(C, A)$ wie B liegen.

BEMERKUNG 1.2.38. Das Innere eines Dreiecks ABC kann in anderen Worten wie folgt beschrieben werden: Bezeichne ε_A die Seite von $g(B, C)$, die A enthält; ε_B die Seite von $g(C, A)$, die B enthält; und ε_C die Seite von $g(A, B)$, die C enthält. Dann stimmt der Durchschnitt dieser drei Halbebenen, $\varepsilon_A \cap \varepsilon_B \cap \varepsilon_C$, mit dem Inneren des Dreiecks ABC überein.



BEMERKUNG 1.2.39. Ist ABC ein Dreieck und $X \in (AB)$, dann liegt die Strecke (XC) zur Gänze im Inneren des Dreiecks ABC . Nach Bemerkung 1.2.35 liegt (XC) nämlich im Inneren des Winkels $\angle CAB$ und auch im Inneren des Winkels $\angle ABC$. Da der Durchschnitt dieser Winkelinneren mit dem Inneren des Dreiecks überein stimmt, liegt (XC) im Inneren des Dreiecks. Mit Bemerkung 1.2.29 sehen wir insbesondere, dass das Innere eines Dreiecks stets unendlich viele Punkte enthält.



DEFINITION 1.2.40 (Konvexität). Eine Punktmenge $K \subseteq \mathcal{E}$ wird *konvex* genannt, wenn für je zwei Punkte $A, B \in K$ auch $[AB] \subseteq K$ gilt.

BEMERKUNG 1.2.41 (Beispiele konvexer Mengen). Geraden sind konvex. Für je zwei Punkte A und B sind die Mengen (AB) und $[AB]$ konvex. Aus dieser Bemerkung folgt auch, dass Halbebenen und Halbstrahlen konvex sind. Beliebige Durchschnitte konvexer Teilmengen sind wieder konvex. Somit sind auch die Inneren von Winkeln und Dreiecken konvex. (siehe Übungen)

1.3. Kongruenzaxiome für Strecken. Auf der Menge aller Strecken wird eine Relation postuliert, die als *Kongruenz von Strecken* bezeichnet und mit dem Zeichen \equiv geschrieben wird. Zwei Strecken AB und CD werden *kongruent* genannt, wenn sie in Relation stehen, d.h. wenn $AB \equiv CD$ gilt.

Diese Kongruenzrelation soll folgender Axiomengruppe [Hilbert, §5] genügen:

- K1.** Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Strecken.
- K2.** Sind A und B zwei verschiedene Punkte, und ist C ein Punkt auf einer Geraden g , dann existiert auf jeder Seite von C in g genau ein Punkt D , sodass $AB \equiv CD$.
- K3.** Liegt ein Punkt B zwischen zwei Punkten A und C , und liegt ein weiterer Punkt B' zwischen zwei Punkten A' und C' , und gilt darüberhinaus $AB \equiv A'B'$ sowie $BC \equiv B'C'$, dann auch $AC \equiv A'C'$.

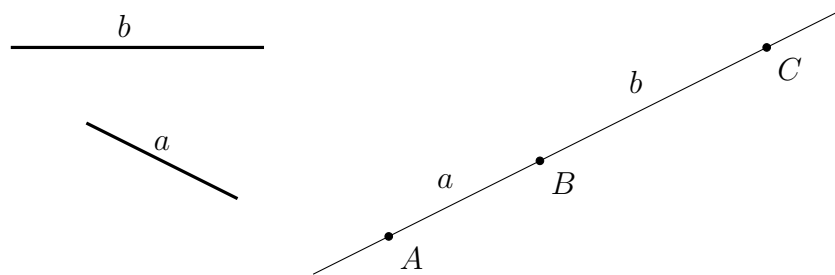
Axiom K1 erlaubt es, Äquivalenzklassen von Strecken zu bilden, die wir Kongruenzklassen nennen. Wir bezeichnen mit \mathcal{P} die Menge aller Kongruenzklassen von Strecken. Sind A und B zwei verschiedene Punkte, dann wird die Kongruenzklasse der Strecke AB mit $|AB|$ bezeichnet, d.h. $|AB| \in \mathcal{P}$.

BEMERKUNG 1.3.1. Für je zwei verschiedene Punkte A und B gilt $|AB| = |BA|$, denn die Strecken AB und BA stimmen überein, vgl. Definition 1.2.4.

BEMERKUNG 1.3.2. Wir betrachten Kongruenzklassen von Strecken, als Strecken gleicher Länge, und fassen $|AB|$ daher als (abstrakte) Streckenlänge auf. Beachte, dass die Elemente von \mathcal{P} nur positiven Längen entsprechen, degenerierte Strecken (mit Länge Null) sind in der Definition von \mathcal{P} nicht enthalten.

BEMERKUNG 1.3.3. Sei h ein Halbstrahl, der vom Punkt A ausgeht. Dann besagt Axiom K2 gerade, dass die Abbildung $h \rightarrow \mathcal{P}$, $X \mapsto |AX|$, eine Bijektion ist.

DEFINITION 1.3.4 (Addition). Sind $a, b \in \mathcal{P}$ zwei Kongruenzklassen von Strecken, dann definieren wir ihre Summe, $a + b \in \mathcal{P}$, wie folgt: Wir wählen drei Punkte (auf einer Geraden) so, dass $A * B * C$, $|AB| = a$, $|BC| = b$, und definieren dann $a + b := |AC|$.



LEMMA 1.3.5. Die Summe von Kongruenzklassen ist wohldefiniert.

BEWEIS. Wir überzeugen uns zunächst davon, dass drei Punkte A, B, C mit den geforderten Eigenschaften überhaupt existieren. Dazu wählen wir eine Gerade g und einen Punkt B auf g . Auf einer der beiden Seiten von B in g wählen wir einen Punkt A mit $|AB| = a$, und auf der anderen Seite von B wählen wir einen Punkt C auf g mit $|BC| = b$. Diese Punkte A und C existieren nach Axiom K2, siehe auch Bemerkung 1.3.1. Da A und C auf verschiedenen Seiten von B liegen, muss B zwischen A und C liegen, siehe Definition 1.2.15.

Nun wollen wir uns noch davon überzeugen, dass die Summe nicht von der Wahl der Punkte A, B, C abhängt. Seien also A', B', C' drei weitere Punkte, sodass $A' * B' * C'$, $|A'B'| = a$ und $|B'C'| = b$. Es gilt daher $|AB| = |A'B'|$ und $|BC| = |B'C'|$, also $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$. Aus Axiom K3 folgt nun $AC \equiv A'C'$, also $|AC| = |A'C'|$. \square

SATZ 1.3.6 (Rechenregeln für Streckenaddition). Für beliebige $a, b, c \in \mathcal{P}$ gilt:

- (a) $a + b = b + a$. (Kommutativität)
- (b) $(a + b) + c = a + (b + c)$. (Assoziativität)
- (c) Es tritt genau einer der folgenden Fälle ein:
 - (i) Entweder existiert $x \in \mathcal{P}$ mit $x + a = b$, oder
 - (ii) $a = b$, oder
 - (iii) es existiert $x \in \mathcal{P}$ mit $a = x + b$.
- (d) Aus $a + c = b + c$ folgt $a = b$. (Kürzungsregel)

BEWEIS. Um (a) einzusehen, wählen wir drei Punkte so, dass $A * B * C$, $|AB| = a$ und $|BC| = b$. Nach Definition gilt daher $a + b = |AC|$. Es gilt dann auch $C * B * A$, $b = |CB|$ und

$a = |BA|$, siehe Axiom A1 und Bemerkung 1.3.1. Nach Definition ist daher $b + a = |CA|$. Die Kommutativität folgt nun aus $|AC| = |CA|$.

Um (b) einzusehen wählen wir wie zuvor drei Punkte A, B, C auf einer Geraden so, dass $A * B * C$, $|AB| = a$ und $|BC| = b$. Darüber hinaus wählen wir auf der Seite von C , die B nicht enthält, einen weiteren Punkt D auf dieser Geraden mit $|CD| = c$, siehe Axiom K2. Es gilt daher $B * C * D$. Nach Definition haben wir

$$a + b = |AC| \quad \text{sowie} \quad b + c = |BD|. \quad (4)$$

Nach Lemma 1.2.26(a) gilt auch $A * B * D$ und $A * C * D$. Somit erhalten wir auch

$$a + |BD| = |AD| = |AC| + c.$$

Die Assoziativität folgt nun durch Einsetzen der Relationen (4).

Um (c) einzusehen, wählen wir zwei Punkte A und C' auf der selben Seite von B in einer Geraden so, dass $|AB| = a$ und $|C'B| = b$. Der Punkt B liegt daher nicht zwischen A und C' . Beachte $A \neq B \neq C'$. Nach Axiom A3 tritt daher genau einer der folgenden Fälle ein:

- (i') Entweder $C' * A * B$, oder
- (ii') $A = C'$, oder
- (iii') $A * C' * B$.



Diese drei Fälle sind jeweils zu den entsprechenden Fällen in Satz 1.3.6(c) äquivalent, d.h.

$$(i') \Leftrightarrow (i), \quad (ii') \Leftrightarrow (ii), \quad \text{und} \quad (iii') \Leftrightarrow (iii).$$

Die Implikationen \Rightarrow sind dabei offensichtlich: Im ersten Fall folgt $|C'A| + a = b$; im zweiten Fall folgt $a = b$; und im dritten Fall $|AC'| + b = a$. Die umgekehrten Implikationen folgen leicht aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K2. Wir werden dies nur für $(i') \Leftarrow (i)$ ausführen, die Implikation $(iii') \Leftarrow (iii)$ folgt analog und $(ii') \Leftarrow (ii)$ ist noch einfacher. Sei also $x \in \mathcal{P}$ und $x + a = b$. Wähle einen Punkt D so, dass $D * A * B$ und $|DA| = x$. Dann gilt $|DB| = x + a = b$. Beachte, dass C' und D auf der selben Seite von B liegen, denn C' und A liegen auf der selben Seite und auch A und D liegen auf der selben Seite. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K2 folgt $C' = D$, also $C' * A * B$.

Um (d) einzusehen, sei $a + c = b + c$. Wir gehen indirekt vor und nehmen $a \neq b$ an. Nach (c) existiert daher $x \in \mathcal{P}$, sodass entweder $x + a = b$ oder $a = x + b$. O.B.d.A. sei $x + a = b$. Mit (b) folgt $x + (a + c) = b + c$. Aus (c) erhalten wir den Widerspruch $a + c \neq b + c$. Somit muss $a = b$ gelten, und der Beweis ist vollständig. \square

Die Rechenregeln in Satz 1.3.6 besagen, dass \mathcal{P} eine kommutative Halbgruppe bildet. Analog zum Übergang von \mathbb{N} zu \mathbb{Z} lässt sich \mathcal{P} in eine kommutative Gruppe einbetten.

LEMMA 1.3.7.

- (a) Durch $(a, b) \sim (a', b') : \Leftrightarrow a + b' = a' + b$ ist auf $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ eine Äquivalenzrelation definiert.
- (b) Durch $[a, b] + [c, d] := [a + c, b + d]$ ist auf der Menge der Äquivalenzklassen $\mathcal{K} := \mathcal{P} \times \mathcal{P} / \sim$ eine Operation $+$ wohldefiniert. Dabei bezeichnet $[a, b] \in \mathcal{K}$ die von $(a, b) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ repräsentierte Äquivalenzklasse.

- (c) Mit der oben definierten Addition wird \mathcal{K} eine kommutative Gruppe.
(d) Für $c \in \mathcal{P}$ ist $\iota: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{K}$, $\iota(a) := [a + c, c]$, ein injektiver Homomorphismus, d.h. es gilt $\iota(a + b) = \iota(a) + \iota(b)$ für beliebige $a, b \in \mathcal{P}$. Diese Abbildung ι ist unabhängig von $c \in \mathcal{P}$.
(e) Für jedes $k \in \mathcal{K}$ tritt genau einer der folgenden Fälle ein: Entweder $-k \in \iota(\mathcal{P})$, oder $k = 0$, oder $k \in \iota(\mathcal{P})$.

BEWEIS. Reflexivität und Symmetrie dieser Relation in (a) sind offensichtlich. Um die Transitivität einzusehen, seien $a, a', a'', b, b', b'' \in \mathcal{P}$ so, dass $(a, b) \sim (a', b')$ und $(a', b') \sim (a'', b'')$. Es gilt daher $a + b' = a' + b$ sowie $a' + b'' = a'' + b'$. Addition dieser beiden Gleichungen führt, unter Verwendung von Assoziativität und Kommutativität der Addition, auf

$$a + b'' + (a' + b') = a'' + b + (a' + b').$$

Aus der Kürzungsregel in Satz 1.3.6(d) erhalten wir $a + b'' = a'' + b$, also $(a, b) \sim (a'', b'')$.

Um (b) einzusehen, seien $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathcal{P}$ so, dass $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$. Es gilt daher $a + b' = a' + b$ sowie $c + d' = c' + d$. Addition der beiden Gleichungen führt auf

$$(a + c) + (b' + d') = (a' + c') + (b + d).$$

Somit gilt $(a + c, b + d) \sim (a' + c', b' + d')$, also $[a + c, b + d] = [a' + c', b' + d']$.

Nun zu (c): Kommutativität und Assoziativität der Addition auf \mathcal{K} folgen sofort aus der entsprechenden Eigenschaft der Addition auf \mathcal{P} . Für beliebige $a, b, c \in \mathcal{P}$ gilt $[a, b] + [c, c] = [a + c, b + c] = [a, b]$, denn $(a + c) + b = a + (b + c)$. Somit ist $0 := [c, c]$ neutrales Element der Addition auf \mathcal{K} .⁴ Schließlich gilt $[a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [a + b, a + b] = 0$, also ist $[b, a]$ das additive Inverse von $[a, b]$, d.h. $-[a, b] = [b, a]$.

Die Abbildung ι in (d) hängt nicht von c ab, denn für $a, c, c' \in \mathcal{P}$ gilt $(a + c) + c' = (a + c') + c$, also $[a + c, c] = [a + c', c']$. Die Abbildung ι ist injektiv, denn aus $[a + c, c] = [b + c', c']$ folgt $a + c + c' = b + c' + c$ und die Kürzungsregel liefert $a = b$. Die Abbildung ι ist ein Homomorphismus (von Halbgruppen), denn für beliebige $a, b, c, c' \in \mathcal{P}$ gilt

$$\iota(a) + \iota(b) = [a + c, c] + [b + c', c'] = [a + b + (c + c'), c + c'] = \iota(a + b).$$

Um (e) einzusehen, seien $a, b, x \in \mathcal{P}$. Offensichtlich haben wir:

$$x + a = b \Leftrightarrow -[a, b] = \iota(x)$$

$$a = b \Leftrightarrow [a, b] = 0$$

$$a = x + b \Leftrightarrow [a, b] = \iota(x)$$

Die Fallunterscheidung folgt daher aus Satz 1.3.6(c). □

Nach Lemma 1.3.7(d) können wir \mathcal{P} als Teilmenge von \mathcal{K} auffassen, und diese Identifikation ist mit der Addition verträglich. Nach Lemma 1.3.7(e) haben wir

$$\mathcal{K} \setminus \{0\} = (-\mathcal{P}) \cup \mathcal{P} \quad \text{und} \quad (-\mathcal{P}) \cap \mathcal{P} = \emptyset,$$

wobei $-\mathcal{P}$ die Teilmenge $\{-a : a \in \mathcal{P}\}$ bezeichnet. Beim Übergang von \mathcal{P} zu \mathcal{K} sind also das neutrale Element 0 und die additiven Inversen der Elemente in \mathcal{P} neu hinzugekommen.

⁴Da eine kommutative Halbgruppe höchstens ein neutrales Element besitzt, kann $[c, c] \in \mathcal{K}$ nicht von c abhängen. Tatsächlich gilt $[c, c] = [c', c']$ für beliebige $c, c' \in \mathcal{P}$, denn $c + c' = c' + c$.

BEMERKUNG 1.3.8. Sei O ein Punkt auf einer Geraden g . Weiters bezeichnen g_- und g_+ die beiden Seiten von O in g , es gilt daher $g \setminus \{O\} = g_- \cup g_+$ und $g_- \cap g_+ = \emptyset$, siehe Bemerkung 1.2.20. Dann ist folgende Abbildung eine Bijektion

$$g \rightarrow \mathcal{K}, \quad A \mapsto \begin{cases} |OA| & \text{falls } A \in g_+, \\ 0 & \text{falls } A = O, \text{ und} \\ -|OA| & \text{falls } A \in g_-. \end{cases}$$

Beachte, dass diese Abbildung g_+ mit \mathcal{P} und g_- mit $-\mathcal{P}$ identifiziert. Nach Wahl eines Ursprungs O und einer Seite von O in g kann die Gerade g daher mit \mathcal{K} identifiziert werden.

DEFINITION 1.3.9 (Ordnungsrelation). Für $a, b \in \mathcal{K}$ definieren wir $a < b$, falls $b - a \in \mathcal{P}$. Wie üblich schreiben wir statt $a < b$ auch $b > a$.

KOROLLAR 1.3.10. Die Relation $<$ ist eine mit der Addition verträgliche (strenge) Totalordnung auf \mathcal{K} , deren positive Elemente mit \mathcal{P} übereinstimmen. Für beliebige $a, b, c \in \mathcal{K}$ gilt daher:

- (a) Aus $a < b$ und $b < c$ folgt $a < c$. (Transitivität)
- (b) Es tritt genau einer der folgenden Fälle ein: $a < b$, oder $a = b$, oder $a > b$. (Trichotomie)
- (c) Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.
- (d) $\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{K} : x > 0\}$ und $-\mathcal{P} = \{x \in \mathcal{K} : x < 0\}$.

BEWEIS. Um die Transitivität einzusehen seien $a < b$ und $b < c$, also $b - a \in \mathcal{P}$ und $c - b \in \mathcal{P}$. Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhalten wir $c - a \in \mathcal{P}$, denn \mathcal{P} ist abgeschlossen unter Addition. Somit gilt auch $a < c$.

Nach Lemma 1.3.7(e) tritt genau einer der folgenden drei Fälle ein: $-(a - b) \in \mathcal{P}$, oder $a - b = 0$, oder $a - b \in \mathcal{P}$. Diese entsprechen genau den drei Möglichkeiten: $a < b$, $a = b$, oder $a > b$. Die verbleibenden Aussagen sind trivial. \square

BEMERKUNG 1.3.11. Für zwei Strecken AB und CD gilt $|AB| < |CD|$ genau dann wenn ein Punkt $X \in (CD)$ existiert, sodass $CX \equiv AB$. Dies folgt sofort aus unserer Definition und Korollar 1.3.10(b).

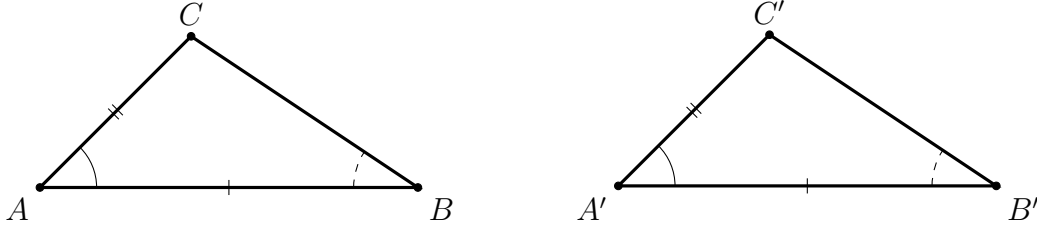
BEMERKUNG 1.3.12. Für $a, b \in \mathcal{K}$ definieren wir $a \leq b$ falls $a < b$ oder $a = b$. Dann ist \leq eine Totalordnung auf \mathcal{K} , d.h. eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation bezüglich der je zwei Elemente vergleichbar sind. Diese Totalordnung ist mit der Addition in folgendem Sinn verträglich: Sind $a, b, c \in \mathcal{K}$ und gilt $a \leq b$, dann auch $a + c \leq b + c$. Dies folgt unmittelbar aus Korollar 1.3.10.

1.4. Kongruenzaxiome für Winkel. Auf der Menge aller Winkel wird eine Relation postuliert, die als *Kongruenz von Winkeln* bezeichnet und ebenfalls mit dem Zeichen \equiv geschrieben wird. Stehen zwei Winkeln $\angle(h, k)$ und $\angle(h', k')$ in Relation werden sie *kongruent* genannt, und wir schreiben $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$.

Diese Kongruenzrelation soll folgender Axiomengruppe [Hilbert, §5] genügen:

K4. Kongruenz ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Winkel.

K5. Ist $\angle(h, k)$ ein Winkel und h' ein Halbstrahl, dann gibt es auf jeder Seite der Trägergeraden von h' genau einen Halbstrahl k' , der vom selben Punkt ausgeht wie h' und $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ erfüllt.



K6. Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke für die $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ und $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ gilt, dann muss auch $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ erfüllt sein.

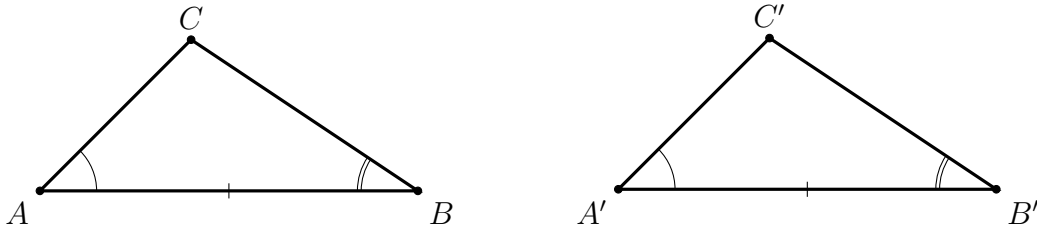
DEFINITION 1.4.1 (Kongruente Dreiecke). Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ werden *kongruent* genannt, wenn ihre Seiten entsprechend kongruent sind, d.h.

$$AB \equiv A'B', \quad BC \equiv B'C', \quad CA \equiv C'A',$$

und auch ihre Winkel entsprechend kongruent sind, d.h.

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C', \quad \angle BCA \equiv \angle B'C'A', \quad \angle CAB \equiv \angle C'A'B'.$$

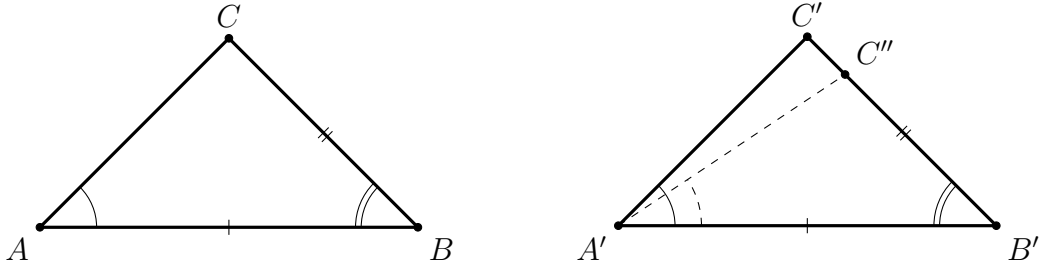
SATZ 1.4.2 (WSW, Winkel-Seiten-Winkel-Satz, [Euklid, I§26]). Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke für die die Kongruenzen $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, $AB \equiv A'B'$ und $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ gelten, dann sind die beiden Dreiecke kongruent, d.h. es müssen auch die Kongruenzen $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$, $BC \equiv B'C'$ und $AC \equiv A'C'$ erfüllt sein.⁵



BEWEIS. Wir folgen im Wesentlichen [Euklid, I§26], siehe auch [Hilbert, §6, Beweis von Satz 12]. Es bezeichne C'' den (eindeutigen) Punkt auf der Geraden durch B' und C' , der auf der selben Seite von B' liegt wie C' und für den $BC \equiv B'C''$ gilt, siehe Axiom K2.

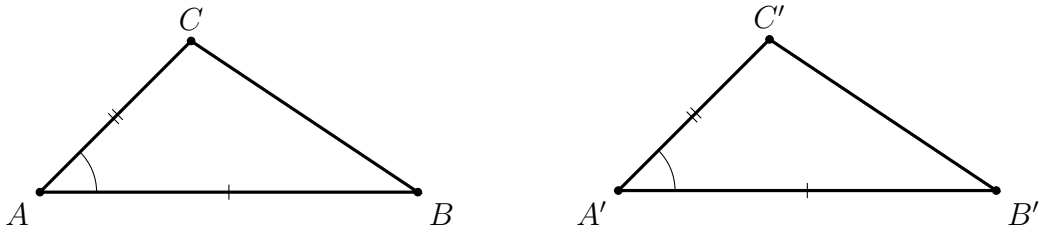
Wenden wir Axiom K6 auf die Dreiecke BAC und $B'A'C''$ an erhalten wir $\angle BAC \equiv \angle B'A'C''$. Mit Axiom K4 folgt $\angle B'A'C' \equiv \angle B'A'C''$. Da die Punkte C' und C'' auf der selben Seite der Geraden $g(A', B')$ liegen, siehe Bemerkung 1.2.16, liegen auch die beiden Halbstrahlen $h' := (A'C'>$ und $h'' := (A'C''>$ auf der selben Seite dieser Geraden. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 folgt daher $h' = h''$. Wir schließen $C' = C''$, denn die Halbstrahlen h' und h'' schneiden die Gerade $g(B', C')$ jeweils in genau einem Punkt, nämlich C' bzw. C'' . Aus $BC \equiv B'C''$ erhalten wir nun $BC \equiv B'C'$.

⁵In [Euklid, I§26] wird gleichzeitig SWW mitformuliert, siehe Satz 1.4.27 unten: Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel zwei Winkeln entsprechend gleich sind und eine Seite einer Seite, nämlich entweder die den gleichen Winkeln anliegenden oder die einem der beiden Winkel gegenüberliegenden Seiten einander gleich, dann müssen auch die übrigen Seiten den übrigen Seiten (entsprechend) gleich sein und der letzte Winkel dem letzten Winkel.



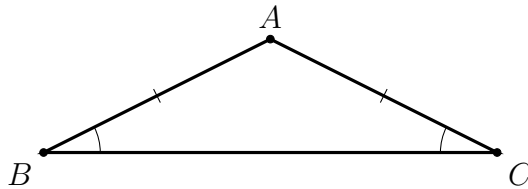
Analog, oder durch Vertauschen der Rollen von A und B , erhalten wir $AC \equiv A'C'$. Wenden wir Axiom K6 auf die Dreiecke BCA und $B'C'A'$ an erhalten wir schließlich auch die Kongruenz $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$. \square

SATZ 1.4.3 (SWS, Seiten-Winkel-Seiten-Satz, [Euklid, I§4]). Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke für die die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ und $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ gelten, dann sind die beiden Dreiecke kongruent, d.h. es müssen auch die Kongruenzen $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ und $BC \equiv B'C'$ erfüllt sein.⁶



BEWEIS. Die Kongruenz $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ folgt sofort aus Axiom K6, die verbleibenden Kongruenzen dann mit Satz 1.4.2. \square

SATZ 1.4.4 (Gleichschenkelige Dreiecke, [Euklid, I§5 und I§6]). In einem Dreieck ABC gilt $AB \equiv AC$ genau dann wenn $\angle ABC \equiv \angle ACB$.



BEWEIS. Um die eine Implikation einzusehen nehmen wir $AB \equiv AC$ an. Wenden wir Axiom K6 auf die Dreiecke ABC und ACB an so erhalten wir $\angle ABC \equiv \angle ACB$.

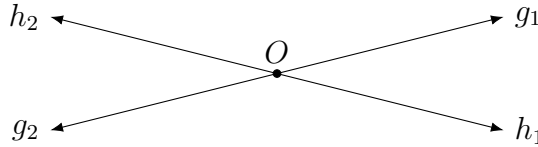
Für die andere Implikation sei nun $\angle ABC \equiv \angle ACB$. Nach Satz 1.4.2 (WSW) sind daher die Dreiecke BCA und CBA kongruent. Insbesondere erhalten wir daraus $AB \equiv AC$. \square

⁶In [Euklid, I§4] wird dies wie folgt formuliert: Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den beiden gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich, dann muss in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muss dem Dreieck gleich sein, und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkel entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Seiten gegenüberliegen.

DEFINITION 1.4.5. Unter einem *gleichschenkeligen Dreieck* verstehen wir ein Dreieck, das zwei kongruente Seiten (Winkeln) besitzt, vgl. Satz 1.4.4. Unter einem *gleichseitiges Dreieck* verstehen wir ein Dreieck, in dem alle drei Seiten (Winkel) zueinander kongruent sind.

Anliegende Winkel, die beim Schnitt zweier Geraden entstehen werden *Nebenwinkel* genannt. Gegenüberliegende Winkel, die beim Schnitt zweier Geraden entstehen werden als *Scheitelwinkel* bezeichnet. Genauer ist damit gemeint:

DEFINITION 1.4.6 (Nebenwinkel und Scheitelwinkel). Seien g und h zwei verschiedenen Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Es bezeichnen g_1 und g_2 die beiden Seiten von O in g . Weiters bezeichnen h_1 und h_2 die beiden Seiten von O in h . In dieser Situation wird das Winkelpaar $\angle(g_1, h_1)$ und $\angle(g_1, h_2)$ als *Nebenwinkel* bezeichnet. Ebenso werden das Winkelpaar $\angle(g_2, h_1)$ und $\angle(g_2, h_2)$, das Winkelpaar $\angle(g_1, h_1)$ und $\angle(g_2, h_1)$, sowie das Winkelpaar $\angle(g_1, h_2)$ und $\angle(g_2, h_2)$ als Nebenwinkel bezeichnet. Das Winkelpaar $\angle(g_1, h_1)$ und $\angle(g_2, h_2)$ wird als *Scheitelwinkel* bezeichnet. Ebenso wird das Winkelpaar $\angle(g_1, h_2)$ und $\angle(g_2, h_1)$ wird als Scheitelwinkel bezeichnet.

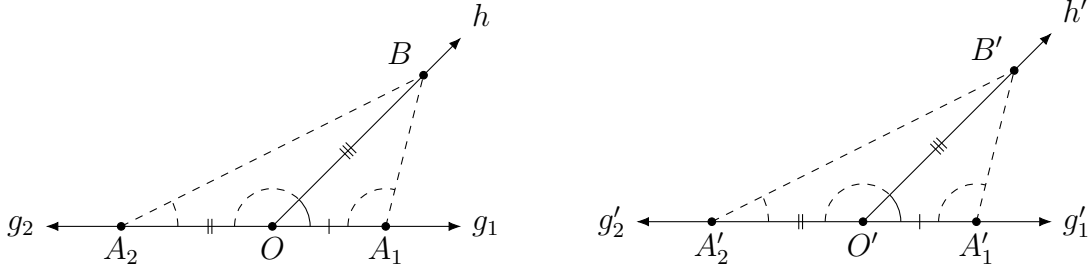


SATZ 1.4.7 (Nebenwinkel, [Hilbert, Satz 14 in §6]). *Nebenwinkel kongruenter Winkel sind kongruent. Genauer ist damit folgendes gemeint: Seien g_1 und g_2 die beiden Seiten eines Punktes O in einer Geraden g , und sei h ein Halbstrahl, der von O ausgeht aber nicht in g liegt. Weiters seien g'_1 und g'_2 die beiden Seiten eines Punktes O' in einer Geraden g' , und sei h' ein Halbstrahl, der von O' ausgeht aber nicht in g' liegt. Gilt in dieser Situation die Kongruenz $\angle(g_1, h) \equiv \angle(g'_1, h')$, dann muss auch $\angle(g_2, h) \equiv \angle(g'_2, h')$ erfüllt sein.*

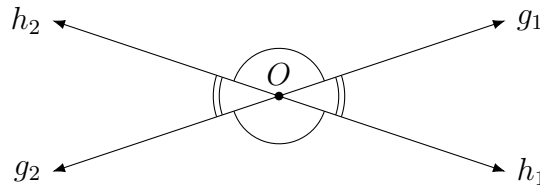


BEWEIS. Wir folgen Hilberts Beweis. Wir wählen beliebige Punkte A_1 auf g_1 , A_2 auf g_2 und B auf h . Weiters bezeichne A'_1 den eindeutigen Punkt auf g'_1 mit $O'A'_1 \equiv OA_1$; und A'_2 bezeichne den eindeutigen Punkt auf g'_2 mit $O'A'_2 \equiv OA_2$; und B' bezeichne den eindeutigen Punkt auf h' mit $O'B' \equiv OB$. Nach Voraussetzung gilt $\angle A_1OB \equiv \angle A'_1O'B'$.

Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke OA_1B und $O'A'_1B'$ daher kongruent. Insbesondere gilt $A_1B \equiv A'_1B'$ sowie $\angle OA_1B \equiv \angle O'A'_1B'$. Aus Axiom K3 folgt $A_1A_2 \equiv A'_1A'_2$. Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind daher auch die Dreiecke A_1A_2B und $A'_1A'_2B'$ kongruent. Insbesondere gilt $A_2B \equiv A'_2B'$ sowie $\angle A_1A_2B \equiv \angle A'_1A'_2B'$, und daher auch $\angle OA_2B \equiv \angle O'A'_2B'$. Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind somit auch die Dreiecke A_2OB und $A'_2O'B'$ kongruent. Insbesondere gilt $\angle A_2OB \equiv \angle A'_2O'B'$, also $\angle(g_2, h) \equiv \angle(g'_2, h')$. \square



SATZ 1.4.8 (Scheitelwinkel, [Euklid, I§15]). *Scheitelwinkel sind kongruent. Genauer ist damit folgendes gemeint: Seien g und h zwei verschiedene Geraden, die sich im Punkt O schneiden. Bezeichnen g_1 und g_2 die beiden Seiten von O in g , und bezeichnen h_1 und h_2 die beiden Seiten von O in h , dann gilt $\angle(g_1, h_1) \equiv \angle(g_2, h_2)$ sowie $\angle(g_1, h_2) \equiv \angle(g_2, h_1)$.*⁷



BEWEIS. Da die Winkel $\angle(g_1, h_1)$ und $\angle(g_2, h_2)$ beide Nebenwinkel von $\angle(g_1, h_2)$ sind, erhalten wir aus Satz 1.4.7 sofort $\angle(g_1, h_1) \equiv \angle(g_2, h_2)$. Analog, oder durch Vertauschen der Rollen von g_1 und g_2 , folgt die andere Kongruenz, die Winkel $\angle(g_1, h_2)$ und $\angle(g_2, h_1)$ sind beide Nebenwinkel von $\angle(g_1, h_1)$. \square

Axiom K4 erlaubt es Äquivalenzklassen von Winkel zu bilden. Mit \mathcal{W} bezeichnen wir die Menge aller Kongruenzklassen von Winkeln. Ist $\angle(h, k)$ ein Winkel, so wird die davon repräsentierte Kongruenzklasse mit $\sphericalangle(h, k)$ bezeichnet, d.h. $\sphericalangle(h, k) \in \mathcal{W}$.

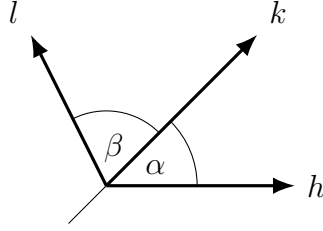
BEMERKUNG 1.4.9. Ist $\angle(h, k)$ ein Winkel, dann gilt $\sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(k, h)$, denn die Winkel $\angle(h, k)$ und $\angle(k, h)$ stimmen überein, vgl. Definition 1.2.31.

BEMERKUNG 1.4.10. Wir betrachten Kongruenzklassen von Winkel als Winkel gleicher Größe (Öffnung) und fassen $\sphericalangle(h, k)$ daher als (abstrakte) Winkelgröße auf.

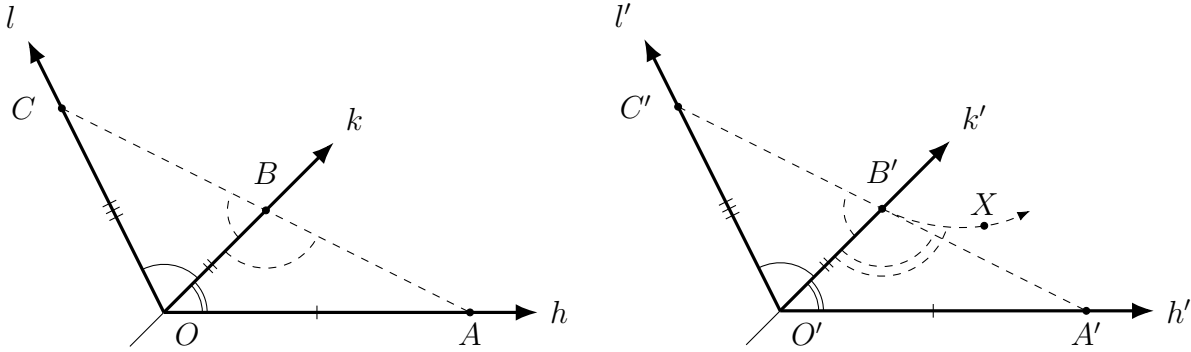
DEFINITION 1.4.11 (Winkeladdition). Die Summe zweier Kongruenzklassen von Winkeln $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$ wird wie folgt definiert: Wir wählen drei Halbstrahlen h, k, l , die vom selben Punkt ausgehen so, dass h und l auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden von k liegen und so, dass $\sphericalangle(h, k) = \alpha$ sowie $\sphericalangle(k, l) = \beta$ gilt. Bilden h und l einen Winkel und liegt k im Inneren dieses Winkels (und nur in diesem Fall) wird ihre Summe durch $\alpha + \beta := \sphericalangle(h, l)$ erklärt.

LEMMA 1.4.12. *Die Addition von Kongruenzklassen von Winkeln ist wohldefiniert.*

⁷In [Euklid, I§15] wird dies wie folgt formuliert: Zwei gerade Linien bilden, wenn sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind.



BEWEIS. Die Existenz dreier Halbstrahlen h, k, l wie in Definition 1.4.11 oben folgt sofort aus Axiom K5. Wir bezeichnen ihren gemeinsamen Ausgangspunkt mit O . Wir nehmen an, dass h und l einen Winkel bilden und k im Inneren dieses Winkels liegt. Seien nun h', k', l' drei weitere Halbstrahlen, die von einem gemeinsamen Punkt O' ausgehen, sodass h' und l' auf verschiedenen Seiten der Trägergerade von k' liegen, $\sphericalangle(h', k') = \sphericalangle(h, k)$ sowie $\sphericalangle(k', l') = \sphericalangle(k, l)$. Es ist zu zeigen, dass auch h' und l' einen Winkel bilden, dass k' im Inneren dieses Winkels liegt, und dass $\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(h', l')$ gilt. Wir folgen dem Beweis in [Hartshorne, Proposition 9.4], siehe auch [Hilbert, Satz 15 in §6].



Wir wählen beliebige Punkte A auf h und C auf l . Da k im Inneren des Winkels $\sphericalangle(h, l)$ liegt schneidet die Gerade durch A und C den Halbstrahl k in einem Punkt B , der zwischen A und C liegt, siehe Proposition 1.2.36. Es bezeichne A' den eindeutigen Punkt auf h' mit $OA \equiv O'A'$; es bezeichne B' den eindeutigen Punkt auf k' mit $OB \equiv O'B'$; und es bezeichne C' den eindeutigen Punkt auf l' mit $OC \equiv O'C'$. Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke OBA und $O'B'A'$ kongruent, es gilt daher

$$BA \equiv B'A', \quad \sphericalangle OBA \equiv \sphericalangle O'B'A' \quad \text{und} \quad \sphericalangle OAB \equiv \sphericalangle O'A'B'. \quad (5)$$

Ebenso sehen wir, dass die Dreiecke OBC und $O'B'C'$ kongruent sind, also

$$BC \equiv B'C', \quad \sphericalangle OBC \equiv \sphericalangle O'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle OCB \equiv \sphericalangle O'C'B'. \quad (6)$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Punkte C', B', A' auf einer Geraden liegen. Sei dazu X ein Punkt, sodass $C' * B' * X$. Nach Konstruktion sind $\sphericalangle O'B'C'$ und $\sphericalangle O'B'X$ Nebenwinkel. Ebenso sind $\sphericalangle OBC$ und $\sphericalangle OBA$ Nebenwinkel. Aus Satz 1.4.7 und der zweiten Kongruenz in (6) schließen wir $\sphericalangle O'B'X \equiv \sphericalangle OBA$, und mit der zweiten Kongruenz in (5) erhalten wir $\sphericalangle O'B'X \equiv \sphericalangle O'B'A'$. Da X und A' auf der selben Seite der Trägergeraden von k' liegen, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 nun $(B'X) = (B'A')$. Somit liegt A' auf der Geraden $g(B', X) = g(C', B')$, also liegen A', B', C' auf einer Geraden.

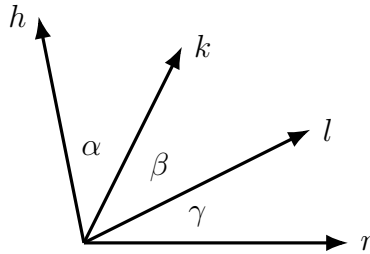
Da $O'A'B'$ ein Dreieck ist, muss also auch $O'A'C'$ ein Dreieck sein, also ist $\sphericalangle(h', l')$ ein Winkel. Auch liegt B' zwischen A' und C' , denn A' und C' liegen auf verschiedenen Seiten

der Trägergeraden von k' . Nach Bemerkung 1.2.35 liegt B' , und daher auch k' , im Inneren des Winkels $\angle(h', l')$. Aus den ersten Kongruenzen in (5) und (6) folgt mittels Axiom K3 nun $AC \equiv A'C'$. Mit der dritten Kongruenz in (5) und Satz 1.4.3 (SWS) sehen wir, dass die Dreiecke OAC und $O'A'C'$ kongruent sind. Insbesondere gilt $\angle AOC \equiv \angle A'O'C'$, also daher die gewünschte Kongruenz $\angle(h, l) \equiv \angle(h', l')$ \square

SATZ 1.4.13 (Rechenregeln für Winkeladdition). Für beliebige $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{W}$ gilt:

- (a) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$. (Kommutativität) ⁸
- (b) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. (Assoziativität) ⁹
- (c) Es tritt genau einer der folgenden Fälle ein: ¹⁰
 - (i) Entweder existiert $\omega \in \mathcal{W}$ mit $\omega + \alpha = \beta$, oder
 - (ii) $\alpha = \beta$, oder
 - (iii) es existiert $\omega \in \mathcal{W}$ mit $\alpha = \omega + \beta$.
- (d) Aus $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ folgt $\alpha = \beta$. (Kürzungsregel) ¹¹

BEWEIS. Zu (a): Kommutativität der Addition ist offensichtlich.



Zu (b): Seien h, k, l drei vom selben Punkt ausgehende Halbstrahlen, sodass h und l einen Winkel bilden, k im Inneren dieses Winkels liegt, $\alpha = \sphericalangle(h, k)$ und $\beta = \sphericalangle(k, l)$. Es gilt daher $\alpha + \beta = \sphericalangle(h, l)$. Sei r ein weiterer vom selben Punkt ausgehender Halbstrahl, sodass h und r einen Winkel bilden, l im Inneren dieses Winkels liegt und $\gamma = \sphericalangle(l, r)$. Es gilt daher $\sphericalangle(h, l) + \gamma = \sphericalangle(h, r)$. Zusammen erhalten wir

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \sphericalangle(h, r). \quad (7)$$

Mit Lemma 1.2.26(b), Proposition 1.2.36 und Bemerkung 1.2.35 lässt sich leicht zeigen, dass auch k und r einen Winkel bilden, l im Inneren dieses Winkels liegt, und auch k im Inneren von $\sphericalangle(h, r)$ liegt. Daraus erhalten wir $\beta + \gamma = \sphericalangle(k, r)$ und $\alpha + \sphericalangle(k, r) = \sphericalangle(h, r)$, also $\alpha + (\beta + \gamma) = \sphericalangle(h, r)$. Zusammen mit (7) folgt die Assoziativität.

Zu (c): Seien h, k, l drei vom selben Punkt ausgehende Halbstrahlen, sodass k und l auf der selben Seite der Trägergeraden von h liegen, $\alpha = \sphericalangle(h, k)$ und $\beta = \sphericalangle(h, l)$. Es muss genau einer der folgenden drei Fälle eintreten:

- (i') h und l liegen auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden von k .
- (ii') $k = l$

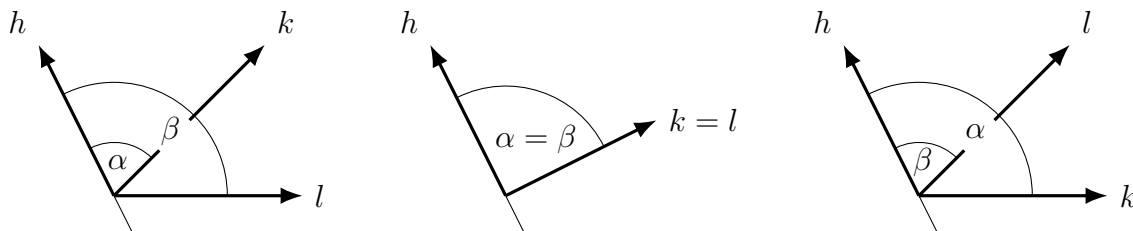
⁸Genauer ist hier gemeint: Ist die Summe auf einer Seite definiert, dann ist auch die Summe auf der anderen Seite definiert und es gilt Gleichheit.

⁹Genauer ist hier gemeint: Sind die beiden Summen auf einer Seite definiert, dann sind auch beide Summen auf der anderen Seite definiert und es gilt Gleichheit.

¹⁰In (i) und (iii) wird implizit vorausgesetzt, dass die Summe $\omega + \alpha$ bzw. $\omega + \beta$ definiert ist.

¹¹Hier wird implizit vorausgesetzt, dass die beiden Summen $\alpha + \gamma$ und $\beta + \gamma$ definiert sind.

(iii') h und l liegen auf der selben Seite der Trägergeraden von k .



Diese entsprechen genau den drei Fällen in (c), d.h.

$$(i') \Leftrightarrow (i), \quad (ii') \Leftrightarrow (ii), \quad \text{und} \quad (iii') \Leftrightarrow (iii).$$

Die Implikationen \Rightarrow sind offensichtlich: Im ersten Fall folgt $\sphericalangle(k, l) + \alpha = \beta$; im zweiten Fall folgt $\alpha = \beta$; und im dritten Fall folgt $\sphericalangle(k, l) + \beta = \alpha$. Die umgekehrten Implikationen folgen aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5. Wir werden dies nur für $(i') \Leftarrow (i)$ ausführen, die Implikation $(iii') \Leftarrow (iii)$ folgt analog, und $(ii') \Leftarrow (ii)$ ist noch einfacher. Sei also $\omega \in \mathcal{W}$ und $\omega + \alpha = \beta$. Auf der Seite der Trägergeraden von k , die h nicht enthält, sei l' der vom selben Punkt ausgehende Halbstrahl mit $\sphericalangle(k, l') = \omega$. Es gilt daher $\sphericalangle(h, l') = \alpha + \omega = \beta = \sphericalangle(h, l)$. Nach Voraussetzung liegt k im Inneren des Winkels $\sphericalangle(h, l')$, also liegen k und l' auf der selben Seite der Trägergeraden von h . Da auch k und l auf der selben Seite dieser Geraden liegen, müssen auch l und l' auf der selben Seite liegen. Mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 folgt $l = l'$, also liegen h und l auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden von k .

Zu (d): Dies folgt sofort aus (b) und (c), genau wie im Beweis von Korollar 1.3.10(d). \square

DEFINITION 1.4.14 (Ordnungsrelation für Winkeln). Für $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$ definieren wir $\alpha < \beta$, falls $\omega \in \mathcal{W}$ existiert, sodass $\omega + \alpha = \beta$. Statt $\alpha < \beta$ schreiben wir auch $\beta > \alpha$.

KOROLLAR 1.4.15. Die Relation $<$ ist eine mit der Addition verträgliche (strenge) Totalordnung auf \mathcal{W} . Für beliebige $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{W}$ gilt daher:

- (a) Aus $\alpha < \beta$ und $\beta < \gamma$ folgt $\alpha < \gamma$. (Transitivität)
- (b) Genau einer der folgenden Fälle tritt ein: $\alpha < \beta$, oder $\alpha = \beta$ oder $\alpha > \beta$. (Trichotomie)
- (c) Aus $\alpha < \beta$ folgt $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.¹²

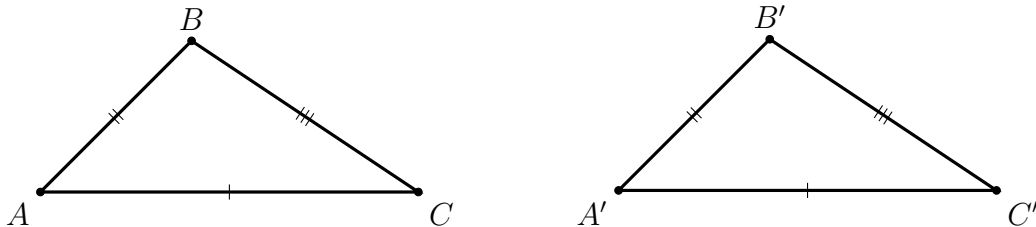
BEWEIS. Die Aussagen (a) und (c) folgen aus der Assoziativität in Satz 1.4.13(b). Die Aussage in (b) ist bloß eine Umformulierung von Satz 1.4.13(c). \square

BEMERKUNG 1.4.16. Für zwei Winkel $\sphericalangle(h, k)$ und $\sphericalangle(h', k')$ gilt $\sphericalangle(h, k) < \sphericalangle(h', k')$ genau dann wenn ein Halbstrahl l' existiert, der vom Scheitel von $\sphericalangle(h', k')$ ausgeht, im Inneren dieses Winkels liegt und $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', l')$ erfüllt. Dies folgt sofort aus unserer Definition und Korollar 1.4.15(b).

BEMERKUNG 1.4.17. Für $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$ definieren wir $\alpha \leq \beta$ falls $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$. Dann ist \leq eine Totalordnung auf \mathcal{W} , d.h. eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation bezüglich der je zwei Elemente vergleichbar sind. Diese Totalordnung ist mit der Addition in folgendem Sinn verträglich: Sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{W}$ mit $\alpha \leq \beta$ und ist die Summe $\beta + \gamma$ definiert, dann ist auch $\alpha + \gamma$ definiert und es gilt $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. Dies folgt unmittelbar aus Korollar 1.4.15.

¹²Genauer ist hier gemeint: Wenn die Summe auf der rechten Seite definiert ist, dann ist auch die Summe auf der linken Seite definiert und es gilt die Kleiner-Relation.

SATZ 1.4.18 (SSS, Seiten-Seiten-Seiten-Satz, [Euklid, I§8]). Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke für die die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ und $CA \equiv C'A'$ gelten, dann sind die beiden Dreiecke kongruent, d.h. es müssen auch die Kongruenzen $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ und $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ erfüllt sein.¹³

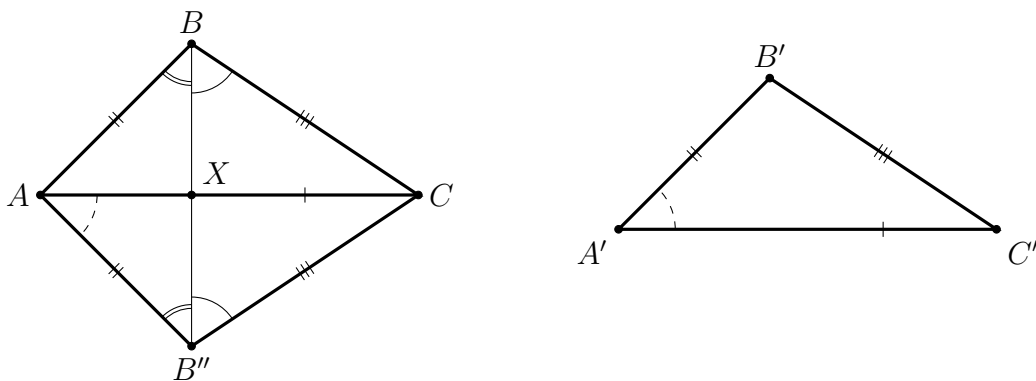


BEWEIS. Wir geben Hilberts Beweis [Hilbert, Satz 18 in §6], siehe auch [Hartshorne, Proposition 10.1]. Es genügt $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ zu zeigen, die anderen Kongruenzen folgen analog, oder mit Satz 1.4.3 (SWS). Auf der Seite der Geraden $g(A, C)$, die B nicht enthält, wählen wir einen Punkt B'' so, dass $\angle CAB'' \equiv \angle C'A'B'$ und $AB'' \equiv A'B'$, siehe Axiom K5 und K2. Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke $AB''C$ und $A'B'C'$ kongruent. Insbesondere gilt $B''C \equiv B'C'$. Wir erhalten

$$BC \equiv B''C \quad \text{sowie} \quad AB \equiv AB''.$$

Aus der Kongruenz der Dreiecke folgt auch $\angle AB''C \equiv \angle A'B'C'$. Es genügt daher zu zeigen:

$$\angle ABC \equiv \angle AB''C. \quad (8)$$



Bezeichne X den eindeutigen Schnittpunkt von $g(A, C)$ mit $g(B, B'')$. Aus Satz 1.4.4 erhalten wir:

- (a) Ist $X \neq A$, dann gilt $\angle ABB'' \equiv \angle AB''B$.
- (b) Ist $X \neq C$, dann gilt $\angle CBB'' \equiv \angle CB''B$.

Nach Axiom A3 tritt (genau) einer der folgenden fünf Fälle ein:

- (1) $X = C$.

¹³In [Euklid, I§8] wird dies wie folgt formuliert: Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und auch die Grundlinie der Grundlinie gleich ist, dann müssen in ihnen auch die von gleichen Strecken umfassten Winkel einander gleich sein.

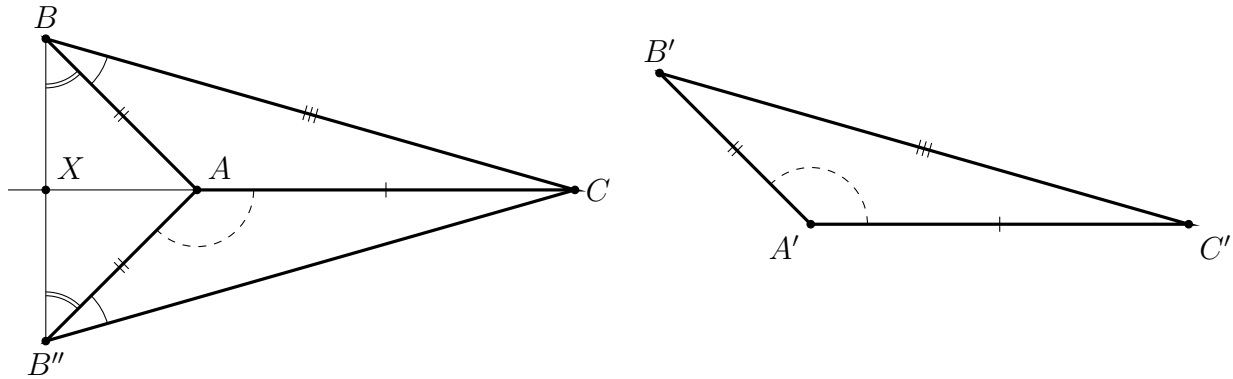
- (2) $X = A$.
- (3) $A * X * C$
- (4) $X * A * C$
- (5) $A * C * X$

Wir werden nun in jedem dieser Fälle die Kongruenz (8) herleiten. Im ersten Fall gilt $\angle ABC \equiv \angle ABB''$ und $\angle AB''C \equiv \angle AB''B$. Somit folgt (8) aus (a). Analog können wir im zweiten Fall vorgehen.

Im dritten Fall liegt der Halbstrahl (BB'') im Inneren des Winkels $\angle ABC$; und ebenso liegt der Halbstrahl $(B''B)$ im Inneren des Winkels $\angle AB''C$. In diesem Fall gilt daher

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABB'' + \sphericalangle CBB'' \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle AB''C = \sphericalangle AB''B + \sphericalangle CB''B.$$

Die Kongruenz (8) folgt daher aus (a) und (b).



Im vierten Fall liegt der Halbstrahl (BA) im Inneren des Winkels $\angle CBB''$; und ebenso liegt der Halbstrahl $(B''A)$ im Inneren des Winkels $\angle CB''B$. In diesem Fall gilt daher

$$\sphericalangle CBB'' = \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABB'' \quad \text{sowie} \quad \sphericalangle CB''B = \sphericalangle AB''C + \sphericalangle AB''B.$$

Die Kongruenz (8) folgt nun mit der Kürzungsregel in Satz 1.4.13(d) aus (a) und (b).

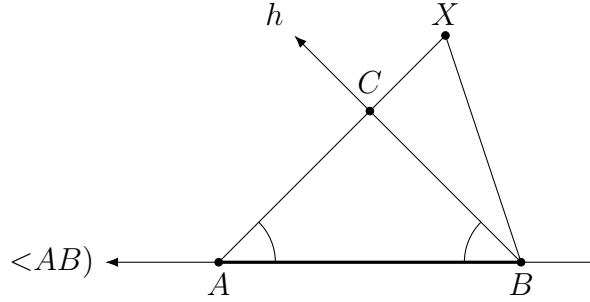
Der fünfte Fall lässt sich analog zeigen. □

LEMMA 1.4.19 (Existenz gleichschenkeliger Dreiecke). *Ist AB eine Strecke, dann existiert auf jeder Seite der Geraden $g(A, B)$ ein Punkt C , für den $AC \equiv BC$ gilt.*

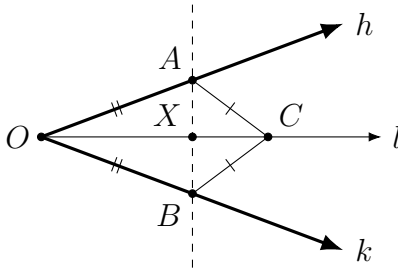
BEWEIS. Wir folgen dem Beweis in [Hartshorne, Proposition 10.2]. Auf einer gegebenen Seite der Geraden $g(A, B)$ wählen wir einen Punkt X . Sind die Strecken AX und BX kongruent, dann ist X ein Punkt mit der gewünschten Eigenschaft. O.B.d.A. können wir daher $AX \not\equiv BX$ annehmen.

Nach Satz 1.4.4 gilt dann auch $\angle ABX \not\equiv \angle BAX$. O.B.d.A. sei $\sphericalangle BAX < \sphericalangle ABX$, siehe Korollar 1.4.15(c). Es existiert daher ein Halbstrahl h , der von B ausgeht, im Inneren von $\angle ABX$ liegt und $\sphericalangle BAX \equiv \sphericalangle ABh$ erfüllt, vgl. Bemerkung 1.4.16. Nach Proposition 1.2.36 trifft h die Strecke (AX) in einem Punkt C . Nach Konstruktion gilt $\angle ABC \equiv \angle BAC$. Aus Satz 1.4.4 folgt nun $AC \equiv BC$. □

SATZ 1.4.20 ([Euklid, I§9]). *Jeder Winkel kann halbiert werden. Genauer ist damit gemeint: Zu jedem Winkel $\sphericalangle(h, k)$ existiert genau ein Halbstrahl l , der vom Scheitel ausgeht, im Inneren des Winkels liegt und $\sphericalangle(h, l) \equiv \sphericalangle(k, l)$ erfüllt.*



BEWEIS. Wir folgen im Wesentlichen Euklids Beweis mit einigen Modifikationen, die wir aus [Hartshorne, Section 10] übernehmen. Bezeichne O den Scheitel von $\angle(h, k)$, d.h. den gemeinsamen Ausgangspunkt von h und k . Sei $A \in h$ beliebig. Nach Axiom K2 existiert $B \in k$, sodass $OA \equiv OB$. Nach Lemma 1.4.19 existiert auf der Seite von $g(A, B)$, die O nicht enthält, ein Punkt C mit $AC \equiv BC$.



Beachte, dass C nicht auf $g(O, A)$ liegen kann. Läge nämlich C auf $g(O, A)$, dann müsste $O * A * C$ gelten, also wären $\angle BAO$ und $\angle BAC$ Nebenwinkel, nach Satz 1.4.4 und Satz 1.4.7 wäre dann $\angle ABk \equiv \angle BAC \equiv \angle ABC$, und nach der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 müsste C daher auch auf k liegen, was $h \cap k = \emptyset$ widerspräche. Analog lässt sich zeigen, dass C auch nicht auf $g(O, B)$ liegt. Somit bilden AOC und BOC zwei Dreiecke.

Nach Satz 1.4.18 (SSS) sind die beiden Dreiecke AOC und BOC kongruent. Insbesondere erhalten wir $\angle AOC \equiv \angle BOC$. Für den Halbstrahl $l := (OC>$ gilt daher $\angle(h, l) \equiv \angle(k, l)$.

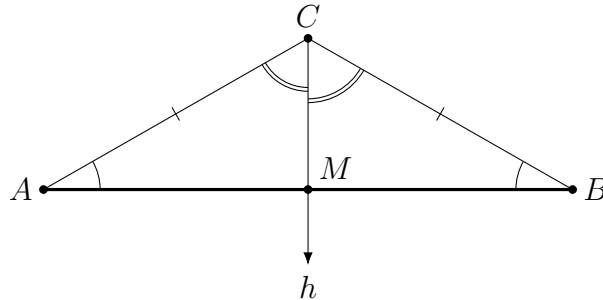
Wir zeigen nun, dass l im Inneren des Winkels $\angle(h, k)$ liegt. Da O und C auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$ liegen, schneidet die Strecke (OC) die Gerade $g(A, B)$ in genau einem Punkt X . Dieser Schnittpunkt X muss in $[AB]$ liegen, dann andernfalls lägen h und k auf der selben Seite der Trägergeraden von l und aus der eben bewiesenen Kongruenz $\angle(l, h) \equiv \angle(l, k)$ würde mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 der Widerspruch $h = k$ folgen. Der Punkt X kann aber nicht mit A oder B zusammen fallen, denn C liegt weder auf h noch auf k . Wir erhalten somit $X \in (AB)$, also liegt X im Inneren des Winkels $\angle(h, k)$, siehe Bemerkung 1.2.35. Mit X muss auch l im Inneren des Winkels $\angle(h, k)$ liegen.

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei l' ein weiterer Halbstrahl, der von O ausgeht, im Inneren des Winkels $\angle(h, k)$ liegt und $\angle(h, l') \equiv \angle(k, l')$ erfüllt. Setzen wir $\alpha := \sphericalangle(h, l)$ und $\alpha' := \sphericalangle(h, l')$ dann gilt also $\alpha + \alpha = \alpha' + \alpha'$. Mit Korollar 1.4.15 folgt $\alpha = \alpha'$. Beachte, dass l und l' auf der selben Seite der Trägergeraden von h liegen. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 erhalten wir daher $h = h'$. \square

DEFINITION 1.4.21 (Winkelsymmetrale). Der Halbstrahl l in Satz 1.4.20 wird als *Winkelsymmetrale* des Winkels $\angle(h, k)$ bezeichnet.

SATZ 1.4.22 ([Euklid, I§10]). *Jede Strecke kann halbiert werden. Genauer ist damit gemeint: Zu jeder Strecke AB existiert genau ein Punkt $M \in (AB)$ mit $AM \equiv BM$.*

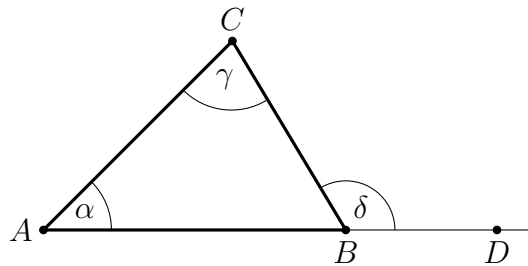
BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Nach Lemma 1.4.19 existiert ein Punkt C , der nicht auf $g(A, B)$ liegt und $AC \equiv BC$ erfüllt. Aus Satz 1.4.4 folgt $\angle ABC \equiv \angle BAC$. Nach Satz 1.4.20 existiert ein von C ausgehender Halbstrahl h , der den Winkel $\angle ACB$ halbiert, d.h. h liegt im Inneren des Winkels $\angle ACB$ und es gilt $\angle ACh \equiv \angle BCh$. Nach Proposition 1.2.36 schneidet h die Strecke (AB) in einem Punkt M . Nach Satz 1.4.2 (WSW) sind die Dreiecke ACM und BCM kongruent. Insbesondere folgt $AM \equiv BM$.



Um die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $M' \in (AB)$ ein weiterer Punkt mit $AM' \equiv BM'$. Setzen wir $a := |AM|$ und $a' := |AM'|$, dann gilt also $a + a = |AB| = a' + a'$. Mit Korollar 1.3.10 folgt daraus $a = a'$. Beachte, dass M und M' auf der selben Seite von A in $g(A, B)$ liegen. Mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K2 erhalten wir daher $M = M'$. \square

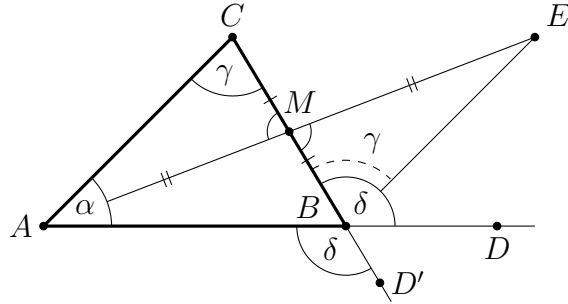
DEFINITION 1.4.23 (Mittelpunkt einer Strecke). Der eindeutig bestimmte Punkt M in Satz 1.4.22 wird als *Mittelpunkt der Strecke AB* bezeichnet.

SATZ 1.4.24 (Satz vom Außenwinkel, [Euklid, I§16]). *Ein Außenwinkel eines Dreiecks ist stets größer, als jeder der nicht anliegenden Innenwinkel. Genauer ist damit gemeint: Sei ABC ein Dreieck und D ein Punkt mit $A * B * D$. Für die Winkel $\alpha := \sphericalangle CAB$, $\gamma := \sphericalangle BCA$ und $\delta := \sphericalangle CBD$ gilt dann $\alpha < \delta$ sowie $\gamma < \delta$.*



BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Sei M der Mittelpunkt der Seite BC , sodass $MB \equiv MC$, siehe Satz 1.4.22. Nach Axiom K2 existiert ein Punkt E , sodass $A * M * E$ und $AM \equiv ME$. Nach Satz 1.4.8 gilt $\angle AMC \equiv \angle EMB$. Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke MCA und MBE daher kongruent. Insbesondere erhalten wir $\gamma = \sphericalangle MBE$.

Wir zeigen nun, dass E im Inneren des Winkels $\angle MBD$ liegt. Da A und D auf verschiedenen Seiten von $g(B, C)$ liegen und auch die Punkte A und E auf verschiedenen Seiten von



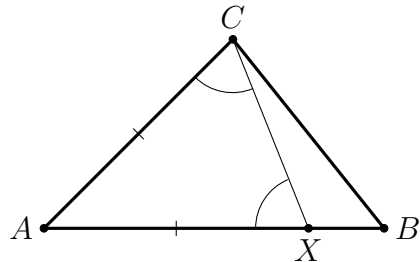
$g(B, C)$ liegen, müssen E und D auf der selben Seite von $g(B, C)$ liegen. Aus $A * M * E$ folgt auch, dass M und E auf der selben Seite von $g(A, B)$ liegen. Somit liegt E im Inneren des Winkels $\angle MBD$ und wir erhalten $\gamma < \delta$, siehe Bemerkung 1.4.16.

Analog, oder durch Vertauschen der Rollen von A und C , erhalten wir $\alpha < \angle ABD'$, wobei D' einen Punkt mit $C * B * D'$ bezeichnet. Nach Satz 1.4.8 gilt $\angle ABD' = \delta$, und daher auch $\alpha < \delta$. \square

SATZ 1.4.25 ([**Euklid**, I§18 und I§19]). *Im Dreieck liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt. Genauer ist damit folgendes gemeint: In einem Dreieck ABC mit $b := |AC|$, $c := |AB|$, $\beta := \angle ABC$ und $\gamma := \angle BCA$ gilt*

$$b < c \Leftrightarrow \beta < \gamma.$$

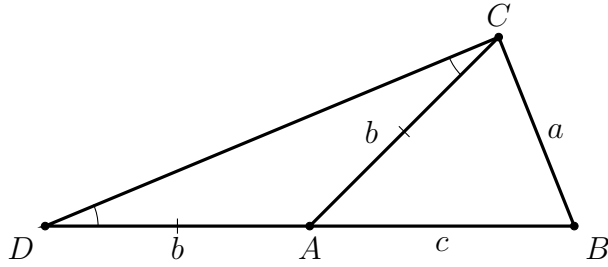
BEWEIS. Wir geben Euklids Beweis, siehe auch [**Hilbert**, Satz 23 in §6]. Um die eine Implikation zu zeigen, sei zunächst $b < c$. Dann existiert ein Punkt X zwischen A und B , sodass $|AX| = b$. Da X im Inneren des Winkels $\angle BCA$ liegt, gilt $\gamma > \angle ACX$. Nach Satz 1.4.4 gilt $\angle ACX = \angle AXC$. Nach Satz 1.4.24 ist $\angle AXC > \beta$. Mit der Transitivität in Korollar 1.4.15(a) folgt $\gamma > \beta$.



Für die andere Implikation sei nun $\beta < \gamma$. Es kann b nicht größer als c sein, denn nach dem vorangehenden Absatz würde daraus der Widerspruch $\beta > \gamma$ folgen, siehe Korollar 1.4.15(b). Ebenso wenig kann $b = c$ gelten, denn mit Satz 1.4.4 würden wir daraus den Widerspruch $\beta = \gamma$ erhalten, siehe Korollar 1.4.15(b). Nach Korollar 1.3.10(b) muss daher $b < c$ gelten. \square

SATZ 1.4.26 (Dreiecksungleichung, [**Euklid**, I§20]). *Im Dreieck sind zwei Seiten zusammen größer als die dritte. Genauer ist damit gemeint: In einem Dreieck ABC mit Seitenlängen $a := |BC|$, $b := |CA|$, $c := |AB|$ gilt*

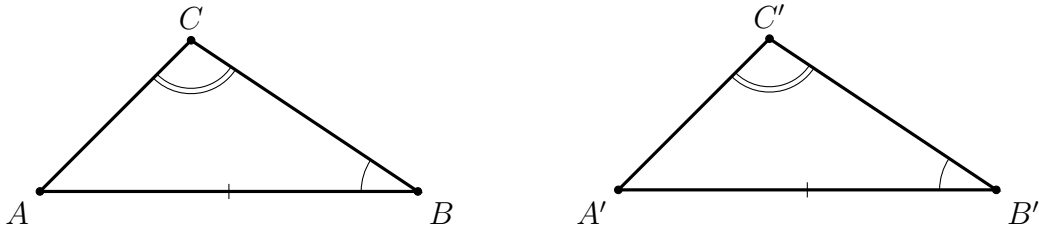
$$a < b + c, \quad b < c + a \quad \text{und} \quad c < a + b.$$



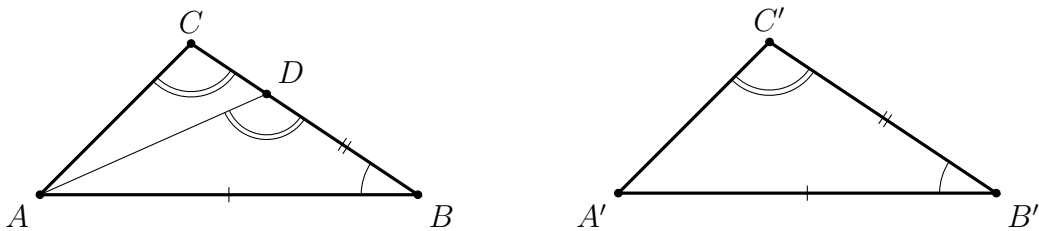
BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Auf der Geraden durch A und B wählen wir auf der Seite von A , die B nicht enthält, den Punkt D so, dass $|AD| = b$. Nach Konstruktion liegt A zwischen B und C , also ist $|BD| = b + c$.

Nach Satz 1.4.4 gilt $\sphericalangle BDC = \sphericalangle ACD$. Da A im Inneren des Winkels $\sphericalangle BCD$ liegt, haben wir auch $\sphericalangle ACD < \sphericalangle BCD$. Somit ist $\sphericalangle BDC < \sphericalangle BCD$. Mit Satz 1.4.25 erhalten wir $|BC| < |BD|$, und daher $a < b + c$. Die anderen Ungleichungen folgen analog, oder durch Umbenennen der Dreieckspunkte. \square

SATZ 1.4.27 (SWW, Seiten-Winkel-Winkel-Satz, [Hilbert, Satz 25 in §6]). Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke für die die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$ und $\sphericalangle BCA \equiv \sphericalangle B'C'A'$ gelten, dann sind die beiden Dreiecke kongruent, d.h. es müssen auch die Kongruenzen $BC \equiv B'C'$, $CA \equiv C'A'$ und $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B'$ erfüllt sein.



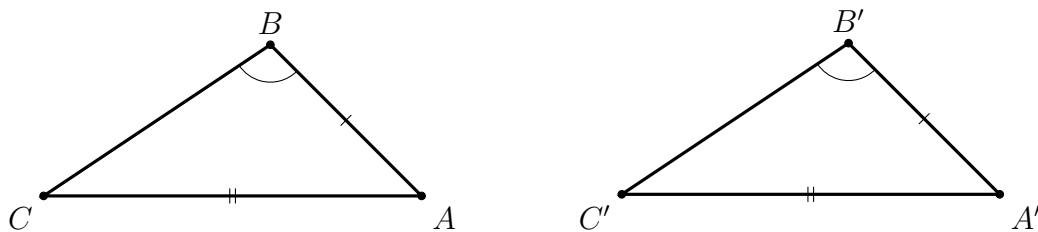
BEWEIS. Es genügt $BC \equiv B'C'$ zu zeigen, die restlichen Kongruenzen folgen dann aus Satz 1.4.3 (SWS). Indirekt nehmen wir an, BC und $B'C'$ wären nicht kongruent. O.B.d.A. sei $|BC| > |B'C'|$. Es existiert daher ein Punkt D zwischen B und C , sodass $BD \equiv B'C'$.



Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke ABD und $A'B'C'$ kongruent, also gilt $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle B'C'A'$. Zusammen mit der Voraussetzung $\sphericalangle B'C'A' \equiv \sphericalangle BCA$ erhalten wir $\sphericalangle BDA \equiv \sphericalangle BCA$. Dies widerspricht jedoch Satz 1.4.24, siehe auch Korollar 1.4.15(b). \square

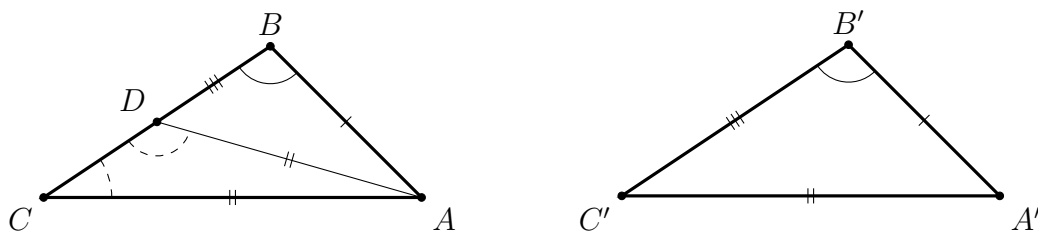
SATZ 1.4.28 (SSW, Seiten-Seiten-Winkel-Satz). Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke für die die Kongruenzen $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$, $AB \equiv A'B'$ und $AC \equiv A'C'$ gelten, und ist

darüber hinaus auch $|AC| \geq |AB|$, dann sind die beiden Dreiecke kongruent, d.h. es müssen auch die Kongruenzen $BC \equiv B'C'$, $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ und $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ erfüllt sein.



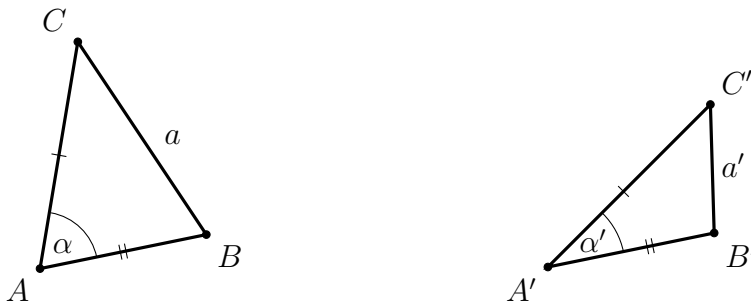
BEWEIS. Es genügt $BC \equiv B'C'$ zu zeigen, die restlichen Kongruenzen folgen dann aus Satz 1.4.3 (SWS). Indirekt nehmen wir an, BC und $B'C'$ wären nicht kongruent. O.B.d.A. sei $|BC| > |B'C'|$. Es existiert daher ein Punkt D zwischen B und C , sodass $BD \equiv B'C'$.

Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke ABD und $A'B'C'$ kongruent, also gilt $AD \equiv A'C'$. Zusammen mit der Voraussetzung $A'C' \equiv AC$ erhalten wir $AD \equiv AC$. Mit Satz 1.4.4

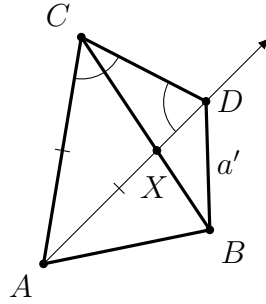


folgt $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADC$. Nach Satz 1.4.24 ist $\sphericalangle ADC > \sphericalangle ABC$. Somit gilt $\sphericalangle ACB > \sphericalangle ABC$. Aus Satz 1.4.25 erhalten wir $|AB| > |AC|$, ein Widerspruch zur Voraussetzung $|AB| \leq |AC|$, vgl. Korollar 1.3.6(b). \square

SATZ 1.4.29 ([Euklid, I§24 und I§25]). Seien ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, sodass $AB \equiv A'B'$ und $AC \equiv A'C'$. Weiters bezeichnen $a := |BC|$, $a' := |B'C'|$, $\alpha := \sphericalangle CAB$ und $\alpha' := \sphericalangle C'A'B'$. In dieser Situation gilt $a > a'$ genau dann wenn $\alpha > \alpha'$.



BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. O.B.d.A. sei $|AB| \leq |AC|$. Um die eine Implikation zu zeigen, sei zunächst $\alpha > \alpha'$. Dann existiert ein Punkt D im Inneren des Winkels $\sphericalangle CAB$, sodass $\sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle C'A'B'$ und $AD \equiv A'C'$. Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke ABD



und $A'B'C'$ kongruent. Insbesondere ist $|BD| = |B'C'| = a'$ und $AD \equiv A'C' \equiv AC$. Aus Satz 1.4.4 erhalten wir $\angle ADC \equiv \angle ACD$.

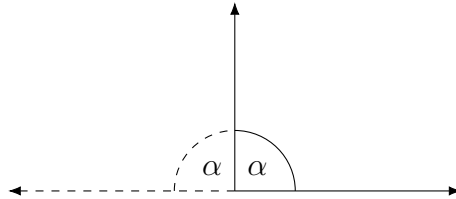
Bezeichne X den Schnittpunkt des Halbstrahls $(AD>$ mit (BC) , siehe Proposition 1.2.36. Da $|AB| \leq |AC|$ folgt aus Satz 1.4.25 und Satz 1.4.24 zunächst $\angle ACX \leq \angle ABX < \angle AXC$ und dann $|AX| < |AC| = |AD|$. Wir schließen daraus, dass X zwischen A und D liegt. Damit sehen wir nun, dass X sowohl im Inneren des Winkels $\angle BDC$ als auch im Inneren des Winkels $\angle ACD$ liegt, siehe Bemerkung 1.2.35. Wir erhalten daher

$$\sphericalangle BDC > \sphericalangle XDC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle ACD > \sphericalangle XCD = \sphericalangle BCD.$$

Mit Satz 1.4.25 folgt $|BC| > |BD|$, also $a > a'$.

Um die andere Implikation zu zeigen, sei nun $a > a'$. Wäre $\alpha = \alpha'$, erhielten wir aus Satz 1.4.3 (SWS) den Widerspruch $a = a'$. Wäre $\alpha < \alpha'$, erhielten wir aus dem eben Bewiesenen den Widerspruch $a < a'$. Somit muss $\alpha > \alpha'$ gelten, vgl. Korollar 1.4.15(c). \square

DEFINITION 1.4.30 (Rechte Winkel). Unter einem *rechten Winkel* verstehen wir einen Winkel, der zu seinen Nebenwinkeln kongruent ist.

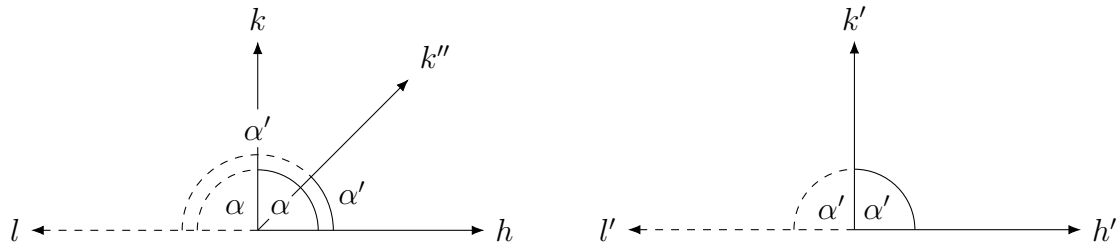


SATZ 1.4.31 (Rechte Winkel). *Alle rechten Winkel sind einander kongruent.*

BEWEIS. Wir folgen dem Beweis in [Hilbert, Satz 21 in §6]. Seien $\angle(h, k)$ und $\angle(h', k')$ zwei rechte Winkel. Es gilt daher $\alpha := \sphericalangle(h, k) = \sphericalangle(l, k)$ und $\alpha' := \sphericalangle(h', k') = \sphericalangle(l', k')$, wobei $\angle(l, k)$ und $\angle(l', k')$ die Nebenwinkel von $\angle(h, k)$ und $\angle(h', k')$ bezeichnen. Auf der Seite der Trägergeraden von h , die k enthält, sei k'' der vom Scheitel des Winkels $\angle(h, k)$ ausgehende Halbstrahl mit $\sphericalangle(h, k'') = \alpha'$. Nach Satz 1.4.7 gilt dann auch $\sphericalangle(l, k'') = \sphericalangle(l', k') = \alpha'$.

Läge k'' im Inneren von $\angle(h, k)$, dann läge auch k im Inneren von $\angle(l, k'')$ und wir erhielten $\alpha' < \alpha$ aber auch $\alpha < \alpha'$, ein Widerspruch zu Korollar 1.4.15(b). Ebenso führt die Annahme, dass k'' im Inneren von $\angle(l, k)$ liegt zu einem Widerspruch. Es muss daher $k = k''$ gelten, woraus sofort $\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$ folgt. \square

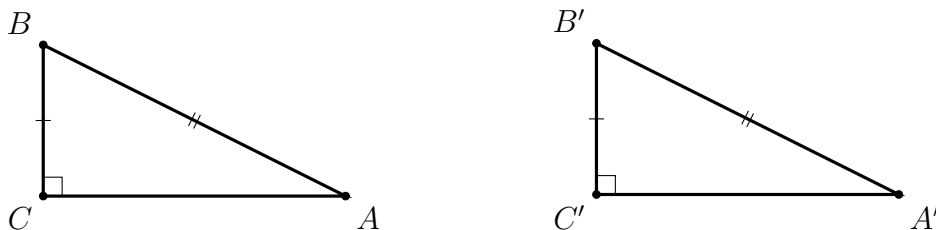
DEFINITION 1.4.32 (Spitze und stumpfe Winkel). Ein Winkel wird *spitz* genannt, wenn er kleiner als ein rechter Winkel ist. Ein Winkel wird *stumpf* genannt, wenn er größer als ein rechter Winkel ist.



DEFINITION 1.4.33 (Rechtwinkeliges Dreieck). Ein Dreieck wird *rechtwinkelig* genannt, wenn einer seiner Winkel ein rechter ist. Die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite wird *Hypotenuse* genannt. Die beiden am rechten Winkel anliegenden Seiten werden als *Katheten* bezeichnet.

BEMERKUNG 1.4.34 (Rechtwinkelige Dreiecke). Sei ABC ein Dreieck mit rechtem Winkel $\angle BCA$. Nach Satz 1.4.24 sind die Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ beide spitz. Nach Satz 1.4.25 ist daher die Hypotenuse länger als jede der beiden Katheten, d.h.

$$|AB| > |BC| \quad \text{und} \quad |AB| > |CA|. \quad (9)$$



Sei $A'B'C'$ ein weiteres Dreieck mit rechtem Winkel $\angle B'C'A'$. Gilt in dieser Situation $AB \equiv A'B'$ und $BC \equiv B'C'$, dann sind die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kongruent. Kongruenz liegt auch vor, wenn $CA \equiv C'A'$ und $AB \equiv A'B'$. Dies folgt aus Satz 1.4.28 (SSW), die Zusatzvoraussetzung ist in dieser Situation automatisch erfüllt, siehe (9).

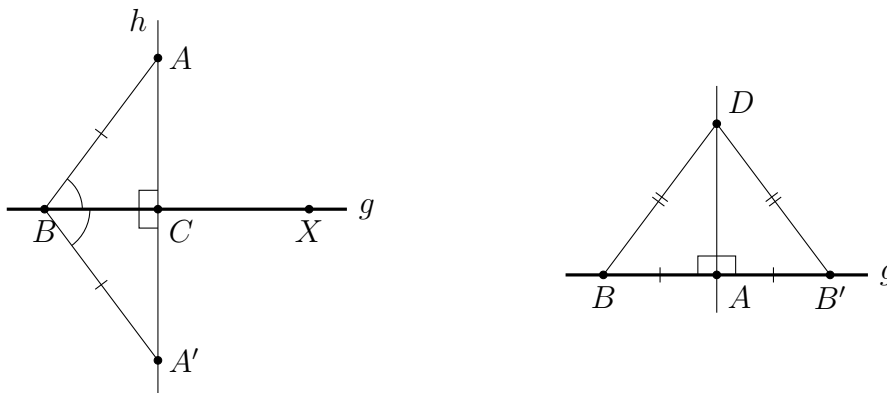
Entsteht beim Schnitt zweier Geraden ein rechter Winkel, so müssen nach Satz 1.4.8 schon alle vier Schnittwinkel rechte Winkel sein.

DEFINITION 1.4.35 (Orthogonale Geraden). Zwei Geraden werden *orthogonal* genannt, wenn sie sich in genau einem Punkt schneiden und dort (vier) rechte Schnittwinkel bilden. In diesem Fall sagen wir auch, dass die beiden Geraden *senkrecht* oder *normal* aufeinander stehen. Wir schreiben in diesem Fall auch $g \perp h$.

SATZ 1.4.36 (Lot, [Euklid, I§11 und I§12]). Zu einem Punkt A und einer Geraden g existiert genau eine Gerade, die durch A geht und normal auf g steht.

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den Fall, dass A nicht auf g liegt. Wir wählen zwei verschiedene Punkte B und X auf g . Auf der Seite von g , die A nicht enthält sei nun A' der Punkt mit $\angle ABX \equiv \angle A'BX$ und $AB \equiv A'B$. Bezeichne h die Gerade durch A und A' . Da A und A' auf verschiedenen Seiten von g liegen, schneiden sich g und h in genau einem Punkt C . Stimmen B und C überein, dann folgt $\angle ACX \equiv \angle A'CX$, also stehen g und h normal aufeinander. O.B.d.A. sei daher $B \neq C$. Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die

Dreiecke ABC und $A'BC$ kongruent. Insbesondere gilt $\angle BCA \equiv \angle BCA'$, also stehen g und h normal aufeinander. Somit ist h die gesuchte Normale. Um die Eindeutigkeit einzusehen, betrachten wir eine weitere Gerade h' durch A , die g im Punkt C' senkrecht trifft. Wäre $C \neq C'$, so wäre ACC' ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln, was Satz 1.4.24 widerspräche, vgl. Bemerkung 1.4.34. Also muss $C = C'$ und daher auch $h = h'$ gelten.



Wir wenden uns nun dem Fall zu, dass A auf g liegt. Wir folgen Euklids Beweis und wählen zwei Punkte B und B' auf g , die auf verschiedenen Seiten von A liegen und $AB \equiv AB'$ erfüllen. Nach Lemma 1.4.19 existiert ein Punkt D , der nicht auf g liegt und $BD \equiv B'D$ erfüllt. Nach Satz 1.4.18 (SSS) sind die Dreiecke BAD und $B'AD$ kongruent. Insbesondere gilt $\angle BAD \equiv \angle B'AD$. Also steht die Gerade $g(A, D)$ normal auf g . Die Eindeutigkeit der Normalen folgt aus Satz 1.4.31 und der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5. \square

DEFINITION 1.4.37 (Lot). Sei A ein Punkt und g eine Gerade. Die nach Satz 1.4.36 eindeutig bestimmte Normale durch A auf g wird als *Lot durch A auf g* bezeichnet.

Nach Satz 1.4.36 existieren rechte Winkel. Nach Satz 1.4.31 sind alle rechten Winkel kongruent. Wir bezeichnen die entsprechende Kongruenzklasse mit $R \in \mathcal{W}$.

BEMERKUNG 1.4.38. Seien $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$.

- (a) Gilt $\alpha \leq R$ und $\beta < R$, dann ist $\alpha + \beta$ in \mathcal{W} definiert.
- (b) Gilt $\alpha \geq R$ und $\beta \geq R$, dann ist $\alpha + \beta$ in \mathcal{W} nicht definiert.

Dies lässt sich mit Satz 1.4.36 zeigen.

Um ohne Einschränkungen mit Winkeln rechnen zu können, addieren wir (formal) zu den bisher betrachteten (geometrischen) Winkeln in \mathcal{W} noch beliebige ganzzahlige Vielfache des rechten Winkels R . Wir erhalten so eine Erweiterung $\mathcal{W} \subseteq \tilde{\mathcal{W}}$. Jedes Element in $\tilde{\mathcal{W}}$ lässt sich in eindeutiger Weise in folgender Form schreiben:

$$\tilde{\alpha} = nR + \alpha, \quad \text{wobei } n \in \mathbb{Z} \text{ und } \alpha \in \mathcal{W} \text{ mit } \alpha \leq R. \quad (10)$$

Die Addition auf \mathcal{W} lässt sich in naheliegender Weise zu einer Addition auf $\tilde{\mathcal{W}}$ erweitern. Dadurch wird $\tilde{\mathcal{W}}$ zu einer abelschen Gruppe. Wie üblich bezeichnen wir das neutrale Element mit $0 \in \tilde{\mathcal{W}}$ und das Inverse von $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$ mit $-\alpha$. Die Ordnungsrelation auf \mathcal{W} lässt sich zu einer mit der Addition vertäglichen Totalordnung of $\tilde{\mathcal{W}}$ ausdehnen. Sind $\alpha, \beta, \gamma \in \tilde{\mathcal{W}}$ und ist $\alpha < \beta$, dann gilt also auch $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$. Für die geometrischen Winkel erhalten wir

$$\mathcal{W} = \{\alpha \in \tilde{\mathcal{W}} : 0 < \alpha < 2R\}.$$

Wir wollen die Details dieser Konstruktionen im nachfolgenden Lemma verifizieren.

LEMMA 1.4.39. Sei $\tilde{\mathcal{W}} := \{(n, \alpha) | n \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathcal{W}, \alpha \leq R\}$.

(a) Durch

$$(n, \alpha) + (m, \beta) := \begin{cases} (n + m, \alpha + \beta) & \text{falls } \alpha + \beta \leq R, \\ (n + m + 1, \omega) & \text{falls } \alpha + \beta = R + \omega \text{ für ein } \omega \in \mathcal{W}, \text{ und} \\ (n + m + 1, R) & \text{falls } \alpha = R = \beta \end{cases}$$

ist eine Operation $+$ auf $\tilde{\mathcal{W}}$ wohldefiniert, die $(\tilde{\mathcal{W}}, +)$ zu einer abelschen Gruppe macht.

(b) Sei $\tilde{\mathcal{W}}_+ := \{(n, \alpha) | n \in \mathbb{N}_0, \alpha \in \mathcal{W}, \alpha \leq R\} \subseteq \tilde{\mathcal{W}}$. Durch

$$\tilde{\alpha} < \tilde{\beta} \quad :\Leftrightarrow \quad \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}_+$$

ist eine mit der Addition verträgliche (strenge) Totalordnung auf $\tilde{\mathcal{W}}$ definiert. Für beliebige $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \in \tilde{\mathcal{W}}$ gilt daher:

(i) Aus $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ und $\tilde{\beta} < \tilde{\gamma}$ folgt $\tilde{\alpha} < \tilde{\gamma}$. (Transitivität)

(ii) Genau einer folgender Fälle tritt ein: $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$, oder $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta}$ oder $\tilde{\alpha} > \tilde{\beta}$. (Trichotomie)

(iii) Aus $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ folgt $\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma} < \tilde{\beta} + \tilde{\gamma}$. (Verträglichkeit mit Addition)

(c) Die Abbildung $\iota: \mathcal{W} \rightarrow \tilde{\mathcal{W}}$,

$$\iota(\alpha) := \begin{cases} (0, \alpha) & \text{falls } \alpha \leq R, \text{ und} \\ (1, \omega) & \text{falls } \alpha = R + \omega \text{ für ein } \omega \in \mathcal{W}, \end{cases}$$

ist wohldefiniert und besitzt folgende Eigenschaften:

(iv) Jedes $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}$ lässt sich in eindeutiger Weise in der Form $\tilde{\alpha} = n\iota(R) + \iota(\alpha)$ schreiben, wobei $n \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \in \mathcal{W}$ mit $\alpha \leq R$.¹⁴

(v) Die Abbildung ι ist injektiv mit Bild $\iota(\mathcal{W}) = \{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}} | 0 < \tilde{\alpha} < 2\iota(R)\}$.

(vi) Für $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$ ist die Summe $\alpha + \beta$ genau dann definiert, wenn $\iota(\alpha) + \iota(\beta) < 2\iota(R)$.

In diesem Fall ist $\iota(\alpha + \beta) = \iota(\alpha) + \iota(\beta)$.

(vii) Für $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$ gilt $\alpha < \beta \Leftrightarrow \iota(\alpha) < \iota(\beta)$.

Via ι kann \mathcal{W} daher als Teilmenge von $\tilde{\mathcal{W}}$ aufgefasst werden, diese Identifikation ist mit der Addition und Ordnungsrelation verträglich und jedes Element $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}$ lässt sich in der Form (10) schreiben, wobei n und α eindeutig bestimmt sind.

BEWEIS. (a) Wir zeigen zunächst, dass die Verknüpfung wohldefiniert ist. Seien dazu $\alpha, \beta \in \mathcal{W}$ mit $\alpha \leq R$ und $\beta \leq R$. Nach Bemerkung 1.4.38 ist die Summe $\alpha + \beta$ genau dann definiert, wenn α oder β verschieden von R ist. Gilt in diesem Fall $\alpha + \beta > R$, dann existiert ω mit $\alpha + \beta = R + \omega$, dieses ω ist wegen der Kürzungsregel in Satz 1.4.13(d) eindeutig bestimmt und es gilt $\omega < R$ nach Bemerkung 1.4.38(b). Dies zeigt, dass die Addition wohldefiniert ist.

Nach Satz 1.4.13(a) ist diese Verknüpfung kommutativ. Sind $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathcal{W}$ und $\alpha < R$, so erhalten wir direkt aus der Definition der Addition

$$(n, \alpha) + (-1, R) = (n, \alpha) \quad \text{bzw.} \quad (n, R) + (-1, R) = (n, R),$$

¹⁴Ist $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}$ und $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $n\tilde{\alpha} := \tilde{\alpha} + \dots + \tilde{\alpha}$ und $(-n)\tilde{\alpha} := -(\tilde{\alpha} + \dots + \tilde{\alpha})$, wobei beide Summen aus genau n Summanden bestehen. Insbesondere ist $1\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}$ und $(-1)\tilde{\alpha} = -\tilde{\alpha}$. Setzen wir weiters $0\tilde{\alpha} := 0$, dann lässt sich leicht zeigen, dass die Gleichung $(n+m)\tilde{\alpha} = n\tilde{\alpha} + m\tilde{\alpha}$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ und $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}$ erfüllt ist. Diese Notation wird in jeder abelschen Gruppe verwendet.

also ist $(-1, R)$ neutrales Element. Weiters existiert $\omega \in \mathcal{W}$ mit $\alpha + \omega = R$ und es gilt

$$(n, \alpha) + (-n - 1, \omega) = (-1, R) \quad \text{bzw.} \quad (n, R) + (-n - 2, R) = (-1, R),$$

also besitzt jedes Element in $\tilde{\mathcal{W}}$ ein additives Inverses:

$$-(n, \alpha) = (-n - 1, \omega) \quad \text{bzw.} \quad -(n, R) = (-n - 2, R). \quad (11)$$

Es bleibt daher nur noch die Assoziativität zu überprüfen. Seien dazu $(n, \alpha) \in \tilde{\mathcal{W}}$, $(m, \beta) \in \tilde{\mathcal{W}}$ und $(l, \gamma) \in \tilde{\mathcal{W}}$. Wir wollen zeigen, dass die beiden Ausdrücke

$$(n, \alpha) + ((m, \beta) + (l, \gamma)) \quad \text{und} \quad ((n, \alpha) + (m, \beta)) + (l, \gamma)$$

übereinstimmen. Dies erfordert eine umfangreiche Fallunterscheidung.

Für $(n, \alpha) \in \mathcal{W}$ folgt unmittelbar aus der Definition $(n, \alpha) + (m, R) = (n + m + 1, \alpha)$. Damit lässt sich die Assoziativität leicht überprüfen, wenn einer der drei Winkel mit R übereinstimmt. O.B.d.A. sei daher $\alpha < R$, $\beta < R$ und $\gamma < R$. Nach Bemerkung 1.4.38(a) sind daher die Summen $\alpha + \beta$ und $\beta + \gamma$ definiert.

Betrachte zunächst den Fall $\alpha + \beta \leq R$ und $\beta + \gamma \leq R$. Nach Bemerkung 1.4.38(a) ist daher auch $\alpha + \beta + \gamma$ definiert, vgl. Satz 1.4.13(b). Wir unterscheiden die beiden Möglichkeiten $\alpha + \beta + \gamma \leq R$ und $\alpha + \beta + \gamma > R$. Im ersten Fall erhalten wir

$$\begin{aligned} (n, \alpha) + ((m, \beta) + (l, \gamma)) &= (n, \alpha) + (m + l, \beta + \gamma) = (n + m + l, \alpha + \beta + \gamma), \\ ((n, \alpha) + (m, \beta)) + (l, \gamma) &= (n + m, \alpha + \beta) + (l, \gamma) = (n + m + l, \alpha + \beta + \gamma), \end{aligned}$$

also stimmen die beiden Ausdrücke überein. Im zweiten Fall existiert $\omega \in \mathcal{W}$ mit $\alpha + \beta + \gamma = R + \omega$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} (n, \alpha) + ((m, \beta) + (l, \gamma)) &= (n, \alpha) + (m + l, \beta + \gamma) = (n + m + l + 1, \omega), \\ ((n, \alpha) + (m, \beta)) + (l, \gamma) &= (n + m, \alpha + \beta) + (l, \gamma) = (n + m + l + 1, \omega). \end{aligned}$$

Wieder stimmen beide Ausdrücke überein.

Wir betrachten nun den Fall $\alpha + \beta > R$ und $\beta + \gamma \leq R$. Es existiert daher $\omega \in \mathcal{W}$ mit $\alpha + \beta = R + \omega$. Nach Bemerkung 1.4.38(a) sind auch $\alpha + \beta + \gamma$ und $\omega + \gamma$ definiert und es gilt $\alpha + \beta + \gamma = R + \omega + \gamma$, vgl. Satz 1.4.13(b). Wir erhalten

$$\begin{aligned} (n, \alpha) + ((m, \beta) + (l, \gamma)) &= (n, \alpha) + (m + l, \beta + \gamma) = (n + m + l + 1, \omega + \gamma), \\ ((n, \alpha) + (m, \beta)) + (l, \gamma) &= (n + m + 1, \omega) + (l, \gamma) = (n + m + l + 1, \omega + \gamma), \end{aligned}$$

also stimmen die beiden Ausdrücke überein. Analog, oder mit Hilfe der Kommutativität der Verknüpfung, lässt sich der Fall $\alpha + \beta \leq R$ und $\beta + \gamma > R$ behandeln.

Nun zum letzten Fall $\alpha + \beta > R$ und $\beta + \gamma > R$. Es existiert daher $\omega \in \mathcal{W}$ mit $\alpha + \beta = \omega + R$ und $\rho \in \mathcal{W}$ mit $\beta + \gamma = R + \rho$. Es gilt daher:

$$\begin{aligned} (n, \alpha) + ((m, \beta) + (l, \gamma)) &= (n, \alpha) + (m + l + 1, \rho), \\ ((n, \alpha) + (m, \beta)) + (l, \gamma) &= (n + m + 1, \omega) + (l, \gamma). \end{aligned}$$

Um die Gleichheit der beiden Ausdrücke einzusehen, genügt es

$$\alpha + \rho = \omega + \gamma$$

zu zeigen. Sei dazu $\beta' \in \mathcal{W}$ so, dass $\beta + \beta' = R$. Somit $\alpha + \beta = \omega + \beta' + \beta$ und $\beta + \gamma = \beta + \beta' + \rho$. Mit der Kürzungsregel in Satz 1.4.13(d) erhalten wir $\alpha = \omega + \beta'$ und $\gamma = \beta' + \rho$, woraus sich sofort $\alpha + \rho = \omega + \beta' + \rho = \omega + \gamma$ ergibt.

(b) Die Verträglichkeit mit der Addition ist trivial, denn $(\tilde{\beta} + \tilde{\gamma}) - (\tilde{\alpha} + \tilde{\gamma}) = \tilde{\beta} - \tilde{\alpha}$. Offensichtlich ist $\tilde{\mathcal{W}}_+$ abgeschlossen unter Addition, d.h. aus $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{W}}_+$ folgt $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{W}}_+$. Daraus erhalten wir unmittelbar die Transitivität: Ist $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$ und $\tilde{\beta} < \tilde{\gamma}$, dann gilt $\tilde{\beta} - \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}_+$ und $\tilde{\gamma} - \tilde{\beta} \in \tilde{\mathcal{W}}_+$, also $\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha} = (\tilde{\gamma} - \tilde{\beta}) + (\tilde{\beta} - \tilde{\alpha}) \in \tilde{\mathcal{W}}_+$ und daher $\tilde{\alpha} < \tilde{\gamma}$. Aus der Beschreibung der Inversen in (11) folgt

$$\tilde{\mathcal{W}}_- := \{-\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}_+\} = \left\{ (n, \alpha) \in \tilde{\mathcal{W}} \mid n \leq -2 \vee (n = -1 \wedge \alpha < R) \right\}. \quad (12)$$

Somit erhalten wir

$$\tilde{\mathcal{W}} \setminus \{0\} = \tilde{\mathcal{W}}_- \cup \tilde{\mathcal{W}}_+ \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{W}}_- \cap \tilde{\mathcal{W}}_+ = \emptyset.$$

Die Trichotomie folgt unmittelbar, denn offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} < \tilde{\beta} &\Leftrightarrow \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}_+ \\ \tilde{\alpha} = \tilde{\beta} &\Leftrightarrow \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} = 0 \\ \tilde{\alpha} > \tilde{\beta} &\Leftrightarrow \tilde{\beta} - \tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}_- \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von (b) vollständig. Für $(n, \alpha) \in \tilde{\mathcal{W}}$ folgt aus (12)

$$(n, \alpha) < 2\iota(R) \Leftrightarrow n \leq 0 \vee (n = 1 \wedge \alpha < R), \quad (13)$$

denn $(n, \alpha) - 2\iota(R) = (n - 2, \alpha)$. Damit erhalten wir auch

$$\{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}} \mid 0 < \tilde{\alpha} < 2\iota(R)\} = \{(n, \alpha) \in \tilde{\mathcal{W}} \mid n = 0 \vee (n = 1 \wedge \alpha < R)\}. \quad (14)$$

Wir werden dies weiter unten benötigen.

(c) Die Abbildung ι ist wohldefiniert, denn im zweiten Fall ist ω wegen der Kürzungsregel in Satz 1.4.13(d) eindeutig bestimmt und es gilt $\omega < R$ nach Bemerkung 1.4.38(b). Daraus folgt nun auch $\iota(\mathcal{W}) \subseteq \{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}} \mid 0 < \tilde{\alpha} < 2\iota(R)\}$, siehe (14). Die umgekehrte Inklusion $\iota(\mathcal{W}) \supseteq \{\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}} \mid 0 < \tilde{\alpha} < 2\iota(R)\}$ folgt mit Bemerkung 1.4.38(a), denn für $\alpha < R$ ist $R + \alpha$ definiert, also $\iota(R + \alpha) = (1, \alpha)$ im Bild von ι . Dies zeigt (v), denn die Injektivität von ι ist offensichtlich.

Um (iv) einzusehen, sei $n \in \mathbb{Z}$ und $\alpha \in \mathcal{W}$ mit $\alpha \leq R$. Eine einfache Rechnung zeigt $n\iota(R) = (n - 1, R)$ und daher $n\iota(R) + \iota(\alpha) = (n, \alpha)$, woraus wir sofort (iv) erhalten.

Um (vi) einzusehen führen wir eine Fallunterscheidung durch. Wir betrachten zunächst den Fall $\alpha \leq R$ und $\beta \leq R$. Ist $\alpha = R = \beta$, dann ist $\alpha + \beta$ nach Bemerkung 1.4.38(b) nicht definiert und

$$\iota(\alpha) + \iota(\beta) = (0, R) + (0, R) = (1, R) = 2\iota(R).$$

O.B.d.A. sei nun α oder β verschieden von R . Nach Bemerkung 1.4.38(a) ist in diesem Fall $\alpha + \beta$ definiert. Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten: $\alpha + \beta \leq R$ und $\alpha + \beta > R$. Im ersten Fall folgt mit (v)

$$\iota(\alpha) + \iota(\beta) = (0, \alpha) + (0, \beta) = (0, \alpha + \beta) = \iota(\alpha + \beta) < 2\iota(R).$$

Im zweiten Fall existiert $\omega \in \mathcal{W}$ mit $\alpha + \beta = R + \omega$ und wir erhalten mit (v)

$$\iota(\alpha) + \iota(\beta) = (0, \alpha) + (0, \beta) = (1, \omega) = \iota(\alpha + \beta) < 2\iota(R).$$

Wir betrachten nun den Fall $\alpha > R$ und $\beta \leq R$. Es existiert daher $\omega \in \mathcal{W}$ mit $\alpha = R + \omega$. Beachte auch $\omega < R$ nach Bemerkung 1.4.38(b). Wir unterscheiden zwei Möglichkeiten: Die

Summe $\alpha + \beta$ ist definiert bzw. $\alpha + \beta$ ist nicht definiert. Im ersten Fall folgt $\alpha + \beta = R + \omega + \beta$, vgl. Satz 1.4.13(b), also $\omega + \beta < R$ nach Bemerkung 1.4.38(b) und wir erhalten mit (v)

$$\iota(\alpha) + \iota(\beta) = (1, \omega) + (0, \beta) = (1, \omega + \beta) = \iota(\alpha + \beta) < 2\iota(R).$$

Im zweiten Fall muss $\omega + \beta \geq R$ gelten, siehe Bemerkung 1.4.38(a). Ist $\omega + \beta = R$, dann

$$\iota(\alpha) + \iota(\beta) = (1, \omega) + (0, \beta) = (1, R) = 2\iota(R).$$

Ist $\omega + \beta > R$, so existiert $\rho \in \mathcal{W}$ mit $\omega + \beta = R + \rho$ und wir erhalten mit (13)

$$\iota(\alpha) + \iota(\beta) = (1, \omega) + (0, \beta) = (2, \rho) > 2\iota(R).$$

Völlig analog lässt sich der Fall $\alpha \leq R$ und $\beta > R$ behandeln.

Schließlich betrachten wir den Fall $\alpha > R$ und $\beta > R$. Nach Bemerkung 1.4.38(b) ist die Summe $\alpha + \beta$ nicht definiert. Es existieren $\omega, \rho \in \mathcal{W}$ mit $\alpha = R + \omega$ und $\beta = R + \rho$. Wie zuvor gilt $\omega < R$, $\rho < R$ und die Summe $\omega + \rho$ ist definiert. Ist $\omega + \rho \leq R$ folgt mit (13)

$$\iota(\alpha) + \iota(\beta) = (1, \omega) + (1, \rho) = (2, \omega + \rho) > 2\iota(R).$$

Ist $\omega + \rho > R$, so existiert $\kappa \in \mathcal{W}$ mit $\omega + \rho = R + \kappa$ und wir erhalten mit (13)

$$\iota(\alpha) + \iota(\beta) = (1, \omega) + (1, \rho) = (3, \kappa) > 2\iota(R).$$

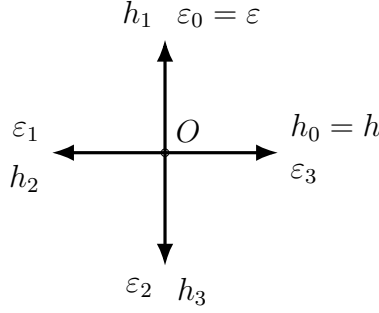
Um (vii) einzusehen, sei zunächst $\alpha < \beta$. Dann existiert $\omega \in \mathcal{W}$ mit $\alpha + \omega = \beta$. Mit (vi) erhalten wir $\iota(\alpha) + \iota(\omega) = \iota(\alpha + \omega) = \iota(\beta)$, also $\iota(\beta) - \iota(\alpha) = \iota(\omega) \in \tilde{\mathcal{W}}_+$ wegen (v) und daher $\iota(\alpha) < \iota(\beta)$. Dies zeigt die eine Implikation. Für die umgekehrte Implikation sei nun $\iota(\alpha) < \iota(\beta)$. Dann existiert $\tilde{\omega} \in \tilde{\mathcal{W}}_+$ mit $\iota(\alpha) + \tilde{\omega} = \iota(\beta)$. Insbesondere gilt $0 < \tilde{\omega} < \iota(\beta) < 2\iota(R)$, also existiert $\omega \in \mathcal{W}$ mit $\iota(\omega) = \tilde{\omega}$, siehe (v). Nach (vi) ist $\alpha + \omega$ definiert und es gilt $\iota(\alpha + \omega) = \iota(\alpha) + \iota(\omega) = \iota(\alpha) + \tilde{\omega} = \iota(\beta)$. Da ι injektiv ist, folgt $\alpha + \omega = \beta$, also $\alpha < \beta$. \square

BEMERKUNG 1.4.40. Auch für $\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{W}}$ schreiben wir $\alpha \leq \beta$ falls $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$. Dann ist \leq eine mit der Addition verträgliche Totalordnung auf $\tilde{\mathcal{W}}$, die auf den (geometrischen) Winkeln $\mathcal{W} \subseteq \tilde{\mathcal{W}}$ mit der Totalordnung aus Bemerkung 1.4.17 überein stimmt. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 1.4.39(b) und (vii).

BEMERKUNG 1.4.41. Auch in $\tilde{\mathcal{W}}$ kann von $2\alpha = 2\beta$ auf $\alpha = \beta$ geschlossen werden.¹⁵ Andernfalls wäre auf Grund der Totalordnung o.B.d.A. $\alpha < \beta$, also $\alpha + \alpha < \alpha + \beta < \beta + \beta$ wegen der Kompatibilität von Addition und Ordnungsrelation, und wir erhielten den Widerspruch $2\alpha < 2\beta$.

Nach Axiom K5 können Winkel in \mathcal{W} an einem Halbstrahl auf einer gegebenen Seite abgetragen werden. Dies ist auch für Winkel in $\tilde{\mathcal{W}}$ möglich.

DEFINITION 1.4.42 (Abtragen allgemeiner Winkel). Sei h ein Halbstrahl mit Ausgangspunkt O und Trägergeraden g , ε eine Seite von g und $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{W}}$. Wir wollen $\tilde{\alpha}$ von h auf der Seite ε abtragen und so einen, von O ausgehenden Halbstrahl erhalten, den wir mit $\tilde{\alpha} +_{\varepsilon} h$ bezeichnen werden. Um die Definition einfach formulieren zu können, schreiben wir $\varepsilon_0 := \varepsilon$ und $h_0 := h$. Wir bezeichnen die andere Seite von g mit ε_2 und schreiben h_2 für den anderen von O ausgehenden Halbstrahl in g . Die beiden von O ausgehenden Halbstrahlen, die orthogonal auf g stehen, bezeichnen wir mit h_1 und h_3 , wobei h_1 in ε_0 und h_3 in ε_2 liegen sollen. Schließlich bezeichnen ε_1 und ε_3 die beiden Seiten der Trägergeraden von h_1 , wobei



h_2 in ε_1 und h_0 in ε_3 liegen sollen. Wir schreiben $\tilde{\alpha} = nR + \alpha$ in der Form (10), d.h. $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathcal{W}$ und $\alpha \leq R$. Sei $j \in \{0, 1, 2, 3\}$ so, dass $n \equiv j \pmod{4}$. Wir definieren nun $\tilde{\alpha} +_\varepsilon h$ als den eindeutigen, von O ausgehenden Halbstrahl in ε_j , für den $\sphericalangle(\tilde{\alpha} +_\varepsilon h, h_j) = \alpha$ gilt, vgl. Axiom K5. Darüber hinaus bezeichne $\tilde{\alpha} +_h \varepsilon$ die Seite der Trägergeraden von $\tilde{\alpha} +_\varepsilon h$, die $(R + \tilde{\alpha}) +_\varepsilon h$ enthält.

BEMERKUNG 1.4.43. Mit der Notation in Definition 1.4.42 gilt offenbar:

$$\begin{array}{ll}
0 +_\varepsilon h = h & 0 +_h \varepsilon = \varepsilon \\
R +_\varepsilon h = h_1 & R +_h \varepsilon = \varepsilon_1 \\
2R +_\varepsilon h = h_2 & 2R +_h \varepsilon = \varepsilon_2 \\
3R +_\varepsilon h = h_3 & 3R +_h \varepsilon = \varepsilon_3 \\
4R +_\varepsilon h = h & 4R +_h \varepsilon = \varepsilon
\end{array}$$

BEMERKUNG 1.4.44. In der Situation von Definition 1.4.42 betrachten wir nun den Fall $\alpha \in \mathcal{W} \subseteq \tilde{\mathcal{W}}$. Sei k der von O ausgehenden Halbstrahl in ε mit $\sphericalangle(h, k) = \alpha$, vgl. Axiom K5, und bezeichne η die Seite der Trägergeraden von k , die h nicht enthält. Dann gilt $k = \alpha +_\varepsilon h$ und $\eta = \alpha +_h \varepsilon$. Für $0 < \alpha \leq R$ ist dies offensichtlich, aber auch für $R < \alpha < 2R$ lässt es sich mühelos verifizieren. In diesem Sinn verallgemeinert Definition 1.4.42 das Abtragen geometrischer Winkeln mit Axiom K5.

BEMERKUNG 1.4.45. In der Situation von Definition 1.4.42 liefert die Zuordnung $\alpha \mapsto \alpha +_\varepsilon h$ eine Bijektion zwischen $\{\alpha \in \tilde{\mathcal{W}} : 0 \leq \alpha < 4R\}$ und der Menge aller, von O ausgehenden Halbstrahlen. Dies folgt leicht aus Axiom K5.

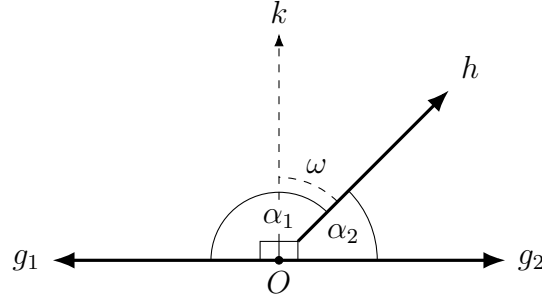
BEMERKUNG 1.4.46. Sei h ein von O ausgehender Halbstrahl und ε eine Seite der Trägergeraden von h . Für $\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{W}}$ gilt dann:

$$\begin{array}{ll}
(\beta + \alpha) +_\varepsilon h = \beta +_{\varepsilon'} h' & (\beta + \alpha) +_h \varepsilon = \beta +_{h'} \varepsilon' \\
(-\alpha) +_\varepsilon h = \alpha +_{\varepsilon^{\text{op}}} h & (-\alpha) +_h \varepsilon = \alpha +_{h^{\text{op}}} \varepsilon
\end{array}$$

Dabei ist $h' := \alpha +_\varepsilon h$ und $h'' := \alpha +_\varepsilon h$. Darüber hinaus bezeichnet ε^{op} die andere, zu ε disjunkte Seite der Trägergeraden von h , und h^{op} bezeichnet die andere, zu h disjunkte Seite von O in der Trägergeraden von h . Wir wollen die Details hier nicht verifizieren.

¹⁵Wie zuvor steht hier 2α als Abkürzung für $\alpha + \alpha$.

SATZ 1.4.47 (Nebenwinkel sind supplementär [Euklid, I§13 und I§14]). Seien h , g_1 , g_2 drei Halbstrahlen, die von einem gemeinsamen Punkt ausgehen und so, dass g_1 und g_2 auf verschiedenen Seiten der Trägergeraden von h liegen. In dieser Situation bildet $g_1 \cup \{O\} \cup g_2$ genau dann eine Gerade, wenn $\sphericalangle(g_1, h) + \sphericalangle(g_2, h) = 2R$ gilt.¹⁶



BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Bezeichnen O den gemeinsamen Ausgangspunkt der Halbstrahlen und setze $\alpha_1 := \sphericalangle(g_1, h)$ sowie $\alpha_2 := \sphericalangle(g_2, h)$. Wir nehmen zunächst an, dass $g := g_1 \cup \{O\} \cup g_2$ eine Geraden ist, d.h. $\sphericalangle(g_1, h)$ und $\sphericalangle(g_2, h)$ bilden Nebenwinkel. Sei k der von O ausgehende Halbstrahl, der normal auf g steht und auf der selben Seite von g liegt wie h . Ist $h = k$, dann folgt sofort $\alpha_1 + \alpha_2 = \sphericalangle(g_1, k) + \sphericalangle(g_2, k) = R + R = 2R$. Sei daher $h \neq k$ und $\omega := \sphericalangle(h, k)$. O.B.d.A. liege k im Winkel $\sphericalangle(g_1, h)$. Dann liegt auch h im Winkel $\sphericalangle(g_2, k)$ und wir erhalten $\alpha_1 = \sphericalangle(g_1, h) = \sphericalangle(g_1, k) + \sphericalangle(k, h) = R + \omega$ sowie $\omega + \alpha_2 = \sphericalangle(k, h) + \sphericalangle(h, g_2) = \sphericalangle(k, g_2) = R$. Mit der Assoziativität in $\tilde{\mathcal{W}}$ folgt $\alpha_1 + \alpha_2 = (R + \omega) + \alpha_2 = R + (\omega + \alpha_2) = R + R = 2R$.

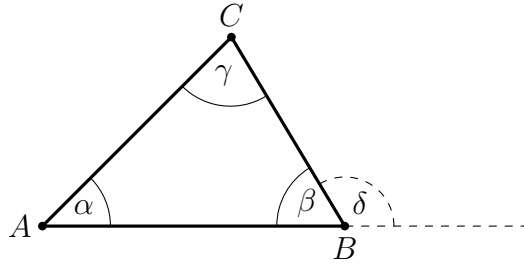
Für die umgekehrte Implikation sei nun $\alpha_1 + \alpha_2 = 2R$. Bezeichne g' die Trägergerade von g_1 und sei g'_2 die andere Seite von O in g' . Nach dem zuvor Gezeigten gilt $\alpha_1 + \sphericalangle(g'_2, h) = 2R$. Zusammen mit der Voraussetzung $\alpha_1 + \alpha_2 = 2R$ folgt zunächst $\alpha_1 + \sphericalangle(g'_2, h) = \alpha_1 + \alpha_2$ und dann $\sphericalangle(g'_2, h) = \alpha_2$ wegen der Kürzungsregel in der abelschen Gruppe \mathcal{W} . Dies zeigt $\sphericalangle(g'_2, h) \equiv \sphericalangle(g_2, h)$. Da g_2 und g'_2 auf der selben Seite der Trägergeraden von h liegen, folgt $g_2 = g'_2$ aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5. Wir sehen daher, dass $g_1 \cup \{O\} \cup g_2 = g'$ eine Gerade bildet. \square

SATZ 1.4.48 ([Euklid, I§17]). In jedem Dreieck sind zwei Winkel, beliebig zusammengekommen, kleiner als zwei Rechte. Genauer ist damit gemeint: Ist ABC ein Dreieck mit Winkeln $\alpha := \sphericalangle CAB$, $\beta := \sphericalangle ABC$ und $\gamma := \sphericalangle BCA$, dann gilt

$$\alpha + \beta < 2R, \quad \beta + \gamma < 2R \quad \text{und} \quad \gamma + \alpha < 2R.$$

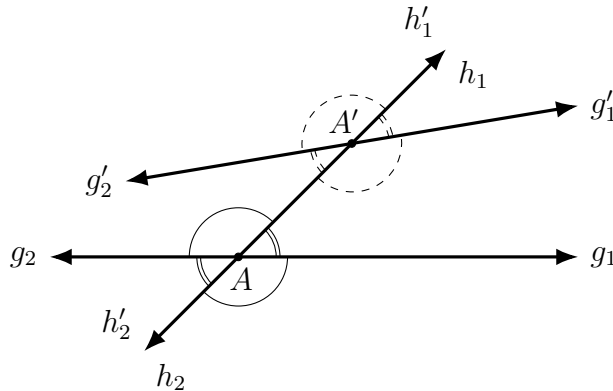
BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Bezeichnet δ den Außenwinkel bei B dann gilt $\alpha < \delta$ nach Satz 1.4.24. Aus Satz 1.4.47 erhalten wir $\delta + \beta = 2R$. Es folgt $\alpha + \beta < \delta + \beta = 2R$. Die anderen Ungleichungen lassen sich analog beweisen. \square

¹⁶In [Euklid, I§13] wird die eine Implikation wie folgt formuliert: Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, Winkel bildet, dann muss sie entweder zwei Rechte oder solche, die zusammen zwei Rechten gleich sind, bilden. Die Umkehrung in [Euklid, I§14] lautet: Bilden an einer geraden Linie in einem Punkte auf ihr zwei nicht auf derselben Seite liegende gerade Linien Nebenwinkel, die zusammen zwei Rechten gleich sind, dann müssen diese Linien einander gerade fortsetzen.



Winkel, die beim Schnitt zweier Geraden g und g' mit einer dritten, von g und g' verschiedenen Geraden h auf der selben Seite von h und auf entsprechenden Seiten von g und g' entstehen werden *Stufenwinkel* genannt. Winkel, die auf verschiedenen Seiten von h und entgegengesetzten Seiten von g und g' entstehen werden *Wechselwinkel* genannt. Wir wollen dies noch etwas genauer ausformulieren:

DEFINITION 1.4.49 (Stufen- und Wechselwinkel). Seien A und A' zwei Punkte auf einer Geraden h . Weiters sei g eine von h verschiedene Gerade, die h im Punkt A schneidet; und g' sei eine von h verschiedene Gerade, die h im Punkt A' schneidet. Es bezeichnen g_1 und g_2 die beiden Seiten von A in g . Weiters bezeichnen g'_1 und g'_2 die beiden Seiten von A' in g' so, dass g_1 und g'_1 auf der selben Seite von h liegen. Es bezeichnen $h_1 := (AA'>$, $h'_1 := A(A'>$, $h'_2 := (A'A>$ und $h_2 := A'(A>$.



In dieser Situation wird das Winkelpaar $\angle(g_1, h_1)$ und $\angle(g'_1, h'_1)$ als *Stufenwinkel* bezeichnet. Auch das Winkelpaar $\angle(g_1, h_2)$ und $\angle(g'_1, h'_2)$, das Winkelpaar $\angle(g_2, h_1)$ und $\angle(g_2, h'_1)$ sowie das Winkelpaar $\angle(g_2, h_2)$ und $\angle(g'_2, h'_2)$ werden als *Stufenwinkel* bezeichnet. Besteht ein Stufenwinkelpaar aus kongruenten Winkeln, dann besteht jedes der vier Stufenwinkelpaare aus zwei kongruenten Winkeln. Dies folgt aus Satz 1.4.7. In diesem Fall sagen wir, dass *beim Schnitt von h mit g und g' kongruente Stufenwinkel entstehen*.

Das Winkelpaar $\angle(g_1, h_1)$ und $\angle(g'_2, h'_2)$ wird als *innere Wechselwinkel* bezeichnet. Auch das Winkelpaar $\angle(g'_1, h'_2)$ und $\angle(g_2, h_1)$ wird als *innere Wechselwinkel* bezeichnet. Das Winkelpaar $\angle(g_1, h_2)$ und $\angle(g'_2, h'_1)$ wird als *äußere Wechselwinkel* bezeichnet. Auch das Winkelpaar $\angle(g_2, h_2)$ und $\angle(g'_1, h'_1)$ wird als *äußere Wechselwinkel* bezeichnet. Besteht ein Wechselwinkelpaar aus kongruenten Winkeln, dann besteht jedes der vier Wechselwinkelpaare aus zwei kongruenten Winkeln. Dies folgt aus Satz 1.4.7. In diesem Fall sagen wir, dass *beim Schnitt von h mit g und g' kongruente Wechselwinkel entstehen*.

BEMERKUNG 1.4.50. Beachte, dass beim Schnitt von h mit g und g' kongruente Stufenwinkel genau dann entstehen, wenn kongruente Wechselwinkel entstehen. Dies folgt aus Satz 1.4.8.

SATZ 1.4.51 (Stufenwinkel, [Euklid, I§27]). *Entstehen beim Schnitt einer Geraden h mit zwei Geraden g und g' kongruente Stufenwinkel (Wechselwinkel), dann sind g und g' parallel.*

BEWEIS. Wir verwenden die Notation von oben. Stimmen A und A' überein, dann folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 sofort $g = g'$, also sind g und g' in diesem Fall parallel. O.B.d.A. seien nun A und A' verschieden. Würden sich die beiden Halbstrahlen g_1 und g'_1 in einem Punkt X schneiden, dann wäre $AA'X$ ein Dreieck mit einem Außenwinkel $\angle XA'h'_1$, der kongruent zu einem gegenüberliegenden Innenwinkel $\angle XAA'$ wäre, was Satz 1.4.24 widerspräche. Also schneiden sich g_1 und g'_1 nicht. Analog lässt sich zeigen, dass sich auch g_2 und g'_2 nicht treffen. Schließlich können sich g_1 und g'_2 nicht schneiden, denn sie liegen auf verschiedenen Seiten von h , und dasselbe gilt für g'_1 und g_2 . Somit haben g und g' keinen Schnittpunkt und sind daher parallel. \square

1.5. Das Parallelenaxiom. Zu den Inzidenz-, Anordnungs- und Kongruenzaxiomen nehmen wir nun noch folgendes Euklidische Axiom [Hilbert, §7] hinzu, das auch als Playfairs Axiom bezeichnet wird.

P. Ist g eine beliebige Gerade und A ein Punkt außerhalb g , dann gibt es höchstens eine Gerade, die durch A läuft und g nicht schneidet.

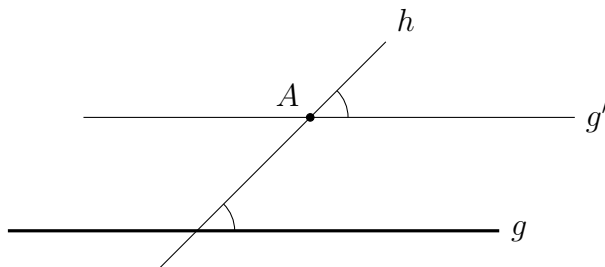
SATZ 1.5.1 ([Euklid, I§30]). *Derselben geraden Linie parallele sind auch einander parallel. In anderen Worten: Sind zwei Geraden h und k beide parallel zu einer dritten Geraden g , dann müssen auch h und k parallel sein.*

BEWEIS. Sind h und k disjunkt, dann sind sie parallel. O.B.d.A. existiere daher ein Schnittpunkt $A \in h \cap k$. Liegt A auch auf g , dann folgt aus $h \parallel g$ und $k \parallel g$ schon $h = g = k$, also $h \parallel k$. Liegt A nicht auf g , dann erhalten wir $h = k$ aus Axiom P, und daher $h \parallel k$. In jedem Fall sind h und k daher parallel. \square

BEMERKUNG 1.5.2. Parallel zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Geraden. Reflexivität und Symmetrie sind offensichtlich, die Transitivität folgt aus Satz 1.5.1.

SATZ 1.5.3 ([Euklid, I§31]). *Zu einer Geraden g und einem Punkt A gibt es stets genau eine Gerade durch A , die parallel zu g ist.*

BEWEIS. Liegt A auf g , dann ist g die einzige Gerade, die durch A läuft und parallel zu g ist. O.B.d.A. liege A nicht auf g . Wir folgen Euklids Konstruktion.



Sei h eine Gerade durch A , die g schneidet. Nach Axiom K5 existiert eine Gerade g' durch A , sodass beim Schnitt von h mit g und g' kongruente Stufenwinkel entstehen. Nach Satz 1.4.51 sind g und g' parallel. Die Eindeutigkeit der Parallelen folgt aus Axiom P. \square

SATZ 1.5.4 (Stufenwinkelsatz, [Euklid, I§27 und I§29]). *Beim Schnitt einer Geraden h mit zwei Geraden g und g' entstehen genau dann kongruente Stufenwinkel (Wechselwinkel) wenn g und g' parallel sind.*

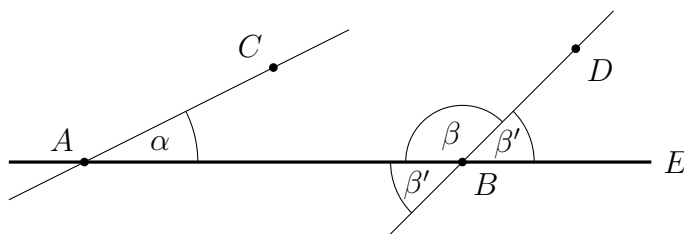
BEWEIS. Die eine Implikation haben wir bereits in Satz 1.4.51 gesehen. Für die umgekehrte Implikation sei nun $g \parallel g'$. Es bezeichne A den Schnittpunkt von h mit g' . Wie im Beweis von Satz 1.5.3 konstruieren wir eine Gerade g'' durch A , sodass beim Schnitt von h mit g und g'' kongruente Stufenwinkel entstehen. Nach Satz 1.4.51 gilt daher $g \parallel g''$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.5.3 folgt $g' = g''$. Also entstehen auch beim Schnitt von h mit g und g' kongruente Stufenwinkel. \square

SATZ 1.5.5 (Euklids Parallelenaxiom). *Seien A, B zwei verschiedene Punkte und C, D zwei Punkte, die auf derselben Seite von $g(A, B)$ liegen. Gilt in dieser Situation*

$$\sphericalangle BAC + \sphericalangle ABD < 2R$$

dann schneiden sich die beiden Geraden $g(A, C)$ und $g(B, D)$ in einem Punkt, der auf derselben Seite von $g(A, B)$ liegt, wie C und D .

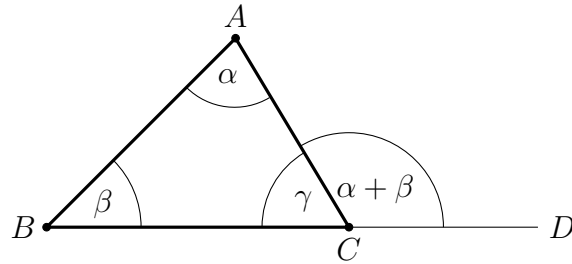
BEWEIS. Seien $\alpha := \sphericalangle BAC$, $\beta := \sphericalangle ABD$ und $\beta' := \sphericalangle EBD$, wobei E einen Punkt mit $A * B * E$ bezeichnet. Nach Satz 1.4.47 gilt $\beta + \beta' = 2R$. Zusammen mit der Voraussetzung



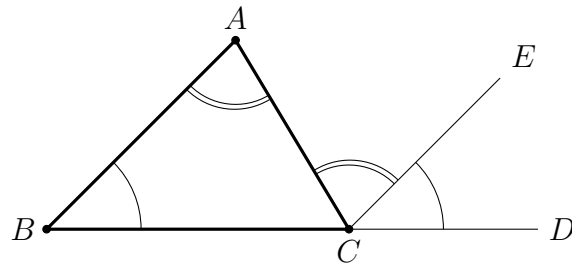
$\alpha + \beta < 2R$ erhalten wir $\alpha < \beta'$. Insbesondere sind die Stufenwinkel α und β' verschieden, also können die Geraden $g(A, C)$ und $g(B, D)$ nicht parallel sein, siehe Satz 1.5.4. Somit existiert ein Schnittpunkt X dieser beiden Geraden. Da $A \neq B$ kann X nicht auf $g(A, B)$ liegen. Der Schnittpunkt X kann auch nicht auf der Seite von $g(A, B)$ liegen, die C und D nicht enthält, denn sonst wäre ABX ein Dreieck, dessen Außenwinkel α kleiner als der gegenüberliegende Innenwinkel β' wäre, was Satz 1.4.24 widerspräche. Damit muss der Schnittpunkt X auf derselben Seite von $g(A, B)$ liegen, wie C und D . \square

BEMERKUNG 1.5.6. Die Aussage von Satz 1.5.5 entspricht Euklids Parallelenaxiom. In [Euklid, I, Postulat 5] wird dies wie folgt formuliert: “. . . , dass wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.” Euklids Parallelenaxiom ist zu Playfairs Axiom P äquivalent, d.h. aus den Inzidenzaxiomen, den Anordnungsaxiomen, den Kongruenzaxiomen und Euklids Parallelenaxiom lässt sich (müheles) unser Axiom P herleiten.

SATZ 1.5.7 (Winkelsumme im Dreieck [**Euklid**, I§32]). *In jedem Dreieck ist der bei Verlängerung einer Seite entstehende Außenwinkel gleich groß, wie die Summe der beiden gegenüberliegenden Innenwinkel, und die drei Winkel innerhalb des Dreiecks sind zusammen zwei Rechten gleich. In anderen Worten, ist ABC ein Dreieck mit Winkeln $\alpha := \sphericalangle CAB$, $\beta := \sphericalangle ABC$, $\gamma := \sphericalangle BCA$ und ist D ein Punkt mit $B * C * D$, dann gilt $\sphericalangle ACD = \alpha + \beta$ sowie $\alpha + \beta + \gamma = 2R$.*



BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Sei E ein Punkt auf derselben Seite der Geraden $g(B, C)$ wie A so, dass $g(A, B)$ und $g(E, C)$ parallel sind, siehe Satz 1.5.3. Nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 gilt $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ECD$. Nach Konstruktion kann der Halbstrahl $\langle CE \rangle$ die Strecke $[AB]$ nicht treffen, also muss E im Inneren des Winkels $\sphericalangle ACD$ liegen, siehe Proposition 1.2.36. Insbesondere liegen E und B auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$, also bilden $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ECA$ Wechselwinkel. Aus dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 folgt daher $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ECA$. Insgesamt erhalten wir



$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACE + \sphericalangle ECD = \sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC$.

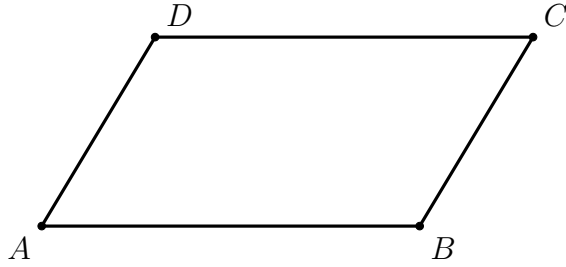
Da der Außenwinkel $\sphericalangle ACD$ Nebenwinkel von $\sphericalangle BCA$ ist erhalten wir nun für die Winkelsumme $\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = 2R$, siehe Satz 1.4.47. \square

BEMERKUNG 1.5.8. Sind zwei Winkel eines Dreiecks zwei Winkeln eines anderen Dreiecks entsprechend kongruent, dann ist auch der dritte Winkel im einen Dreieck dem dritten Winkel im anderen Dreieck kongruent. Dies folgt aus Satz 1.5.7 und Satz 1.4.7.

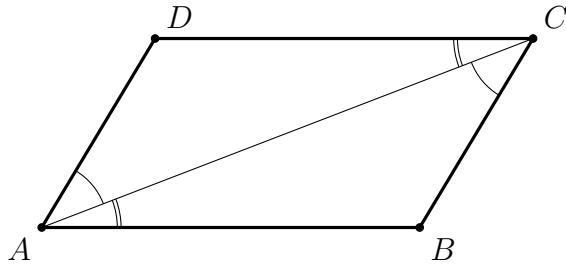
DEFINITION 1.5.9 (Parallelogramm). Unter einem Parallelogramm verstehen wir vier verschiedene Punkte $ABCD$, sodass $g(A, B)$ und $g(C, D)$ disjunkte Parallele sind, und auch $g(B, C)$ und $g(D, A)$ disjunkte Parallele sind.

SATZ 1.5.10 ([**Euklid**, I§34]). *In jedem Parallelogramm $ABCD$ sind gegenüberliegende Seiten und Winkel kongruent, d.h.*

$$AB \equiv CD, \quad BC \equiv DA, \quad \sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle CDA, \quad \sphericalangle DAB \equiv \sphericalangle BCD.$$



BEWEIS. Da $g(A, B)$ und $g(C, D)$ parallel sind, liegen C und D auf derselben Seite von $g(A, B)$. Ebenso liegen B und C auf derselben Seite von $g(A, D)$. Somit liegt C im Inneren des Winkels $\angle DAB$. Nach Proposition 1.2.36 schneidet der Halbstrahl $(AC >$ die Strecke (BD) . Insbesondere liegen B und D auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$, also bilden $\angle ACB$ und $\angle CAD$ Wechselwinkel. Nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 gilt $\angle ACB \equiv \angle CAD$ und $\angle CAB \equiv \angle ACD$. Nach Satz 1.4.2 (WSW) sind daher die Dreiecke ACB und CAD



kongruent. Insbesondere gilt $AB \equiv CD$, $BC \equiv DA$ und $\angle ABC \equiv \angle CDA$. Die vierte Kongruenz, $\angle DAB \equiv \angle BCD$, folgt analog durch Betrachtung der anderen Diagonalen. \square

Bisher haben wir $|AB|$ nur für verschiedene Punkte $A \neq B$ definiert. Ab nun wollen wir diese Notation auch für degenerierte Strecken verwenden und setzen daher $|AA| := 0 \in \mathcal{K}$. Für zwei Punkte A und B gilt daher $|AB| = 0$ genau dann wenn $A = B$.

LEMMA 1.5.11 (Streckensymmetrale). *Ist AB eine Strecke, dann bildet die Menge*

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\}$$

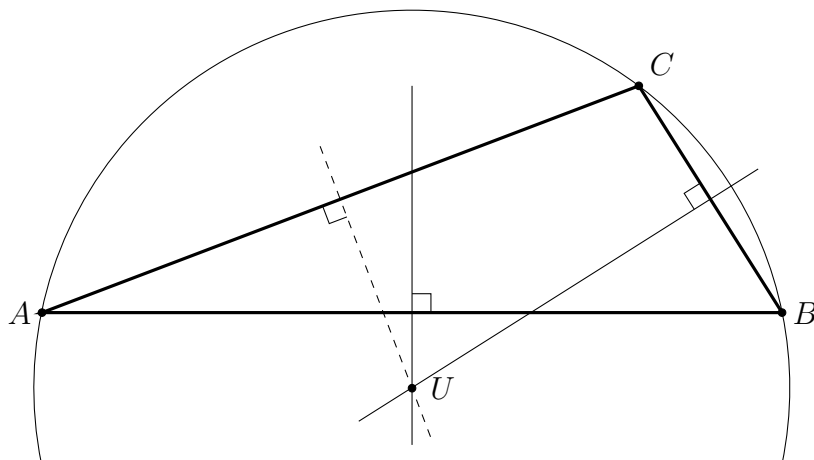
eine Gerade, die durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht und normal auf $g(A, B)$ steht.

BEWEIS. Dies folgt aus Satz 1.4.3 (SWS) und Satz 1.4.18 (SSS). (siehe Übungen) \square

DEFINITION 1.5.12 (Streckensymmetrale). Die Gerade in Lemma 1.5.11 wird als *Streckensymmetrale* der Strecke AB bezeichnet.

DEFINITION 1.5.13 (Kreis). Unter dem *Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r \in \mathcal{P}$* verstehen wir die Menge $\Gamma = \{X \in \mathcal{E} : |XM| = r\}$. Die Mengen $\{X \in \mathcal{E} : |XM| < r\}$ und $\{X \in \mathcal{E} : |XM| > r\}$ heißen *Inneres* bzw. *Äußeres* des Kreises Γ . Ist $A \in \Gamma$ dann wird die Strecke MA als *Radius* bezeichnet. Unter einer *Sehne* von Γ verstehen wir jede Strecke AB , deren Endpunkte A und B auf Γ liegen. Eine Sehne, die den Mittelpunkt enthält, wird *Durchmesser* genannt.

SATZ 1.5.14 (Umkreismittelpunkt [Euklid, IV§5]). *In jedem Dreieck schneiden sich die Streckensymmetralen der drei Seiten in einem Punkt U . Die Eckpunkte des Dreiecks liegen auf einem Kreis mit Mittelpunkt U , und dies ist der einzige Kreis, der alle drei Eckpunkte enthält.*



BEWEIS. Sei ABC ein Dreieck. Nach Lemma 1.5.11 sind die beiden Streckensymmetralen $\{X \in \mathcal{E} : |XA| = |XB|\}$ und $\{X \in \mathcal{E} : |XB| = |XC|\}$ Geraden. Diese beiden Geraden können nicht parallel sein, denn sonst wären nach Satz 1.5.4 (Stufenwinkel) auch $g(A, B)$ und $g(B, C)$ parallel, also $g(A, B) = g(B, C)$ und ABC kein Dreieck. Somit schneiden sich die beiden Streckensymmetralen in genau einem Punkt U . Für diesen Punkt gilt $|UA| = |UB| = |UC|$, also liegt U auch auf der dritten Streckensymmetrale. Da die Eckpunkte A, B, C alle denselben Abstand von U haben liegen sie auf einem Kreis mit Mittelpunkt U . Der Mittelpunkt jedes weiteren Kreises durch A, B, C muss im Schnitt der Streckensymmetralen liegen und daher mit U übereinstimmen. \square

DEFINITION 1.5.15 (Umkreis). Der Kreis in Satz 1.5.14 wird als *Umkreis* des Dreiecks bezeichnet. Sein Mittelpunkt heißt *Umkreismittelpunkt* und sein Radius *Umkreisradius*.

BEMERKUNG 1.5.16. Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, geht stets genau ein Kreis, siehe Satz 1.5.14.

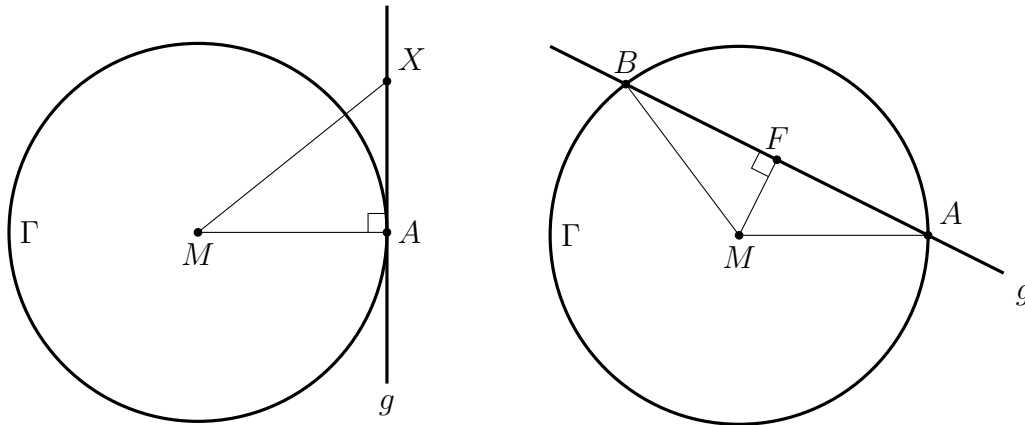
BEMERKUNG 1.5.17. Ein Kreis kann eine Gerade in höchstens zwei verschiedenen Punkten schneiden. Lügen nämlich drei verschiedene Punkte A, B, C eines Kreises auf einer Geraden, o.B.d.A. $A * B * C$, dann wären die Streckensymmetralen zu AB und BC nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 parallel, also disjunkt, aber der Mittelpunkt des Kreises müsste im Schnitt dieser Streckensymmetralen liegen, siehe Lemma 1.5.11.

BEMERKUNG 1.5.18. Jede Gerade durch den Mittelpunkt eines Kreises schneidet den Kreis in genau zwei verschiedenen Punkten, siehe Axiom K2.

DEFINITION 1.5.19 (Tangente an Kreis). Wir sagen eine Gerade *berührt* einen Kreis, wenn sie ihn in genau einem Punkt schneidet. In diesem Fall wird die Gerade auch als *Tangente* an den Kreis bezeichnet.

SATZ 1.5.20 ([Euklid, III§16 und III§18]). Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und A ein Punkt auf Γ . Eine Gerade g durch A ist genau dann tangential an den Kreis Γ wenn $g(M, A)$ orthogonal auf g steht. In diesem Fall liegt $g \setminus \{A\}$ zur Gänze außerhalb des Kreises und das Innere von Γ liegt zur Gänze auf der Seite von g , die M enthält.

BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, dass $g(M, A)$ orthogonal auf g steht. Ist X ein von A verschiedener Punkt auf g , dann bildet MAX ein rechtwinkeliges Dreieck mit Hypotenuse MX und Kathete MA . Somit gilt $|MA| < |MX|$, siehe Bemerkung 1.4.34, also liegt X im Äußeren von Γ . Dies zeigt, dass $g \setminus \{A\}$ zur Gänze außerhalb des Kreises liegt. Insbesondere kann neben A kein weiterer Punkt von g auf Γ liegen, also ist g tangential an den Kreis. Wir sehen daraus auch, dass die Gerade g das Innere von Γ nicht trifft. Ist Y ein Punkt im Inneren von Γ , dann liegt die gesamte Strecke $[MY]$ im Inneren, trifft daher g nicht, also liegen Y und M auf derselben Seite von g . Somit liegen alle Punkte des Inneren von Γ auf derselben Seite von g wie M .



Für die umgekehrte Implikation sei nun g tangential an Γ . Wir gehen indirekt vor und nehmen an, dass $g(M, A)$ nicht orthogonal auf g steht. Es bezeichne F den Fußpunkt des Lots auf g durch M . Es gilt daher $F \neq A$. Auf der Seite von F in g , die A nicht enthält, sei B der Punkt mit $|FA| = |FB|$. Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die (rechtwinkelligen) Dreiecke MFA und MFB kongruent. Insbesondere folgt $|MB| = |MA|$, also liegt auch B am Kreis Γ . Somit sind A und B zwei verschiedene Schnittpunkte von g und Γ , ein Widerspruch. \square

DEFINITION 1.5.21 (Normalabstand). Sei g eine Gerade, A ein Punkt und F der Schnittpunkt des Lots durch A auf g (Fußpunkt), siehe Definition 1.4.37. Unter dem Normalabstand von A zu g verstehen wir $d(A, g) := |AF|$.

BEMERKUNG 1.5.22. Für eine Gerade g und einen Punkt A gilt $d(A, g) = 0$ genau dann wenn $A \in g$.

BEMERKUNG 1.5.23. Sei g ein Gerade, A ein Punkt und bezeichne F den Fußpunkt des Lots durch A auf g . Dann gilt für jeden Punkt $X \in g$

$$|AX| \geq |AF| = d(A, g)$$

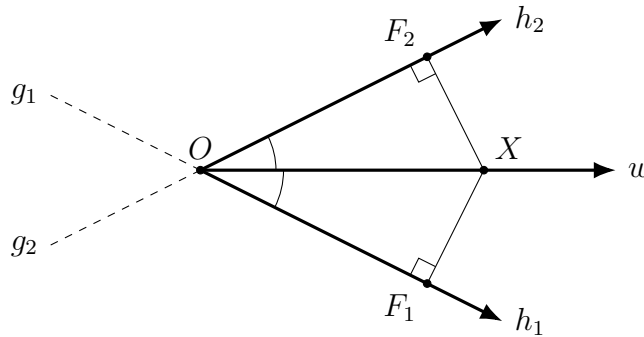
wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn $X = F$. Im Fall $A \in g$ ist dies offensichtlich. Liegt A nicht in g , so folgt dies, wie im Beweis von Satz 1.5.20, aus Bemerkung 1.4.34. Der Fußpunkt des Lots durch A auf g ist daher der eindeutige Punkt auf g mit minimalen Abstand zu A .

BEMERKUNG 1.5.24. Sei g Gerade und M ein Punkt, der nicht auf g liegt. Dann berührt der Kreis mit Mittelpunkt M und Radius $r = d(A, g)$ die Gerade g im Fußpunkt des Lots durch M auf g , siehe Satz 1.5.20, und dies ist der einzige Kreis mit Mittelpunkt M , der g berührt, siehe Satz 1.4.36.

LEMMA 1.5.25 (Winkelsymmetrale). Sei $\angle(h_1, h_2)$ ein Winkel und bezeichne W sein Inneres. Weiters sei g_1 die Trägergerade von h_1 , und g_2 bezeichne die Trägergerade von h_2 . Dann stimmt die Menge

$$\{X \in W : d(X, g_1) = d(X, g_2)\}$$

mit der Winkelsymmetrale von $\angle(h_1, h_2)$ überein, vgl. Definition 1.4.21. Ist X ein Punkt der Winkelsymmetrale, dann liegen die Fußpunkte der Lote durch X auf g_1 und g_2 auf den Schenkeln h_1 und h_2 .



BEWEIS. Bezeichne O den Scheitel des Winkels $\angle(h_1, h_2)$ und w seine Winkelsymmetrale. Wir zeigen zunächst die Inklusion

$$w \subseteq \{X \in W : d(X, g_1) = d(X, g_2)\}.$$

Sei dazu $X \in w$. Da $w \subseteq W$, genügt es $d(X, g_1) = d(X, g_2)$ zu zeigen. Bezeichne F_1 den Fußpunkt des Lots durch X auf g_1 und bezeichne F_2 den Fußpunkt des Lots durch X auf g_2 . Da h_1 und h_2 einen Winkel bilden, gilt $\sphericalangle(h_1, h_2) < 2R$. Da w die Winkelsymmetrale ist, folgt $\sphericalangle(h_1, w) < R$. Insbesondere kann F_1 nicht mit O zusammenfallen. Da der Nebenwinkel von $\sphericalangle(h_1, w)$ größer als ein Rechter ist, kann er nicht im rechtwinkligen Dreieck OXF_1 auftreten, vgl. Bemerkung 1.4.34. Somit muss F_1 auf h_1 liegen. Analog lässt sich zeigen, dass auch F_2 auf h_2 liegt. Nach Satz 1.4.27 (SWW) sind die Dreiecke OXF_1 und OXF_2 kongruent. Insbesondere erhalten wir $|XF_1| = |XF_2|$, also $d(X, g_1) = d(X, g_2)$.

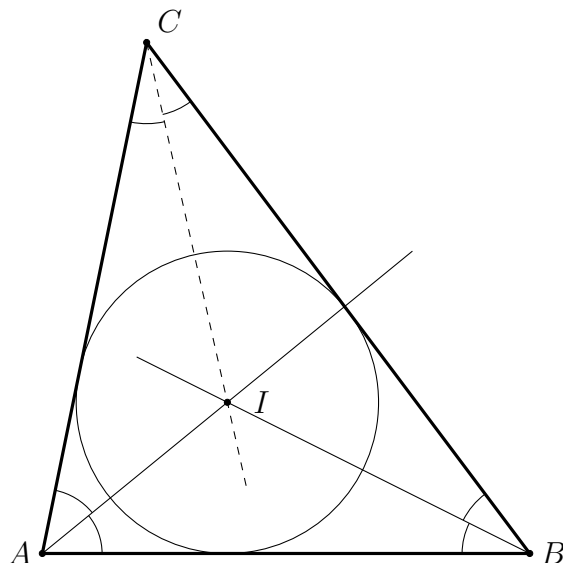
Um die umgekehrte Inklusion

$$\{X \in W : d(X, g_1) = d(X, g_2)\} \subseteq w$$

zu zeigen, sei nun $X \in W$ mit $d(X, g_1) = d(X, g_2)$. Es genügt $\sphericalangle XOh_1 \equiv \sphericalangle XOh_2$ zu zeigen. Wie zuvor bezeichnen F_1 und F_2 die Fußpunkte der Lote durch X auf g_1 und g_2 . Wäre $F_1 = O$, dann $\sphericalangle XOh_1 = R$ und $d(X, g_2) = d(X, g_1) = d(X, F_1) = d(X, O)$, nach Bemerkung 1.5.23 also auch $F_2 = O$ und daher $\sphericalangle XOh_2 = R$, was auf den Widerspruch $\sphericalangle(h_1, h_2) = \sphericalangle XOh_1 + \sphericalangle XOh_2 = R + R = 2R$ führen würde. Somit $F_1 \neq O$. Analog lässt sich $F_2 \neq O$ zeigen. Nach Satz 1.4.28 (SSW) sind die Dreiecke XOF_1 und XOF_2 kongruent, vgl. Bemerkung 1.4.34. Insbesondere erhalten wir $\sphericalangle XOF_1 \equiv \sphericalangle XOF_2$. Da dies beides spitze Winkel sind, liegt X

im Inneren von $\angle F_1OF_2$, siehe Bemerkung 1.4.38(a). Da X auch in W , d.h. im Inneren von $\angle(h_1, h_2)$ liegt, muss $F_1 \in h_1$ und $F_2 \in h_2$ gelten. Somit $\angle XOh_1 \equiv \angle XOh_2$. \square

SATZ 1.5.26 (Inkreismittelpunkt [**Euklid**, IV§4]). *In jedem Dreieck schneiden sich die drei Winkelsymmetralen in einem Punkt im Inneren des Dreiecks. Dies ist der Mittelpunkt eines Kreises, der alle drei Dreiecksseiten berührt. Es gibt keinen weiteren Kreis, der alle drei Dreiecksseiten berührt.*



BEWEIS. Sei ABC ein Dreieck. Nach Proposition 1.2.36 schneidet die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle CAB$ die Seite BC im Inneren. Erneutes Anwenden von Proposition 1.2.36 zeigt, dass sich die Winkelsymmetralen der Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ in einem Punkt I im Inneren des Dreiecks schneiden. Nach Lemma 1.5.25 gilt

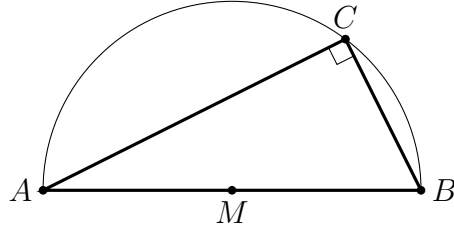
$$r := d(I, g(C, A)) = d(I, g(A, B)) = d(I, g(B, C)),$$

und I liegt auch auf der Winkelsymmetrale des dritten Winkels $\angle BCA$. Nach Bemerkung 1.5.24 berührt der Kreis mit Mittelpunkt I und Radius r jede der drei Geraden $g(A, B)$, $g(B, C)$, $g(C, A)$ in den Fußpunkten der Lote durch I . Diese Fußpunkte liegen auf den entsprechenden Dreiecksseiten, siehe Lemma 1.5.25.

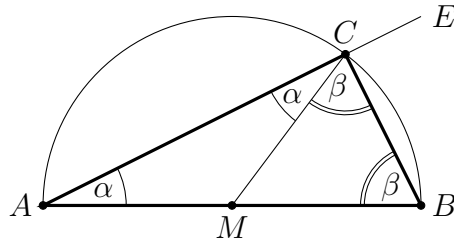
Um die Eindeutigkeitsaussage zu zeigen, sei M der Mittelpunkt eines Kreises, der jede der drei Geraden $g(A, B)$, $g(B, C)$, $g(C, A)$ in Punkten auf den Dreiecksseiten berührt. Nach Bemerkung 1.5.24 gilt daher $d(M, g(C, A)) = d(M, g(A, B)) = d(M, g(B, C))$. Mit Lemma 1.5.25 folgt, dass M im Schnitt der drei Winkelsymmetralen liegt. Also muss M mit I übereinstimmen. Dies zeigt die Eindeutigkeitsaussage im Satz. \square

DEFINITION 1.5.27 (Inkreis). Der Kreis in Satz 1.5.26 wird als *Inkreis* des Dreiecks bezeichnet. Sein Mittelpunkt heißt *Inkreismittelpunkt* und sein Radius *Inkreisradius*.

SATZ 1.5.28 (Satz von Thales [**Euklid**, III§31]). *Jeder Winkel im Halbkreis ist ein Rechter. In anderen Worten, ist AB Durchmesser eines Kreises Γ und ist C ein weiterer, von A und B verschiedener Punkt auf Γ dann ist $\angle BCA$ ein rechter Winkel.*

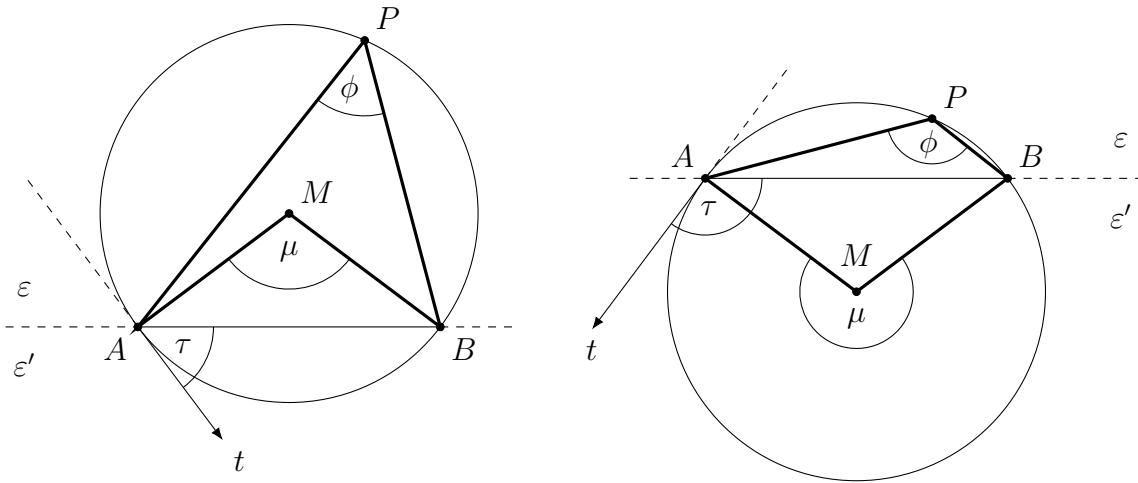


BEWEIS. Bezeichne M den Mittelpunkt des Kreises Γ . Da AB Durchmesser ist liegt M zwischen A und B . Da A, B, C alle auf Γ liegen gilt $|AM| = |BM| = |CM|$. Aus Satz 1.4.4



erhalten wir $\alpha := \sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA$ sowie $\beta := \sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB$. Da M im Inneren des Winkels $\sphericalangle BCA$ liegt folgt $\sphericalangle BCA = \alpha + \beta$. Sei E ein Punkt mit $A * C * E$. Nach Satz 1.5.7 gilt auch $\sphericalangle BCE = \sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA = \alpha + \beta$. Somit ist $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BCE$ und $\sphericalangle BCA$ daher ein rechter Winkel. \square

Wir betrachten einen Kreis Γ mit Mittelpunkt M . Weiters seien A und B zwei verschiedene Punkte auf Γ . Wir bezeichnen die beiden Seiten von $g(A, B)$ mit ε und ε' . Sei P ein Punkt auf Γ , der in der Halbebene ε liegt. Der Winkel $\phi := \sphericalangle APB$ wird *Peripheriewinkel* genannt. Bezeichne t den von A ausgehenden Halbstrahl, der orthogonal auf den Radius



MA steht und in der Halbebene ε' liegt. Der Winkel $\tau := \sphericalangle(t, (AB))$ heißt *Tangentenwinkel*. Schließlich sei $0 < \mu < 4R$, jener Winkel der vom Halbstrahl (MA) auf der Seite, die t enthält, abgetragen werden muss, um (MB) zu erhalten, siehe Bemerkung 1.4.45. Dieser Winkel μ wird *Mittelpunktswinkel* genannt.

SATZ 1.5.29 (Peripherie- und Tangentenwinkelsatz [Euklid, III§20]). *In der zuvor beschriebenen Situation gilt*

$$2\phi = \mu = 2\tau.$$

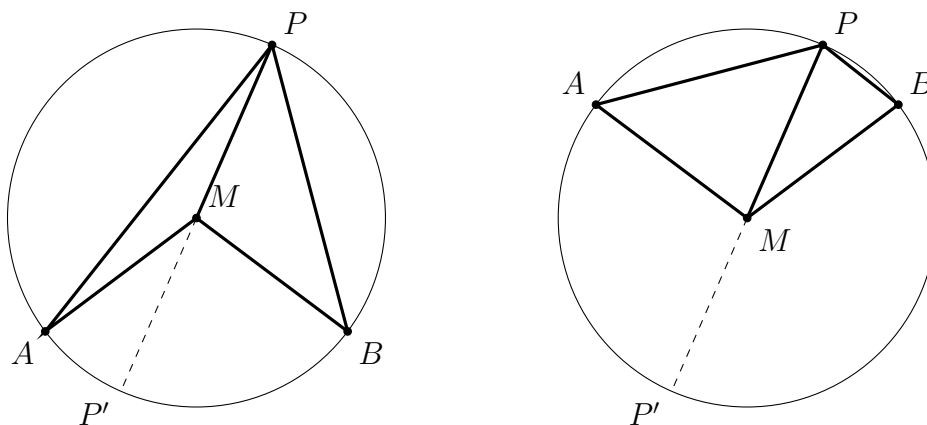
BEWEIS. Bezeichne P' den P gegenüber liegenden Punkt am Kreis, d.h. $P * M * P'$. Wir betrachten zunächst den Fall wo M im Inneren des Winkels APB liegt. Es gilt daher

$$\phi = \alpha + \beta \tag{15}$$

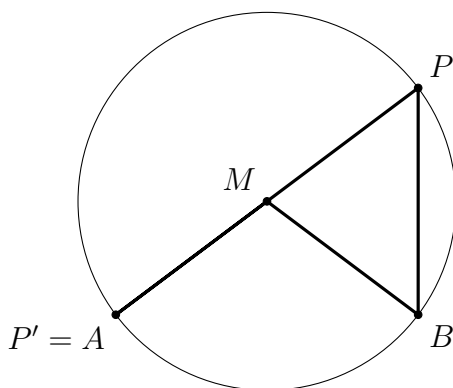
wobei $\alpha := \sphericalangle APM$ und $\beta := \sphericalangle BPM$. Da A, B, P auf einem Kreis mit Mittelpunkt M liegen gilt $|AM| = |PM| = |BM|$. Daher auch $\sphericalangle PAM = \alpha$ und $\sphericalangle PBM = \beta$, siehe Satz 1.4.4. Mit Satz 1.5.7 erhalten wir $\sphericalangle AMP' = 2\alpha$ sowie $\sphericalangle BMP' = 2\beta$. Wir schließen daraus

$$2\alpha + 2\beta = \mu.$$

Mit (15) ergibt sich nun $2\phi = \mu$.



Wir betrachten nun den Fall, dass M auf (AP) liegt. Es gilt daher $P' = A$ und $\phi = \beta$, wobei $\beta := \sphericalangle BPM = \sphericalangle PBM$. Wie zuvor folgt $\sphericalangle BMP' = 2\beta$, also $2\beta = \mu$ und daher $2\phi = \mu$. Analog lässt sich der Fall, wo M auf (BP) liegt behandeln.



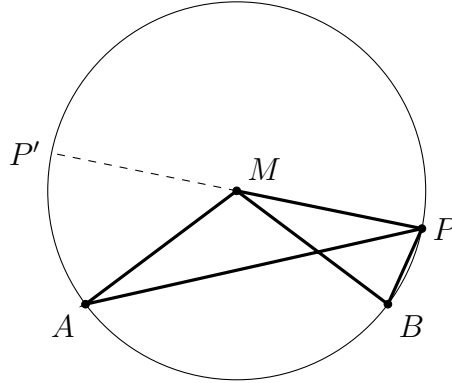
Wir betrachten nun den Fall, wo A im Inneren des Winkels $\sphericalangle MPB$ liegt. Es gilt daher

$$\phi = \beta - \alpha \tag{16}$$

wobei $\alpha = \sphericalangle APM$ und $\beta = \sphericalangle BPM$. Wie zuvor gilt $\sphericalangle PAM = \alpha$ und $\sphericalangle PBM = \beta$, siehe Satz 1.4.4, also $\sphericalangle AMP' = 2\alpha$ sowie $\sphericalangle BMP' = 2\beta$ nach Satz 1.5.7, und daher

$$2\beta - 2\alpha = \mu.$$

Mit (16) ergibt sich wieder $2\phi = \mu$. Analog lässt sich der letzte verbleibende Fall behandeln, wo B im Inneren des Winkels $\angle MPA$ liegt.



Es bleibt die Gleichung $2\tau = \mu$ zu zeigen. Wir unterscheiden drei Fälle. Liegt M auf AB , dann gilt $\tau = R$ und $\mu = 2R$, also $2\tau = \mu$. Liegt M in ε , dann gilt $\sphericalangle AMB = \mu$ und $\sphericalangle MBA = \sphericalangle MAB = R - \tau$, siehe Satz 1.4.4, also $\mu + 2(R - \tau) = 2R$ nach Satz 1.5.7, und daher $2\tau = \mu$. Liegt M in ε' , dann gilt $\sphericalangle AMB = 4R - \mu$ und $\sphericalangle MBA = \sphericalangle MAB = \tau - R$, siehe Satz 1.4.4, also $(4R - \mu) + 2(\tau - R) = 2R$ nach Satz 1.5.7, und daher $2\tau = \mu$. \square

BEMERKUNG 1.5.30. In der Situation von Satz 1.5.29 hängt der Peripheriewinkel ϕ nicht vom Punkt P ab, solange dieser auf derselben Seite von $g(A, B)$ am Kreis liegt, denn offensichtlich sind μ und τ unabhängig von P . Der Peripheriewinkel von Punkten auf der anderen Seite von $g(A, B)$ am Kreis beträgt $2R - \phi$, denn Vertauschen der Rollen von ε und ε' liefert den neuen Tangentenwinkel $2R - \tau$.

BEMERKUNG 1.5.31. Ist die Sehne AB in Satz 1.5.29 ein Durchmesser, dann ist τ ein rechter Winkel und der Peripheriewinkelsatz spezialisiert sich zum Satz von Thales 1.5.28.

SATZ 1.5.32 ([**Euklid**, III§21]). *Sei AB eine Strecke und seien C, D zwei Punkte auf derselben Seite von $g(A, B)$. Die vier Punkte A, B, C und D liegen genau dann auf einem Kreis wenn $\angle ACB \equiv \angle ADB$.*

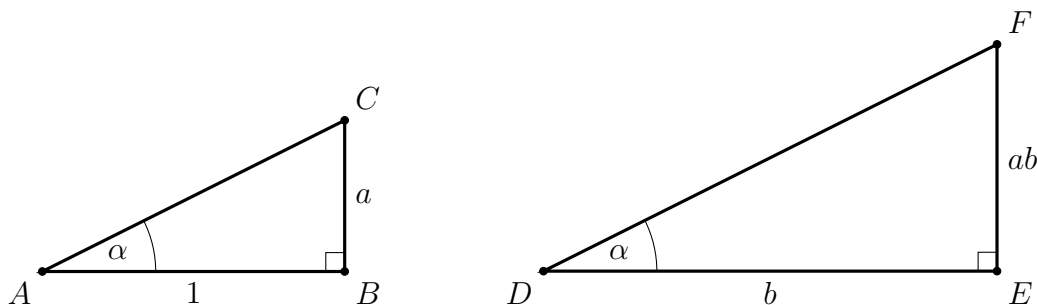
BEWEIS. Die eine Implikation folgt direkt aus dem Peripheriewinkelsatz 1.5.29: Liegen die vier Punkte auf einem Kreis, so erhalten wir daraus $\sphericalangle ACB = \tau = \sphericalangle ADB$.

Für die umgekehrte Implikation sei nun $\angle ACB \equiv \angle ADB$. Sei Γ der Kreis durch A, B, C und bezeichne M seinen Mittelpunkt, vgl. Satz 1.5.14. Weiters sei Γ' der Kreis durch A, B, D und M' sein Mittelpunkt. Nach Satz 1.5.29 stimmt der Tangentenwinkel für Γ bei A mit dem Tangentenwinkel für Γ' bei A überein. Daher haben Γ und Γ' bei A dieselbe Tangente. Nach Satz 1.5.20 liegt M' daher auf der Geraden $g(A, M)$. Betrachten wir analog die Tangentenwinkel bei B , so sehen wir, dass M' auch auf der Geraden $g(B, M)$ liegt. Da sich diese beiden Geraden nur in M schneiden, folgt $M = M'$. Wir erhalten $\Gamma = \Gamma'$, also liegen alle vier Punkte auf einem Kreis. \square

BEMERKUNG 1.5.33 ([**Euklid**, III§22]). Sei AB eine Strecke und seien C, D zwei Punkte auf verschiedenen Seiten von $g(A, B)$. In dieser Situation liegen die vier Punkte A, B, C, D genau dann auf einem Kreis, wenn $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 2R$ gilt. Dies lässt sich analog zu Satz 1.5.32 aus Satz 1.5.29 ableiten, vgl. Bemerkung 1.5.30. (siehe Übungen)

Um Streckenlängen auch multiplizieren zu können, fixieren wir eine Einheitslänge, die wir mit $1 \in \mathcal{P}$ bezeichnen. Eine Strecke AB wird als *Einheitsstrecke* bezeichnet, falls $|AB| = 1$ gilt. Die folgende Definition des Produkts von Streckenlängen ist durch den Ähnlichkeitssatz für Dreiecke mit kongruenten Winkeln motiviert, vgl. Satz 1.5.43 unten.

DEFINITION 1.5.34 (Multiplikation von Streckenlängen [**Hilbert**, §15]). Sind $a, b \in \mathcal{P}$ zwei Kongruenzklassen von Strecken, so definieren wir ihr Produkt, $ab \in \mathcal{P}$, wie folgt: Wir wählen ein Dreieck ABC mit rechtem Winkel $\sphericalangle ABC$ so, dass $|AB| = 1$ und $|BC| = a$. Weiters wählen wir ein Dreieck DEF mit rechtem Winkel $\sphericalangle DEF$ so, dass $\sphericalangle FDE \equiv \sphericalangle CAB$ und $|DE| = b$. Wir definieren nun $ab := |EF|$.



LEMMA 1.5.35. *Die Multiplikation von Kongruenzklassen ist wohldefiniert.*

BEWEIS. Ein Dreieck ABC wie in Definition 1.5.34 existiert nach Satz 1.4.36 und Axiom K2. Ein Dreieck CDE existiert nach Satz 1.4.36, Axiom K5 und Satz 1.5.5. Es bleibt zu zeigen, dass $|EF|$ nicht von der Wahl dieser Dreiecke abhängt.

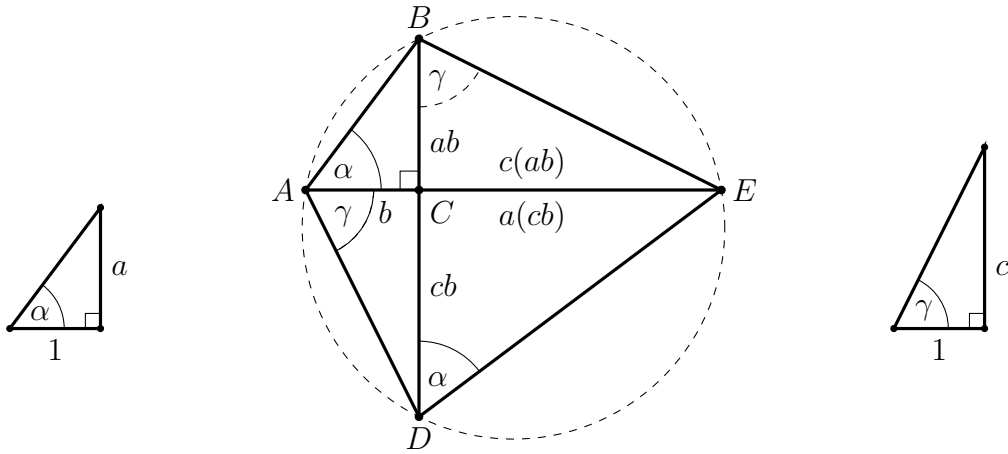
Sei dazu $A'B'C'$ ein weiteres Dreieck mit rechtem Winkel $\sphericalangle A'B'C'$ und so, dass $|A'B'| = 1$ und $|B'C'| = a$. Darüber hinaus sei $D'E'F'$ ein weiteres Dreieck mit rechtem Winkel $\sphericalangle D'E'F'$ und so, dass $\sphericalangle F'D'E' \equiv \sphericalangle C'A'B'$ und $|D'E'| = b$. Es gilt daher $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ und $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$. Aus Axiom K6 (SWS) folgt daher $\sphericalangle CAB \equiv \sphericalangle C'A'B'$. Somit $\sphericalangle FDE \equiv \sphericalangle F'D'E'$, $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle D'E'F'$ und $DE \equiv D'E'$. Aus Satz 1.4.2 (WSW) erhalten wir $EF \equiv E'F'$, d.h. $|EF| = |E'F'|$. Dies zeigt, dass das Produkt ab nicht von der Wahl der Dreiecke abhängt. \square

SATZ 1.5.36 (Rechenregeln für die Streckenmultiplikation [**Hilbert**, §15]). *Für beliebige Elemente $a, b, c \in \mathcal{P}$ gilt:*

- (a) $ab = ba$. (Kommutativität)
- (b) $(ab)c = a(bc)$. (Assoziativität)
- (c) $a \cdot 1 = a$. (Einselement)
- (d) Es existiert $a' \in \mathcal{P}$ mit $aa' = 1$. (multiplikatives Inverses)
- (e) $a(b + c) = ab + ac$. (Distributivität)

BEWEIS. Wir folgen hier der Darstellung in [Hartshorne, Proposition 19.2]. Wir beginnen mit (c): Ist $b = 1$, dann sind die Dreiecke ABC und DEF nach Satz 1.4.2 (WSW) kongruent, insbesondere $EF \equiv BC$ und daher $a \cdot 1 = |EF| = |BC| = a$.

Um (a) und (b) zu zeigen, konstruieren wir, wie in der Skizze angedeutet, ein rechtwinkeliges Dreieck mit Katheten 1 und a um den Winkel α zu erhalten. Analog konstruieren wir ein rechtwinkeliges Dreieck mit Katheten 1 und c um den Winkel γ zu erhalten. Wir betrachten nun ein Dreieck ABC mit rechtem Winkel $\angle BCA$, $|CA| = b$ und $\sphericalangle CAB = \alpha$. Nach Definition der Multiplikation gilt daher $|CB| = ab$. Wir tragen den Winkel γ von A aus auf der Seite von $g(A, C)$ ab, die B nicht enthält, und bekommen einen Punkt D so, dass $B * C * D$ und $\sphericalangle CAD = \gamma$. Nach Definition der Multiplikation gilt daher $|CD| = cb$. Schließlich tragen wir den Winkel α von D aus auf der Seite von $g(D, C)$ ab, die A nicht enthält, und bekommen einen Punkt E so, dass $A * C * E$ und $\sphericalangle CDE = \alpha$. Alle vier Winkel bei C sind rechte Winkel. Nach Definition der Multiplikation gilt daher $|CE| = a(cb)$.

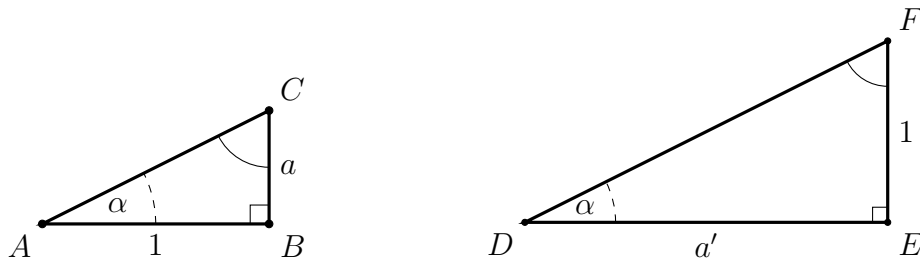


Nach Satz 1.5.32 liegen die vier Punkte A, B, D, E auf einem Kreis, denn $\angle BAE \equiv \angle BDE$. Erneutes Anwenden von Satz 1.5.32 zeigt $\angle EBD \equiv \angle EAD$, also $\sphericalangle EBC = \gamma$. Nach Definition der Multiplikation gilt daher auch $|CE| = c(ab)$. Aus den beiden Ausdrücken für $|CE|$ erhalten wir

$$c(ab) = a(cb). \quad (17)$$

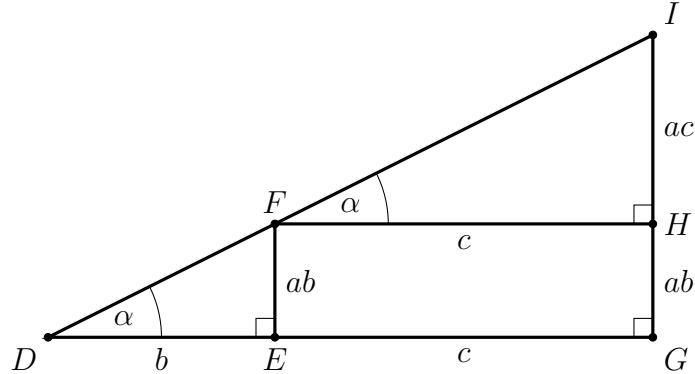
Setzen wir $b = 1$ folgt mit (c) nun $ca = ac$, also ist die Multiplikation kommutativ. Mit der Kommutativität folgt aus (17) sofort $(ab)c = a(bc)$ und damit auch die Assoziativität.

Ad (d): Nach Satz 1.4.36, Axiom K5 und Satz 1.5.5 existiert ein Dreieck DEF mit rechtem Winkel $\angle DEF$ so, dass $|EF| = 1$ und $\angle EFD \equiv \angle BCA$. Nach Bemerkung 1.5.8



gilt auch $\angle CAB \equiv \angle FDE$. Setzen wir $a' := |DE|$, so folgt $aa' = |EF| = 1$.

Ad (e): Wir wählen ein Dreieck EDF mit rechtem Winkel bei E so, dass $\sphericalangle FDE = \alpha$ und $|DE| = b$. Es gilt daher $|EF| = ab$. Weiters sei G so, dass $D * E * G$ und $|EG| = c$. Nach



Satz 1.5.5 schneidet die Normale auf $g(D, G)$ durch G die Gerade $g(D, F)$ in einem Punkt I auf der selben Seite von $g(D, G)$ wie F . Nach Axiom A4 kann I nicht auf der Strecke DF liegen, es muss daher $D * F * I$ gelten. Weiters ist $|DG| = b + c$ und daher $|GI| = a(b + c)$. Nach Axiom A4 (Pasch) schneidet die Parallele zu $g(E, G)$ durch F die Strecke GI in einem Punkt H , der zwischen G und I liegt, vgl. Satz 1.5.3. Nach Satz 1.5.4 (Stufenwinkel) ist (i) auch $\sphericalangle FHI$ ein rechter Winkel; (ii) $\sphericalangle IFH = \alpha$; und (iii) sind die Geraden $g(E, F)$ und $g(G, H)$ parallel. Insbesondere ist $EFHG$ ein Parallelogramm, also $|GH| = |EF| = ab$ sowie $|FH| = |EG| = c$ nach Satz 1.5.10. Somit gilt auch $|HI| = ac$. Da $G * H * I$ folgt nun

$$a(b + c) = |GI| = |GH| + |HI| = ab + ac.$$

Damit ist der Beweis vollständig. \square

LEMMA 1.5.37. Die Multiplikation auf \mathcal{P} lässt sich in eindeutiger Weise so zu einer Multiplikation auf \mathcal{K} ausdehnen, dass $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ ein Körper wird. Die oben fixierte Einheitslänge wird zum Einselement in \mathcal{K} .

BEWEIS. Jedes Element in \mathcal{K} lässt sich in der Form $a - b$ schreiben, wobei $a, b \in \mathcal{P}$. Ist \mathcal{K} ein Körper dann muss $(a - b) \cdot (c - d) = (ac + bd) - (ad + bc)$ gelten, wobei auch $c, d \in \mathcal{P}$. Wir sehen daraus, dass das Produkt beliebiger Elemente in \mathcal{K} durch das Produkt von Elementen in \mathcal{P} völlig bestimmt ist. Es gibt daher höchstens eine Möglichkeit, die Multiplikation auf \mathcal{P} so auf ganz \mathcal{K} auszudehnen, dass $(\mathcal{K}, +, \cdot)$ dadurch zu einem Körper wird. Dies motiviert auch folgende Definition.

Wir zeigen zunächst, dass durch $[a, b] \cdot [c, d] := [ac + bd, ad + bc]$ auf $\mathcal{K} = \mathcal{P} \times \mathcal{P} / \sim$ eine Multiplikation wohldefiniert ist, vgl. Lemma 1.3.7. Seien dazu $(a, b) \sim (a', b')$ und $(c, d) \sim (c', d')$, wobei $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathcal{P}$. Es gilt daher

$$a + b' = a' + b \quad \text{und} \quad c + d' = c' + d.$$

Mit dem Distributivgesetz in Satz 1.5.36(e) folgt:

$$\begin{aligned} ac + b'c &= a'c + bc, & a'c + a'd' &= a'c' + a'd, \\ a'd + bd &= ad + b'd, & b'c' + b'd' &= b'c + b'd'. \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen in jeder Spalte und Umsortieren der Summanden führt auf:

$$\begin{aligned}(ac + bd) + (a'd + b'c) &= (a'c + b'd) + (ad + bc), \\ (a'c + b'd) + (a'd' + b'c') &= (a'c' + b'd') + (a'd + b'c).\end{aligned}$$

Dies bedeutet:

$$\begin{aligned}[ac + bd, ad + bc] &= [a'c + b'd, a'd + b'c], \\ [a'c + b'd, a'd + b'c] &= [a'c' + b'd', a'd' + b'c'].\end{aligned}$$

Kombination der beiden Gleichungen liefert

$$[ac + bd, ad + bc] = [a'c' + b'd', a'd' + b'c'],$$

also ist die Multiplikation wohldefiniert.

Die Multiplikation auf \mathcal{K} ist kommutativ, denn mit Satz 1.5.36(a) folgt

$$[a, b] \cdot [c, d] = [ac + bd, ad + bc] = [ca + db, cb + da] = [c, d] \cdot [a, b].$$

Die Multiplikation auf \mathcal{K} ist assoziativ, denn nach Satz 1.5.36(b) und (e) stimmen

$$\begin{aligned}([a, b] \cdot [c, d]) \cdot [e, f] &= [ac + bd, ad + bc] \cdot [e, f] \\ &= [(ac + bd)e + (ad + bc)f, (ac + bd)f + (ad + bc)e]\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}[a, b] \cdot ([c, d] \cdot [e, f]) &= [a, b] \cdot [ce + df, cf + de] \\ &= [a(ce + df) + b(cf + de), a(cf + de) + b(ce + df)]\end{aligned}$$

für beliebige $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{P}$ überein.

Die Multiplikation auf \mathcal{K} ist distributiv, denn nach Satz 1.5.36(e) stimmen

$$[a, b] \cdot ([c, d] + [e, f]) = [a, b] \cdot [c + e, d + f] = [a(c + e) + b(d + f), a(d + f) + b(c + e)]$$

und

$$\begin{aligned}[a, b] \cdot [c, d] + [a, b] \cdot [e, f] &= [ac + bd, ad + bc] + [ae + bf, af + be] \\ &= [ac + bd + ae + bf, ad + bc + af + be]\end{aligned}$$

für beliebige $a, b, c, d, e, f \in \mathcal{P}$ überein.

Weiters gilt

$$\iota(a) \cdot [c, d] = [ac, ad],$$

denn $\iota(a) \cdot [c, d] = [a + b, b] \cdot [c, d] = [(a + b)c + bd, (a + b)d + bc] = [ac + (bc + bd), ad + (bc + bd)] = [ac, ad]$ nach Satz 1.5.36(e). Mit Satz 1.5.36(c) folgt daraus, dass $1 := \iota(1)$ neutrales Element der Multiplikation auf \mathcal{K} ist. Wir erhalten daraus aber auch

$$\iota(a) \cdot \iota(c) = \iota(a) \cdot [c + d, d] = [a(c + d), ad] = [ac + ad, ad] = \iota(ac). \quad (18)$$

Dies zeigt, dass die eben definierte Multiplikation auf \mathcal{P} mit der ursprünglichen Multiplikation übereinstimmt. Wir sagen daher, die Multiplikation wurde auf \mathcal{K} ausgedehnt.

Nach Satz 1.5.36(d) existiert $a' \in \mathcal{P}$ mit $aa' = 1$. Mit (18) folgt $\iota(a)\iota(a') = \iota(aa') = \iota(1) = 1$, also besitzen alle Elemente in $\iota(\mathcal{P})$ multiplikative Inverse. Mit der Distributivität erhalten wir daraus auch $(-\iota(a)) \cdot (-\iota(a')) = \iota(a) \cdot \iota(a') = 1$, also haben auch alle Elemente in $-\iota(\mathcal{P})$ multiplikative Inverse. Zusammen mit Lemma 1.3.7(e) folgt nun, dass alle Elemente in $\mathcal{K} \setminus \{0\}$ ein multiplikatives Inverses besitzen. Somit ist $(K, +, \cdot)$ ein Körper, siehe Lemma 1.3.7(c). \square

KOROLLAR 1.5.38. $(\mathcal{K}, +, \cdot, <)$ ist ein angeordneter Körper, d.h. die Ordnungsrelation ist eine mit Addition und Multiplikation verträgliche Totalordnung. Für $a, b, c \in \mathcal{K}$ gilt daher:

- (a) Aus $a < b$ folgt $a + c < b + c$.
 (b) Aus $0 < a < b$ und $0 < c$ folgt $0 < ac < bc$.

BEWEIS. Nach Korollar 1.3.10 ist die Ordnungsrelation auf \mathcal{K} eine Totalordnung, die mit der Addition verträglich ist. Nach (18) ist die Menge der positiven Elemente in \mathcal{K} abgeschlossen unter Multiplikation, vgl. Korollar 1.3.10(d). Sind nun $0 < a < b$ und $0 < c$, dann gilt $0 < b - a$, also $0 < (b - a)c = bc - ac$ und daher $ac < bc$. \square

BEMERKUNG 1.5.39. Die Multiplikation in \mathcal{K} ist mit der Ordnungsrelation \leq in folgendem Sinn verträglich: Sind $a, b, c \in \mathcal{K}$, $0 \leq a \leq b$ und $0 \leq c$, dann gilt auch $0 \leq ac \leq bc$. Dies folgt unmittelbar aus Korollar 1.5.38, vgl. Bemerkung 1.3.12.

DEFINITION 1.5.40 (Ähnliche Dreiecke). Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ werden ähnlich genannt, wenn ihre Winkel entsprechend kongruent sind, d.h.

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C', \quad \angle BCA \equiv \angle B'C'A', \quad \angle CAB \equiv \angle C'A'B',$$

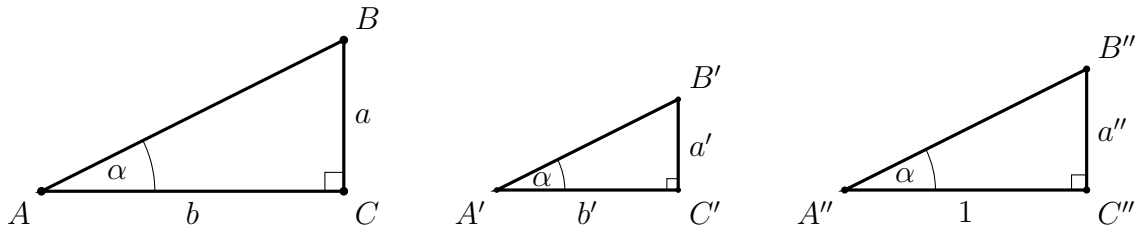
und ihre Seitenlängen entsprechend proportional sind, d.h.

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}.$$

BEMERKUNG 1.5.41. Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation für Dreiecke.

LEMMA 1.5.42. Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke mit rechten Winkeln $\angle BCA$ und $\angle B'C'A'$, für die $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ erfüllt ist, dann gilt auch $\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|AC|}{|A'C'|}$.

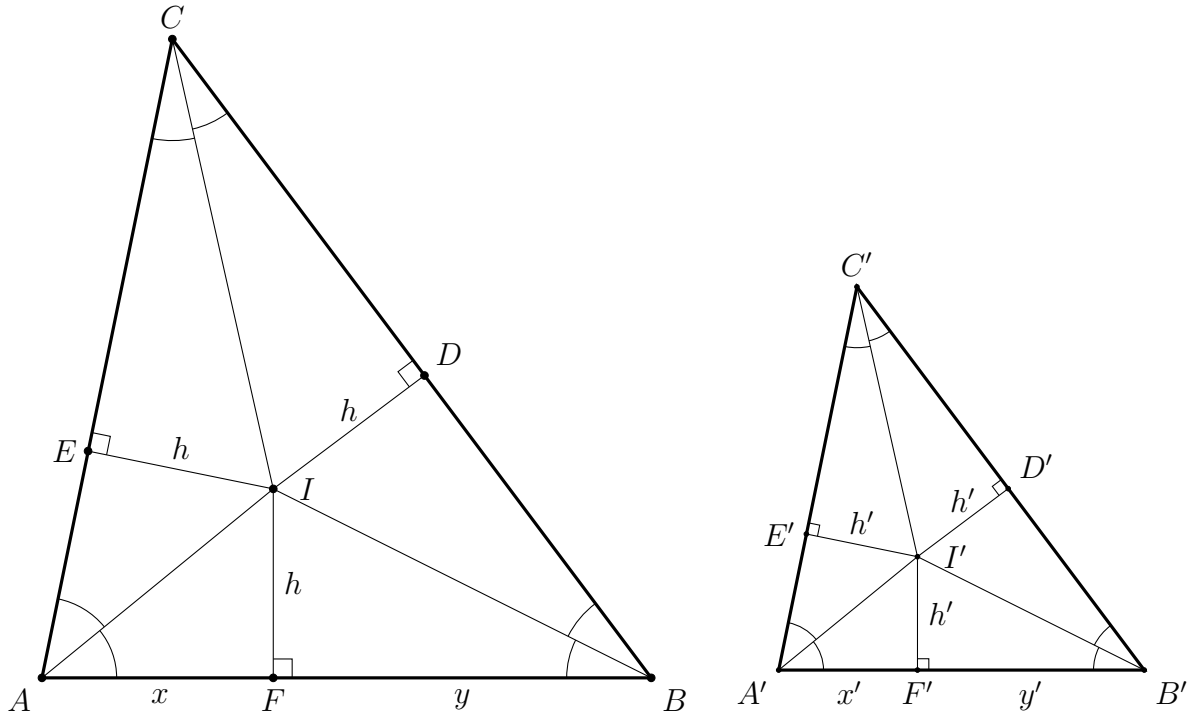
BEWEIS. Wir betrachten ein drittes Dreieck $A''B''C''$ mit rechtem Winkel $\angle B''C''A''$, sodass $\angle C''A''B'' \equiv \angle C'A'B' \equiv \angle CAB$ und $|C''A''| = 1$. Bezeichnen wir die Seitenlängen



wie in der Skizze angedeutet so folgt aus der Definition der Multiplikation sofort $a = a''b$ sowie $a' = a''b'$. Mit den Rechenregeln in Satz 1.5.36 folgt durch Elimination von a'' nun $a/a' = b/b'$ und damit das Lemma. \square

SATZ 1.5.43 (W:W:W-Satz, [Euklid, VI§4]). Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, für die zwei der drei Kongruenzen $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ und $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ gelten, dann sind die Dreiecke ähnlich, d.h. auch die dritte Winkelkongruenz ist erfüllt und es gilt $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$.

BEWEIS. Wir folgen dem Beweis in [Hilbert, §16], siehe auch [Hartshorne, Proposition 20.1]. Da sich die Winkel im Dreieck auf zwei Rechte aufsummieren, muss auch die dritte Winkelkongruenz gelten, siehe Bemerkung 1.5.8. Wir verbinden den Inkreismittelpunkt I



des Dreiecks ABC mit den Eckpunkten, fällen die Lote durch I auf die Trägergeraden der drei Seiten, und bezeichnen die Fußpunkte mit D, E, F wie in der Skizze angedeutet. Nach Satz 1.5.26 liegen die Fußpunkte auf den Seiten und es gilt $h := |ID| = |IE| = |IF|$. Analog verfahren wir mit dem Dreieck $A'B'C'$ und erhalten $h' := |I'D'| = |I'E'| = |I'F'|$.

Die Winkelsymmetrale $(AI >$ halbiert den Winkel $\angle CAB$ und ebenso halbiert $(A'I' >$ den Winkel $\angle C'A'B'$. Da $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ gilt daher auch $\angle IAF \equiv \angle I'A'F'$. Aus Lemma 1.5.42 erhalten wir $x/x' = h/h'$, wobei $x := |AF|$ und $x' := |A'F'|$. Analog folgt $y/y' = h/h'$, wobei $y := |BF|$ und $y' := |B'F'|$. Mit den Rechenregeln in Satz 1.5.36 folgt

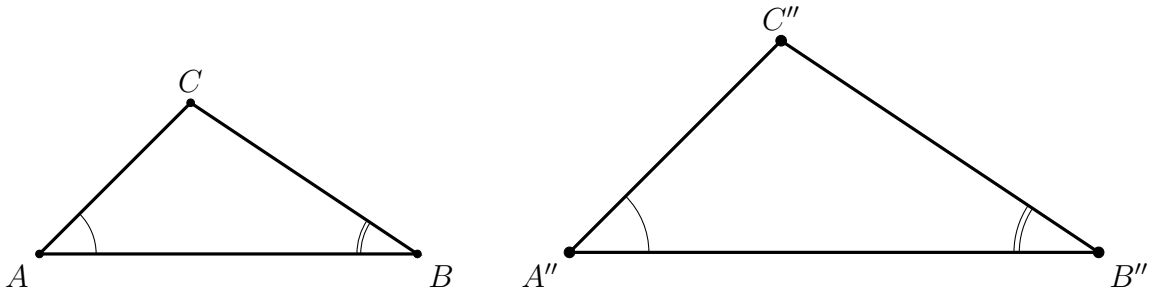
$$|AB| = x + y = x'h/h' + y'h/h' = (x' + y')h/h' = |A'B'|h/h',$$

also $\frac{|AB|}{|A'B'|} = h/h'$. Analog lässt sich $\frac{|BC|}{|B'C'|} = h/h'$ und $\frac{|CA|}{|C'A'|} = h/h'$ zeigen. \square

SATZ 1.5.44 (S:W:S-Satz, [Euklid, VI§6]). *Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke, für die $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ und $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$ gelten, dann sind die Dreiecke ähnlich, d.h. es sind auch $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ und $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$ erfüllt.*

BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Nach Satz 1.5.5 existiert ein Dreieck $A''B''C''$ mit $A''B'' \equiv A'B'$, $\angle C''A''B'' \equiv \angle CAB$ und $\angle C''B''A'' \equiv \angle CBA$. Nach Satz 1.5.43 sind die Dreiecke ABC und $A''B''C''$ ähnlich. Insbesondere gilt $\frac{|CA|}{|C''A''|} = \frac{|AB|}{|A''B''|}$. Zusammen mit der Voraussetzung $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$ und $|A''B''| = |A'B'|$ folgt $|C''A''| = |C'A'|$, also $C''A'' \equiv C'A'$. Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke $A'B'C'$ und $A''B''C''$ daher kongruent. Somit ist das Dreieck ABC auch dem Dreieck $A'B'C'$ ähnlich. \square

SATZ 1.5.45 (S:S:S-Satz, [Euklid, VI§5]). *Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke für die $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$ gilt, dann sind die Dreiecke ähnlich, d.h. es gilt auch $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ und $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$.*



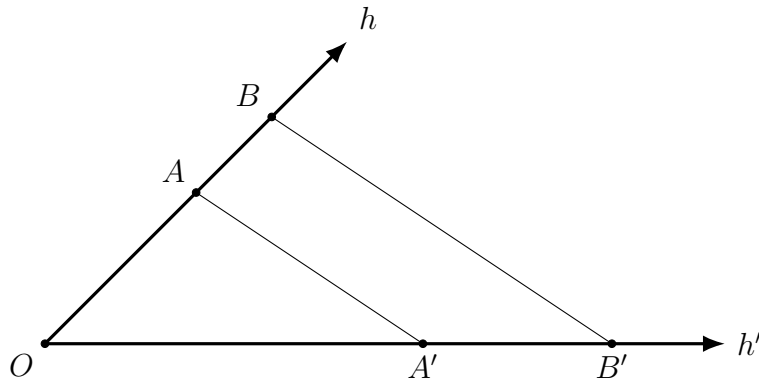
BEWEIS. Wie im Beweis von Satz 1.5.44 lässt sich dies mit Satz 1.5.43 (W:W:W) auf Satz 1.4.18 (SSS) zurückführen. (siehe Übungen) \square

SATZ 1.5.46 (S:S:W-Satz, [Euklid, VI§7]). Sind ABC und $A'B'C'$ zwei Dreiecke für die $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ und $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$ gelten, und ist darüber hinaus auch $|CA| \geq |AB|$, dann sind die Dreiecke ähnlich, d.h. es gilt auch $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$, $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ und $\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|}$.

BEWEIS. Wie im Beweis von Satz 1.5.44 lässt sich dies mit Satz 1.5.43 (W:W:W) auf Satz 1.4.28 (SSW) zurückführen. (siehe Übungen) \square

SATZ 1.5.47 (Strahlensatz [Euklid, VI§2]). Sei $\angle(h, h')$ ein Winkel mit Scheitel O . Weiters seien $A, B \in h$ und $A', B' \in h'$. In dieser Situation sind die Geraden $g(A, A')$ und $g(B, B')$ genau dann parallel, wenn $\frac{|AO|}{|BO|} = \frac{|A'O|}{|B'O|}$. In diesem Fall gilt darüberhinaus

$$\frac{|AO|}{|BO|} = \frac{|AA'|}{|BB'|} = \frac{|A'O|}{|B'O|}. \quad (19)$$



BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, dass $g(A, A')$ und $g(B, B')$ parallel sind. Nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 gilt daher $\sphericalangle OAA' = \sphericalangle OBB'$, denn A' und B' liegen auf derselben Seite von $g(A, B)$. Nach Satz 1.5.43 (W:W:W) sind die Dreiecke OAA' und OBB' daher ähnlich, also gilt (19).

Sei nun umgekehrt $\frac{|AO|}{|BO|} = \frac{|A'O|}{|B'O|}$. Nach Satz 1.5.44 (S:W:S) sind die Dreiecke OAA' und OBB' ähnlich. Insbesondere ist $\sphericalangle OAA' \equiv \sphericalangle OBB'$. Da A' und B' auf derselben Seite von $g(A, B)$ liegen, folgt aus dem Stufenwinkelsatz 1.5.4, dass die Geraden $g(A, A')$ und $g(B, B')$ parallel sind. \square

BEMERKUNG 1.5.48. In der Situation von Satz 1.5.47 lässt sich aus $\frac{|AO|}{|BO|} = \frac{|AA'|}{|BB'|}$ nicht auf die Parallelität von $g(A, A')$ und $g(B, B')$ schließen.

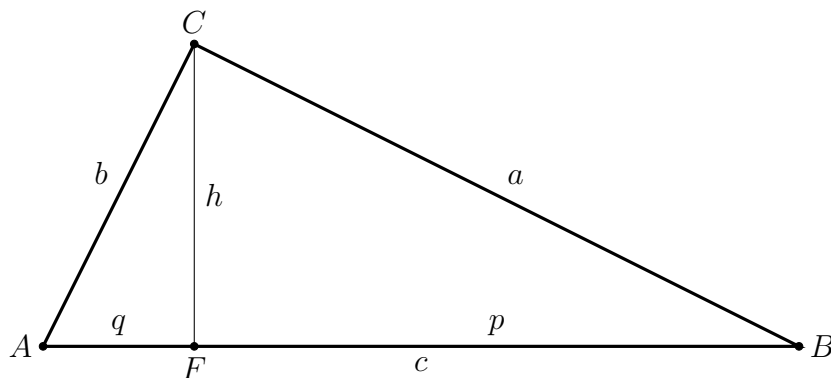
SATZ 1.5.49 (Satzgruppe des Pythagoras [Euklid, I§47, II§14, VI§8]). Sei ABC ein Dreieck mit rechtem Winkel $\angle BCA$. Dann liegt der Fußpunkt F des Lots durch C auf $g(A, B)$ im Inneren der Seite AB . Bezeichnen $a := |BC|$, $b := |CA|$, $c := |AB|$, $h := |FC|$, $p := |BF|$ und $q := |AF|$, dann gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

$$a^2 = cp \quad (\text{Kathetensatz})$$

$$b^2 = cq \quad (\text{Kathetensatz})$$

$$h^2 = pq \quad (\text{Höhensatz})$$



BEWEIS. Da die Winkel $\angle CAB$ und $\angle ABC$ beide spitz sind, siehe Bemerkung 1.4.34, liegt F im Inneren der Strecke AB . Insbesondere gilt $c = p + q$. Da $\angle ABC = \angle CBF$ und da $\angle BCA = R = \angle BFC$ sind die Dreiecke ABC und CBF nach Satz 1.5.43 (W:W:W) ähnlich. Es gilt daher $c/a = a/p$, also $a^2 = cp$. Da $\angle CAB = \angle FAC$ und da $\angle BCA = R = \angle CFA$ sind die Dreiecke ABC und ACF nach Satz 1.5.43 (W:W:W) ähnlich. Es gilt daher $c/b = b/q$, also $b^2 = cq$. Nach Bemerkung 1.5.41 sind auch die Dreiecke CBF und ACF ähnlich, also gilt $p/h = h/q$ und daher $h^2 = pq$. Addition der beiden Kathetensätze liefert $a^2 + b^2 = cp + cq = c(p + q) = c^2$. \square

SATZ 1.5.50 (Umkehrung des pythagoräischen Lehrsatzes [Euklid, I§48]). Ist ABC ein Dreieck und gilt $|BC|^2 + |CA|^2 = |AB|^2$, dann muss $\angle BCA$ ein rechter Winkel sein.

BEWEIS. Wir folgen Euklids Beweis. Betrachte ein Dreieck $A'B'C'$ mit rechtem Winkel $B'C'A'$, sodass $|C'A'| = |CA|$ und $|B'C'| = |BC|$. Nach Satz 1.5.49 gilt

$$|A'B'|^2 = |B'C'|^2 + |C'A'|^2 = |BC|^2 + |CA|^2 = |AB|^2$$

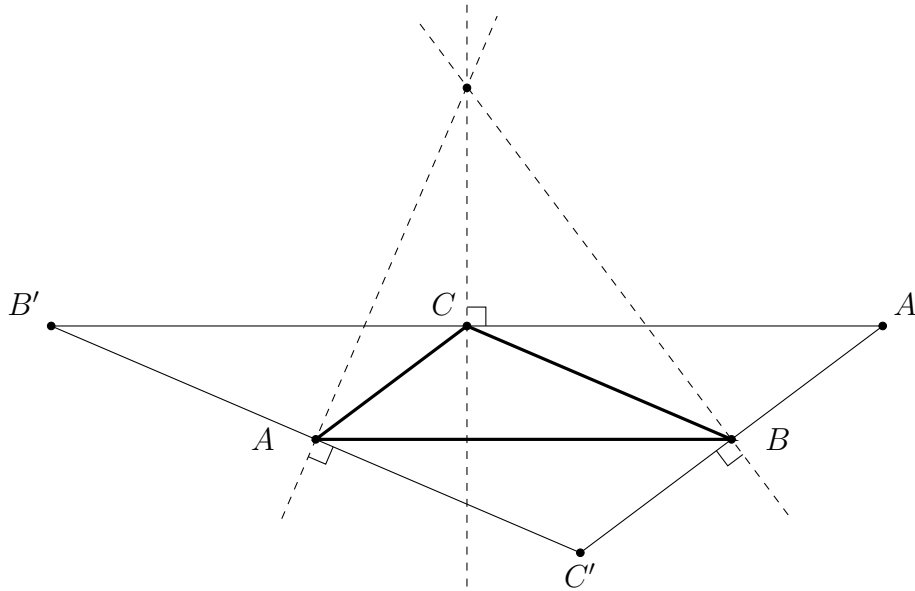
und daher auch $|A'B'| = |AB|$. Nach Satz 1.4.18 (SSS) sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ daher kongruent. Insbesondere ist $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$ ein rechter Winkel. \square

DEFINITION 1.5.51 (Höhen eines Dreiecks). Sei ABC ein Dreieck. Unter der Höhe durch A verstehen wir das Lot durch A auf die Gerade $g(B, C)$. Unter der Höhe durch B verstehen wir das Lot durch B auf die Gerade $g(C, A)$. Unter der Höhe durch C verstehen wir das Lot durch C auf die Gerade $g(A, B)$.

BEMERKUNG 1.5.52. Sei ABC ein Dreieck. Die Höhe durch C trifft die Seite (AB) genau dann, wenn die Winkel $\angle ABC$ und $\angle CAB$ beide spitz sind.

SATZ 1.5.53 (Höhenschnittpunkt). *Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

BEWEIS. Wir folgen [Hartshorne, Proposition 5.6]. Sei ABC ein Dreieck. Wir betrachten die drei Parallelen zu den drei Dreiecksseiten durch die gegenüberliegenden Eckpunkte und bezeichnen die drei Schnittpunkte mit A' , B' und C' wie in der Skizze angedeutet. Nach



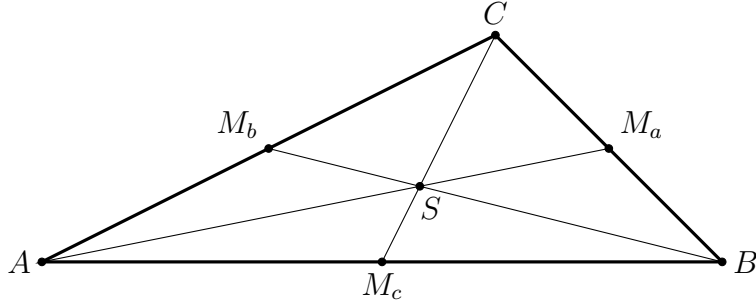
Konstruktion ist daher $ABCB'$ ein Parallelogramm, also $B'C \equiv AB$ nach Satz 1.5.10. Ebenso ist $ABA'C$ ein Parallelogramm und daher auch $A'C \equiv AB$. Somit ist $A'C \equiv B'C$, und C daher der Mittelpunkt der Strecke $A'B'$. Nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 stimmt daher die Höhe durch C des Dreiecks ABC mit der Streckensymmetrale der Seite $A'B'$ des Dreiecks $A'B'C'$ überein. Analog stimmen die anderen beiden Höhen von ABC mit den anderen beiden Streckensymmetralen von $A'B'C'$ überein. Nach Satz 1.5.14 schneiden sich die drei Streckensymmetralen von $A'B'C'$ in einem Punkt. Also schneiden sich die drei Höhen des Dreiecks ABC im selben Punkt. \square

DEFINITION 1.5.54 (Höhenschnittpunkt). Der Schnittpunkt der drei Höhen eines Dreiecks wird *Höhenschnittpunkt* genannt.

DEFINITION 1.5.55 (Schwerlinien). Sei ABC ein Dreieck. Unter der *Schwerlinie* durch A verstehen wir die Gerade durch A und den Mittelpunkt der Seite BC . Unter der Schwerlinie durch B verstehen wir die Gerade durch B und den Mittelpunkt der Seite AC . Unter der Schwerlinie durch C verstehen wir die Gerade durch C und den Mittelpunkt der Seite AB .

SATZ 1.5.56 (Schwerpunkt). *Die drei Schwerlinien eines Dreiecks ABC schneiden sich in einem Punkt S im Inneren des Dreiecks. Bezeichnen M_a , M_b , M_c die Mittelpunkte der Seiten BC , CA , AB , dann gilt*

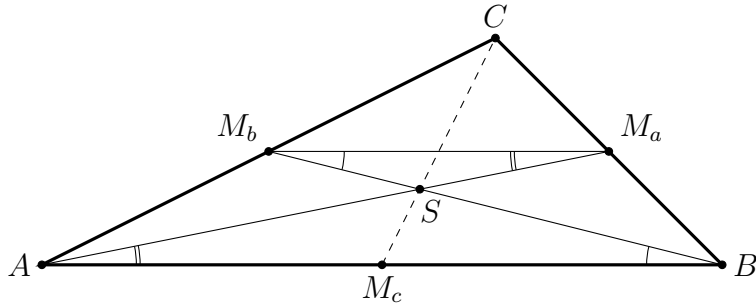
$$\frac{|AS|}{|M_aS|} = \frac{|BS|}{|M_bS|} = \frac{|CS|}{|M_cS|} = 2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{|M_aA|}{|M_aS|} = \frac{|M_bB|}{|M_bS|} = \frac{|M_cC|}{|M_cS|} = 3.$$



BEWEIS. Wir folgen [Hartshorne, Proposition 5.4]. Nach dem Strahlensatz 1.5.47 sind $g(A, B)$ und $g(M_a, M_b)$ parallel und es gilt

$$\frac{|AB|}{|M_b M_a|} = \frac{|CA|}{|C M_b|} = \frac{|CB|}{|C M_a|} = 2, \quad (20)$$

denn M_a und M_b sind die Streckenmittelpunkte. Beachte, dass A und M_a auf verschiedenen



Seiten von $g(B, M_b)$ liegen, denn A und C liegen auf verschiedenen Seiten, und C und M_a liegen auf der selben Seite dieser Geraden. Ebenso liegen B und M_b auf verschiedenen Seiten der Gerade $g(A, M_a)$. Insbesondere schneiden sich die beiden Strecken $(B M_b)$ und $(A M_a)$ in einem Punkt S . Dieser Punkt S ist der Schnittpunkt der beiden Schwerlinien durch A und B . Nach Bemerkung 1.2.39 liegt S im Inneren des Dreiecks.

Da A und M_a auf verschiedenen Seiten der Geraden $g(B, M_b)$ liegen, bilden $\angle A B M_b$ und $\angle M_a M_b B$ Wechselwinkel, also $\sphericalangle A B M_b = \sphericalangle M_a M_b B$ nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4. Analog erhalten wir $\sphericalangle B A M_a = \sphericalangle M_b M_a A$. Nach Satz 1.5.43 (W:W:W) sind die Dreiecke $A B S$ und $M_a M_b S$ ähnlich. Insbesondere gilt

$$\frac{|B S|}{|M_b S|} = \frac{|A S|}{|M_a S|} = \frac{|A B|}{|M_a M_b|} = 2,$$

wobei die letzte Gleichheit aus (20) folgt. Da $|M_b B| = |M_b S| + |B S|$ und $|M_a A| = |M_a S| + |A S|$ erhalten wir daraus

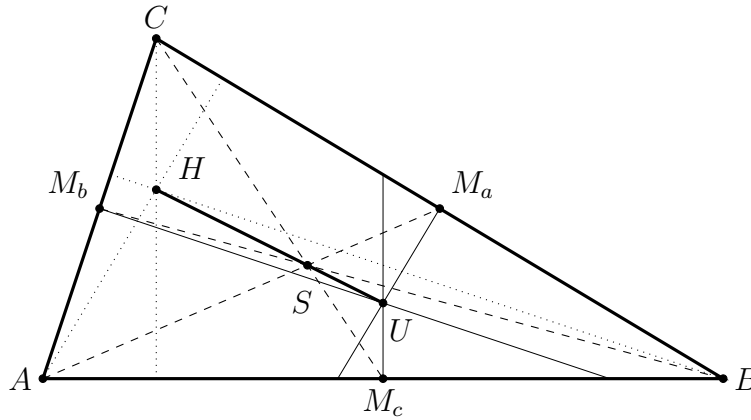
$$\frac{|M_b B|}{|M_b S|} = \frac{|M_a A|}{|M_a S|} = 3.$$

Dasselbe Argument zeigt, dass sich auch die Schwerlinien durch A und C in einem Punkt S' auf der Strecke $(A M_a)$ treffen, für den ebenfalls $\frac{|C S'|}{|M_c S'|} = 2$ und $\frac{|M_c C|}{|M_c S'|} = \frac{|M_a A|}{|M_a S'|} = 3$ gilt. Insbesondere ist $|M_a S| = \frac{1}{3}|M_a A| = |M_a S'|$ und mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K2 folgt $S = S'$. Also schneiden sich die drei Schwerlinien im Punkt S . \square

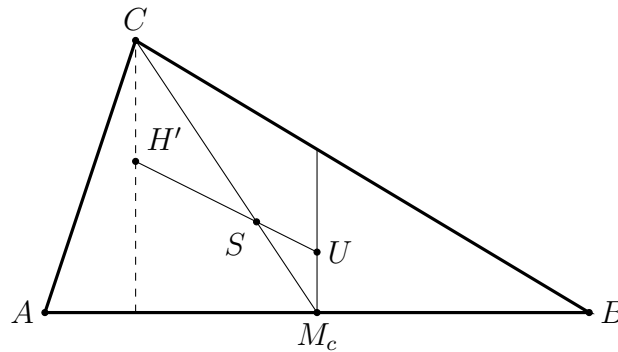
DEFINITION 1.5.57 (Schwerpunkt). Der Schnittpunkt der drei Schwerlinien eines Dreiecks wird als *Schwerpunkt* bezeichnet.

SATZ 1.5.58 (Euler Gerade). Der Umkreismittelpunkt U , der Schwerpunkt S und der Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks liegen stets auf einer Gerade. Genauer ist $S \in [UH]$, und es gilt

$$|HS| = 2|US| \quad \text{bzw.} \quad |UH| = 3|US|.$$



BEWEIS. Wir folgen im Wesentlichen [Hartshorne, Proposition 5.7]. Stimmen S und U überein, dann müssen Schwerlinien, Streckensymmetralen und Höhen zusammenfallen, denn S liegt im Inneren des Dreiecks, siehe Satz 1.5.56. In diesem Fall gilt daher $H = S = U$ und die Aussage des Satzes ist trivial.



O.B.d.A. sei daher $S \neq U$. Bezeichne H' den Punkt mit

$$U * S * H' \quad \text{und} \quad |H'S| = 2|US|. \quad (21)$$

Wir wollen nun zeigen, dass H' auf der Höhe durch C liegt. Nach Satz 1.5.56 gilt

$$M_c * S * C \quad \text{und} \quad |CS| = 2|M_cS|. \quad (22)$$

Stimmen U und M_c überein, dann gilt $H' = C$ und dieser Punkt liegt offensichtlich auf der Höhe durch C . O.B.d.A. sei daher $U \neq M_c$. Liegt U auf der Schwerlinie durch C , dann fällt diese Schwerlinie mit der Höhe durch C zusammen und enthält den Punkt H' , also liegt auch in diesem Fall H' auf der Höhe durch C .

O.B.d.A. dürfen wir daher annehmen, dass U nicht auf der Schwerlinie durch C liegt. Dann liegt auch H' nicht auf dieser Schwerlinie. Daher bilden CSH' und M_cSU zwei Dreiecke. Da S zwischen M_c und C liegt, und S auch zwischen U und H' liegt, bilden $\angle CSH'$ und $\angle M_cSU$ Scheitelwinkel, also $\angle CSH' \equiv \angle M_cSU$ nach Satz 1.4.8. Aus (21) und (22) erhalten wir $\frac{|CS|}{|M_cS|} = \frac{|H'S|}{|US|}$. Nach Satz 1.5.44 (S:W:S) sind die Dreiecke CSH' und M_cSU daher ähnlich. Insbesondere gilt $\angle H'CS \equiv \angle UM_cS$ und daher auch $\angle H'CM_c \equiv \angle UM_cC$. Da H' und U auf verschiedenen Seiten von $g(C, M_c)$ liegen, bilden $\angle H'CM_c$ und $\angle UM_cC$ Wechselwinkel. Nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 sind die Geraden $g(H', C)$ und $g(U, M_c)$ daher parallel. Erneutes Anwenden des Stufenwinkelsatzes zeigt, dass auch $g(H', C)$ normal auf die Seite AB steht und daher mit der Höhe durch C übereinstimmt. Insbesondere liegt H' auf der Höhe durch C .

Analog lässt sich zeigen, dass H' auch auf jeder der beiden anderen Höhen liegt. Also stimmt H' mit dem Höhenschnittpunkt überein. Aus (21) erhalten wir daher $|HS| = 2|US|$. Da $|UH| = |US| + |HS|$ folgt daraus sofort $|UH| = 3|US|$. \square

BEMERKUNG 1.5.59. Dies liefert einen neuen Beweis dafür, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.

BEMERKUNG 1.5.60. In einem gleichseitigen Dreieck fallen Schwerpunkt S , Umkreismittelpunkt U und Höhenschnittpunkt H zusammen. Ist das Dreieck ABC nicht gleichseitig, dann sind dies drei verschiedene Punkte. Ist etwa $|AC| \neq |BC|$, dann kann die Höhe durch C nicht durch den Mittelpunkt von AB laufen, siehe Satz 1.4.3. Da die Höhe durch A und die Streckensymmetrale zu AB parallel sind, können sie daher keinen Schnittpunkt haben. Insbesondere folgt $H \neq U$. Mit Satz 1.5.58 folgt dann auch $S \neq U$ und $S \neq H$.

DEFINITION 1.5.61 (Euler Gerade). Unter der *Euler Geraden* eines nicht gleichseitigen Dreiecks verstehen wir die eindeutige Gerade, die den Höhenschnittpunkt, den Schwerpunkt und den Umkreismittelpunkt enthält.

1.6. Vollständigkeit. Sei P ein Punkt auf einer Geraden g , bezeichne K eine, von P ausgehende Halbgerade in g und bezeichne $L = g \setminus K$ die komplementäre Halbgerade in g . Dabei soll eine der beiden Halbgeraden den Ausgangspunkt P enthalten, also abgeschlossen sein, und die andere den Ausgangspunkt P nicht enthalten, also offen sein. Dies liefert eine Zerlegung der Geraden in zwei nicht leere, disjunkte Teilmengen,

$$g = K \cup L, \quad K \cap L = \emptyset, \quad K \neq \emptyset, \quad L \neq \emptyset,$$

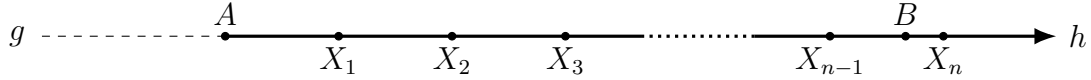
die folgende Eigenschaft besitzt: Für jeden Punkt $A \in K$ und jeden Punkt $B \in L$ liegt die Halbgerade $\langle A \rangle B$ zur Gänze in K und die Halbgerade $A \langle B \rangle$ liegt zur Gänze in L . Die nachfolgende Vollständigkeitsvoraussetzung fordert, dass jede Zerlegung einer Geraden mit dieser Eigenschaft schon von dieser Form ist. In diesem Sinn sollen Geraden keine Lücken aufweisen, d.h. vollständig sein.

Als letztes Postulat im Axiomensystem der Euklidischen Geometrie fordern wir nun noch die Gültigkeit des *Dedekind'schen Axioms* [Hartshorne, §12]:

- D.** Sei g eine Gerade und $g = K \cup L$, $K \cap L = \emptyset$, $K \neq \emptyset$, $L \neq \emptyset$ eine Zerlegung in zwei nicht leere, disjunkte Teilmengen, die folgende Eigenschaft besitzt: Für jeden Punkt $A \in K$ und jeden Punkt $B \in L$ liegt die Halbgerade $\langle A \rangle B$ zur Gänze in K und die Halbgerade $A \langle B \rangle$ liegt zur Gänze in L . Dann existiert ein Punkt $P \in g$, sodass die eine Seite von P in g zur Gänze in K , und die andere Seite zur Gänze in L liegt.

BEMERKUNG 1.6.1. In der Situation von Axiom D sind K und L zwei komplementäre, von P ausgehende Halbgeraden in g . Eine der beiden enthält den Punkt P und ist daher abgeschlossen, die andere enthält den Punkt P nicht und ist offen. Beachte auch, dass P eindeutig bestimmt ist, d.h. es kann kein weiterer Punkt mit dieser Eigenschaft existieren.

SATZ 1.6.2 (Archimedische Eigenschaft [Hilbert, §8]). *Sind AB und CD irgendwelche Strecken, so gibt es eine Anzahl n derart, dass das n -malige Hintereinander-Abtragen der Strecke CD von A aus auf den durch B gehenden Halbstrahl über den Punkt B hinausführt.*

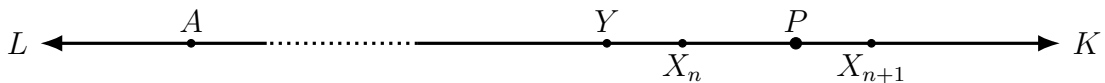


BEWEIS. Um die Notation zu vereinfachen setzen wir $g := g(A, B)$ und $h := (AB>$. Bezeichne X_n den Punkt, der durch n -maliges Abtragen der Strecke CD von A aus auf h entsteht. Nach Konstruktion gilt daher $X_1 \in h$ und $AX_1 \equiv CD$ sowie $A * X_n * X_{n+1}$ und $X_n X_{n+1} \equiv CD$ für alle n . Es folgt $X_n \in h$ für alle n . Wir betrachten nun die Mengen

$$K := \bigcap_{n=1}^{\infty} A[X_n> \quad \text{und} \quad L := g \setminus K = \bigcup_{n=1}^{\infty} <AX_n).$$

Es genügt $K = \emptyset$ zu zeigen, denn dann folgt $B \in L$ und daher $B \in <AX_n)$ für geeignetes n .

Wir nehmen indirekt $K \neq \emptyset$ an. Da $A \in L$ haben wir auch $L \neq \emptyset$. Nach Konstruktion gilt weiters $g = K \cup L$ und $K \cap L = \emptyset$. Wir wollen nun überprüfen, dass diese Zerlegung die Eigenschaft in Axiom D besitzt. Sei dazu $E \in K$ und $F \in L$. Es gilt daher $E \in A[X_n>$, für alle n , und es existiert m mit $F \in <AX_m)$. Somit $F(E> \subseteq A[X_n>$ für jedes n und daher $F(E> \subseteq K$. Weiters $<F)E \subseteq <AX_m) \subseteq L$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom D existiert daher ein Punkt P auf g , sodass die eine Seite von P in g zur Gänze in L , und die andere Seite zur Gänze in K liegt. Insbesondere folgt $P \notin <AX_n)$ für jedes n und daher $P \notin L$. Somit $L = <AP)$ und $K = A[P>$.



Sei $Y \in L$ mit $|YP| = |CD|$. Daher existiert n mit $Y \in <AX_n)$. Beachte, dass P und X_{n+1} beide in der Halbgeraden $Y[X_n>$ liegen müssen. Somit $|X_n P| < |YP| = |CD| = |X_n X_{n+1}|$, also $Y * P * X_{n+1}$ und daher $P \in <AX_{n+1})$, ein Widerspruch. \square

LEMMA 1.6.3 (Quadratwurzeln). *Zu jedem $a \in \mathcal{K}$ mit $a \geq 0$ existiert ein eindeutiges $b \in \mathcal{K}$ mit $b \geq 0$ und $b^2 = a$.*

BEWEIS. Sei g eine Gerade, $O \in g$ und bezeichnen h und h' die beiden Seite von O in g . Wir betrachten die Mengen

$$K := \{X \in h : |OX|^2 > a\} \quad \text{und} \\ L := g \setminus K = h' \cup \{O\} \cup \{X \in h : |OX|^2 \leq a\}.$$

Beachte $O \in L$, also $L \neq \emptyset$. Sei $s := \max\{1, a\}$ und $S \in h$ mit $|OS| = s$. Daher $|OS|^2 = s \cdot s \geq s \cdot 1 = s \geq a$, also $S \in K$ und somit $K \neq \emptyset$. Nach Konstruktion gilt $g = K \cup L$ und

$K \cap L = \emptyset$. Wir wollen nun überprüfen, dass diese Zerlegung von g die Eigenschaft in Axiom D besitzt. Sei dazu $E \in K$ und $F \in L$. Liegt F in h , dann muss $|OF| < |OE|$ gelten, denn andernfalls ist $|OF| \geq |OE|$ und wir erhalten den Widerspruch $a \geq |OF|^2 \geq |OE|^2 > a$. Somit $F(E) = O(E)$. Jedes $X \in F(E)$ liegt daher in h , es gilt $|OX| > |OE|$, also $|OX|^2 > |OE|^2 > a$ und damit $X \in K$. Dies zeigt $F(E) \subseteq K$. Um auch $(F)E \subseteq L$ einzusehen, sei nun $X \in (F)E$. Im Fall $X \in g \setminus h$ gilt offenbar $X \in L$. O.B.d.A. sei daher $X \in h$. Dann gilt $F \in h$ und $|OX| < |OF|$, also $|OX|^2 < |OF|^2 \leq a$ und daher $X \in L$.

Nach dem Vollständigkeitsaxiom D existiert daher ein Punkt B auf g , sodass die eine Seite von B in g zur Gänze in L , und die andere Seite zur Gänze in K liegt. Insbesondere muss $B \in \{O\} \cup h$ sein. Wir behaupten, dass $b := |OB|$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. Um $b^2 = a$ zu zeigen, werden wir die Fälle $b^2 < a$ und $b^2 > a$ ausschließen.

Im Fall $b^2 < a$ betrachten wir $\varepsilon := \min\{1, \frac{a-b^2}{2b+1}\} > 0$ und erhalten

$$(b + \varepsilon)^2 = b^2 + 2\varepsilon b + \varepsilon^2 \leq b^2 + 2\varepsilon b + \varepsilon = b^2 + (2b + 1)\varepsilon \leq b^2 + (a - b^2) = a.$$

Betrachten wir $X \in h$ mit $|OX| = b + \varepsilon$, dann gilt einerseits $|OX| = b + \varepsilon > b = |OB|$, also $X \in K$ und andererseits $|OX|^2 = (b + \varepsilon)^2 \leq a$, also $X \in L$, ein Widerspruch zu $K \cap L = \emptyset$.

Im Fall $b^2 > a$ ist $b > 0$, wir betrachten $\varepsilon := \frac{b^2 - a}{2b} > 0$ und erhalten

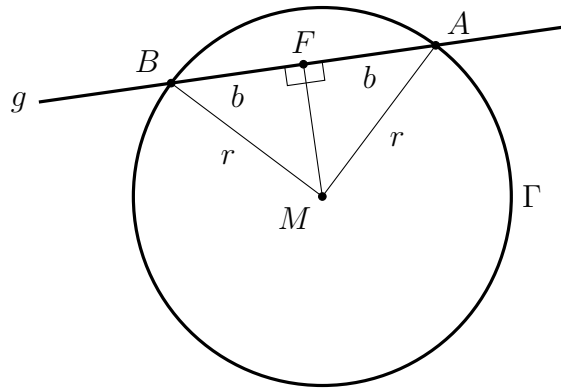
$$(b - \varepsilon)^2 = b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 > b^2 - 2b\varepsilon = b^2 - (b^2 - a) = a$$

sowie $2b\varepsilon = b^2 - a \leq b^2 < 2b^2$, also $0 < b - \varepsilon < b$. Betrachten wir $X \in h$ mit $|OX| = b - \varepsilon$, dann gilt einerseits $|OX| = b - \varepsilon < b = |OB|$, also $X \in L$ und andererseits $|OX|^2 = (b - \varepsilon)^2 > a$, also $X \in K$, ein Widerspruch zu $K \cap L = \emptyset$.

Es muss daher $b^2 = a$ gelten. Um die Eindeutigkeit einzusehen, sei $0 \leq c \in \mathcal{K}$ mit $c^2 = a$. Dann gilt $(b - c)(b + c) = b^2 - c^2 = a - a = 0$, also muss $b - c = 0$ oder $b + c = 0$ sein, d.h. $b = \pm c$. Da $b \geq 0$ und $c \geq 0$ folgt $b = c$. \square

DEFINITION 1.6.4 (Quadratwurzel). Unter der *Quadratwurzel* von $0 \leq a \in \mathcal{K}$ verstehen wir die nach Lemma 1.6.3 eindeutig bestimmte Zahl $0 \leq b \in \mathcal{K}$, für die $b^2 = a$ gilt. Wir schreiben dafür $\sqrt{a} := b$.

SATZ 1.6.5 (Schnitt eines Kreises mit einer Geraden). *Jede Gerade, die einen inneren Punkt eines Kreises enthält schneidet den Kreis in genau zwei Punkten.*



BEWEIS. Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r . Weiters sei X ein Punkt auf einer Geraden g , der im Inneren von Γ liegt, es gilt daher $|XM| < r$. Bezeichne F

den Fußpunkt des Lots durch M auf g . Dann liegt auch F im Inneren des Kreises, denn $|FM| \leq |XM| < r$ nach Bemerkung 1.5.23. Somit ist $|FM|^2 < r^2$ und daher $r^2 - |FM|^2 > 0$. Nach Lemma 1.6.3 existiert $0 < b \in \mathcal{K}$ mit $b^2 = r^2 - |FM|^2$. Seien nun A und B die beiden Punkte auf g , für die $A * F * B$ und $|AF| = b = |BF|$ gilt. O.B.d.A. liege M nicht auf g , siehe Bemerkung 1.5.18. Also bildet MFA ein rechtwinkeliges Dreieck und wir erhalten $|AM|^2 = |AF|^2 + |FM|^2 = b^2 + |FM|^2 = r^2$ aus Satz 1.5.49 (Pythagoras). Mit der Eindeutigkeitsaussage in Lemma 1.6.3 schließen wir $|AM| = r$, d.h. $A \in \Gamma$. Analog folgt $B \in \Gamma$. Weitere Schnittpunkte kann es nicht geben, siehe Bemerkung 1.5.17. \square

BEWERTUNG 1.6.6. Zwei verschiedene Kreise können sich höchstens in zwei Punkten schneiden. Dies folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.5.14 und Bemerkung 1.5.17.

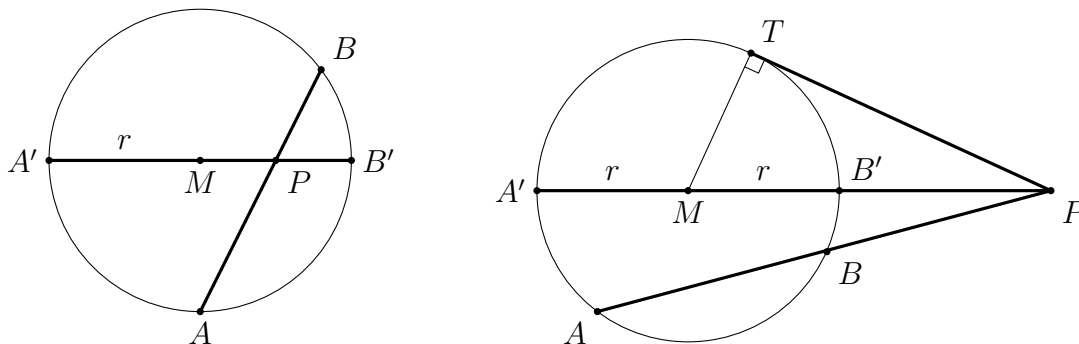
BEWERTUNG 1.6.7 (Schnitt von Kreis und Gerade). Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r . Für jede Gerade g gilt: Im Fall $d(g, M) > r$ schneiden sich g und Γ nicht; im Fall $d(g, M) = r$ ist g tangential an Γ und hat daher genau einen Schnittpunkt mit Γ ; und im Fall $d(g, M) < r$ haben g und Γ genau zwei Schnittpunkte. Dies folgt aus Bemerkung 1.5.23, Bemerkung 1.5.24 und Satz 1.6.5.

DEFINITION 1.6.8 (Potenz eines Punktes). Unter der Potenz eines Punktes P bezüglich eines Kreises mit Mittelpunkt M und Radius r verstehen wir den Ausdruck $|PM|^2 - r^2$.

BEWERTUNG 1.6.9 (Potenz und Sehen- bzw. Sekantensatz). Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r . Die Punkte auf Γ haben Potenz Null bezüglich Γ . Die Punkte im Inneren von Γ haben negative Potenz bezüglich Γ , wobei die minimale Potenz $-r^2$ beim Mittelpunkt angenommen wird. Ist P ein Punkt im Inneren, der auf einer Sehne (AB) von Γ liegt, dann stimmt $-|AP| \cdot |BP|$ mit der Potenz von P bezüglich Γ überein, denn es gilt

$$|PM|^2 - r^2 = -(r + |PM|) \cdot (r - |PM|) = -|A'P| \cdot |B'P| = -|AP| \cdot |BP|$$

nach dem Sehensatz, siehe Übungen. Die Punkte im Äußeren von Γ haben positive Potenz



bezüglich Γ . Ist P ein Punkt im Äußeren von Γ , der auf einer Sekante durch die Punkte $A, B \in \Gamma$ liegt, dann stimmt $|AP| \cdot |BP|$ mit der Potenz von P bezüglich Γ überein, denn

$$|PM|^2 - r^2 = (|PM| + r) \cdot (|PM| - r) = |A'P| \cdot |B'P| = |AP| \cdot |BP|$$

nach dem Sekantensatz, siehe Übungen. Liegt P auf der Tangente durch einen Punkte $T \in \Gamma$, dann stimmt die Potenz von P bezüglich Γ auch mit $|TP|^2$ überein, denn $|AP| \cdot |BP| = |TP|^2$ nach dem Tangenten-Sekantensatz, siehe Übungen.

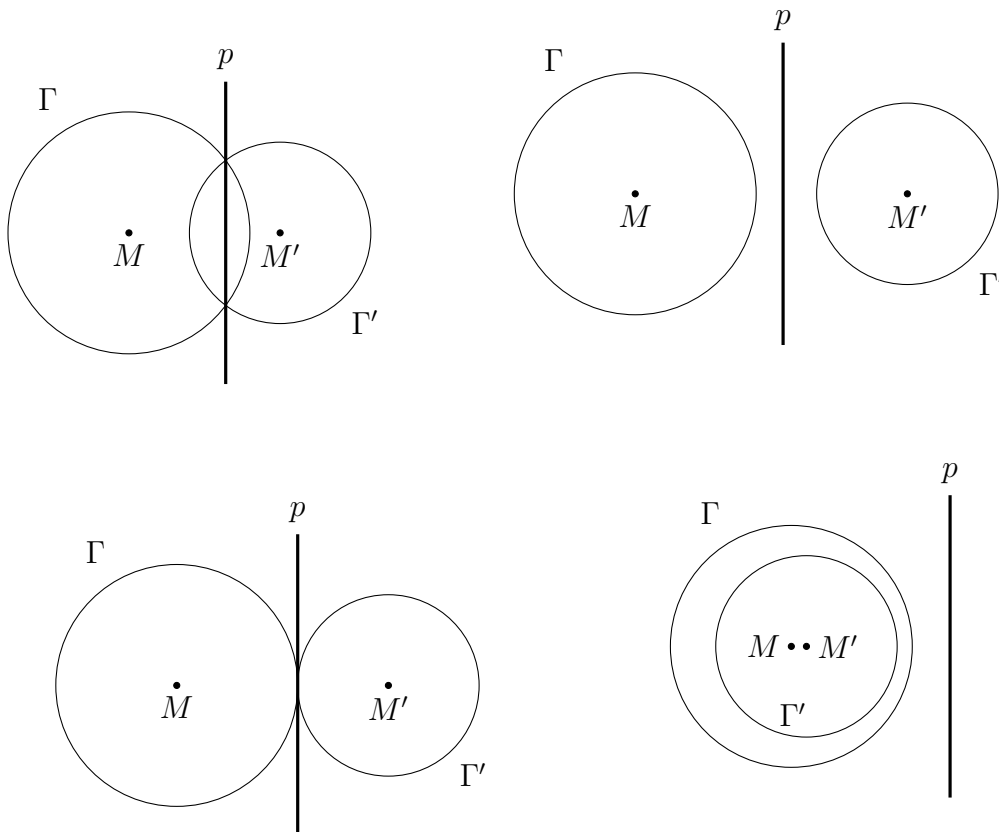
LEMMA 1.6.10 (Potenzgerade). Seien Γ und Γ' zwei nicht konzentrische Kreise mit Mittelpunkten $M \neq M'$ und Radien $r, r' > 0$. Dann bildet die Menge

$$p := \{X \in \mathcal{E} : |XM|^2 - r^2 = |XM'|^2 - (r')^2\}$$

eine Gerade, die normal auf $g(M, M')$ steht und Normalabstand

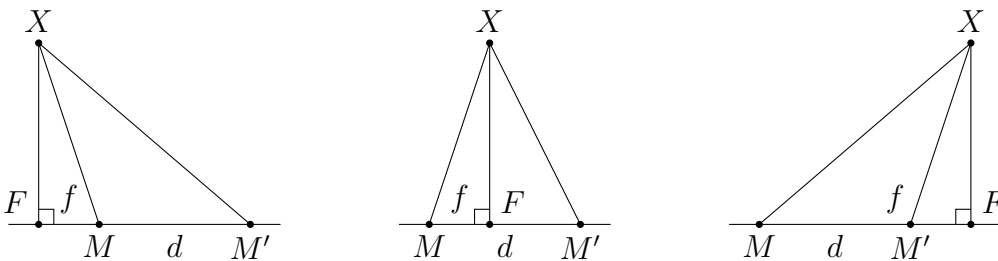
$$d(M, p) = \frac{|d^2 + r^2 - (r')^2|}{2d}$$

von M hat, wobei $d := |MM'|$.



BEWEIS. Sei X ein Punkt und F der Fußpunkt des Lots durch X auf $g(M, M')$. Aus Satz 1.5.49 (Pythagoras) folgt $|XM|^2 = |FM|^2 + |XF|^2$ und $|XM'|^2 = |FM'|^2 + |XF|^2$, also

$$|XM|^2 - r^2 = |XM'|^2 - (r')^2 \Leftrightarrow |FM|^2 - r^2 = |FM'|^2 - (r')^2. \quad (23)$$



Setzen wir $f := |FM|$, dann gilt

$$|FM'| = \begin{cases} f + d & \text{falls } F * M * M', \\ d - f & \text{falls } F \in [MM'], \text{ und} \\ f - d & \text{falls } M * M' * F. \end{cases}$$

Daher

$$|FM'|^2 = \begin{cases} (f + d)^2 & \text{falls } F * M * M' \text{ und} \\ (f - d)^2 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Somit

$$\begin{aligned} |FM|^2 - r^2 = |FM'|^2 - (r')^2 &\Leftrightarrow f^2 - r^2 = (f \pm d)^2 - (r')^2 \\ &\Leftrightarrow f^2 - r^2 = f^2 \pm 2fd + d^2 - (r')^2 \\ &\Leftrightarrow \pm f = \frac{d^2 + r^2 - (r')^2}{2d} \end{aligned}$$

mit Plus, falls $F * M * M'$ und Minus andernfalls. Da $f \geq 0$, bestimmt das Vorzeichen von $(d^2 + r^2 - (r')^2)/2d$, welcher der beiden Fälle eintreten muss und damit auch, auf welcher Seite von M der Fußpunkt F in $g(M, M')$ liegt. Zusammen mit (23) zeigt dies, dass die Menge p eine Gerade bildet, die normal auf $g(M, M')$ steht und Normalabstand $f = \frac{|d^2 + r^2 - (r')^2|}{2d}$ von M hat. \square

LEMMA 1.6.11. *Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r , sei Γ' ein Kreis mit Mittelpunkt M' und Radius r' , und sei $d := |MM'|$. Sind die drei Ungleichungen*

$$d < r + r', \quad r < r' + d \quad \text{und} \quad r' < d + r \quad (24)$$

erfüllt, dann schneiden sich Γ und Γ' in genau zwei Punkten.

BEWEIS. Beachte, dass die Kreise nicht konzentrisch sein können, denn aus den Ungleichungen in (24) folgt $|MM'| = d > 0$, ihre Mittelpunkte M und M' sind daher verschieden. Nach Lemma 1.6.10 bildet daher

$$p := \{X \in \mathcal{E} : |XM|^2 - r^2 = |XM'|^2 - (r')^2\}$$

eine Gerade. Offensichtlich gilt $\Gamma \cap p = \Gamma \cap \Gamma' = \Gamma' \cap p$. Nach Satz 1.6.5 genügt es daher zu zeigen, dass p einen inneren Punkt von Γ enthält.

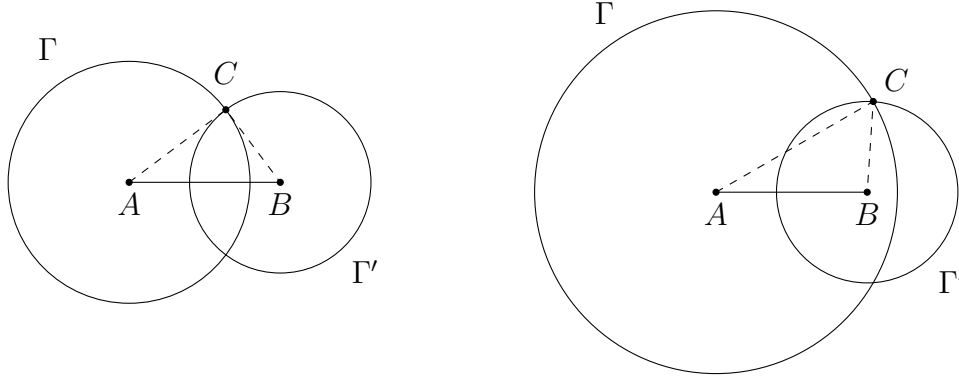
Mit der Formel für den Normalabstand in Lemma 1.6.10 erhalten wir

$$\begin{aligned} d(M, p) < r &\Leftrightarrow |d^2 + r^2 - (r')^2| < 2dr \\ &\Leftrightarrow -2dr < d^2 + r^2 - (r')^2 \text{ und } d^2 + r^2 - (r')^2 < 2dr \\ &\Leftrightarrow (r')^2 < (d + r)^2 \text{ und } (d - r)^2 < (r')^2 \\ &\Leftrightarrow -(d + r) < r' < d + r \text{ und } -r' < d - r < r' \\ &\Leftrightarrow r' < d + r, r < r' + d \text{ und } d < r + r', \end{aligned}$$

denn die Ungleichung $-(d + r) < r'$ ist immer erfüllt. Aus den Ungleichungen (24) folgt daher $d(M, p) < r$, also enthält p einen inneren Punkt von Γ . \square

SATZ 1.6.12 ([Euklid, I§22]). *Sind $a, b, c \in \mathcal{P}$ so, dass $a < b + c$, $b < c + a$ und $c < a + b$, dann existiert ein Dreieck ABC mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$ und $c = |AB|$.*

BEWEIS. Seien A und B zwei Punkte mit $|AB| = c$. Sei Γ der Kreis mit Mittelpunkt A und Radius b , und sei Γ' der Kreis mit Mittelpunkt B und Radius a . Nach Lemma 1.6.11



existiert ein Schnittpunkt $C \in \Gamma \cap \Gamma'$. Es gilt $|AC| = b$, denn C liegt in Γ ; und es gilt $|BC| = a$, denn C liegt in Γ' . Also ist ABC das gesuchte Dreieck. \square

BEMERKUNG 1.6.13. Aus Satz 1.6.12 folgt, dass zu jedem $a \in \mathcal{P}$ ein gleichseitiges Dreieck ABC mit $|AB| = |BC| = |CA| = a$ existiert. Dies ist die Aussage des ersten Satzes im ersten Buch von Euklid, siehe [Euklid, I§1].

SATZ 1.6.14 (Schnitt zweier Kreise). *Sind Γ und Γ' zwei Kreise, sodass Γ' einen Punkt im Inneren von Γ und auch einen Punkt im Äußeren von Γ enthält, dann schneiden sich die beiden Kreise in genau zwei Punkten.*

BEWEIS. Wir bezeichnen die Mittelpunkte der Kreise mit M und M' , ihre Radien mit r und r' . Weiters sei $d := |MM'|$. Nach Voraussetzung existiert ein Punkt $X \in \Gamma'$, der im Inneren von Γ liegt. Aus der Dreiecksungleichung, siehe Satz 1.4.26, folgt

$$d = |MM'| \leq |MX| + |XM'| = |MX| + r' < r + r'$$

sowie

$$r' = |M'X| \leq |M'M| + |MX| = d + |MX| < d + r.$$

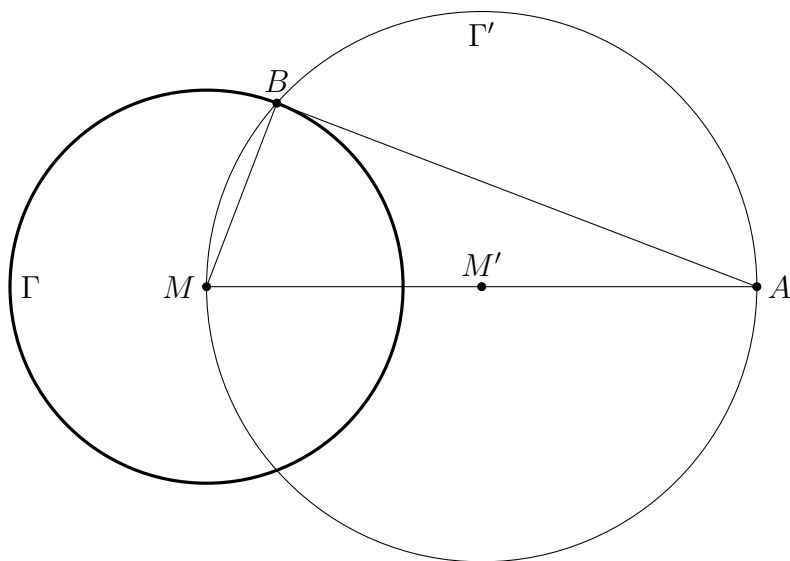
Da auch ein Punkt $Y \in \Gamma'$ existiert, der im Äußeren von Γ liegt, erhalten wir analog

$$r < |MY| \leq |MM'| + |M'Y| = d + r'.$$

Der Satz folgt daher aus Lemma 1.6.11. \square

SATZ 1.6.15 (Tangenten [Euklid, III§17]). *Durch jeden Punkt im Äußeren eines Kreises laufen genau zwei Tangenten an den Kreis.*

BEWEIS. Sie M der Mittelpunkt eines Kreises Γ und A ein Punkt im Äußeren von Γ . Weiters bezeichne M' den Mittelpunkt der Strecke AM und Γ' den Kreis mit Mittelpunkt M' durch A und M . Ist $B \in \Gamma \cap \Gamma'$, dann ist $\angle ABM$ nach Satz 1.5.28 (Thales) ein rechter Winkel und daher $g(A, B)$ Tangente an den Kreis Γ' , siehe Satz 1.5.20. Ist umgekehrt $B \in \Gamma$ und $g(A, B)$ tangential an Γ , dann ist $\angle ABM$ nach Satz 1.5.20 ein rechter Winkel und daher $B \in \Gamma'$, siehe Satz 1.5.32 und Satz 1.5.28. Dies zeigt, dass $\Gamma \cap \Gamma'$ mit der Menge der Berührungspunkte von Tangenten durch A an Γ übereinstimmt. Es genügt daher zu zeigen, dass $\Gamma \cap \Gamma'$ aus genau zwei Punkten besteht.



Offensichtlich ist M ein Punkt auf Γ' , der im Inneren von Γ liegt. Nach Voraussetzung ist A ein Punkt auf Γ' , der im Äußeren von Γ liegt. Nach Satz 1.6.14 besteht $\Gamma \cap \Gamma'$ daher aus genau zwei Punkten. Es gibt daher genau zwei Tangenten durch A . \square

BEMERKUNG 1.6.16. Euklids Tangentenkonstruktion [Euklid, III§17] verwendet nur den Schnitt von Geraden und Kreis. (siehe Übungen)

1.7. Isometrien.

DEFINITION 1.7.1 (Isometrie). Unter einer Isometrie verstehen wir eine Bijektion der Ebene, $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, die Längen in folgendem Sinn bewahrt: Für je zwei Punkte A und B gilt

$$|\varphi(A)\varphi(B)| = |AB|.$$

BEMERKUNG 1.7.2 (Gruppe der Isometrien). Die identische Abbildung ist offensichtlich eine Isometrie. Die Komposition zweier Isometrien ist eine Isometrie. Die Umkehrabbildung einer Isometrie ist eine Isometrie. Daher bildet die Menge aller Isometrien bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

LEMMA 1.7.3 (Isometrien und Geraden). *Isometrien bilden Geraden auf Geraden ab und bewahren die Anordnungsrelation. In anderen Worten: Ist φ eine Isometrie und $A * B * C$, dann gilt auch $\varphi(A) * \varphi(B) * \varphi(C)$.*

BEWEIS. Sei $A * B * C$. Daher $|AC| = |AB| + |BC|$, also

$$|\varphi(A)\varphi(C)| = |AC| = |AB| + |BC| = |\varphi(A)\varphi(B)| + |\varphi(B)\varphi(C)|. \quad (25)$$

Nach der Dreiecksungleichung in Satz 1.4.26 sind $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$ daher kollinear. Aus $A \neq B \neq C$ erhalten wir $\varphi(A) \neq \varphi(B) \neq \varphi(C)$. Wäre $\varphi(B) * \varphi(C) * \varphi(A)$, dann $|\varphi(A)\varphi(C)| < |\varphi(A)\varphi(B)|$ im Widerspruch zu (25). Analog kann $\varphi(C) * \varphi(A) * \varphi(B)$ ausgeschlossen werden, also muss $\varphi(A) * \varphi(B) * \varphi(C)$ gelten. \square

BEMERKUNG 1.7.4. Isometrien bilden Halbebenen auf Halbebenen und Halbgeraden auf Halbgeraden ab. Beides folgt unmittelbar aus Lemma 1.7.3.

BEMERKUNG 1.7.5. Isometrien bilden parallele Geraden auf parallele Geraden ab. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 1.7.3.

BEMERKUNG 1.7.6. Ist ABC ein Dreieck und φ eine Isometrie, so bildet $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)$ ein zu ABC kongruentes Dreieck. Dies folgt aus Satz 1.4.18 (SSS), denn $|\varphi(A)\varphi(B)| = |AB|$, $|\varphi(B)\varphi(C)| = |BC|$ und $|\varphi(C)\varphi(A)| = |CA|$.

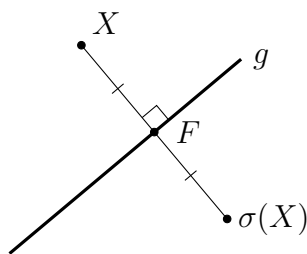
LEMMA 1.7.7 (Isometrien und Winkel). *Isometrien bewahren Winkel. In anderen Worten: Ist φ eine Isometrie und $\angle(h, k)$ ein Winkel, dann bildet $\angle(\varphi(h), \varphi(k))$ einen zu $\angle(h, k)$ kongruenten Winkel.*

BEWEIS. Bezeichne O den Scheitel des Winkels $\angle(h, k)$. Nach Bemerkung 1.7.4 sind $\varphi(h)$ und $\varphi(k)$ zwei Halbgeraden mit Ausgangspunkt $\varphi(O)$. Da h und k nicht in einer Geraden liegen, gilt dasselbe auch für $\varphi(h)$ und $\varphi(k)$, siehe Lemma 1.7.3 oder Bemerkung 1.7.6. Somit bildet auch $\angle(\varphi(h), \varphi(k))$ einen Winkel. Um die Kongruenz zu zeigen, sei $A \in h$ und $B \in k$. Dann gilt $\varphi(A) \in \varphi(h)$, $\varphi(B) \in \varphi(k)$ und wir erhalten

$$\angle(h, k) \equiv \angle AOB \equiv \angle \varphi(A)\varphi(O)\varphi(B) \equiv \angle(\varphi(h), \varphi(k)),$$

wobei im mittleren Gleichheitszeichen Bemerkung 1.7.6 eingegangen ist. □

DEFINITION 1.7.8 (Spiegelung). Sei g eine Gerade, $X \in \mathcal{E}$ und F der Fußpunkt des Lots auf g durch X . Ist $X \notin g$, dann bezeichne $\sigma(X)$ den eindeutigen Punkt am Lot, auf der anderen Seite von g , der $|XF| = |\sigma(X)F|$ genügt. Für $X \in g$ setzen wir $\sigma(X) := X$. Die so definierte Abbildung $\sigma: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ wird als *Spiegelung an der Geraden g* bezeichnet.



BEMERKUNG 1.7.9 (Spiegelungen sind Involutionen). Sei σ eine Spiegelung an einer Geraden g . Dann gilt $\sigma \circ \sigma = \text{id}$, d.h. σ ist eine Involution. Für die Fixpunktmenge erhalten wir $\{X \in \mathcal{E} : \sigma(X) = X\} = g$. Beides folgt unmittelbar aus der Definition.

LEMMA 1.7.10. *Spiegelungen sind Isometrien.*

BEWEIS. Sei σ eine Spiegelung an einer Geraden g . Weiters sei $X \in \mathcal{E}$, bezeichne F den Fußpunkt des Lots auf g durch X und sei $G \in g$. Wir nehmen $X \notin g$ und $G \neq F$ an. Nach Satz 1.4.3 (SWS) sind die Dreiecke GFX und $GF\sigma(X)$ kongruent. Insbesondere gilt

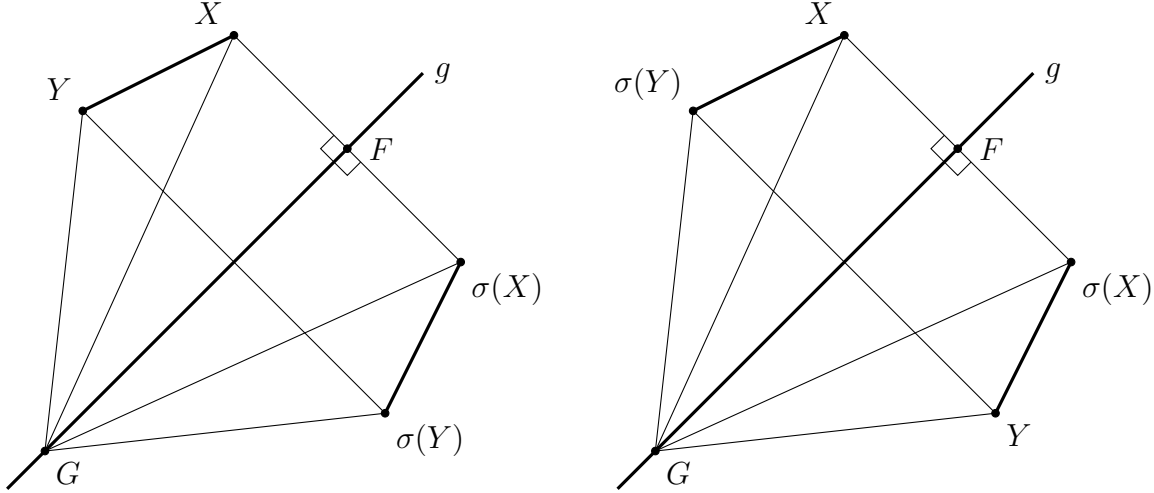
$$|GX| = |G\sigma(X)| \quad \text{und} \quad \sphericalangle FGX = \sphericalangle FG\sigma(X).$$

Sei nun $Y \in \mathcal{E}$ beliebig. Wir wollen $|XY| = |\sigma(X)\sigma(Y)|$ zeigen. Nach dem vorangehenden Absatz können wir o.B.d.A. $X \notin g$ und $Y \notin g$ annehmen. Wir wählen $G \in g$ so, dass die

Halbgeraden $(GX>$ und $(GY>$ verschieden sind und die Fußpunkte der Lote durch X und Y auf g beide auf derselben Seite von G in g liegen. Aus dem vorangehenden Absatz folgt:

$$\begin{aligned} |GX| &= |G\sigma(X)|, & \sphericalangle FGX &= \sphericalangle FG\sigma(X), \\ |GY| &= |G\sigma(Y)|, & \sphericalangle FGY &= \sphericalangle FG\sigma(Y). \end{aligned}$$

Liegt X im Inneren von $\sphericalangle FGY$, dann ist $\sphericalangle FG\sigma(X) = \sphericalangle FGX < \sphericalangle FGY = \sphericalangle FG\sigma(Y)$,



somit liegt auch $\sigma(X)$ im Inneren von $\sphericalangle FG\sigma(Y)$ und wir erhalten

$$\sphericalangle XGY = \sphericalangle FGY - \sphericalangle FGX = \sphericalangle FG\sigma(Y) - \sphericalangle FG\sigma(X) = \sphericalangle \sigma(X)G\sigma(Y).$$

Liegt Y im Inneren von $\sphericalangle FGX$ erhalten wir analog $\sphericalangle XGY = \sphericalangle \sigma(X)G\sigma(Y)$. Liegt F im Inneren von $\sphericalangle XGY$, dann liegt F auch im Inneren von $\sphericalangle \sigma(X)G\sigma(Y)$ und wir erhalten

$$\sphericalangle XGY = \sphericalangle FGY + \sphericalangle FGX = \sphericalangle FG\sigma(Y) + \sphericalangle FG\sigma(X) = \sphericalangle \sigma(X)G\sigma(Y).$$

Weitere Fälle sind nicht möglich, da die Winkel $\sphericalangle FGX$ und $\sphericalangle FGY$ beide spitz sind. In jedem Fall ergibt sich daher $\sphericalangle XGY = \sphericalangle \sigma(X)G\sigma(Y)$, also sind die Dreiecke XGY und $\sigma(X)G\sigma(Y)$ nach Satz 1.4.3 (SWS) kongruent. Insbesondere folgt $|XY| = |\sigma(X)\sigma(Y)|$, also ist σ eine Isometrie. \square

SATZ 1.7.11. Sei h eine Halbgerade mit Ausgangspunkt O und ε eine Seite der Trägergeraden von h . Weiters sei h' eine Halbgerade mit Ausgangspunkt O' und ε' eine Seite der Trägergeraden von h' . Dann existiert genau eine Isometrie φ mit

$$\varphi(O) = O', \quad \varphi(h) = h' \quad \text{und} \quad \varphi(\varepsilon) = \varepsilon'.$$

BEWEIS. Es existiert eine Isometrie φ_1 mit $\varphi_1(O) = O'$: Im Fall $O = O'$ können wir $\varphi_1 = \text{id}$ verwenden; Andernfalls hat die Spiegelung an der Streckensymmetrale von OO' die gewünschte Eigenschaft, siehe Lemma 1.7.10.

Beachte, dass die Halbgeraden $\varphi_1(h)$ und h' denselben Ausgangspunkt $\varphi_1(O) = O'$ haben, vgl. Bemerkung 1.7.4. Es existiert eine Isometrie φ_2 mit $\varphi_2(O') = O'$ und $\varphi_2(\varphi_1(h)) = h'$: Im Fall $\varphi_1(h) = h'$ können wir $\varphi_2 = \text{id}$ verwenden; Ergänzen sich $\varphi_1(h)$ und h' zu einer Geraden, so erfüllt die Spiegelung an der Normalen durch O' diese Bedingung; Andernfalls hat die Spiegelung an der Winkelsymmetrale von $\sphericalangle(\varphi_1(h), h')$ die gewünschte Eigenschaft.

Beachte, dass die Isometrie $\varphi_2 \circ \varphi_1$ nach Konstruktion O auf O' und h auf h' abbildet. Nach Bemerkung 1.7.4 muss sie daher ε auf eine der beiden Seiten von h' abbilden. Stimmt diese Seite mit ε' überein, dann ist $\varphi := \varphi_2 \circ \varphi_1$ die gesuchte Isometrie. Andernfalls hat $\varphi := \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ die gewünschte Eigenschaft, wobei φ_3 die Spiegelung an der Trägergeraden von h' bezeichnet.

Um die Eindeutigkeit von φ zu zeigen sei $\tilde{\varphi}$ eine weitere Isometrie mit $\tilde{\varphi}(O) = O'$, $\tilde{\varphi}(h) = h'$ und $\tilde{\varphi}(\varepsilon) = \varepsilon'$. Für die Isometrie $\psi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi$ gilt daher $\psi(O) = O$, $\psi(h) = h$ und $\psi(\varepsilon) = \varepsilon$. Es genügt $\psi = \text{id}$ zu zeigen, denn dann folgt $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi = \tilde{\varphi} \circ \text{id} = \tilde{\varphi}$ und damit die Eindeutigkeit.

Um $\psi = \text{id}$ zu zeigen, sei k eine Halbgerade mit Ausgangspunkt O , die nicht in der Trägergeraden von h liegt. Nach Lemma 1.7.7 gilt $\angle(\psi(k), h) = \angle(\psi(k), \psi(h)) \equiv \angle(k, h)$, also $\psi(k) = k$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5, denn $\psi(k)$ und k liegen auf derselben Seite der Trägergeraden von h . Da ψ Längen bewahrt, folgt $\psi(X) = X$, für jeden Punkt $X \in k$. Dies zeigt $\psi(X) = X$ für alle Punkte, die nicht in der Trägergeraden von h liegen. Wiederholen wir das Argument mit einer parallelen Halbgeraden im Komplement der Trägergeraden von h , so erhalten wir $\psi(X) = X$, für alle Punkte X , also $\psi = \text{id}$. \square

KOROLLAR 1.7.12. *Jede Isometrie lässt sich als Komposition von höchstens drei Spiegelungen schreiben.*

KOROLLAR 1.7.13. *Sind ABC und $A'B'C'$ zwei kongruente Dreiecke, dann existiert genau eine Isometrie φ mit $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$.*

BEWEIS. Nach Satz 1.7.11 existiert genau eine Isometrie φ mit $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(B) \in (A'B'>$, für die $\varphi(C)$ und C' auf derselben Seite von $g(A', B')$ liegen. Es genügt $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$ zu zeigen. Nach Bemerkung 1.7.6 sind die Dreiecke ABC und $A'\varphi(B)\varphi(C)$ kongruent. Somit sind auch $A'B'C'$ und $A'\varphi(B)\varphi(C)$ kongruente Dreiecke. Insbesondere erhalten wir $|A'B'| = |A'\varphi(B)|$, also $B' = \varphi(B)$ nach der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K2, denn B' und $\varphi(B)$ liegen auf derselben Seite von A' in $g(A', B')$.

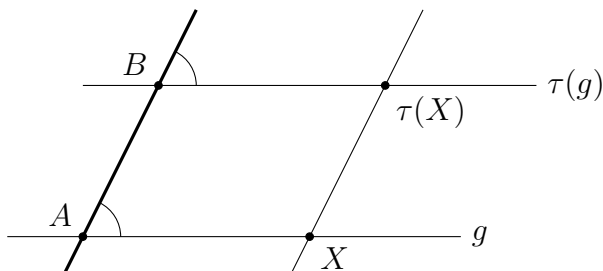
Nach dem vorangehenden Absatz sind $A'B'C'$ und $A'B'\varphi(C)$ zwei kongruente Dreiecke. Insbesondere gilt $\angle A'B'C' \equiv \angle A'B'\varphi(C)$ und $B'C' \equiv B'\varphi(C)$. Mit der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K5 folgt zunächst $\varphi(C) \in (B'C'>$, denn $\varphi(C)$ und C' liegen auf derselben Seite von $g(A', B')$ und dann $\varphi(C) = C'$ nach der Eindeutigkeitsaussage in Axiom K2. \square

BEMERKUNG 1.7.14 (Kongruenz und Isometrie).

- (a) Zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind genau dann kongruent, wenn eine Isometrie φ existiert, sodass $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$ und $\varphi(C) = C'$.
- (b) Zwei Winkel $\angle(h, k)$ und $\angle(h', k')$ sind genau dann kongruent, wenn eine Isometrie φ existiert, sodass $\varphi(h) = h'$ und $\varphi(k) = k'$.
- (c) Zwei Strecken AB und $A'B'$ sind genau dann kongruent, wenn eine Isometrie φ existiert, sodass $\varphi(A) = A'$ und $\varphi(B) = B'$.

Die erste Aussage folgt unmittelbar aus Korollar 1.7.13 und Bemerkung 1.7.6. Die eine Implikation der zweiten Aussage folgt aus Lemma 1.7.7. Die andere lässt sich durch Wählen geeigneter Punkte auf den Schenkeln auf (a) zurückführen. Die dritte Aussage lässt sich durch Ergänzen der Strecken zu kongruenten Dreiecken auf (a) zurückführen. Im Allgemeinen werden zwei geometrische Objekte (Figuren) kongruent genannt, wenn eine Isometrie existiert, die das eine auf das andere abbildet.

BEMERKUNG 1.7.15 (Translationen). Seien A und B zwei verschiedene Punkte. Nach Satz 1.7.11 existiert eine eindeutige Isometrie τ , die A auf B abbildet, die die Halbgerade $(AB>$ auf die Halbgerade $A(B>$ abbildet und die beiden Seiten von $g(A, B)$ invariant lässt. Diese Isometrien werden als *Translationen* oder *Parallelverschiebungen* bezeichnet. Sie bilden Geraden auf parallele Geraden ab, d.h. für jede Gerade g ist $\tau(g)$ eine zu g parallele Gerade. Sind g und $g(A, B)$ nicht parallel, dann folgt dies aus dem Stufenwinkelsatz 1.5.4, denn die

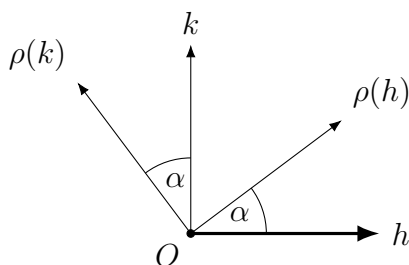


Stufenwinkel, die beim Schnitt von $g(A, B)$ mit g und $\tau(g)$ entstehen sind nach Lemma 1.7.7 kongruent. Jede, zu $g(A, B)$ parallele Gerade ist invariant unter τ . Die Translation τ lässt sich als Komposition zweier Spiegelungen schreiben,

$$\tau = \sigma_2 \circ \sigma_1,$$

wobei σ_1 die Spiegelung an der Normalen auf $g(A, B)$ durch A und σ_2 die Spiegelung an der Normalen auf $g(A, B)$ durch den Mittelpunkt der Strecke AB bezeichnen. Dies folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.7.11, denn die Komposition $\sigma_2 \circ \sigma_1$ hat die definierenden Eigenschaften von τ : Sie bildet A auf B ab, sie bildet $(AB>$ auf $A(B>$ ab und sie lässt die beiden Seiten von $g(A, B)$ invariant.

BEMERKUNG 1.7.16 (Rotationen). Sei h eine Halbgerade mit Ausgangspunkt O und sei ε eine Seite der Trägergeraden von h . Weiters sei $\alpha \in \mathcal{W}$. Nach Satz 1.7.11 existiert genau eine Isometrie ρ , die O fest lässt, h auf $\alpha +_\varepsilon h$ abbildet und ε auf $\alpha +_h \varepsilon$ abbildet, siehe Bemerkung 1.4.42. Diese Isometrien werden als *Rotationen* oder *Drehungen* bezeichnet. Ist



$k = \beta +_\varepsilon h$ eine weitere Halbgerade mit Ausgangspunkt O , dann gilt $\rho(k) = \alpha +_{\varepsilon'} k$, wobei $\varepsilon' := \beta +_h \varepsilon$. Die Rotation ρ lässt sich als Komposition zweier Spiegelungen schreiben,

$$\rho = \sigma_2 \circ \sigma_1,$$

wobei σ_1 die Spiegelung an der Trägergeraden von h bezeichnet und σ_2 die Spiegelung an der Trägergeraden von $\alpha/2 +_\varepsilon h$ bezeichnet. Dies folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.7.11, denn die Komposition $\sigma_2 \circ \sigma_1$ hat die definierenden Eigenschaften von ρ : Sie lässt O unverändert, sie bildet h auf $\alpha +_\varepsilon h$ ab und sie bildet ε auf $\alpha +_h \varepsilon$ ab.

2. Koordinaten

Im vorangehenden Kapitel wurde mittels Streckenarithmetik ein geordneter Körper \mathcal{K} konstruiert. Aus dem Dedekind'schen Vollständigkeitsaxiom D folgt, dass \mathcal{K} ordnungsvollständig ist. Daher kann \mathcal{K} in eindeutiger Weise mit dem Körper der reellen Zahlen identifiziert werden. Wir werden ihn daher von nun an mit $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ bezeichnen. Genauer meinen wir damit

$$(\mathcal{K}, +, \cdot, \leq) = (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq),$$

d.h. die Rechenoperationen auf \mathcal{K} entsprechen den üblichen Rechenoperationen auf \mathbb{R} , und die Ordnungsrelation auf \mathcal{K} entspricht der vertrauten Ordnungsrelation auf \mathbb{R} . Insbesondere sind die Streckenlängen $|AB|$ positive reelle Zahlen.

2.1. Teilverhältnis. Um die Lage dreier Punkte A, B, C auf einer Geraden zu beschreiben, ist es hilfreich, den Quotienten der Abstände $\frac{|AB|}{|BC|}$ mit einem Vorzeichen zu versehen, das von der Anordnung der drei Punkte abhängt. Das resultierende Teilverhältnis bringt erhebliche Vereinfachungen, weil damit unangenehme Fallunterscheidungen vermieden werden können.

DEFINITION 2.1.1 (Teilverhältnis). Sind A, B, C drei Punkte auf einer Geraden und gilt $B \neq C$, dann ist ihr *Teilverhältnis* $\frac{AB}{BC}$ wie folgt definiert:

$$\frac{AB}{BC} := \begin{cases} \frac{|AB|}{|BC|} & \text{falls } A * B * C, \text{ und} \\ -\frac{|AB|}{|BC|} & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Ist $A \neq C$, dann sagen wir auch B *teilt die Strecke AC im Verhältnis* $\frac{AB}{BC}$.

BEMERKUNG 2.1.2. Für drei Punkte $A, B \neq C$ auf einer Geraden gilt offensichtlich

$$\left| \frac{AB}{BC} \right| = \frac{|AB|}{|BC|}.$$

BEMERKUNG 2.1.3 (Isometrien bewahren Teilverhältnis). Ist $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ eine Isometrie und sind $A, B \neq C$ drei Punkte auf einer Geraden, dann gilt

$$\frac{\varphi(A)\varphi(B)}{\varphi(B)\varphi(C)} = \frac{AB}{BC}.$$

Dies folgt unmittelbar aus Lemma 1.7.3, denn $|\varphi(A)\varphi(B)| = |AB|$ und $|\varphi(B)\varphi(C)| = |BC|$ nach Definition der Isometrien.

BEISPIEL 2.1.4 (Mittelpunkt). Ist M Mittelpunkt der Strecke AB , dann gilt

$$\frac{AM}{MB} = 1.$$

BEISPIEL 2.1.5 (Schwerpunkt). Mit der Notation in Satz 1.5.56 gilt

$$\frac{AS}{SM_a} = \frac{BS}{SM_b} = \frac{CS}{SM_c} = 2.$$

BEISPIEL 2.1.6 (Euler Gerade). Ist ABC ein nicht gleichseitiges Dreieck, dann gilt mit der Notation von Satz 1.5.58

$$\frac{HS}{SU} = 2.$$

BEMERKUNG 2.1.7. Sind B und C zwei verschiedene Punkte einer Geraden g , dann ist die Abbildung

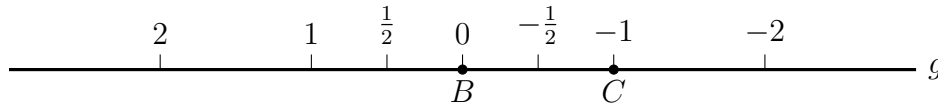
$$g \rightarrow \mathbb{R}, \quad A \mapsto \frac{AB}{BC},$$

eine Bijektion. Dies folgt aus Bemerkung 1.3.8. Zu jeder reellen Zahl x existiert daher genau ein Punkt A auf g mit $\frac{AB}{BC} = x$. Es gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned} x > 0 &\Leftrightarrow A \in \langle B \rangle C \\ x = 0 &\Leftrightarrow A = B \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} x < 0 &\Leftrightarrow A \in (BC) \\ x = -1 &\Leftrightarrow A = C \end{aligned} \tag{27}$$

In der folgen Skizze ist das Teilverhältnis $\frac{AB}{BC}$ durch Zahlen über dem entsprechenden Punkt A auf der Geraden durch B und C angedeutet.



LEMMA 2.1.8. Sind A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden, dann hängen die sechs Teilverhältnisse, die daraus gebildet werden können, wie folgt zusammen:

$$\begin{array}{lll} \frac{AB}{BC} = x & \frac{BC}{CA} = \frac{1}{-x-1} & \frac{CA}{AB} = -\frac{1}{x} - 1 = \frac{-x-1}{x} \\ \frac{CB}{BA} = \frac{1}{x} & \frac{AC}{CB} = -x-1 & \frac{BA}{AC} = \frac{1}{-\frac{1}{x}-1} = \frac{x}{-x-1} \end{array}$$

BEWEIS. Bezeichnet $x = \frac{AB}{BC}$ dann folgt die erste Formel in der zweiten Zeile, $\frac{CB}{BA} = \frac{1}{x}$, unmittelbar aus der Definition. Um die zweite Formel in der zweiten Zeile zu überprüfen unterscheiden wir drei Fälle: Ist $A * B * C$, dann gilt $|AC| = |AB| + |BC|$ und daher

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{|AC|}{|CB|} = -\frac{|AB|}{|BC|} - 1 = -\frac{AB}{BC} - 1.$$

Ist $B * A * C$, dann gilt $|BC| = |BA| + |AC|$ und daher

$$\frac{AC}{CB} = -\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AB|}{|BC|} - 1 = -\frac{AB}{BC} - 1.$$

Ist $A * C * B$, dann gilt $|AB| = |AC| + |CB|$ und daher

$$\frac{AC}{CB} = \frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|AB|}{|BC|} - 1 = -\frac{AB}{BC} - 1.$$

In jedem Fall ergibt sich also $\frac{AC}{CB} = -x - 1$, also die zweite Formel in der zweiten Zeile. Die verbleibenden Formeln folgen durch Kombination der beiden bereits gezeigten:

$$\begin{aligned} \frac{BC}{CA} &= \frac{1}{\frac{AC}{CB}} = \frac{1}{-x-1} \\ \frac{CA}{AB} &= -\frac{CB}{BA} - 1 = -\frac{1}{x} - 1 \\ \frac{BA}{AC} &= \frac{1}{\frac{CA}{AB}} = \frac{1}{-\frac{1}{x}-1} \end{aligned} \quad \square$$

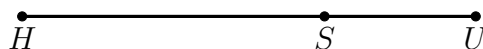
BEISPIEL 2.1.9 (Mittelpunkt). Die Lage des Mittelpunkts M einer Strecke AB kann äquivalent durch jedes der folgenden Teilverhältnisse beschrieben werden:

$$\begin{array}{lll} \frac{AM}{MB} = 1 & \frac{MB}{BA} = -\frac{1}{2} & \frac{BA}{AM} = -2 \\ \frac{BM}{MA} = 1 & \frac{AB}{BM} = -2 & \frac{MA}{AB} = -\frac{1}{2} \end{array}$$



BEISPIEL 2.1.10 (Euler Gerade). Die Beziehung zwischen Umkreismittelpunkt U , Höhenschnittpunkt H und Schwerpunkt S in einem nicht gleichseitigem Dreieck kann äquivalent durch eine der folgenden Teilverhältnisse beschrieben werden:

$$\begin{array}{lll} \frac{HS}{SU} = 2 & \frac{SU}{UH} = -\frac{1}{3} & \frac{UH}{HS} = -\frac{3}{2} \\ \frac{US}{SH} = \frac{1}{2} & \frac{HU}{US} = -3 & \frac{SH}{HU} = -\frac{2}{3} \end{array}$$

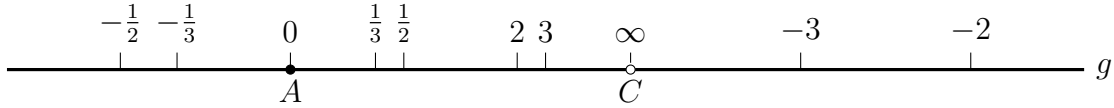


BEMERKUNG 2.1.11. Sind A und C zwei verschiedene Punkte einer Geraden g , dann ist die Abbildung

$$g \setminus \{C\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad B \mapsto \frac{AB}{BC},$$

eine Bijektion. Dies folgt aus Bemerkung 2.1.7, denn $\frac{AB}{BC} = -\frac{1}{\frac{BC}{CA}} - 1$ nach Lemma 2.1.8, und $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $y \mapsto -\frac{1}{y} - 1$, ist eine Bijektion. Zu jeder reellen Zahl $x \neq -1$ existiert daher genau ein Punkt $A \neq C$ auf g mit $\frac{AB}{BC} = x$. Es gilt:

$$\begin{aligned} x > 0 &\Leftrightarrow B \in (AC) \\ x = 0 &\Leftrightarrow B = A \\ -1 < x < 0 &\Leftrightarrow B \in \langle A \rangle C \\ x < -1 &\Leftrightarrow B \in A \langle C \rangle \end{aligned} \quad (28)$$

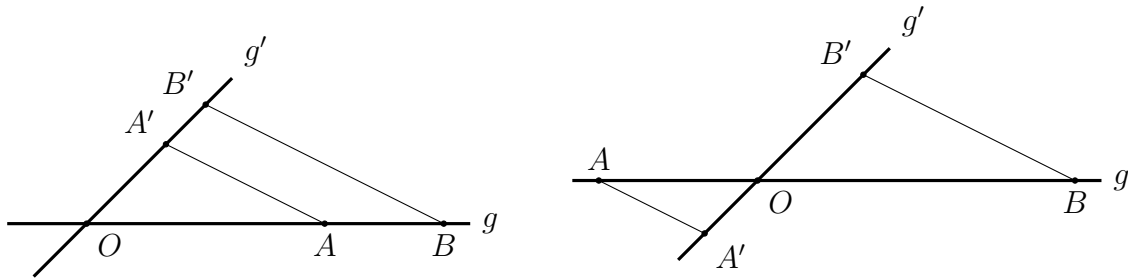


In der Skizze ist das Teilverhältnis $x = \frac{AB}{BC}$ durch Zahlen über dem entsprechenden Punkt B auf der Geraden durch A und C angedeutet. In diesem Zusammenhang wird dem Punkt C oft das Teilverhältnis ∞ zugeordnet, wir werden dies hier aber nicht verwenden.

SATZ 2.1.12 (Orientierte Version des Strahlensatzes). *Seien g und g' zwei nicht parallele Geraden mit Schnittpunkt O . Weiters seien $A, B \in g$ beide verschieden von O , und $A', B' \in g'$ beide verschieden von O . In dieser Situation sind die Geraden $g(A, A')$ und $g(B, B')$ genau dann parallel, wenn*

$$\frac{AO}{OB} = \frac{A'O}{OB'}. \quad (29)$$

Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\frac{AB}{BO} = \frac{A'B'}{B'O}$ bzw. $\frac{BA}{AO} = \frac{B'A'}{A'O}$ erfüllt ist.



BEWEIS. Seien zunächst $g(A, A')$ und $g(B, B')$ parallel. Dann gilt:

$$A \text{ und } B \text{ auf selber Seite von } O \text{ in } g \iff A' \text{ und } B' \text{ auf selber Seite von } O \text{ in } g'. \quad (30)$$

Um die eine Implikation einzusehen sei o.B.d.A. $O * A * B$. Nach Axiom A4 (Pasch) muss die Gerade $g(A, A')$ auch die Seite OB' des Dreiecks OBB' treffen, also $A' \in (OB')$ und daher liegen A' und B' auf derselben Seite von O in g' . Die umgekehrte Implikation folgt analog.

Liegen A und B auf der selben Seite von O in g , dann gilt $\angle AOA' = \angle BOB'$ nach (30), und $\angle OA'A \equiv \angle OB'B$ nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4, denn dies sind Stufenwinkel, da A und B auf derselben Seite von g' liegen. Liegen A und B auf verschiedenen Seiten von O in g , dann gilt $\angle AO'A' \equiv \angle BOB'$ nach dem Scheitelwinkelsatz 1.4.8, siehe (30), und $\angle OA'A \equiv \angle OB'B$ nach dem Stufenwinkelsatz 1.5.4, denn dies sind Wechselwinkel, da A und B auf verschiedenen Seiten von g' liegen. In beiden Fällen gilt $\angle AO'A' \equiv \angle BOB'$ und $\angle OA'A \equiv \angle OB'B$, also sind die Dreiecke OAA' und OBB' nach Satz 1.5.43 (W:W:W) ähnlich. Mit Bemerkung 2.1.2 erhalten wir

$$\left| \frac{AO}{OB} \right| = \frac{|AO|}{|OB|} = \frac{|A'O|}{|OB'|} = \left| \frac{A'O}{OB'} \right|. \quad (31)$$

Aus (30) und (28) sehen wir, dass die Teilverhältnisse $\frac{AO}{OB}$ und $\frac{A'O}{OB'}$ das gleiche Vorzeichen haben, die Gleichung (29) folgt daher aus (31).

Um die umgekehrte Implikation zu zeigen sei nun (29) erfüllt. Die Parallele zu $g(B, B')$ muss die Gerade g' in einem Punkt \tilde{A}' treffen, der von O verschieden ist. Nach dem vorangehenden Absatz gilt $\frac{AO}{OB} = \frac{\tilde{A}'O}{OB'}$. Zusammen mit der Voraussetzung (29) folgt $\frac{A'O}{OB'} = \frac{\tilde{A}'O}{OB'}$. Mit Bemerkung 2.1.7 folgt $A' = \tilde{A}'$, also ist auch die Gerade $g(A, A')$ parallel zu $g(B, B')$.

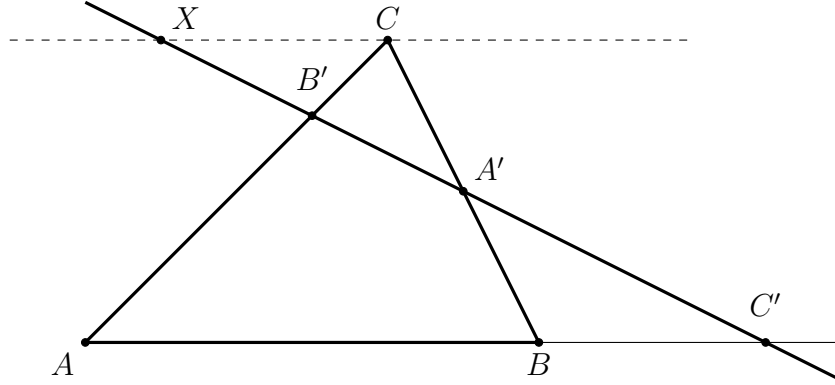
Aus Lemma 2.1.8 erhalten wir:

$$\frac{AO}{OB} = \frac{A'O}{OB'} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB}{BO} = \frac{A'B'}{B'O} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BA}{AO} = \frac{B'A'}{A'O}.$$

Die Bedingung (29) kann daher durch $\frac{AB}{BO} = \frac{A'B'}{B'O}$ oder $\frac{BA}{AO} = \frac{B'A'}{A'O}$ ersetzt werden. \square

SATZ 2.1.13 (Satz von Menelaos). *Sei ABC ein Dreieck, $A' \in g(B, C)$, $B' \in g(C, A)$ und $C' \in g(A, B)$, wobei A' , B' , C' verschieden von den drei Eckpunkten A , B , C seien sollen. In dieser Situation liegen die Punkte A' , B' , C' genau dann auf einer Geraden, wenn*

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = -1. \quad (32)$$



BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, dass die drei Punkte A' , B' und C' auf einer Geraden liegen. Diese Gerade muss die Parallele zur Seite AB durch C in einem Punkt $X \neq C$ treffen. Beachte auch, dass A' , B' , C' und X vier verschiedene Punkte sind. Aus dem Strahlensatz erhalten wir

$$\frac{|AB'|}{|B'C|} = \frac{|C'A|}{|XC|} \quad \text{und} \quad \frac{|CA'}{|A'B|} = \frac{|XC|}{|BC'|}.$$

Elimination von $|XC|$ führt unter Verwendung von Bemerkung 2.1.2 auf

$$\left| \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} \right| = \frac{|AB'|}{|B'C|} \cdot \frac{|BC'|}{|C'A|} \cdot \frac{|CA'}{|A'B|} = 1. \quad (33)$$

Es bleibt daher nur noch das Vorzeichen in (32) zu verifizieren. Nach Axiom A4 (Pasch) trifft die Gerade durch A' , B' , C' keine oder zwei Dreiecksseiten. Von den drei Teilverhältnissen in (32) sind daher keines oder zwei positiv, die anderen negativ, siehe (28). Die linke Seite von (32) muss somit negativ sein, die Gleichung (32) folgt daher aus (33).

Für die Umkehrung nehmen nun an, dass die Gleichung (32) erfüllt ist. Wir wollen uns zunächst davon überzeugen, dass die beiden Geraden $g(A, B)$ und $g(A', B')$ nicht parallel sein können. Wären sie parallel, erhielten wir aus dem orientierten Strahlensatz 2.1.12 die Relation $\frac{AB'}{B'C} = \frac{BA'}{A'C}$, wegen (32) und weil $\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1$, siehe Lemma 2.1.8, daher die Gleichung

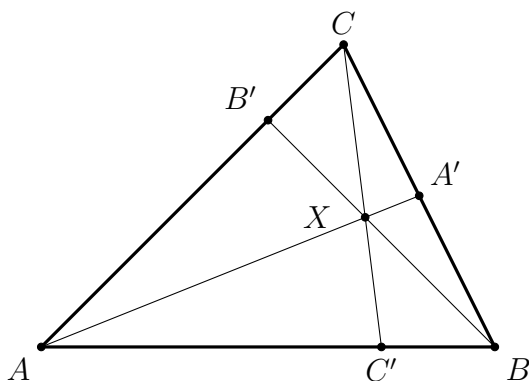
$\frac{BC'}{C'A} = -1$, und somit den Widerspruch $A = B$, siehe (27). Es existiert daher ein Schnittpunkt \tilde{C}' von $g(A', B')$ und $g(A, B)$. Beachte, dass \tilde{C}' nicht mit A oder B zusammenfallen kann. Aus dem vorangehenden Absatz erhalten wir daher

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{B\tilde{C}'}{\tilde{C}'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = -1.$$

Zusammen mit der Voraussetzung (32) folgt $\frac{B\tilde{C}'}{\tilde{C}'A} = \frac{BC'}{C'A}$ und daher $\tilde{C}' = C'$, siehe Bemerkung 2.1.11. Somit liegen auch A' , B' und C' auf einer Geraden. \square

SATZ 2.1.14 (Satz von Ceva). *Sei ABC ein Dreieck, $A' \in g(B, C)$, $B' \in g(C, A)$ und $C' \in g(A, B)$, wobei A' , B' , C' verschieden von den drei Eckpunkten A , B , C seien sollen. Die Geraden $g(A, A')$, $g(B, B')$, $g(C, C')$ sind parallel oder schneiden sich in einem Punkt genau dann, wenn*

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1. \quad (34)$$



BEWEIS. Wir nehmen zunächst an, dass sich die drei Geraden $g(A, A')$, $g(B, B')$ und $g(C, C')$ in einem Punkt X schneiden. Beachte, dass A , B , C , A' , B' , C' , X paarweise verschieden sein müssen. Wenden wir den Satz von Menelaos auf das Dreieck $C'BC$ und die Gerade $g(A, A')$ an erhalten wir

$$\frac{C'X}{XC} \cdot \frac{BA}{AC'} \cdot \frac{CA'}{A'B} = -1.$$

Anwenden desselben Satzes auf das Dreieck $AC'C$ und die Gerade $g(B, B')$ liefert

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{C'B}{BA} \cdot \frac{CX}{XC'} = -1.$$

Multiplikation dieser beiden Gleichungen führt unter Verwendung von

$$\frac{C'X}{XC} \cdot \frac{CX}{XC'} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{BA}{AC'} \cdot \frac{C'B}{BA} = \frac{BC'}{C'A},$$

siehe Lemma 2.1.8, auf (34).

Sind die drei Geraden $g(A, A')$, $g(B, B')$ und $g(C, C')$ parallel, so folgt aus dem orientierten Strahlensatz 2.1.12

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{A'B}{BC} \quad \text{sowie} \quad \frac{BC'}{C'A} = \frac{BC}{CA'}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichungen erhalten wir mit Hilfe der Relationen

$$\frac{A'B}{BC} \cdot \frac{BC}{CA'} = \frac{BA'}{A'C} \quad \text{und} \quad \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1,$$

siehe Lemma 2.1.8, auch in diesem Fall die Gleichung (34).

Für die Umkehrung nehmen wir nun an, dass die Gleichung (34) erfüllt ist. O.B.d.A. seien die Geraden $g(A, A')$ und $g(B, B')$ nicht parallel. Es existiert daher ein Schnittpunkt X von $g(A, A')$ und $g(B, B')$. Beachte, dass X nicht mit C zusammenfallen kann. Wenden wir den Satz von Menelaos auf das Dreieck $AA'C$ und die Gerade $g(X, B')$ an, erhalten wir

$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{A'X}{XA} \cdot \frac{CB}{BA'} = -1. \quad (35)$$

Die beiden Geraden $g(C, X)$ und $g(A, B)$ können nicht parallel sein, denn andernfalls wäre $\frac{A'X}{XA} = \frac{A'C}{CB}$ nach dem orientierten Strahlensatz 2.1.12, was zusammen mit (35) und $\frac{A'C}{CB} \cdot \frac{CB}{BA'} = \frac{CA'}{A'B}$, siehe Lemma 2.1.8, auf $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} = -1$ führt, mit der Voraussetzung (34) folgt $\frac{BC'}{C'A} = -1$ und dann der Widerspruch $B = A$, siehe (27). Somit existiert ein Schnittpunkt \tilde{C}' von $g(C, X)$ und $g(A, B)$. Beachte, $A \neq \tilde{C}' \neq B$. Aus dem vorangehenden Absatz erhalten wir

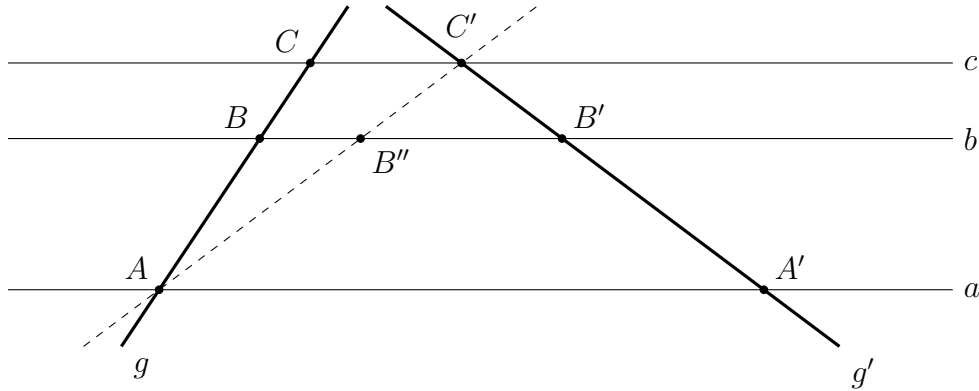
$$\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{B\tilde{C}'}{\tilde{C}'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1.$$

Zusammen mit der Voraussetzung (34) folgt $\frac{B\tilde{C}'}{\tilde{C}'A} = \frac{BC'}{C'A}$ und daher $\tilde{C}' = C'$, siehe Bemerkung 2.1.11. Somit geht auch die Gerade $g(C, C')$ durch X . \square

BEMERKUNG 2.1.15. Aus dem Satz von Ceva folgt erneut, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks in einem Punkt treffen, vgl. Satz 1.5.56. Bezeichnen $A' = M_a$, $B' = M_b$ und $C' = M_c$ die Seitenmittelpunkte eines Dreiecks ABC , dann gilt $\frac{AB'}{B'C} = \frac{BC'}{C'A} = \frac{CA'}{A'B} = 1$ und daher (34). Beachte, dass verschiedene Schwerlinien eines Dreiecks nach Proposition 1.2.36 nicht parallel sein können.

KOROLLAR 2.1.16. *Seien a, b, c drei parallele Geraden und $b \neq c$. Weiters seien g und g' zwei Geraden die beide nicht parallel zu a, b und c sind. Bezeichnen A, B, C und A', B', C' die Schnittpunkte wie in der Skizze angedeutet, dann gilt*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}. \quad (36)$$



BEWEIS. Stimmen a und b überein, dann ist $A = B$ sowie $A' = B'$ und beide Teilverhältnisse in (36) sind gleich 0. Stimmen a und c überein, dann gilt $A = C$ sowie $A' = C'$ und beide Teilverhältnisse in (36) sind gleich -1 , siehe (27). O.B.d.A. seien daher a , b und c drei verschiedene Geraden. O.B.d.A. dürfen wir auch $g \neq g'$ annehmen. Ist $A = A'$ dann $C \neq C'$ und (36) folgt aus dem orientierten Strahlensatz 2.1.12. Ist $C = C'$ dann $A \neq A'$ und (36) folgt aus dem orientierten Strahlensatz 2.1.12. O.B.d.A. sei daher $A \neq A'$ und $C \neq C'$. Beachte, dass die Gerade $g'' := g(A, C')$ zu keiner der Geraden a, b, c, g, g'' parallel ist. Bezeichnet B'' den Schnittpunkt von g'' und b , dann erhalten wir aus dem orientierten Strahlensatz 2.1.12

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB''}{B''C'} \quad \text{und} \quad \frac{AB''}{B''C'} = \frac{A'B'}{B'C'}.$$

Die Relation (36) folgt durch Kombination dieser beiden Gleichungen. \square

2.2. Koordinaten auf Geraden.

DEFINITION 2.2.1 (Koordinatensystem auf Geraden). Unter einem *affinen Koordinatensystem* auf einer Geraden g verstehen wir ein Paar (O, X) wobei O und X zwei verschiedene Punkte von g sind. Der Punkt O wird als *Koordinatenursprung* bezeichnet. Der Halbstrahl $(OX>$ heißt *positive Koordinatenhalbachse*, der Halbstrahl $<O)X$ wird als *negative Koordinatenhalbachse* bezeichnet.

DEFINITION 2.2.2. Unter der Koordinatenabbildung eines Koordinatensystems (O, X) auf einer Geraden g verstehen wir die Abbildung

$$x: g \rightarrow \mathbb{R}, \quad x(A) := -\frac{AO}{OX} = \begin{cases} \frac{|OA|}{|OX|} & \text{falls } A \in (OX>, \\ 0 & \text{falls } A = O, \text{ und} \\ -\frac{|OA|}{|OX|} & \text{falls } A \in <O)X. \end{cases}$$

Aus Bemerkung 2.1.7 erhalten wir sofort:

PROPOSITION 2.2.3. *Die Koordinatenabbildung $x: g \rightarrow \mathbb{R}$ eines affinen Koordinatensystems (O, X) einer Geraden g ist eine Bijektion. Sie bildet die positive Koordinatenhalbachse bijektiv auf $(0, \infty)$ ab, und sie bildet die negative Koordinatenhalbachse bijektiv auf $(-\infty, 0)$ ab. Darüber hinaus gilt $x(O) = 0$ sowie $x(X) = 1$.*

PROPOSITION 2.2.4 (Koordinatenwechsel). *Seien (O, X) und (O', X') zwei affine Koordinatensysteme auf einer Geraden g . Bezeichnen $x: g \rightarrow \mathbb{R}$ und $x': g \rightarrow \mathbb{R}$ die damit assoziierten Koordinatenabbildungen, dann existiert $0 \neq a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass*

$$x'(A) = a \cdot x(A) + b$$

für alle Punkte $A \in g$ gilt. Dabei ist $b = x'(O)$, $a = x'(X) - x'(O)$ und $|a| = \frac{|OX|}{|O'X'|}$.

BEWEIS. Wir nehmen zunächst $X' \neq O$ an. Für beliebige Punkte $A \in g$ gilt dann:

$$\frac{AO}{OX'} = a_1 \cdot \frac{AO}{OX}, \quad \text{wobei } a_1 := -\frac{XO}{OX'} \neq 0. \quad (37)$$

Dies folgt direkt aus der Definition, durch die Fallunterscheidung: (i) X und X' auf derselben Seite von O in g ; (ii) X und X' auf verschiedenen Seiten von O in g . Ersetzen wir in (37) O durch X' , X' durch O' und X durch O , so erhalten wir auch:

$$\frac{AX'}{X'O'} = a_2 \cdot \frac{AX'}{X'O}, \quad \text{wobei } a_2 := -\frac{OX'}{X'O'} \neq 0. \quad (38)$$

Mit Lemma 2.1.8 folgt

$$\frac{AO'}{O'X'} = -\frac{AX'}{X'O'} - 1 = -a_2 \cdot \frac{AX'}{X'O} - 1 = -a_2 \cdot \left(-\frac{AO}{OX'} - 1 \right) - 1 = a_2 \cdot \frac{AO}{OX'} - (1 - a_2).$$

Kombination mit (37) liefert

$$\frac{AO'}{O'X'} = a \cdot \frac{AO}{OX} - b \quad (39)$$

wobei $a = a_1 a_2 \neq 0$ und $b = 1 - a_2$. Aus (37) und (38) erhalten wir auch

$$|a| = |a_1 a_2| = |a_1| \cdot |a_2| = \left| \frac{XO}{OX'} \right| \cdot \left| \frac{OX'}{X'O'} \right| = \frac{|XO|}{|OX'|} \cdot \frac{|OX'|}{|X'O'|} = \frac{|XO|}{|X'O'|} = \frac{|OX|}{|O'X'|},$$

wobei wir im vierten Gleichheitszeichen Bemerkung 2.1.2 verwendet haben.

Im Fall $X' = O$ muss $X' \neq X$ gelten. Nach dem vorangehenden Absatz existieren daher $\tilde{a} \neq 0$ und $\tilde{b} \in \mathbb{R}$, sodass $\frac{AO'}{O'X'} = \tilde{a} \cdot \frac{AX}{XO} - \tilde{b}$ für alle $A \in g$, und $|\tilde{a}| = \frac{|XO|}{|O'X'|}$. Mit Lemma 2.1.8 folgt

$$\frac{AO'}{O'X'} = \tilde{a} \cdot \frac{AX}{XO} - \tilde{b} = \tilde{a} \left(-\frac{AO}{OX} - 1 \right) - \tilde{b} = -\tilde{a} \cdot \frac{AO}{OX} - (\tilde{a} + \tilde{b}).$$

Auch in diesem Fall existieren daher reelle Zahlen $a = -\tilde{a} \neq 0$ und $b = \tilde{a} + \tilde{b}$, sodass (39) für alle $A \in g$ erfüllt ist. Auch in diesem Fall gilt $|a| = |\tilde{a}| = \frac{|XO|}{|O'X'|} = \frac{|OX|}{|O'X'|}$. Äquivalent lässt (39) durch $x'(A) = a \cdot x(A) + b$ ausdrücken. Einsetzen von $A = O$ liefert $x'(O) = a \cdot x(O) + b = b$, denn $x(O) = 0$. Einsetzen von $A = X$ liefert $x'(X) = a \cdot x(X) + b = a + b$, denn $x(X) = 1$. \square

PROPOSITION 2.2.5. *Sei g eine Gerade und $x: g \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems auf g . Dann gilt für beliebige Punkte $A, B \neq C$ auf g die Formel*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{x(B) - x(A)}{x(C) - x(B)}.$$

BEWEIS. Bezeichne $x': g \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung des affinen Koordinatensystems (B, C) auf g . Dann gilt $x'(B) = 0$, $x'(C) = 1$ und $x'(A) = -\frac{AB}{BC}$, also

$$\frac{AB}{BC} = \frac{x'(B) - x'(A)}{x'(C) - x'(B)} = \frac{x(B) - x(A)}{x(C) - x(B)},$$

wobei die zweite Gleichung aus Proposition 2.2.4 folgt. \square

PROPOSITION 2.2.6. *Sei g eine Gerade und $x: g \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems auf g . Weiters seien A, B und C drei Punkte auf g und $a := x(A)$, $b := x(B)$ und $c := x(C)$ ihre Koordinaten. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (a) $A * B * C$
- (b) $a < b < c$ oder $a > b > c$
- (c) $b \neq c$ und $\frac{b-a}{c-b} > 0$
- (d) $a \neq b$ und $\frac{b-c}{a-b} > 0$
- (e) $c \neq a$ und $0 < \frac{b-a}{c-a} < 1$

BEWEIS. Die Äquivalenz (a) \Leftrightarrow (c) folgt aus Proposition 2.2.5 und (28). Die Äquivalenz der anderen Aussagen ist offensichtlich. \square

DEFINITION 2.2.7 (Kartesisches Koordinatensystem). Unter einem *kartesischen Koordinatensystem* auf einer Geraden g verstehen wir ein affines Koordinatensystem (O, X) auf g für das $|OX| = 1$ gilt.

PROPOSITION 2.2.8. *Bezeichnet $x: g \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems auf einer Geraden g , dann gilt für je zwei Punkte A und B auf g :*

$$|AB| = |x(B) - x(A)|.$$

BEWEIS. Sei $x': g \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung eines weiteren kartesischen Koordinatensystems (O', X') auf g mit Ursprung $O' = A$. Dann gilt $x'(A) = 0$ und $x'(B) = \pm|O'B|$, also

$$|x'(B) - x'(A)| = |x'(B)| = |O'B| = |AB|. \quad (40)$$

Nach Proposition 2.2.4 existieren reelle Zahlen $a \neq 0$ und b , sodass $x'(P) = a \cdot x(P) + b$ für alle $P \in g$ gilt. Wir erhalten $x'(B) - x'(A) = a \cdot (x(B) - x(A))$ und daher

$$|x'(B) - x'(A)| = |a| \cdot |x(B) - x(A)|. \quad (41)$$

Da beide Koordinatensysteme kartesisch sind, gilt $|a| = \frac{|OX|}{|O'X'|} = \frac{1}{1} = 1$, siehe Proposition 2.2.4. Kombinieren wir dies mit (40) und (41) folgt die Proposition. \square

2.3. Koordinaten der Ebene.

DEFINITION 2.3.1 (Koordinatensystem). Unter einem *affinen Koordinatensystem* der Ebene verstehen wir drei Punkte (O, X_1, X_2) die nicht auf einer Geraden liegen, d.h. drei Punkte, die ein Dreieck bilden. Der Punkt O wird als *Ursprung* des Koordinatensystems bezeichnet. Die beiden Geraden $g(O, X_1)$ und $g(O, X_2)$ werden *Koordinatenachsen* genannt. Die Halbstrahlen $\langle OX_1 \rangle$ und $\langle OX_2 \rangle$ werden als positive *Koordinatenhalbachsen* bezeichnet. Die Halbstrahlen $\langle O \rangle X_1$ und $\langle O \rangle X_2$ werden negative *Koordinatenhalbachsen* genannt.

LEMMA 2.3.2. *Bezüglich eines affinen Koordinatensystems sei g_1 eine zur ersten Koordinatenachse parallele Gerade, und g_2 eine zur zweiten Koordinatenachse parallele Gerade. Dann schneiden sich g_1 und g_2 in genau einem Punkt.*

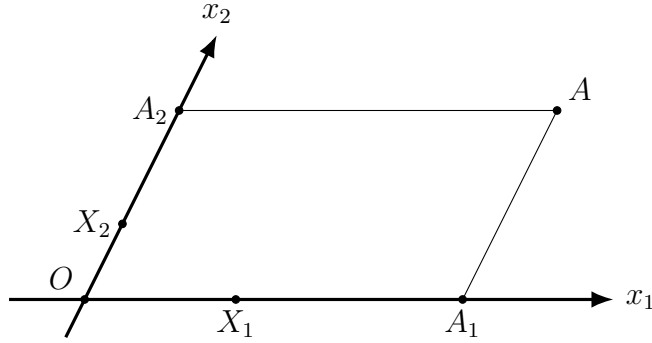
BEWEIS. Wären g_1 und g_2 parallel, dann wären nach Satz 1.5.1 auch die beiden Koordinatenachsen zueinander parallel, ein Widerspruch zur Tatsache, dass sich die beiden Achsen nur im Ursprung O schneiden. \square

Wir schreiben

$$\mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

DEFINITION 2.3.3 (Koordinatenabbildung). Sei (O, X_1, X_2) ein affines Koordinatensystem der Ebene. Bezeichne $x_1: g(O, X_1) \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung des Koordinatensystems (O, X_1) auf der ersten Achse $g(O, X_1)$, und bezeichne $x_2: g(O, X_2) \rightarrow \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung des Koordinatensystems (O, X_2) auf der zweiten Achse $g(O, X_2)$. Unter der *Koordinatenabbildung* des Koordinatensystems (O, X_1, X_2) verstehen wir die Abbildung

$$x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x(A) := \begin{pmatrix} x_1(A_1) \\ x_2(A_2) \end{pmatrix},$$



wobei A_1 den Schnittpunkt der ersten Koordinatenachse $g(O, X_1)$ mit der Parallelen durch A zur zweiten Achse $g(O, X_2)$ bezeichnet, und A_2 den Schnittpunkt der zweiten Koordinatenachse $g(O, X_2)$ mit der Parallelen durch A zur ersten Achse $g(O, X_1)$ bezeichnet. Diese Schnittpunkte existieren und sind eindeutig nach Lemma 2.3.2. Die beiden Komponenten $x_1(A_1)$ und $x_2(A_2)$ werden als *Koordinaten* des Punktes A bezüglich des Koordinatensystems (O, X_1, X_2) bezeichnet. Wir schreiben dafür auch $x_1(A) := x_1(A_1)$ und $x_2(A) := x_2(A_2)$. In anderen Worten, $x_1(A) = \pm \frac{|OA_1|}{|OX_1|}$, wobei das Vorzeichen davon abhängt, ob A_1 auf der positiven oder negativen Koordinatenhalbachse liegt. Analog ist $x_2(A) = \pm \frac{|OA_2|}{|OX_2|}$, wobei das Vorzeichen von der Koordinatenhalbachse bestimmt wird, auf der A_2 liegt.

PROPOSITION 2.3.4. *Die Koordinatenabbildung $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eines affinen Koordinatensystems ist eine Bijektion. Zu jedem $y \in \mathbb{R}^2$ existiert daher ein eindeutiger Punkt $A \in \mathcal{E}$ mit $x(A) = y$.*

BEWEIS. Um die Injektivität einzusehen, sei A ein Punkt, g_1, g_2 die Parallelen zu den beiden Achsen durch A , und A_1, A_2 die Schnittpunkte mit den beiden Achsen. Sei A' ein weiterer Punkt, g'_1, g'_2 die Parallelen zu den beiden Achsen durch A' , und A'_1, A'_2 die Schnittpunkte mit den beiden Achsen. Ist $x(A) = x(A')$, dann gilt $x_1(A_1) = x_1(A'_1)$ sowie $x_2(A_2) = x_2(A'_2)$. Aus Proposition 2.2.3 folgt $A_1 = A'_1$ und $A_2 = A'_2$. Aus Satz 1.5.3 folgt $g_1 = g'_1$ und $g_2 = g'_2$. Mit Lemma 2.3.2 erhalten wir $A = A'$.

Um die Surjektivität einzusehen, sei $y \in \mathbb{R}^2$ mit Komponenten $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Nach Proposition 2.2.3 existiert $A_1 \in g(O, X_1)$ mit $x_1(A_1) = y_1$ und es existiert $A_2 \in g(O, X_2)$ mit $x_2(A_2) = y_2$. Bezeichne g_1 die Parallele zur zweiten Achse $g(O, X_2)$ durch A_1 , und g_2 die Parallele zur ersten Achse $g(O, X_1)$ durch A_2 . Nach Lemma 2.3.2 existiert ein Schnittpunkt $A \in g_1 \cap g_2$. Nach Konstruktion gilt $x(A) = y$. \square

BEMERKUNG 2.3.5. Ist $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems (O, X_1, X_2) , dann gilt

$$x(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(X_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad x(X_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für einen Punkt $A \in \mathcal{E}$ mit Koordinaten $x(A) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ gilt:

- (a) A liegt auf der ersten Koordinatenachse genau dann wenn $x_2 = 0$.
- (b) A liegt auf der pos. ersten Koordinatenhalbachse genau dann wenn $x_1 > 0$ und $x_2 = 0$.
- (c) A liegt auf der neg. ersten Koordinatenhalbachse genau dann wenn $x_1 < 0$ und $x_2 = 0$.

- (d) A liegt auf der zweiten Koordinatenachse genau dann wenn $x_1 = 0$.
(e) A liegt auf der pos. zweiten Koordinatenhalbachse genau dann wenn $x_1 = 0$ und $x_2 > 0$.
(f) A liegt auf der neg. zweiten Koordinatenhalbachse genau dann wenn $x_1 = 0$ und $x_2 < 0$.

SATZ 2.3.6 (Geraden in Koordinaten). Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems und g eine Gerade in \mathcal{E} . Dann existieren $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$, sodass $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ und

$$x(g) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\}. \quad (42)$$

Umgekehrt existiert zu drei Zahlen $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ stets eine Gerade g , für die (42) gilt. Via der Koordinatenabbildung entsprechen die Geraden in \mathcal{E} daher genau den Lösungsmengen nicht-degenerierter linearer Gleichungen.

BEWEIS. Seien B und C zwei verschiedene Punkte der Geraden g . Wir nehmen zunächst an, dass g zu keiner der beiden Koordinatenachsen parallel ist. Liegt ein weiterer Punkt A auf g dann erhalten wir aus Korollar 2.1.16 die Gleichungen

$$\frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} = \frac{AB}{BC} = \frac{A_2 B_2}{B_2 C_2}.$$

Mit Proposition 2.2.5 folgt

$$\frac{x_1(B) - x_1(A)}{x_1(C) - x_1(B)} = \frac{AB}{BC} = \frac{x_2(B) - x_2(A)}{x_2(C) - x_2(B)}.$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} a_1 &:= -(x_2(C) - x_2(B)) \\ a_2 &:= x_1(C) - x_1(B) \\ b &:= x_2(B)(x_1(C) - x_1(B)) - x_1(B)(x_2(C) - x_2(B)) \end{aligned} \quad (43)$$

dann lässt sich dies äquivalent in der Form

$$a_1 \cdot x_1(A) + a_2 \cdot x_2(A) = b \quad (44)$$

schreiben. Diese Gleichung bleibt offenbar gültig, wenn g zu einer der beiden Achsen parallel ist. Ist g zur ersten Koordinatenachse parallel, dann $x_2(A) = x_2(B) = x_2(C)$ und $a_2 \neq 0$ nach Lemma 2.3.2. Ist g zur zweiten Koordinatenachse parallel, dann $x_1(A) = x_1(B) = x_1(C)$ und $a_1 \neq 0$ nach Lemma 2.3.2. Insbesondere ist $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Dies zeigt

$$x(g) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\}. \quad (45)$$

Um Gleichheit zu zeigen seien nun $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ so, dass $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$. O.B.d.A. sei g nicht parallel zur zweiten Koordinatenachse und daher $a_2 \neq 0$. Nach Proposition 2.2.3 existiert ein Punkt A_1 auf der ersten Koordinatenachse mit $x_1(A_1) = x_1$. Bezeichnet A den Schnittpunkt von g mit der Parallelen zur zweiten Koordinatenachse durch A_1 , dann gilt (44). Kombinieren wir dies mit $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ so folgt $x_2(A) = x_2$, denn $x_1(A) = x_1(A_1) = x_1$ und $a_2 \neq 0$. Dies zeigt die umgekehrte Inklusion in (45), es gilt daher Gleichheit wie in (42).

Sei nun $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ und $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Wir wollen eine Gerade g finden, für die (42) gilt. Wir bestimmen zunächst reelle Zahlen x_1 und x_2 , die der Gleichung $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$

genügen: Ist $a_1 \neq 0$ können wir $x_1 = b/a_1$ und $x_2 = 0$ verwenden; ist $a_2 \neq 0$ dann haben $x_1 = 0$ und $x_2 = b/a_2$ die gewünschte Eigenschaft. Seien B und C die Punkte mit Koordinaten

$$x(B) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(C) = \begin{pmatrix} x_1 + a_2 \\ x_2 - a_1 \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion sind daher die drei Gleichungen in (43) erfüllt. Bezeichnet g die Gerade durch B und C , so folgt aus dem vorangehenden Absatz, dass (42) gilt. \square

DEFINITION 2.3.7 (Addition und Skalarmultiplikation in \mathbb{R}^2). *Vektoraddition* und *Skalarmultiplikation* auf \mathbb{R}^2 sind durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}, \quad t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix},$$

definiert, wobei $v_1, v_2, w_1, w_2, t \in \mathbb{R}$. In anderen Worten: Vektoren in \mathbb{R}^2 werden komponentenweise addiert und komponentenweise mit Skalaren multipliziert.

LEMMA 2.3.8 (Rechenregeln für Vektoraddition und Skalarmultiplikation). $(\mathbb{R}^2, +)$ ist eine abelsche Gruppe. Der Nullvektor $0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element bezüglich der Addition. Das additive Inverse von $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ist $-v = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix}$.

Für beliebige $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $s, t \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $s(tv) = (st)v$
- (b) $t(v + w) = tv + tw$
- (c) $(s + t)v = sv + tv$
- (d) $1v = v$
- (e) $(-1)v = -v$
- (f) $tv = 0$ genau dann, wenn $t = 0$ oder $v = 0$.

BEWEIS. Die Kommutativität der Vektoraddition folgt aus der Kommutativität der Addition auf \mathbb{R} , denn

$$v + w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + v_1 \\ w_2 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = w + v.$$

Die Assoziativität der Vektoraddition folgt aus der Assoziativität der Addition auf \mathbb{R} , denn

$$\begin{aligned} u + (v + w) &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + (v_1 + w_1) \\ u_2 + (v_2 + w_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (u_1 + v_1) + w_1 \\ (u_2 + v_2) + w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = (u + v) + w. \end{aligned}$$

Der Nullvektor ist neutrales Element der Addition, denn

$$v + 0 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + 0 \\ v_2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v.$$

Die additiven Inversen sind durch die oben angegebene Formel gegeben, denn

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 - v_1 \\ v_2 - v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Somit bildet $(\mathbb{R}^2, +)$ eine abelsche Gruppe.

Das Assoziativgesetz in (a) folgt aus der Assoziativität der Multiplikation in \mathbb{R} , denn

$$s(tv) = s \left\{ t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right\} = s \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(tv_1) \\ s(tv_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (st)v_1 \\ (st)v_2 \end{pmatrix} = (st) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (st)v.$$

Das Distributivgesetz in (b) folgt aus dem Distributivgesetz auf \mathbb{R} , denn

$$\begin{aligned} t(v+w) &= t \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\} = t \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t(v_1 + w_1) \\ t(v_2 + w_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} tv_1 + tw_1 \\ tv_2 + tw_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tw_1 \\ tw_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = tv + tw. \end{aligned}$$

Auch das andere Distributivgesetz in (c) folgt aus dem Distributivgesetz auf \mathbb{R} , denn

$$\begin{aligned} (s+t)v &= (s+t) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (s+t)v_1 \\ (s+t)v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sv_1 + tv_1 \\ sv_2 + tv_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} sv_1 \\ sv_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} tv_1 \\ tv_2 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = sv + tv. \end{aligned}$$

Die Aussagen in (d) und (e) sind offensichtlich. Ist $t = 0$ oder $v = 0$ dann offenbar auch $tv = 0$. Umgekehrt erhalten wir aus $tv = 0$ sofort $tv_1 = 0 = tv_2$, also $t = 0$ oder $v_1 = 0 = v_2$, d.h. $t = 0$ oder $v = 0$. Damit ist auch (f) gezeigt. \square

LEMMA 2.3.9. Für eine Teilmenge $g \subseteq \mathbb{R}^2$ sind folgende beiden Aussagen äquivalent:

(a) Es existieren $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$ sodass $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ und

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b \right\}.$$

(b) Es existieren $P, v \in \mathbb{R}^2$, sodass $v \neq 0$ und

$$g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}.$$

BEWEIS. Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gilt dann:

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Dabei ist die Implikation \Leftarrow offensichtlich. Um die umgekehrte Implikation \Rightarrow einzusehen, unterscheiden wir zwei Fälle: (i) ist $a_1 \neq 0$, dann hat $t = x_2/a_1$ die gewünschte Eigenschaft; und (ii) ist $a_2 \neq 0$, dann hat $t = -x_1/a_2$ die gewünschte Eigenschaft.

Sei $v = \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ und $b = a_1 p_1 + a_2 p_2$. Dann folgt aus (46):

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + a_2 x_2 = b &\Leftrightarrow a_1(x_1 - p_1) + a_2(x_2 - p_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = P + tv \end{aligned} \tag{47}$$

Damit ist die Implikation (b) \Rightarrow (a) nun offensichtlich. Für die umgekehrte Implikation (a) \Rightarrow (b) sei nun g wie in (a). Da a_1 und a_2 nicht beide verschwinden existieren p_1 und p_2 , sodass $a_1 p_1 + a_2 p_2 = b$ gilt. Ist nämlich $a_2 \neq 0$ dann haben $p_1 = 0$ und $p_2 = b/a_2$ die gewünschte Eigenschaft; ist $a_1 \neq 0$ dann können wir $p_2 = 0$ und $p_1 = b/a_1$ verwenden. Aus (47) folgt nun, dass g auch durch eine Parameterdarstellung wie in (b) beschrieben werden kann. \square

DEFINITION 2.3.10 (Geraden in \mathbb{R}^2). Unter einer Geraden in \mathbb{R}^2 verstehen wir eine Teilmenge, die sich wie in Lemma 2.3.9 schreiben lässt. Eine Darstellung wie in Lemma 2.3.9(a) wird als *Beschreibung der Geraden durch eine lineare Gleichung* bezeichnet. Eine Darstellung wie in Lemma 2.3.9(b) wird *Parameterdarstellung* der Geraden genannt.

BEMERKUNG 2.3.11. Satz 2.3.6 lässt sich daher wie folgt formulieren: Via der Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems entsprechen die Geraden in \mathcal{E} genau den Geraden in \mathbb{R}^2 .

PROPOSITION 2.3.12 (Teilverhältnis in Koordinaten). *Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems und seien $B \neq C$ zwei verschiedene Punkte in \mathcal{E} . Liegt ein weiterer Punkt A auf der Geraden $g := g(B, C)$, dann gilt*

$$x(A) = x(B) + t(x(C) - x(B)) \quad \text{wobei } t = -\frac{AB}{BC}.$$

Der Parameter t stimmt daher mit der Koordinate des entsprechenden Punktes A bezüglich des Koordinatensystems (B, C) auf g überein.

BEWEIS. Ist g nicht parallel zur zweiten Koordinatenachse, dann gilt $x_1(B) \neq x_1(C)$ und wir erhalten wie im Beweis von Satz 2.3.6

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1 B_1}{B_1 C_1} = \frac{x_1(B) - x_1(A)}{x_1(C) - x_1(B)}.$$

Mit $t = -\frac{AB}{BC}$ lässt sich dies äquivalent in der Form

$$x_1(A) = x_1(B) + t(x_1(C) - x_1(B))$$

schreiben. Diese Gleichung bleibt auch gültig, wenn g parallel zur zweiten Koordinatenachse ist, denn in diesem Fall gilt $x_1(A) = x_1(B) = x_1(C)$. Analog erhalten wir

$$x_2(A) = x_2(B) + t(x_2(C) - x_2(B)).$$

Zusammen besagen die letzten beiden Gleichungen gerade $x(A) = x(B) + t(x(C) - x(B))$. \square

BEMERKUNG 2.3.13 (Anordnungsrelation in Koordinaten). Ist $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems und sind $A, B, C \in \mathcal{E}$ drei Punkte, so gilt $B * A * C$ genau dann wenn eine reelle Zahl $0 < t < 1$ existiert, sodass $x(A) = x(B) + t(x(C) - x(B))$. Dies folgt sofort aus Satz 2.3.6 und Proposition 2.3.12, denn ein Punkt A liegt genau dann zwischen B und C , wenn A auf der Geraden $g(B, C)$ liegt und $-1 < \frac{AB}{BC} < 0$ gilt, siehe Bemerkung 2.1.11. Für Intervalle erhalten wir somit die Koordinatendarstellung

$$x((BC)) = \{x(B) + t(x(C) - x(B)) \mid 0 < t < 1\}.$$

Analog erhalten wir folgende Beschreibung der Halbstrahlen in Koordinaten:

$$x((BC>)) = \{x(B) + t(x(C) - x(B)) \mid t > 0\}, \quad (48)$$

$$x(<B)C) = \{x(B) + t(x(C) - x(B)) \mid t < 0\}. \quad (49)$$

Dabei folgt die erste aus der Gleichung vor (27), und die zweite aus (28).

DEFINITION 2.3.14 (Richtungsvektoren von Geraden). Unter einem *Richtungsvektor* einer Geraden g in \mathbb{R}^2 verstehen wir jeden Vektor der Form $B - A$, wobei A und B zwei verschiedene Punkte von g sind.

BEMERKUNG 2.3.15 (Menge aller Richtungsvektoren). Ist $g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade in Parameterdarstellung, dann besteht die Menge aller Richtungsvektoren von g aus allen Vektoren der Form λv , wobei $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist v ein Richtungsvektor. Sind nämlich $A = P + tv$ und $B = Q + sv$ zwei Punkte auf g , dann folgt $B - A = (P + sv) - (P + tv) = (s - t)v$. Gilt $A \neq B$, dann auch $s - t \neq 0$.

BEMERKUNG 2.3.16. Sei g eine Gerade in \mathbb{R}^2 .

- (a) Ist v Richtungsvektor von g und $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, dann ist auch λv Richtungsvektor von g .
- (b) Sind v und w zwei Richtungsvektoren von g , dann existiert $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ mit $w = \lambda v$.

Dies folgt unmittelbar aus Bemerkung 2.3.15.

BEMERKUNG 2.3.17. Ist $g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\}$ eine Gerade in Gleichungsform, dann ist $\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von g . Dies folgt aus dem Beweis von Lemma 2.3.9 und Bemerkung 2.3.15.

LEMMA 2.3.18. Sie g eine Gerade in \mathbb{R}^2 , $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ ein Punkt auf g und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ein Richtungsvektor von g . Dann gilt

$$g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\}$$

wobei $a_1 = v_2$, $a_2 = -v_1$ und $b = a_1 p_1 + a_2 p_2$.

BEWEIS. Da g eine Gerade ist, existieren $Q, w \in \mathbb{R}^2$ mit $w \neq 0$ und $g = \{Q + sw : s \in \mathbb{R}\}$. Da $P \in g$, existiert $s_0 \in \mathbb{R}$ mit $P = Q + s_0 w$. Nach Bemerkung 2.3.15 ist w Richtungsvektor von g . Nach Bemerkung 2.3.16(b) existiert $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ mit $w = \lambda v$. Für $s \in \mathbb{R}$ erhalten wir

$$Q + sw = P + (s - s_0)w = P + (s - s_0)\lambda v = P + tv,$$

wobei $t = (s - s_0)\lambda$. Für $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir umgekehrt

$$P + tv = P + (t/\lambda)w = Q + (t/\lambda + s_0)w = Q + sw,$$

wobei $s = t/\lambda + s_0$. Dies zeigt $g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$. Die Äquivalenz der Parameterdarstellung und der Beschreibung in Gleichungsform wurde bereits im Beweis von Lemma 2.3.9 gezeigt, siehe (47). \square

BEMERKUNG 2.3.19. Sind A und B zwei verschiedene Punkte einer Geraden g , dann hat g die Parameterdarstellung $g = \{A + t(B - A) : t \in \mathbb{R}\}$. Dies folgt aus Lemma 2.3.18, denn $B - A$ ist Richtungsvektor von g .

BEISPIEL 2.3.20. Die Gerade $g = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ soll durch eine Gleichung beschrieben werden. Nach Lemma 2.3.18 lässt sich g durch eine Gleichung der Form $2x_1 - x_2 = b$ beschreiben. Einsetzen des Punktes $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ liefert $b = 10$ und wir erhalten die Darstellung

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 = 10 \right\}.$$

BEISPIEL 2.3.21. Es soll die Gerade durch die beiden Punkte $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ durch eine Parameterdarstellung und auch durch eine Gleichung beschrieben werden. Wir bestimmen dazu einen Richtungsvektor $B - A = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und erhalten mit Lemma 2.3.18 die Darstellungen

$$g(A, B) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 4x_1 - 3x_2 = -1 \right\}.$$

BEISPIEL 2.3.22. Die Gerade $g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 7x_1 + 8x_2 = 21 \right\}$ soll durch eine Parameterdarstellung beschrieben werden. Nach Bemerkung 2.3.17 ist $\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von g . In der Gleichung für g setzen wir $x_2 = 0$ und erhalten $x_1 = 3$. Somit ist $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Punkt auf g und wir erhalten mit Lemma 2.3.18 die Parameterdarstellung

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

BEMERKUNG 2.3.23 (Beschreibungen durch äquivalente Gleichungen). Zwei Gleichungen $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ und $\tilde{a}_1x_1 + \tilde{a}_2x_2 = \tilde{b}$ beschreiben dieselbe Gerade,

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \tilde{a}_1x_1 + \tilde{a}_2x_2 = \tilde{b} \right\},$$

genau dann wenn $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $\tilde{a}_1 = \lambda a_1$, $\tilde{a}_2 = \lambda a_2$ und $\tilde{b} = \lambda b$. (Übungen)

DEFINITION 2.3.24 (Parallele Geraden in \mathbb{R}^2). Zwei Geraden g und h in \mathbb{R}^2 werden *parallel* genannt, falls $g = h$ oder $g \cap h = \emptyset$ gilt. Wir schreiben in diesem Fall $g \parallel h$, vgl. Definition 1.1.2.

Aus der Injektivität der Koordinatenabbildung, siehe Proposition 2.3.4, erhalten wir:

PROPOSITION 2.3.25 (Parallele Geraden in Koordinaten). *Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems. Zwei Geraden g und h in \mathcal{E} sind genau dann parallel, wenn $x(g)$ und $x(h)$ parallel Geraden in \mathbb{R}^2 sind.*

DEFINITION 2.3.26 (Parallele Vektoren in \mathbb{R}^2). Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ werden *parallel* genannt falls $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $v = \lambda w$. In diesem Fall schreiben wir $v \parallel w$.

BEMERKUNG 2.3.27. Parallel zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

LEMMA 2.3.28. *Zwei Vektoren $0 \neq v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $0 \neq w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ sind genau dann parallel, wenn $v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0$ gilt.*

BEWEIS. Dies folgt aus (46). □

PROPOSITION 2.3.29 (Parallele Geraden in \mathbb{R}^2). *Zwei Geraden in \mathbb{R}^2 sind genau dann parallel wenn ihre Richtungsvektoren parallel sind.*

BEWEIS. Sei $g = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$ eine Gerade und h eine weitere Gerade mit Richtungsvektor w . Wir bezeichnen die Komponenten dieser Vektoren mit $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$. Nach Lemma 2.3.18 lässt sich h in der Form

$$h = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : w_2 x_1 - w_1 x_2 = b \right\}$$

schreiben, für eine geeignetes $b \in \mathbb{R}$. Die Schnittpunkte von g und h entsprechen daher den Parametern $t \in \mathbb{R}$, die der Gleichung

$$w_2(p_1 + tv_1) - w_1(p_2 + tv_2) = b$$

genügen. Äquivalent kann diese Gleichung in der Form

$$t(w_2 v_1 - w_1 v_2) = b - w_2 p_1 + w_1 p_2$$

geschrieben werden. Die beiden Geraden g und h schneiden sich genau dann in einem einzigen Punkt, wenn diese Gleichung eine eindeutige Lösung $t \in \mathbb{R}$ besitzt. Dies ist offensichtlich genau dann der Fall wenn $w_2 v_1 - w_1 v_2 \neq 0$ gilt. Die Geraden g und h sind daher genau dann parallel, wenn $w_2 v_1 - w_1 v_2 = 0$ gilt. Nach Lemma 2.3.28 ist dies genau dann der Fall wenn die Richtungsvektoren v und w parallel sind. □

BEMERKUNG 2.3.30 (Parallele in Parameterdarstellung). Sei g eine Gerade in \mathbb{R}^2 mit Richtungsvektor v und sei P ein weiterer Punkt in \mathbb{R}^2 . Dann ist $\{P + tv : t \in \mathbb{R}\}$ die eindeutige Parallele zu g durch P .

BEISPIEL 2.3.31. Es soll die Parallele zur Geraden $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ durch den Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ bestimmt werden. Nach Bemerkung 2.3.30 ist sie durch $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ gegeben.

BEMERKUNG 2.3.32 (Parallele in Gleichungsform). Sei $g = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : a_1x_1 + a_2x_2 = b \right\}$ eine Gerade in Gleichungsform und $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$ ein Punkt in \mathbb{R}^2 . Setzen wir $c := a_1p_1 + a_2p_2$, dann ist $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = c \right\}$ die eindeutige Parallele zu g durch P .

BEISPIEL 2.3.33. Es soll die Parallele zur Geraden $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 7x_2 = 1 \right\}$ durch den Punkt $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$ in Gleichungsform bestimmt werden. Nach Bemerkung 2.3.32 ist diese durch

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 7x_2 = 30 \right\}$$

gegeben.

BEMERKUNG 2.3.34 (Schnitt von Geraden und Gleichungssysteme). Da sich Geraden in \mathbb{R}^2 durch lineare Gleichungen beschreiben lassen, kann der Schnittpunkt zweier Geraden durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmt werden. Sind beide Geraden in Gleichungsform gegeben, erhalten wir ein System von zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen (den beiden Komponenten des Schnittpunkts). Auch wenn beide Geraden in Parameterdarstellung gegeben sind, führt die Schnittpunktbestimmung auf ein System von zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen (den Parametern der beiden Parameterdarstellungen). Liegt eine Gerade in Parameterdarstellung vor und ist die andere durch eine Gleichung beschrieben, dann führt Einsetzen der Parameterdarstellung in die Gleichung auf eine einzige lineare Gleichung in einer Variable (dem Parameter der Parameterdarstellung). Sind die Geraden nicht parallel, dann haben sie genau einen Schnittpunkt und entsprechend haben die Gleichungssysteme (bzw. die Gleichung) genau eine Lösung.

BEWEIS DES ORIENTIERTEN STRAHLENSATZES 2.1.12 MITTELS KOORDINATEN. Wir betrachten das Koordinatensystem (O, B, B') und die damit assoziierte Koordinatenabbildung $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Es gilt daher, siehe Bemerkung 2.3.5,

$$x(O) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B') = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus Proposition 2.3.12 oder aus der Definition der Koordinatenabbildung erhalten wir

$$x(A) = \begin{pmatrix} -\frac{AO}{OB} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(A') = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{A'O}{OB'} \end{pmatrix}.$$

Für die Richtungsvektoren der Geraden $g(x(A), x(A'))$ und $g(x(B), x(B'))$ folgt

$$x(A') - x(A) = \begin{pmatrix} \frac{AO}{OB} \\ -\frac{A'O}{OB'} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B') - x(B) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 g(A, A') \| g(B, B') &\Leftrightarrow g(x(A), x(A')) \| g(x(B), x(B')) && \text{nach Proposition 2.3.25} \\
 &\Leftrightarrow x(A') - x(A) \| x(B') - x(B) && \text{nach Proposition 2.3.29} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{AO}{OB} \\ -\frac{A'O}{OB'} \end{pmatrix} \| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} && \text{nach (50)} \\
 &\Leftrightarrow \frac{AO}{OB} \cdot 1 - \left(-\frac{A'O}{OB'}\right) \cdot (-1) = 0 && \text{nach Lemma 2.3.28} \\
 &\Leftrightarrow \frac{AO}{OB} = \frac{A'O}{OB'}
 \end{aligned}$$

Damit ist der Satz 2.1.12 erneut bewiesen. Da der Strahlensatz bei der Herleitung grundlegender Eigenschaften affiner Koordinatensysteme eine wesentliche Rolle spielt, ist es allerdings nicht besonders überraschen, dass er sich damit nun leicht beweisen lässt. \square

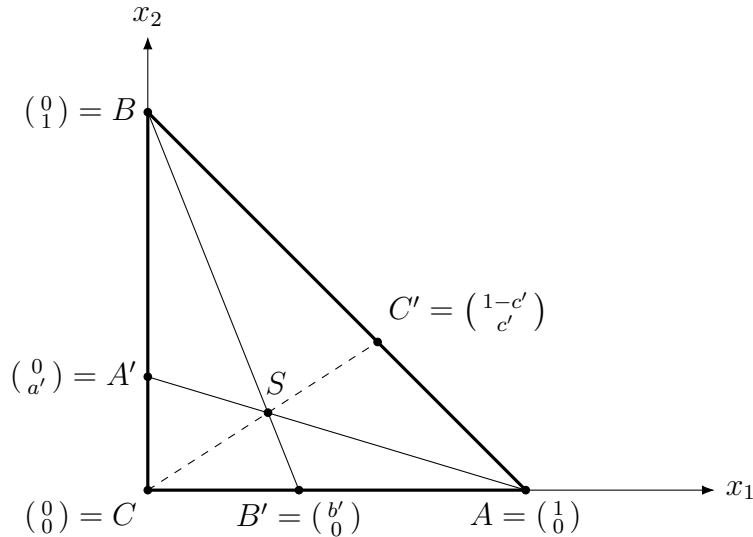
BEWEIS DES SATZES VON CEVA 2.1.14 MITTELS KOORDINATEN. Wir betrachten das affine Koordinatensystem (C, A, B) und die damit assoziierte Koordinatenabbildung $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$. Es gilt daher, siehe Bemerkung 2.3.5,

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(C) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (51)$$

Da die Punkte A' , B' und C' auf den Trägergeraden der Dreiecksseiten liegen, müssen ihre Koordinaten von der Form

$$x(A') = \begin{pmatrix} 0 \\ a' \end{pmatrix}, \quad x(B') = \begin{pmatrix} b' \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(C') = \begin{pmatrix} 1-c' \\ c' \end{pmatrix}. \quad (52)$$

sein, siehe Satz 2.3.6. Da diese Punkte nach Voraussetzung verschieden von den Eckpunkten



des Dreiecks sind, gilt $a', b', c' \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Aus Proposition 2.3.12 erhalten wir

$$\frac{AB'}{B'C} = \frac{1-b'}{b'}, \quad \frac{BC'}{C'A} = \frac{1-c'}{c'} \quad \text{und} \quad \frac{CA'}{A'B} = \frac{a'}{1-a'}, \quad (53)$$

denn

$$\begin{aligned}x(B') - x(A) &= \frac{1-b'}{b'}(x(C) - x(B')), \\x(C') - x(B) &= \frac{1-c'}{c'}(x(A) - x(C')), \\x(A') - x(C) &= \frac{a'}{1-a'}(x(B) - x(A')).\end{aligned}$$

Um den Schnittpunkt der Geraden $g(x(A), x(A'))$ und $g(x(B), x(B'))$ zu berechnen bestimmen wir die Richtungsvektoren

$$x(A') - x(A) = \begin{pmatrix} -1 \\ a' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B') - x(B) = \begin{pmatrix} b' \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Wir erhalten folgende Darstellungen durch Gleichungen, siehe Lemma 2.3.18,

$$\begin{aligned}g(x(A), x(A')) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a'x_1 + x_2 = a' \right\} \quad \text{und} \\g(x(B), x(B')) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + b'x_2 = b' \right\}.\end{aligned}$$

Nach Proposition 2.3.29 und Lemma 2.3.28 sind diese beiden Geraden genau dann parallel wenn $a'b' = 1$ gilt, siehe (54). Wir nehmen an, dass sie nicht parallel sind und bezeichnen ihren Schnittpunkt mit S . Eine einfache Rechnung liefert

$$S = \frac{1}{1 - a'b'} \begin{pmatrix} (1 - a')b' \\ a'(1 - b') \end{pmatrix}. \quad (55)$$

Es gilt nun:

$$\begin{aligned}g(A, A'), g(B, B'), g(C, C') &\text{ schneiden sich in einem Punkt} \\ \Leftrightarrow g(x(A), x(A')), g(x(B), x(B')), g(x(C), x(C')) &\text{ konkurrent} \\ \Leftrightarrow x(C), S, x(C') &\text{ liegen auf einer Geraden} \\ \Leftrightarrow S - x(C) \text{ und } x(C') - x(C) &\text{ sind parallel} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (1 - a')b' \\ a'(1 - b') \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 - c' \\ c' \end{pmatrix} &\quad (\text{siehe (51), (52) und (55)}) \\ \Leftrightarrow (1 - a')b'c' - a'(1 - b')(1 - c') = 0 &\quad (\text{nach Lemma 2.3.28}) \\ \Leftrightarrow \frac{1 - b'}{b'} \cdot \frac{1 - c'}{c'} \cdot \frac{a'}{1 - a'} = 1 & \\ \Leftrightarrow \frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{BC'}{C'A} \cdot \frac{CA'}{A'B} = 1 &\quad (\text{siehe (53)})\end{aligned}$$

Auch der Fall paralleler Geraden lässt sich leicht behandeln. Nach Lemma 2.3.28 sind die beiden Geraden $g(A, A')$ und $g(C, C')$ genau dann parallel wenn $(1 - c')a' = -c'$ gilt, siehe (52) und (54). Damit ist der Satz von Ceva erneut bewiesen. \square

DEFINITION 2.3.35 (Skalarprodukt und Norm). Unter dem *Standardskalarprodukt* zweier Vektoren $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ verstehen wir die Zahl

$$\langle v, w \rangle := v_1w_1 + v_2w_2.$$

Unter der *Norm* von v verstehen wir die Zahl

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Beachte, dass die Wurzel existiert, denn $\langle v, v \rangle = v_1^2 + v_2^2 \geq 0$.

LEMMA 2.3.36 (Eigenschaften des Skalarprodukts). Für $v, v', w, w \in \mathbb{R}^2$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (Symmetrie)
- (b) $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$ und $\langle tv, w \rangle = t\langle v, w \rangle$ (Linearität in der ersten Variable)
- (c) $\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$ und $\langle v, tw \rangle = t\langle v, w \rangle$ (Linearität in der zweiten Variable)
- (d) $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (positiv definit)

BEWEIS. Die Aussage in (a) ist offensichtlich, denn

$$\langle v, w \rangle = v_1w_1 + v_2w_2 = w_1v_1 + w_2v_2 = \langle w, v \rangle.$$

Auch die Aussage in (b) lässt sich direkt verifizieren, denn

$$\langle v + v', w \rangle = (v_1 + v'_1)w_1 + (v_2 + v'_2)w_2 = v_1w_1 + v'_1w_1 + v_2w_2 + v'_2w_2 = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$$

und

$$\langle tv, w \rangle = (tv_1)w_1 + (tv_2)w_2 = t(v_1w_1 + v_2w_2) = t\langle v, w \rangle.$$

Die Aussage in (c) folgt durch Kombination von (a) und (b). Genauer, gilt

$$\langle v, w + w' \rangle = \langle w + w', v \rangle = \langle w, v \rangle + \langle w', v \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$$

und

$$\langle v, tw \rangle = \langle tw, v \rangle = t\langle w, v \rangle = t\langle v, w \rangle.$$

Da Quadrate nicht negativ sind, gilt $\langle v, v \rangle = v_1^2 + v_2^2 \geq 0$. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $v_1^2 = 0 = v_2^2$. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $v_1 = 0 = v_2$, also genau dann wenn $v = 0$. \square

BEMERKUNG 2.3.37. Mit den Rechenregeln in Lemma 2.3.36 folgt:

$$\begin{aligned} \|v + w\|^2 &= \langle v + w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v + w \rangle + \langle w, v + w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2. \end{aligned} \tag{56}$$

Eine analoge Rechnung zeigt auch

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2. \tag{57}$$

LEMMA 2.3.38 (Cauchy–Schwartz Ungleichung). Für $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\| \tag{58}$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn ein der beiden Vektor ein Vielfaches des anderen ist.

BEWEIS. O.B.d.A. sei $v \neq 0$. Sei $t := \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2}$ und daher $\langle v, w - tv \rangle = \langle v, w \rangle - t\langle v, v \rangle = 0$. Mit (56) und $\|tv\|^2 = \langle tv, tv \rangle = t\langle v, tv \rangle = t^2\langle v, v \rangle = t^2\|v\|^2$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|tv + (w - tv)\|^2 \\ &= \|tv\|^2 + 2\langle tv, w - tv \rangle + \|w - tv\|^2 \\ &= t^2\|v\|^2 + 2t\langle v, w - tv \rangle + \|w - tv\|^2 \\ &= t^2\|v\|^2 + \|w - tv\|^2 \\ &\geq t^2\|v\|^2 \\ &= \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

Somit $\langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2\|w\|^2$ und daher (58). Gleichheit tritt genau dann ein wenn $\|w - tv\|^2 = 0$, d.h. genau dann wenn $w - tv = 0$ ist, also genau dann wenn w ein Vielfaches von v ist. \square

LEMMA 2.3.39 (Eigenschaften der Norm). Für $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (nicht-degeneriert)
- (b) $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$ (Homogenität)
- (c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

BEWEIS. Die Aussage in (a) folgt sofort aus Lemma 2.3.36(d). Die Aussage in (b) folgt sofort aus Lemma 2.3.36(b)&(c), denn

$$\|tv\|^2 = \langle tv, tv \rangle = t\langle v, tv \rangle = t^2\langle v, v \rangle = t^2\|v\|^2,$$

und daher $\|tv\| = |t| \cdot \|v\|$. Mit (56) und Lemma 2.3.38 erhalten wir

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2,$$

und dann (c). \square

DEFINITION 2.3.40 (Kartesisches Koordinatensystem). Unter einem *kartesischen Koordinatensystem* der Ebene verstehen wir ein affines Koordinatensystem (O, X_1, X_2) , für das $\angle X_1 O X_2$ ein rechter Winkel ist und $|OX_1| = 1 = |OX_2|$ gilt.

SATZ 2.3.41 (Punktabstand in kartesischen Koordinaten). Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die *Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems*. Für Punkte A und B gilt dann

$$|AB| = \|x(B) - x(A)\|.$$

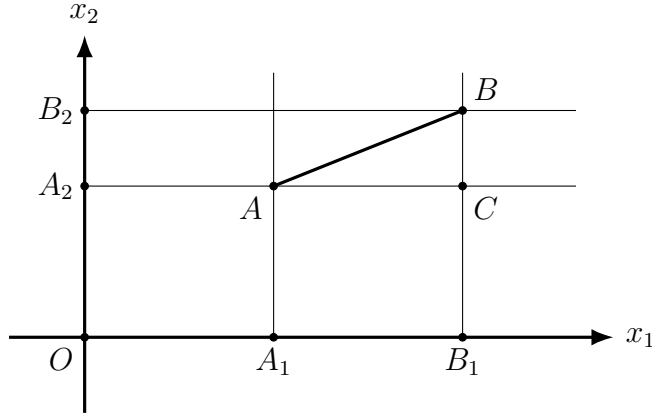
Strecken AB und CD sind genau dann kongruent, wenn $\|x(B) - x(A)\| = \|x(D) - x(C)\|$.

BEWEIS. Wir betrachten die Parallelen zu den beiden Achsen durch A und B und bezeichnen die Schnittpunkte wie in der Skizze angedeutet. Ist $A_1 \neq B_1$ und $A_2 \neq B_2$, dann bildet ABC ein rechtwinkeliges Dreieck und wir erhalten aus Satz 1.5.49 (Pythagoras)

$$|AB|^2 = |AC|^2 + |CB|^2.$$

In diesem Fall bilden ACB_1A_1 und BCA_2B_2 Parallelogramme, nach Satz 1.5.10 gilt daher

$$|AC| = |A_1B_1| \quad \text{und} \quad |CB| = |A_2B_2|.$$



Beachte, dass alle drei Gleichungen gültig bleiben, falls $A_1 = B_1$ oder $A_2 = B_2$. Aus Proposition 2.2.8 folgt

$$|A_1B_1| = |x_1(B) - x_1(A)| \quad \text{und} \quad |A_2B_2| = |x_2(B) - x_2(A)|.$$

Kombinieren wir diese Relationen, erhalten wir

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AC|^2 + |CB|^2 \\ &= |A_1B_1|^2 + |A_2B_2|^2 \\ &= |x_1(B) - x_1(A)|^2 + |x_2(B) - x_2(A)|^2 \\ &= (x_1(B) - x_1(A))^2 + (x_2(B) - x_2(A))^2 = \|x(B) - x(A)\|^2, \end{aligned}$$

also $|AB| = \|x(B) - x(A)\|$. Die zweite Aussage des Satzes folgt unmittelbar. \square

KOROLLAR 2.3.42 (Kreise in kartesischen Koordinaten). *Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Ist Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r , dann gilt*

$$x(\Gamma) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2 \right\},$$

wobei $x(M) = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ die Koordinaten des Mittelpunkts bezeichnen.

SATZ 2.3.43 (Kongruente Winkel in kartesischen Koordinaten). *Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Zwei Winkel $\angle ABC$ und $\angle A'B'C'$ sind genau dann kongruent wenn*

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{\langle v', w' \rangle}{\|v'\| \|w'\|}, \quad (59)$$

wobei $v := x(A) - x(B)$, $w := x(C) - x(B)$, $v' := x(A') - x(B')$ und $w' := x(C') - x(B')$.

BEWEIS. Wir betrachten Winkel $\angle A''B''C''$, wobei $B'' := B'$, A'' ein Punkt auf dem Schenkel $(B'A')>$, und C'' ein Punkt auf dem Schenkel $(B'C'>$, sodass

$$|B''A''| = |BA| \quad \text{und} \quad |B''C''| = |BC|. \quad (60)$$

Nach Konstruktion gilt

$$\angle A''B''C'' = \angle A'B'C'. \quad (61)$$

Wegen (48) existieren $s > 0$ und $t > 0$, sodass $v'' = sv'$ und $w'' = tw'$, wobei $v'' := x(A'') - x(B'')$ und $w'' := x(C'') - x(B'')$. Mit Lemma 2.3.36 und Lemma 2.3.39 folgt

$$\frac{\langle v'', w'' \rangle}{\|v''\| \|w''\|} = \frac{\langle sv', tw' \rangle}{\|sv'\| \|tw'\|} = \frac{st}{|s||t|} \cdot \frac{\langle v', w' \rangle}{\|v'\| \|w'\|} = \frac{\langle v', w' \rangle}{\|v'\| \|w'\|}. \quad (62)$$

Wegen (60) folgt aus Satz 1.4.3 (SWS) und Satz 1.4.18 (SSS)

$$\angle ABC \equiv \angle A''B''C'' \Leftrightarrow |CA| = |C''A''|. \quad (63)$$

Mit Proposition 2.3.41 und (57) und weil $x(A) - x(C) = v - w$ gilt

$$|CA|^2 = \|x(A) - x(C)\|^2 = \|v - w\|^2 = \|v\|^2 - 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$$

und analog

$$|C''A''|^2 = \|v''\|^2 - 2\langle v'', w'' \rangle + \|w''\|^2.$$

Proposition 2.3.41 und (60) erhalten wir $\|v''\| = |BA''| = |BA| = \|v\|$ sowie $\|w''\| = |BC''| = |BC| = \|w\|$. Somit

$$|CA| = |C''A''| \Leftrightarrow \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{\langle v'', w'' \rangle}{\|v''\| \|w''\|} \quad (64)$$

Der Satz folgt nun durch Kombination von (61), (62), (63) und (64). \square

KOROLLAR 2.3.44 (Rechte Winkel in kartesischen Koordinaten). *Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Ein Winkel $\angle ABC$ ist genau dann ein rechter, wenn $\langle v, w \rangle = 0$ gilt, wobei $v := x(A) - x(B)$ und $w := x(C) - x(B)$.*

BEWEIS. Wir betrachten den Winkel $\angle A'B'C'$, wobei $A' = A$, $B' = B$ und C' der Punkt mit Koordinaten $x(C') = x(B) - (x(C) - x(B))$ ist. Nach Konstruktion liegt C' auf der Halbgeraden $\langle B \rangle C$, siehe (49), also sind $\angle ABC$ und $\angle A'B'C'$ Nebenwinkel. Somit ist $\angle ABC$ genau dann ein rechter Winkel, wenn $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ gilt, siehe Definition 1.4.30. Nach Satz 2.3.43 ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} = \frac{\langle v', w' \rangle}{\|v'\| \|w'\|} \quad (65)$$

gilt, wobei $v' = x(A') - x(B')$ und $w' = x(C') - x(B')$. Nach Konstruktion haben wir $v' = v$ und $w' = -w$, also auch $\|v'\| = \|v\|$, $\|w'\| = \|w\|$ und $\langle v', w' \rangle = -\langle v, w \rangle$. Daher ist die Bedingung (65) zu $\langle v, w \rangle = 0$ äquivalent. \square

DEFINITION 2.3.45 (Orthogonale Vektoren in \mathbb{R}^2). Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ werden *orthogonal* genannt, wenn $\langle v, w \rangle = 0$ gilt. In diesem Fall sagen wir auch v und w stehen *normal* aufeinander und schreiben $v \perp w$.

Steht ein Vektor $n \in \mathbb{R}^2$ normal auf einen Richtungsvektor v einer Geraden g in \mathbb{R}^2 , d.h. gilt $\langle n, v \rangle = 0$, dann steht n auf alle Richtungsvektoren von g normal. Nach Bemerkung 2.3.16(b) ist jeder weitere Richtungsvektor w von g nämlich von der Form $w = \lambda v$ für ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ und daher gilt auch $\langle n, w \rangle = \langle n, \lambda v \rangle = \lambda \langle n, v \rangle = 0$.

DEFINITION 2.3.46 (Orthogonale Geraden in \mathbb{R}^2). Zwei Geraden in \mathbb{R}^2 werden *orthogonal* genannt, wenn ihre Richtungsvektoren normal aufeinander stehen. In diesem Fall sagen wir auch *die Geraden stehen normal aufeinander*.

BEMERKUNG 2.3.47. Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Nach Korollar 2.3.44 stehen zwei Geraden g und h in \mathcal{E} genau dann normal aufeinander, wenn die Geraden $x(g)$ und $x(h)$ in \mathbb{R}^2 normal aufeinander stehen.

BEMERKUNG 2.3.48. Sei $0 \neq v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Nach (46) haben wir:

$$\langle v, n \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v_1 n_1 + v_2 n_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} : n = \lambda \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere erhalten wir einen zu v normalen Vektor indem wir die beiden Komponenten von v vertauschen und eine davon mit -1 multiplizieren. Alle anderen Vektoren, die normal auf v stehen sind Vielfache davon.

DEFINITION 2.3.49 (Normalvektor einer Geraden in \mathbb{R}^2). Unter einem *Normalvektor* einer Geraden in \mathbb{R}^2 verstehen wir jeden Vektor $0 \neq n \in \mathbb{R}^2$, der normal auf die Richtungsvektoren der Geraden steht.

BEMERKUNG 2.3.50. Sei g eine Gerade in \mathbb{R}^2 .

- (a) Ist n Normalvektor von g und $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, dann ist auch λn Normalvektor von g .
- (b) Sind n und m zwei Normalvektoren von g , dann existiert $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ mit $m = \lambda n$.
- (c) $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ist genau dann Richtungsvektor von g , wenn $\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ Normalvektor von g ist.

Dies folgt unmittelbar aus Bemerkung 2.3.48.

BEMERKUNG 2.3.51 (Normalvektordarstellung von Geraden). Ist A ein Punkte einer Geraden g in \mathbb{R}^2 mit Normalvektor n , dann lässt sich g in der Form

$$g = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X - A \rangle = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X \rangle = \langle n, A \rangle\}$$

schreiben. Umgekehrt ist jede Menge der Gestalt $\{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X - A \rangle = 0\}$, wobei $n, A \in \mathbb{R}^2$ und $n \neq 0$, eine Gerade mit Normalvektor n , die durch den Punkt A läuft. Dies folgt aus Lemma 2.3.18 und Bemerkung 2.3.50(c), denn $\langle n, X \rangle = n_1 x_1 + n_2 x_2$, wenn wir die Komponenten von n und X mit $n = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$ und $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ bezeichnen.

BEISPIEL 2.3.52. Die Gerade durch die beiden Punkte $A = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ soll durch eine Gleichung beschrieben werden. Wir berechnen einen Richtungsvektor $B - A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und erhalten einen Normalvektor $n = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, siehe Bemerkung 2.3.50(c). Nach Bemerkung 2.3.51 besitzt die Gerade die Normalvektordarstellung

$$g(A, B) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, X - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 : \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, X \right\rangle = 15 \right\}.$$

BEMERKUNG 2.3.53 (Lot in \mathbb{R}^2). Sei $A \in \mathbb{R}^2$ und g eine Gerade in \mathbb{R}^2 mit Richtungsvektor v und Normalvektor n . Dann ist

$$\{A + tn : t \in \mathbb{R}\} = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle v, X - A \rangle = 0\}$$

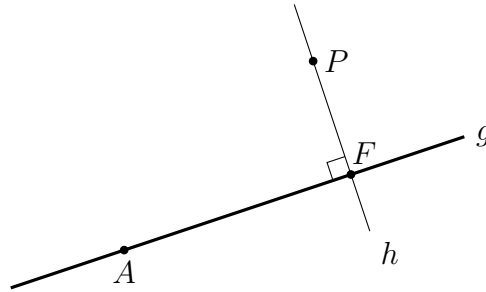
die eindeutige Gerade in \mathbb{R}^2 , die normal auf g steht und durch A geht. Dies folgt unmittelbar aus Bemerkung 2.3.51, denn jede Gerade, die normal auf g steht, hat Richtungsvektor n und Normalvektor v .

PROPOSITION 2.3.54 (Normalprojektion in kartesischen Koordinaten). *Sei A ein Punkt auf einer Geraden g , sei P ein weiterer Punkt und bezeichne F den Fußpunkt des Lots durch A auf g . Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems, v Richtungsvektor von $x(g)$, n Normalvektor von $x(g)$ und $w := x(P) - x(A)$. Dann sind die Koordinaten des Fußpunkts durch die Formel*

$$x(F) = x(P) - \frac{\langle n, w \rangle}{\|n\|^2} n = x(A) + \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|^2} v$$

gegeben. Für den Normalabstand von P zu g haben wir

$$d(P, g) = |PF| = \frac{|\langle n, w \rangle|}{\|n\|} \quad \text{und} \quad |AF| = \frac{|\langle v, w \rangle|}{\|v\|}.$$



BEWEIS. Bezeichnet h das Lot durch P auf g dann gilt

$$x(h) = \{x(P) + tn : t \in \mathbb{R}\},$$

siehe Bemerkung 2.3.53. Für die Koordinatendarstellung der Geraden g gilt

$$x(g) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle n, X - x(A) \rangle = 0\},$$

siehe Bemerkung 2.3.51. Schneiden von $x(h)$ mit $x(g)$ führt auf die Gleichung

$$\langle n, x(P) + tn - x(A) \rangle = 0.$$

Auflösen nach t liefert $t = -\frac{\langle n, w \rangle}{\|n\|^2}$, siehe Lemma 2.3.36. Bezeichnet F den Fußpunkt des Lots, d.h. den Schnittpunkt von g und h , erhalten wir daher

$$x(F) = x(P) - \frac{\langle n, w \rangle}{\|n\|^2} n.$$

Für den Normalabstand folgt mit Satz 2.3.41 und Lemma 2.3.39(b)

$$d(P, g) = |PF| = \|x(F) - x(P)\| = \left\| -\frac{\langle n, w \rangle}{\|n\|^2} n \right\| = \frac{|\langle n, w \rangle|}{\|n\|^2} \|n\| = \frac{|\langle n, w \rangle|}{\|n\|}.$$

Beachte, dass F auch Fußpunkt des Lots durch A auf h ist. Da $x(h)$ Normalvektor v hat und $x(A) - x(P) = -w$ gilt, folgen die verbleibenden Formel aus dem bereits Gezeigten. \square

HÖHENSCHNITTPUNKT MIT KARTESISCHEM KOORDINATENSYSTEM. Wir wollen uns erneut davon überzeugen, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks ABC in einem Punkt schneiden. Sei dazu $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Um die Notation zu vereinfachen schreiben wir $\tilde{A} := x(A)$, $\tilde{B} := x(B)$ und $\tilde{C} := x(C)$ für die Koordinaten der Eckpunkte. Wir bezeichnen die drei Höhen mit h_A , h_B und h_C . Da die Höhe durch A normal auf die Seite BC steht, ist $\tilde{C} - \tilde{B}$ Normalvektor von $x(h_A)$, siehe Bemerkung 2.3.47. Ebenso sind $\tilde{A} - \tilde{C}$ und $\tilde{B} - \tilde{A}$ Normalvektoren von $x(h_B)$ bzw. $x(h_C)$. Mit Bemerkung 2.3.51 erhalten wir die Koordinatendarstellungen:

$$x(h_A) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{C} - \tilde{B}, X \rangle = \langle \tilde{C}, \tilde{A} \rangle - \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle\}, \quad (66)$$

$$x(h_B) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{A} - \tilde{C}, X \rangle = \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle - \langle \tilde{C}, \tilde{B} \rangle\}, \quad (67)$$

$$x(h_C) = \{X \in \mathbb{R}^2 : \langle \tilde{B} - \tilde{A}, X \rangle = \langle \tilde{B}, \tilde{C} \rangle - \langle \tilde{A}, \tilde{C} \rangle\}. \quad (68)$$

Sei nun H der Schnittpunkt von h_A und h_B . Es genügt zu zeigen, dass H auch auf h_C liegt. Nach (66) und (67) erfüllen die Koordinaten $x(H)$ des Punktes H die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{C} - \tilde{B}, x(H) \rangle &= \langle \tilde{C}, \tilde{A} \rangle - \langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle, \\ \langle \tilde{A} - \tilde{C}, x(H) \rangle &= \langle \tilde{A}, \tilde{B} \rangle - \langle \tilde{C}, \tilde{B} \rangle. \end{aligned}$$

Addition der beiden Relationen führt auf

$$\langle \tilde{A} - \tilde{B}, x(H) \rangle = \langle \tilde{C}, \tilde{A} \rangle - \langle \tilde{C}, \tilde{B} \rangle,$$

das Negative der Gleichung in (68). Daher $x(H) \in x(h_C)$ und schließlich $H \in h_C$. \square

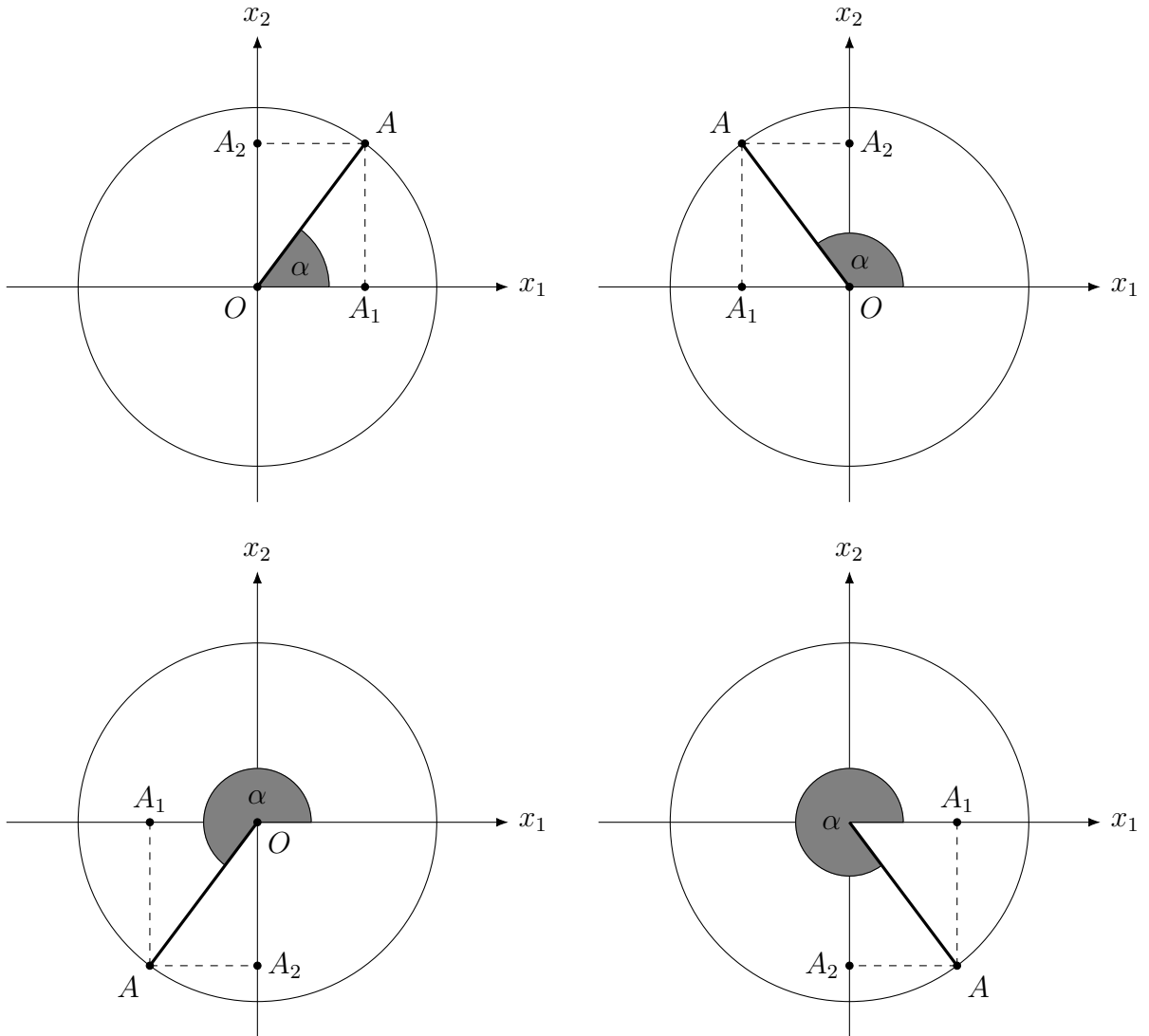
2.4. Trigonometrie. Das Gradmaß ordnet jeder reellen Zahl x einen Winkel zu, der mit x° bezeichnet wird. Diese Abbildung, $\mathbb{R} \rightarrow \mathcal{W}$, $x \mapsto x^\circ$, ist durch folgende Eigenschaften eindeutig charakterisiert: Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

- (i) $(x + y)^\circ = x^\circ + y^\circ$ (Additivität),
- (ii) $x < y$ gilt $x^\circ < y^\circ$ (Monotonie) und
- (iii) $90^\circ = R$ (Normierung durch rechten Winkel).

Bei der Konstruktion des Gradmaßes geht das Vollständigkeitsaxiom D aus Abschnitt 1.6 wesentlich ein. Wir werden die Konstruktion hier nicht besprechen, eine Skizze findet sich in [Harvey, Section 7.3]. Es lässt sich zeigen, dass das Gradmaß eine Bijektion $\mathbb{R} \cong \mathcal{W}$ liefert, d.h. zu jedem Winkel $\alpha \in \mathcal{W}$ existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\alpha = x^\circ$. Die geometrischen Winkel in \mathcal{W} sind genau die Winkel zwischen 0° und $180^\circ = 2R$.

DEFINITION 2.4.1 (Sinus und Kosinus). Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems (O, X_1, X_2) mit Koordinatenursprung O . Für jeden Winkel $\alpha \in \mathcal{W}$ definieren wir reelle Zahlen $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$ wie folgt. Wir tragen den Winkel α von der positiven ersten Halbachse auf der Halbebene, die die positive zweite Halbachse enthält ab und erhalten einen Halbgerade h mit Ausgangspunkt O , siehe Definition 1.4.42. Bezeichne A den Punkt auf h mit $|OA| = 1$, d.h. den eindeutigen Schnittpunkt von h und dem Einheitskreis mit Mittelpunkt O . Die Winkelfunktionen werden durch die Koordinaten des Punktes A definiert,

$$\cos \alpha := x_1(A) \quad \text{und} \quad \sin \alpha := x_2(A), \quad \text{d.h.} \quad x(A) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}.$$



Es gilt daher $\cos \alpha = \pm|OA_1|$ und $\sin \alpha = \pm|OA_2|$, wobei A_1 und A_2 , wie in der Abbildung angedeutet, die Projektionen auf die beiden Achsen bezeichnen.

BEMERKUNG 2.4.2. Wir werden bald sehen, dass die Winkelfunktionen nicht von der Wahl des kartesischen Koordinatensystems abhängen.

BEMERKUNG 2.4.3. In der Situation von Definition 2.4.1 sei nun A' ein beliebiger Punkt auf der Halbgeraden h und $r := |OA'|$. Dann gilt

$$x_1(A') = r \cdot \cos \alpha, \quad x_2(A') = r \cdot \sin \alpha, \quad \text{d.h.} \quad x(A') = r \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Nach Proposition 2.3.12 haben wir nämlich $x(O) - x(A') = \frac{A'O}{OA} \cdot (x(A) - x(O))$. Zusammen mit $x(O) = 0$ und $\frac{A'O}{OA} = -\frac{|A'O|}{|OA|} = -r$ folgt $x(A') = r \cdot x(A)$, also (69).

BEMERKUNG 2.4.4. Für jeden Winkel $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$ gilt

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Da A am Einheitskreis liegt und weil $x(O) = 0$ erhalten wir mit Satz 2.3.41 nämlich

$$1 = |OA|^2 = \|x(A) - x(O)\|^2 = \|x(A)\|^2 = x_1(A)^2 + x_2(A)^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha.$$

BEMERKUNG 2.4.5. Für jeden Winkel $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$ gilt

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1 \quad \text{und} \quad -1 \leq \sin \alpha \leq 1.$$

Aus Bemerkung 2.4.4 erhalten wir nämlich $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \geq \cos^2 \alpha$, also $|\cos \alpha| \leq 1$ und analog $|\sin \alpha| \leq 1$.

BEMERKUNG 2.4.6 (Spezielle Funktionswerte). Direkt aus der Definition lesen wir ab:

$$\begin{aligned} \cos(0^\circ) = \cos(360^\circ) &= 1, & \sin(0^\circ) = \sin(360^\circ) &= 0, \\ \cos(90^\circ) &= 0, & \sin(90^\circ) &= 1, \\ \cos(180^\circ) &= -1, & \sin(180^\circ) &= 0, \\ \cos(270^\circ) &= 0, & \sin(270^\circ) &= -1. \end{aligned}$$

BEMERKUNG 2.4.7 (Vorzeichen der Winkelfunktionen). Direkt aus der Definition folgt:

- (a) Für $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ gilt $0 < \cos \alpha < 1$ und $0 < \sin \alpha < 1$.
- (b) Für $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ gilt $-1 < \cos \alpha < 0$ und $0 < \sin \alpha < 1$.
- (c) Für $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ gilt $-1 < \cos \alpha < 0$ und $-1 < \sin \alpha < 0$.
- (d) Für $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ gilt $0 < \cos \alpha < 1$ und $-1 < \sin \alpha < 0$.

PROPOSITION 2.4.8 (Periodizität). Für beliebige Winkel $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$ gilt:

$$\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin(\alpha), \quad \sin(\alpha + 90^\circ) = \cos(\alpha), \quad (70)$$

$$\cos(\alpha + 180^\circ) = -\cos(\alpha), \quad \sin(\alpha + 180^\circ) = -\sin(\alpha), \quad (71)$$

$$\cos(\alpha + 360^\circ) = \cos(\alpha), \quad \sin(\alpha + 360^\circ) = \sin(\alpha). \quad (72)$$

BEWEIS. Die beiden Gleichungen in (72) sind offensichtlich, denn Abtragen der beiden Winkel α und $\alpha + 360^\circ$ liefert dieselbe Halbgerade h , vgl. Bemerkungen 1.4.43 und (1.4.46). Um die anderen Relationen einzusehen bezeichnen wir die Punkte am Einheitskreis, die wir durch Abtragen der Winkel α , $\alpha + 90^\circ$ und $\alpha + 180^\circ$ erhalten mit A , A' und A'' . Somit

$$x(A) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad x(A') = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 90^\circ) \\ \sin(\alpha + 90^\circ) \end{pmatrix}, \quad x(A'') = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + 180^\circ) \\ \sin(\alpha + 180^\circ) \end{pmatrix}. \quad (73)$$

Mit Bemerkung 1.4.43 und (1.4.46) sehen wir, dass O Mittelpunkt der Strecke AA'' ist. Es gilt daher $\frac{A''O}{OA} = 1$, siehe Bemerkung 2.1.4. Aus Proposition 2.3.12 erhalten wir $x(O) - x(A'') = \frac{A''O}{OA} \cdot (x(A) - x(O))$, also $x(A'') = -x(A)$, denn $x(O) = 0$. Mit (73) folgt

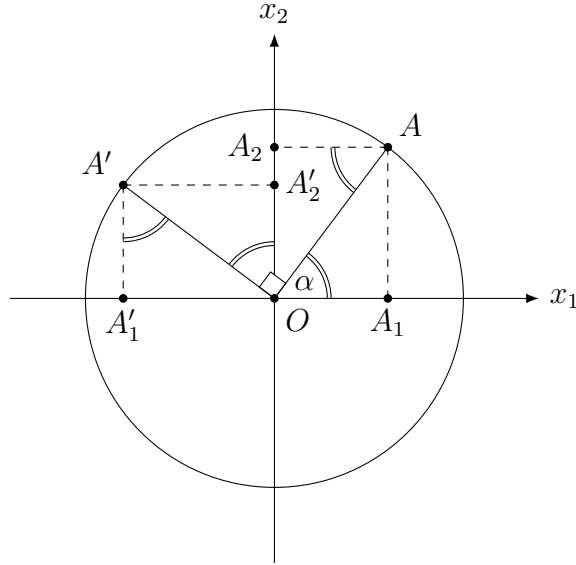
$$\cos(\alpha + 180^\circ) = x_1(A'') = -x_1(A) = -\cos(\alpha),$$

$$\sin(\alpha + 180^\circ) = x_2(A'') = -x_2(A) = -\sin(\alpha).$$

d.h. die beiden Gleichungen in (71).

Um (70) zu zeigen betrachten wir zunächst $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Wir bezeichnen die Projektionen von A und A' auf die beiden Koordinatenachsen mit A_1 , A_2 , A'_1 und A'_2 wie in der Abbildung angedeutet. Beachte $\sphericalangle A_1OA + 90^\circ = \sphericalangle A_1OA' = 90^\circ + \sphericalangle A'_2OA'$, also $\sphericalangle A_1OA = \sphericalangle A'_2OA'$. Mit dem Stufenwinkelsatz 1.5.4 folgt

$$\sphericalangle A_2AO = \sphericalangle A_1OA = \sphericalangle A'_2OA' = \sphericalangle A'_1A'O.$$



Nach Satz 1.4.27 (SWW) sind die Dreiecke OA_1A und OA'_2A' daher kongruent, es gilt daher $|OA_1| = |OA'_2|$. Ebenso sind die Dreiecke OA_2A und OA'_1A' kongruent, also $|OA_2| = |OA'_1|$. Mit (73) erhalten wir

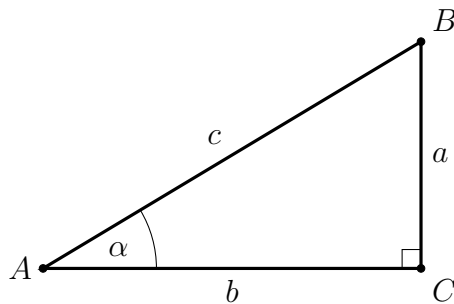
$$\begin{aligned}\cos(\alpha + 90^\circ) &= x_1(A') = -|OA'_1| = -|OA_2| = -x_2(A) = -\sin(\alpha), \\ \sin(\alpha + 90^\circ) &= x_2(A') = |OA'_2| = |OA_1| = x_1(A) = \cos(\alpha),\end{aligned}$$

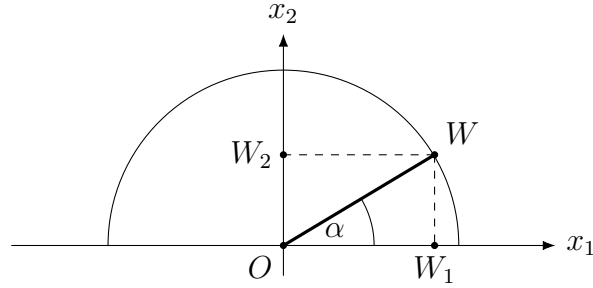
d.h. die beiden Gleichungen in (70) für Winkel $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Nach Bemerkung 2.4.6 bleibt dies für $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ richtig. Ist $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, dann existiert $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ mit $\alpha = \beta + 90^\circ$ und wir erhalten aus dem bereits Gezeigten

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + 90^\circ) &= \cos(\beta + 180^\circ) = -\cos(\beta) = -\sin(\beta + 90^\circ) = -\sin(\alpha), \\ \sin(\alpha + 90^\circ) &= \sin(\beta + 180^\circ) = -\sin(\beta) = \cos(\beta + 90^\circ) = \cos(\alpha).\end{aligned}$$

Damit sind die Gleichungen in (70) für Winkel $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ gezeigt. Nach (71) bleibt dies für $0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$ gültig. Mit (72) erhalten wir (70) für beliebige Winkel α . \square

PROPOSITION 2.4.9 (Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken). *Ist ABC ein rechtwinkeliges Dreieck mit Seiten $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, Winkel $\alpha := \sphericalangle CAB$ und rechtem Winkel $\gamma = \sphericalangle BCA = 90^\circ$, dann gilt $\cos \alpha = b/c$ und $\sin \alpha = a/c$.*





BEWEIS. Bezeichne W den Punkt am Einheitskreis, den wir durch Abtragen des Winkels α von der positiven ersten Koordinatenhalbachse erhalten. Die Schnittpunkte der Achsen mit den Parallelen zu den Achsen durch W bezeichnen wir mit W_1 und W_2 . Da α spitz ist, siehe Bemerkung 1.4.34, liegen W_1 und W_2 auf den positiven Koordinatenhalbachsen. Es gilt daher $x_1(W) = |OW_1|$ und $x_2(W) = |OW_2| = |W_1W|$, wobei wir im letzten Gleichheitszeichen Satz 1.5.10 verwendet haben. Nach Satz 1.5.43 (W:W:W) sind die Dreiecke ABC und OWW_1 ähnlich. Da $|OW| = 1$ erhalten wir

$$\cos \alpha = x_1(W) = |OW_1| = \frac{|OW_1|}{|OW|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{b}{c}$$

und

$$\sin \alpha = x_2(W) = |W_1W| = \frac{|W_1W|}{|OW|} = \frac{|CB|}{|AB|} = \frac{a}{c}. \quad \square$$

BEMERKUNG 2.4.10. Aus den Propositionen 2.4.9 und 2.4.8 folgt nun, dass die Winkel­funktionen nicht von der Wahl des kartesischen Koordinatensystems abhängen.

BEMERKUNG 2.4.11 (Symmetrien). Aus Bemerkung 1.4.46 und 2.4.10 folgt

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad \text{und} \quad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha).$$

für beliebige Winkel $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$. Kombinieren wir diese Symmetrien mit Proposition 2.4.8 erhalten wir auch

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{und} \quad \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha,$$

sowie

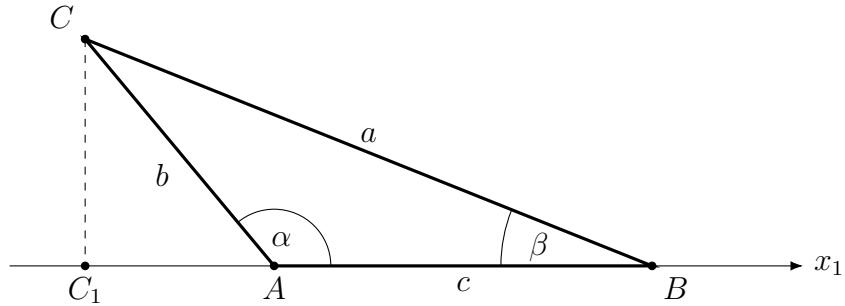
$$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha). \quad (74)$$

SATZ 2.4.12 (Sinussatz). Ist ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und Winkeln $\alpha = \angle CAB$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$, dann gilt

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

BEWEIS. Bezeichne C_1 den Fußpunkt der Höhe durch C . Betrachten wir ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung A , sodass B auf der positiven ersten Koordinatenhalbachse liegt und so, dass C und die positive zweite Koordinatenhalbachse auf derselben Seite der ersten Achse liegen, dann folgt aus Bemerkung 2.4.3

$$|CC_1| = b \sin \alpha.$$



Betrachten wir ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung B , sodass A auf der positiven ersten Koordinatenhalbachse liegt und so, dass C und die positive zweite Koordinatenhalbachse auf derselben Seite der ersten Achse liegen, dann folgt aus Bemerkung 2.4.3

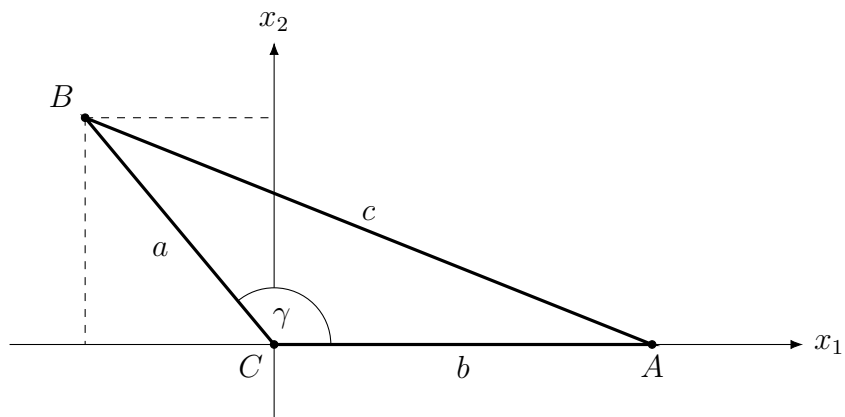
$$|CC_1| = a \sin \beta.$$

Somit gilt $b \sin \alpha = a \sin \beta$, und Division durch ab liefert die erste Gleichung des Satzes. Die zweite Gleichung folgt analog oder durch Umbenennen der Eckpunkte. \square

SATZ 2.4.13 (Kosinussatz). *Ist ABC ein Dreieck mit Seitenlängen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ und Winkel $\gamma = \sphericalangle BCA$, dann gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

BEWEIS. Wir wählen ein kartesisches Koordinatensystem mit Ursprung C so, dass A auf der positiven ersten Koordinatenhalbachse liegt und so, dass B und die positive zweite Koordinatenhalbachse auf derselben Seite der ersten Koordinatenachse liegen. Bezeichnet



$x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die damit assoziierte Koordinatenabbildung dann gilt, siehe Bemerkung 2.4.3,

$$x(A) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B) = \begin{pmatrix} a \cos \gamma \\ a \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Mit Satz 2.3.41 und Bemerkung 2.4.4 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 c^2 &= |AB|^2 \\
 &= \|x(B) - x(A)\|^2 \\
 &= (a \cos \gamma - b)^2 + (a \sin \gamma)^2 \\
 &= a^2(\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) + b^2 - 2ab \cos \gamma \\
 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad \square
 \end{aligned}$$

BEMERKUNG 2.4.14. Sind A, B, C drei Punkte in \mathcal{E} mit $A \neq O \neq B$, und entsteht die Halbgerade $(CB>$ durch Abtragen des Winkels $\gamma \in \tilde{\mathcal{W}}$ an der Halbgeraden $(CA>$, dann gilt

$$|AB|^2 = |CA|^2 + |CB|^2 - 2|CA||CB| \cos \gamma.$$

Dies lässt sich wie Satz 2.4.13 zeigen, der Beweis bleibt für beliebige Winkel $\gamma \in \tilde{\mathcal{W}}$ gültig.

PROPOSITION 2.4.15. Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Für jeden Winkel $\gamma := \sphericalangle BCA$ gilt dann

$$\cos \gamma = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|},$$

wobei $v := x(B) - x(C)$ und $w := x(A) - x(C)$.

BEWEIS. Für die Seitenlängen des Dreiecks ABC erhalten wir mit Proposition 2.2.8:

$$\begin{aligned}
 a &= |CB| = \|x(B) - x(C)\| = \|v\|, \\
 b &= |CA| = \|x(A) - x(C)\| = \|w\|, \\
 c &= |AB| = \|x(B) - x(A)\| = \|v - w\|.
 \end{aligned}$$

Aus dem Kosinussatz 2.4.13 folgt daher

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\| \cos \gamma.$$

Kombinieren wir dies mit der Gleichung

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\langle v, w \rangle$$

aus (57) erhalten wir den gewünschte Ausdruck für $\cos \gamma$. □

BEMERKUNG 2.4.16. Beachte, dass der Quotient $\frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|\|w\|}$ in Proposition 2.4.15 wegen der Cauchy–Schwartz Ungleichung im Intervall $[-1, 1]$ liegt, siehe Lemma 2.3.38.

PROPOSITION 2.4.17 (Monotonie der Winkelfunktionen). Für beliebige $\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{W}}$ gilt:

- (a) Für $0^\circ \leq \alpha < \beta \leq 180^\circ$ gilt $\cos \alpha > \cos \beta$.
- (b) Für $180^\circ \leq \alpha < \beta \leq 360^\circ$ gilt $\cos \alpha < \cos \beta$.
- (c) Für $-90^\circ \leq \alpha < \beta \leq 90^\circ$ gilt $\sin \alpha < \sin \beta$.
- (d) Für $90^\circ \leq \alpha < \beta \leq 270^\circ$ gilt $\sin \alpha > \sin \beta$.

BEWEIS. Wir betrachten zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ mit $|AB| = 1 = |A'B'|$ und $|AC| = 1 = |A'C'|$. Nach dem Kosinussatz 2.4.13 gilt für die Winkel $\alpha = \sphericalangle CAB$ und $\alpha' = \sphericalangle C'A'B'$ daher

$$\cos \alpha = 1 - a^2/2 \quad \text{und} \quad \cos \alpha' = 1 - (a')^2/2,$$

wobei $a = |BC|$ und $a' = |B'C'|$. Für $0 < \alpha < \alpha' < 180^\circ$ erhalten wir $a < a'$ aus Satz 1.4.29 und daher

$$\cos \alpha = 1 - a^2/2 > 1 - (a')^2/2 = \cos \alpha'.$$

Dies zeigt die Monotonieaussage in (a). Die verbleibenden folgen unmittelbar mit Proposition 2.4.8. \square

BEMERKUNG 2.4.18. Zu jeder reellen Zahl u mit $-1 \leq u \leq 1$ existiert ein Winkel im Intervall $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, sodass $\cos \alpha = u$. Da $\cos(0^\circ) = 1$ und $\cos(180^\circ) = -1$ genügt es $-1 < u < 1$ zu betrachten. Bezeichnet A den Punkt am Einheitskreis mit Koordinaten $x(A) = \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \right)$ und $\alpha := \sphericalangle AOX_1$, dann gilt $\cos \alpha = x_1(A) = u$.

BEMERKUNG 2.4.19 (Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen). Die Einschränkung des Kosinus, $\cos: [0^\circ, 180^\circ] \rightarrow [-1, 1]$, ist eine Bijektion, d.h. zu jeder reellen Zahl $x \in [-1, 1]$ existiert genau ein Winkel $\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$, für den $\cos \alpha = x$ gilt. Die Injektivität folgt aus Proposition 2.4.17, die Surjektivität aus Bemerkung 2.4.18. Die Umkehrfunktion wird (*Hauptzweig des*) *Arkuskosinus* genannt und mit

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0^\circ, 180^\circ]$$

bezeichnet. Mit (74) folgt daraus, dass auch die Einschränkung $\sin: [-90^\circ, 90^\circ] \rightarrow [-1, 1]$ bijektiv ist. Ihre Umkehrfunktion wird (*Hauptzweig des*) *Arkussinus* genannt und mit

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow [-90^\circ, 90^\circ]$$

bezeichnet. Aus (74) folgt sofort $\arcsin x = 90^\circ - \arccos x$ für alle $x \in [-1, 1]$.

SATZ 2.4.20 (Additionstheoreme). *Für beliebige Winkel $\alpha, \beta \in \tilde{\mathcal{W}}$ gilt:*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (75)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta. \quad (76)$$

BEWEIS. Sei $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems. Tragen wir die Winkel $-\alpha$ und β wie gewohnt am Einheitskreis ab, erhalten wir zwei Punkte A und B mit Koordinaten, vgl. Bemerkung 2.4.11,

$$x(A) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x(B) = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}.$$

Nach Konstruktion entsteht die Halbgerade $(OB>$ durch Abtragen des Winkels $\alpha + \beta$ an der Halbgeraden $(OA>$, siehe Bemerkung 1.4.46. Aus dem Kosinussatz in Bemerkung 2.4.14 folgt daher

$$|AB|^2 = 2 - 2 \cos(\alpha + \beta).$$

Andererseits erhalten wir mit Proposition 2.2.8 und Bemerkung 2.4.4:

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= \|x(B) - x(A)\|^2 \\ &= (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta + \sin \alpha)^2 \\ &= \cos^2 \beta - 2 \cos \beta \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \sin \alpha + \sin^2 \alpha \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Kombinieren wir diese beiden Ausdrücke für $|AB|^2$ folgt das Additionstheorem des Kosinus. Mit (70) lässt sich daraus sofort das Additionstheorem des Sinus herleiten:

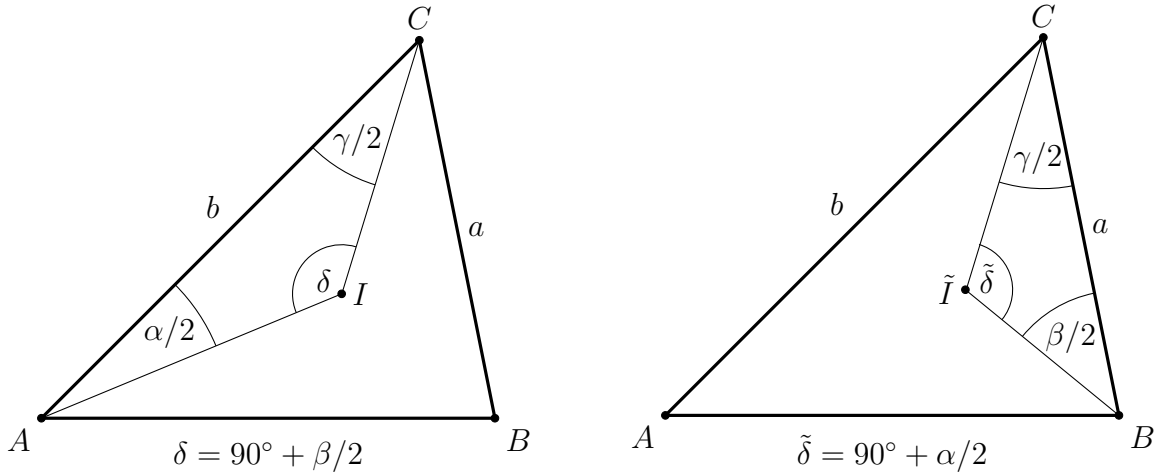
$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= -\cos(\alpha + \beta + 90^\circ) \\ &= -\cos \alpha \cos(\beta + 90^\circ) + \sin \alpha \sin(\beta + 90^\circ) \\ &= \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta.\end{aligned}\quad \square$$

KOROLLAR 2.4.21 (Doppelwinkelformeln). Für beliebige Winkel $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$ gilt

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (77)$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cos \alpha \sin \alpha \quad (78)$$

INKREISMITTELPUNKT MIT TRIGONOMETRISCHEN FORMELN. Wir wollen uns erneut davon überzeugen, dass sich die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks ABC in einem Punkt schneiden. Wie üblich bezeichnen $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ die Seitenlängen und $\alpha = \sphericalangle CAB$, $\beta = \sphericalangle ABC$, $\gamma = \sphericalangle BCA$ die Winkel des Dreiecks. Bezeichnen wir den Schnittpunkt



der Winkelsymmetralen bei A und C mit I so ergeben sich die Winkel $\sphericalangle CAI = \alpha/2$, $\sphericalangle ACI = \gamma/2$ und $\sphericalangle AIC = 180^\circ - \alpha/2 - \gamma/2 = 90^\circ + \beta/2$, denn $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ nach Satz 1.5.7. Aus dem Sinussatz 2.4.12 für das Dreieck ACI folgt

$$|CI| = \frac{b \sin(\alpha/2)}{\sin(90^\circ + \beta/2)} = \frac{b \sin(\alpha/2)}{\cos(\beta/2)} = \frac{b \sin(\alpha)}{2 \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2)},$$

wobei wir im zweiten Gleichheitszeichen die Relation (70) verwendet haben, und im letzten Gleichheitszeichen die Doppelwinkelformel $\sin(\alpha) = 2 \sin(\alpha/2) \cos(\alpha/2)$ aus Korollar 2.4.21 eingegangen ist. Bezeichnet nun \tilde{I} den Schnittpunkt der Winkelsymmetralen bei B und C erhalten wir analog, d.h. durch Vertauschen der Rollen von A und B ,

$$|C\tilde{I}| = \frac{a \sin(\beta)}{2 \cos(\beta/2) \cos(\alpha/2)}.$$

Aus dem Sinussatz für das Dreieck ABC folgt $|CI| = |C\tilde{I}|$ und daher $I = \tilde{I}$. Dies zeigt, dass alle drei Winkelsymmetralen durch den Punkt $I = \tilde{I}$ laufen. \square

2.5. Isometrien. In diesem Abschnitt wollen wir Isometrien in kartesischen Koordinaten beschreiben. Die dabei auftretenden Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lassen sich effizient mit Hilfe von Matrizen beschreiben.

Unter einer (reellen) 2×2 -Matrix verstehen wir ein quadratisches Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

mit Eintragungen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Die Menge aller 2×2 -Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Addition von Matrizen und Skalarmultiplikation werden komponentenweise definiert,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}, \quad \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$. Beispielsweise haben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Analog zu den Rechenregeln für Vektoren in \mathbb{R}^2 , siehe Lemma 2.3.8, gilt:

LEMMA 2.5.1 (Rechenregeln für Matrizenaddition und Skalarmultiplikation). ($\mathbb{R}^{2 \times 2}, +$) ist eine abelsche Gruppe. Die Nullmatrix $0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element bezüglich der Addition. Das additive Inverse von $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$. Für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- (b) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- (c) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- (d) $1A = A$
- (e) $(-1)A = -A$
- (f) $\lambda A = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 0$ oder $A = 0$.

Das Produkt zweier 2×2 -Matrizen wird wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise haben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 8 \end{pmatrix},$$

das Matrizenprodukt ist daher nicht kommutativ. Die Bedeutung des Matrizenprodukts wird später klar werden, wenn wir den Zusammenhang mit Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diskutieren, siehe Lemma 2.5.6 unten.

Für das Matrizenprodukt gelten folgende Rechenregeln, die sich leicht durch eine direkte Rechnung überprüfen lassen (Übungen).

LEMMA 2.5.2. Für beliebige Matrizen $A, B, C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $(A + B)C = AC + BC$
- (b) $A(B + C) = AB + AC$

$$(c) (\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$$

$$(d) (AB)C = A(BC)$$

$$(e) AI = A = IA \text{ wobei } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ die sogenannte Einheitsmatrix bezeichnet.}$$

Die oben formulierten Rechenregeln zeigen, dass $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit der Matrizenmultiplikation und Matrizenaddition einen nicht kommutativen Ring mit Eins bildet. Dieser Ring besitzt Nullteiler, etwa gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Auch gibt es in diesem Ring Elemente mit Quadrat $-I$, etwa

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I.$$

BEMERKUNG 2.5.3 (Gruppe der invertierbaren Matrizen). Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ wird invertierbar genannt, wenn eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ existiert, für die $A^{-1}A = I = AA^{-1}$ gilt. In diesem Fall ist A^{-1} eindeutig bestimmt und wird als *Inverse* von A bezeichnet. Ist nämlich $A' \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine weitere Matrix mit $AA' = I = A'A$, dann folgt mit den Rechenregeln in Lemma 2.5.2: $A' = A'I = A'(AA^{-1}) = (A'A)A^{-1} = IA^{-1} = A^{-1}$. Sind A und B invertierbare Matrizen, dann ist auch AB invertierbar und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, denn $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ und $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$. Die Menge aller invertierbaren 2×2 -Matrizen bildet daher bezüglich der Matrizenmultiplikation eine (nicht kommutative) Gruppe, die als allgemeine lineare Gruppe bezeichnet, und mit $GL_2(\mathbb{R})$ notiert wird. Dies ist genau die Gruppe der Einheiten des Rings $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Die Einheitsmatrix I ist das neutrale Element in $GL_2(\mathbb{R})$.

BEMERKUNG 2.5.4 (Inverse einer 2×2 -Matrix). Eine 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. In diesem Fall ist die Inverse durch

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

gegeben. Ist nämlich $ad - bc \neq 0$, dann zeigt eine einfache direkte Rechnung, dass dies tatsächlich invers zu A ist. Ist umgekehrt A invertierbar, dann existieren e, f, g, h mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir die rechte untere Komponente, so erhalten wir $1 = cf + dh$, also $(c, d) \neq (0, 0)$.

Aus der linken unteren Komponente folgt $0 = ce + dg$, also existiert λ mit $\begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda d \\ -\lambda c \end{pmatrix}$,

siehe (46). Setzen wir dies in die Gleichung ein, die wir aus der linken oberen Komponente gewinnen, so erhalten wir $1 = ae + bg = \lambda(ad - bc)$, also $ad - bc \neq 0$. Damit ist obige Äquivalenz gezeigt. Die Zahl $ad - bc$ wird als *Determinante* von A bezeichnet. Etwa gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/d \end{pmatrix}.$$

Wir definieren das Produkt einer 2×2 -Matrix mit einem Vektor in \mathbb{R}^2 durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}.$$

Beispielsweise haben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Analog zu Lemma 2.5.2 haben wir:

LEMMA 2.5.5. Für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $(A + B)v = Av + Bv$
- (b) $A(v + w) = Av + Aw$
- (c) $(\lambda A)v = \lambda(Av) = A(\lambda v)$
- (d) $(AB)v = A(Bv)$
- (e) $Iv = v$ wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet.

Wieder erfolgt der Beweis durch eine einfache direkte Rechnungen, die wir später allgemeiner durchführen werden.

BEMERKUNG 2.5.6 (Affine Abbildungen). Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Eine Abbildung der Form $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) := Ax + b$, wird als *affine Abbildung* bezeichnet. Expliziter gilt

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 \end{pmatrix}.$$

wobei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Ist $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\psi(x) = A'x + b'$, eine weitere affine Abbildung, wobei $A' \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $b' \in \mathbb{R}^2$, so erhalten wir mit den Rechenregeln in Lemma 2.5.5

$$(\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) = \psi(Ax + b) = A'(Ax + b) + b' = (A'A)x + A'b + b' = A''x + b'',$$

wobei $A'' := A'A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $b'' := A'b + b' \in \mathbb{R}^2$. Die Komposition affiner Abbildungen ist daher wieder affin. Beachte, dass sich auch die identische Abbildung $\text{id}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ in dieser Form schreiben lässt, $\text{id}(x) = x = Ix + 0$. Eine affine Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = Ax + b$ ist genau dann bijektiv, wenn die Matrix A invertierbar ist. In diesem Fall ist auch die Umkehrabbildung affin und durch

$$\varphi^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$$

gegeben. Ist nämlich A invertierbar, so folgt mit obigen Rechenregeln in Lemma 2.5.5 sofort $A^{-1}(Ax + b) - A^{-1}b = x$ und $A(A^{-1}x - A^{-1}b) + b = x$, für alle $x \in \mathbb{R}^2$, also ist φ bijektiv mit der angegebenen Umkehrabbildung. Ist A nicht invertierbar, dann gilt $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, nach Lemma 2.3.28 existieren daher $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v \in \mathbb{R}^2$ mit $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \lambda v$ und $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \mu v$, wir erhalten $\varphi(x) = Ax + b = (\lambda x_1 + \mu x_2)v + b$, also ist das Bild von φ in einer Geraden enthalten und φ daher nicht surjektiv. Die Menge aller invertierbaren affinen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bildet somit bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe, die eng mit der Gruppe der invertierbaren Matrizen zusammenhängt. Dies erklärt die Bedeutung des Matrizenprodukts.

Analog zu Proposition 2.2.4 haben wir:

SATZ 2.5.7 (Affiner Koordinatenwechsel). *Seien $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $x': \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildungen zweier affiner Koordinatensysteme. Dann ist $x' \circ x^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine affine Bijektion. Es existieren daher eine invertierbare Matrix $A \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^2$, sodass*

$$x'(P) = A \cdot x(P) + b$$

für alle Punkte $P \in \mathcal{E}$ gilt.

BEWEIS. Wir betrachten die Bijektion $\psi := x' \circ x^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und definieren:

$$b := \psi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} := \psi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - b, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} := \psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - b, \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Für die affine Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(v) := Av + b$ gilt daher nach Konstruktion:

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \psi \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um $\varphi = \psi$ zu zeigen, betrachten wir $\rho := \psi^{-1} \circ \varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und erhalten:

$$\rho \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (79)$$

Es genügt nun $\rho = \text{id}$ zu zeigen, denn dann folgt $\psi = \varphi$, daher $x' \circ x^{-1} = \varphi$, also $x' = \varphi \circ x$ und somit $x'(P) = \varphi(x(P)) = A \cdot x(P) + b$, wobei A nach Bemerkung 2.5.6 invertierbar sein muss, denn $\psi = \varphi$ ist bijektiv.

Um $\rho = \text{id}$ zu überprüfen, zeigen wir zunächst, dass ρ folgende Eigenschaft besitzt: Sind R und S zwei verschiedene Punkte in \mathbb{R}^2 mit $\rho(R) = R$ und $\rho(S) = S$, dann gilt auch $\rho(Q) = Q$ für jeden Punkt Q auf der Geraden durch R und S .

Da $Q \in g(R, S)$ existiert nämlich $t \in \mathbb{R}$ mit

$$Q = R + t(S - R).$$

Es gilt dann auch

$$\varphi(Q) = \varphi(R) + t(\varphi(S) - \varphi(R)),$$

denn mit den Rechenregeln in Lemma 2.5.5 folgt $\varphi(Q) = AQ + b = A(R + t(S - R)) + b = (AR + b) + t((AS + b) - (AR + b)) = \varphi(R) + t(\varphi(S) - \varphi(R))$. Der Punkt $\tilde{Q} := (x')^{-1}(\varphi(Q))$ liegt auf der Geraden durch $\tilde{R} := (x')^{-1}(\varphi(R))$ und $\tilde{S} := (x')^{-1}(\varphi(S))$ mit Teilverhältnis

$$\frac{\tilde{Q}\tilde{R}}{\tilde{R}\tilde{S}} = -t,$$

siehe Proposition 2.3.12. Erneutes Anwenden von Proposition 2.3.12 führt auf

$$x(\tilde{Q}) = x(\tilde{R}) + t(x(\tilde{S}) - x(\tilde{R})).$$

Beachte $x(\tilde{Q}) = \rho(Q)$, $x(\tilde{R}) = \rho(R)$, $x(\tilde{S}) = \rho(S)$, denn $x \circ (x')^{-1} \circ \varphi = \psi^{-1} \circ \varphi = \rho$. Daher

$$\rho(Q) = \rho(R) + t(\rho(S) - \rho(R)).$$

Mit $\rho(R) = R$ und $\rho(S) = S$ erhalten wir $\rho(Q) = \rho(R) + t(\rho(S) - \rho(R)) = R + t(S - R) = Q$.

Aus (79) und der eben gezeigten Eigenschaft von ρ folgt zunächst, dass ρ alle Punkte auf den beiden Koordinatenachsen unverändert lässt. Ist nun $P \in \mathbb{R}^2$ beliebig, dann wählen wir eine Gerade durch P , die die beide Achsen in verschiedenen Punkten schneidet. Da ρ die

beiden Schnittpunkte unverändert lässt, müssen auch alle Punkte auf dieser Geraden unter ρ unverändert bleiben. Insbesondere erhalten wir $\rho(P) = P$. Dies zeigt $\rho = \text{id}$, der Beweis ist damit vollständig. \square

Verwenden wir die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems, um die Ebene \mathcal{E} mit \mathbb{R}^2 zu identifizieren, dann entsprechen die Isometrien der Ebene genau den Abbildungen $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die

$$\|\varphi(w) - \varphi(v)\| = \|w - v\|$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ erfüllen, siehe Satz 2.3.41. Wir werden diese Abbildungen als Isometrien von \mathbb{R}^2 bezeichnen. Offensichtlich bilden die Isometrien von \mathbb{R}^2 eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen, vgl. Bemerkung 1.7.2.

LEMMA 2.5.8. Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi(x) = Ax + b$, ist genau dann eine Isometrie, wenn $\|Av\| = \|v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$ gilt.

BEWEIS. Da $\varphi(y) - \varphi(x) = (Ay + b) - (Ax + b) = Ay - Ax = A(y - x)$ haben wir

$$\|\varphi(y) - \varphi(x)\| = \|A(y - x)\|$$

für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^2$. Wir sehen daher, dass die Abbildung φ genau dann eine Isometrie ist, wenn $\|A(y - x)\| = \|y - x\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt. \square

LEMMA 2.5.9 (Orthogonale Matrizen). Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sind äquivalent:

(a) $\|Av\| = \|v\|$, für alle $v \in \mathbb{R}^2$.

(b) $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$, für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$.

(c) Für die beiden Spalten von $A = (a_1, a_2)$ gilt $\|a_1\| = 1 = \|a_2\|$ und $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$.

(d) Die Matrix A ist von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

für einen Winkel α .

Insbesondere sind diese Matrizen invertierbar und die Inverse hat dieselbe Gestalt.

BEWEIS. Die Implikation (a) \Rightarrow (b) folgt aus der Polarisierungsidentität

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2),$$

siehe Bemerkung 2.3.37, denn

$$\begin{aligned} \langle Av, Aw \rangle &= \frac{1}{2} (\|Av + Aw\|^2 - \|Av\|^2 - \|Aw\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|A(v + w)\|^2 - \|Av\|^2 - \|Aw\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2) \\ &= \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Die Implikation (b) \Rightarrow (a) ist trivial, denn aus (b) erhalten wir $\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$ und dann (a) durch Wurzelziehen.

Für die Implikation (b) \Rightarrow (c) betrachten wir $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beachte $Ae_1 = a_1$ und $Ae_2 = a_2$. Setzen wir $v = e_1$ und $w = e_1$ in die Gleichung $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$ ein, erhalten wir $\|a_1\|^2 = 1$. Verwenden wir $v = e_2$ und $w = e_2$, so erhalten wir $\|a_2\|^2 = 1$. Setzen wir

$v = e_1$ und $w = e_2$, erhalten wir schließlich $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$. Die Implikation (c) \Rightarrow (b) folgt aus der Bilinearität des inneren Produkts, siehe Lemma 2.3.36. Bezeichnen wir die Komponenten mit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$, so gilt $Av = v_1a_1 + v_2a_2$ und $Aw = w_1a_1 + w_2a_2$ und wir erhalten:

$$\begin{aligned} \langle Av, Aw \rangle &= \langle v_1a_1 + v_2a_2, w_1a_1 + w_2a_2 \rangle \\ &= v_1w_1 \underbrace{\langle a_1, a_1 \rangle}_{=1} + v_1w_2 \underbrace{\langle a_1, a_2 \rangle}_{=0} + v_2w_1 \underbrace{\langle a_2, a_1 \rangle}_{=0} + v_2w_2 \underbrace{\langle a_2, a_2 \rangle}_{=1} \\ &= v_1w_1 + v_2w_2 \\ &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Nun zur Implikation (c) \Rightarrow (d): Da $\|a_1\| = 1$, existiert ein Winkel α mit $a_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$.

Aus $\langle a_1, a_2 \rangle = 0$ und $\|a_2\| = 1$ folgt dann $a_2 = \pm \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$, siehe Bemerkung 2.3.48. Die Implikation (d) \Rightarrow (c) folgt aus der Formel $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Nach Bemerkung 2.5.4 sind die Matrizen in (d) invertierbar. Ersetzen wir in (a) den Vektor v durch $A^{-1}v$, so erhalten wir $\|v\| = \|A^{-1}v\|$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Die Inverse A^{-1} besitzt daher dieselbe Eigenschaft wie A . \square

Matrizen, die die äquivalenten Eigenschaften in Lemma 2.5.9 besitzen, werden orthogonal genannt, siehe auch Lemma 2.5.8.

DEFINITION 2.5.10 (Orthogonale Matrizen). Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ wird orthogonal genannt, falls $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt.

BEMERKUNG 2.5.11 (Gruppe der orthogonalen Matrizen). Die Einheitsmatrix I ist orthogonal, denn $\langle Iv, Iw \rangle = \langle v, w \rangle$. Sind A und B zwei orthogonale 2×2 -Matrizen, dann ist auch ihr Produkt AB orthogonal, denn $\langle ABv, ABw \rangle = \langle Bv, Bw \rangle = \langle v, w \rangle$. Nach Lemma 2.5.9 sind orthogonale Matrizen invertierbar mit orthogonaler Inverser. Die Menge aller orthogonalen 2×2 -Matrizen bildet daher eine Untergruppe von $GL_2(\mathbb{R})$, die als orthogonale Gruppe bezeichnet und mit $O_2(\mathbb{R})$ notiert wird.

KOROLLAR 2.5.12 (Kartesischer Koordinatenwechsel). Seien $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $x': \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildungen zweier kartesischer Koordinatensysteme. Dann ist $x' \circ x^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine affine Isometrie. Es existieren daher eine orthogonale Matrix $A \in O_2(\mathbb{R})$ und ein Vektor $b \in \mathbb{R}^2$, sodass

$$x'(P) = A \cdot x(P) + b$$

für alle Punkte $P \in \mathcal{E}$ gilt.

BEWEIS. Nach Satz 2.5.7 ist die Abbildung $x' \circ x^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine affine Bijektion. Aus Satz 2.3.41 folgt, dass sie auch isometrisch ist. Nach Lemma 2.5.8 existieren daher $A \in O_2(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^2$ mit $(x' \circ x^{-1})(v) = Av + b$ für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Setzen wir $v = x(P)$, erhalten wir die Gleichung $x'(P) = A \cdot x(P) + b$. \square

KOROLLAR 2.5.13. Jede Isometrie $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist von der Form $\varphi(v) = Av + b$ für eine orthogonale Matrix $A \in O_2(\mathbb{R})$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^2$. Umgekehrt ist jede Abbildung dieser Form eine Isometrie.

BEWEIS. Es genügt zu zeigen, dass Isometrien von \mathbb{R}^2 stets affin sind. Alle weiteren Aussagen folgen dann sofort aus Lemma 2.5.8. Sei also $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Isometrie. Mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems und Lemma 1.7.3 sehen wir, dass φ Geraden auf Geraden abbildet und das Teilverhältnis bewahrt. Genau wie im Beweis von Satz 2.5.7 folgt daraus, dass φ affin ist. \square

BEMERKUNG 2.5.14 (Translationen). Für jedes $b \in \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung $\tau_b: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau_b(v) := v + b$, eine Isometrie. Diese Isometrien werden Translationen genannt, sie bilden Geraden auf parallele Geraden ab und lassen Geraden mit Richtungsvektor b invariant. Via kartesischer Koordinaten entsprechen sie daher genau den Translationen in Bemerkung 1.7.15. Für $b, b' \in \mathbb{R}^2$ haben wir

$$\tau_b \circ \tau_{b'} = \tau_{b+b'} = \tau_{b'} \circ \tau_b, \quad \tau_0 = \text{id}, \quad \tau_b^{-1} = \tau_{-b}.$$

Sind P und Q zwei Punkte in \mathbb{R}^2 , dann existiert genau eine Translation, die P auf Q abbildet, nämlich τ_b mit $b = Q - P$.

BEMERKUNG 2.5.15 (Rotationen). Für jeden Winkel α betrachten wir die Matrix

$$R_\alpha := \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Isometrie $\rho_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\rho_\alpha(v) := R_\alpha v$, beschreibt eine Rotation um den Winkel α mit Zentrum 0. Offensichtlich gilt nämlich $\rho_\alpha(0) = 0$, nach Lemma 2.5.9 gilt weiters $\|R_\alpha v\| = \|v\|$ und eine einfache Rechnung zeigt $\langle v, R_\alpha v \rangle = \|v\|^2 \cos \alpha$. Für $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ haben wir daher

$$\frac{\langle v, R_\alpha v \rangle}{\|v\| \|R_\alpha v\|} = \cos \alpha,$$

also schließen die Geraden $g(0, v)$ und $g(0, \rho_\alpha(v))$ den Winkel α ein, vgl. Proposition 2.4.15. Aus den Additionstheoremen der Winkelfunktionen erhalten wir

$$R_\alpha R_\beta = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = R_{\alpha+\beta}$$

und daher auch

$$\rho_\alpha \circ \rho_\beta = \rho_{\alpha+\beta} = \rho_\beta \circ \rho_\alpha, \quad \rho_0 = \text{id}, \quad \rho_\alpha^{-1} = \rho_{-\alpha}.$$

Für $b \in \mathbb{R}^2$ ist $\rho_{\alpha,b} := \tau_b \circ \rho_\alpha \circ \tau_b^{-1}$ eine Drehung um den Winkel α mit Zentrum b . Via kartesischer Koordinaten entsprechen sie genau den Rotation in Bemerkung 1.7.16. Expliziter lässt sich dies in der Form

$$\rho_{\alpha,b}(v) = R_\alpha v + (I - R_\alpha)b,$$

schreiben, denn $\rho_{\alpha,b}(v) = \tau_b(R_\alpha(\tau_b^{-1}(v))) = R_\alpha(v - b) + b = R_\alpha v + (I - R_\alpha)b$.

BEMERKUNG 2.5.16 (Spiegelungen). Für jeden Winkel α betrachten wir die Matrix

$$S_\alpha := R_\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} R_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Isometrie $\sigma_\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma_\alpha(v) := S_\alpha v$, beschreibt eine orthogonale Spiegelung an der Geraden mit Normalvektor $n_\alpha = R_\alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ durch den Ursprung. Für

$\alpha = 0$ ist dies offensichtlich, der allgemeine Fall folgt sofort aus der Relation $\sigma_\alpha = \rho_\alpha \sigma_0 \rho_\alpha^{-1}$, die wir aus dem ersten Ausdruck für S_α erhalten. Die Spiegelung lässt sich auch in der Form

$$\sigma_\alpha(v) = v - 2\langle n_\alpha, v \rangle n_\alpha$$

schreiben. Für $\alpha = 0$ ist dies offensichtlich, der allgemeine Fall folgt daraus, denn $\sigma_\alpha(v) = R_\alpha(\sigma_0(R_\alpha^{-1}v)) = R_\alpha(R_\alpha^{-1}v - 2\langle n_0, R_\alpha^{-1}v \rangle n_0) = v - 2\langle n_0, R_\alpha^{-1}v \rangle n_\alpha = v - 2\langle n_\alpha, v \rangle n_\alpha$. Aus Bemerkung 2.5.4 erhalten wir $S_\alpha^{-1} = S_\alpha$ und daher

$$\sigma_\alpha \circ \sigma_\alpha = \text{id} \quad \text{sowie} \quad \sigma_\alpha^{-1} = \sigma_\alpha.$$

Wegen $S_0 R_\alpha^{-1} = R_\alpha S_0$ haben wir auch $S_\beta S_\alpha = R_\beta S_0 R_\beta^{-1} R_\alpha S_0 R_\alpha^{-1} = R_\beta R_\beta S_0 S_0 R_\alpha^{-1} R_\alpha^{-1} = R_{2\beta} R_{-2\alpha} = R_{2(\beta-\alpha)}$ und daher

$$\sigma_\beta \circ \sigma_\alpha = \rho_{2(\beta-\alpha)}.$$

Jede Rotation mit Zentrum 0 lässt sich daher (auf vielfältige Weise) als Komposition von zwei Spiegelungen schreiben, etwa

$$\rho_\alpha = \sigma_{\alpha/2} \circ \sigma_0 = \sigma_\alpha \circ \sigma_{\alpha/2} = \sigma_{\alpha/4} \circ \sigma_{-\alpha/4}.$$

Für $b \in \mathbb{R}^2$ ist $\sigma_{\alpha,b} := \tau_b \circ \sigma_\alpha \circ \tau_b^{-1}$ eine orthogonale Spiegelung an der Geraden durch b mit Normalvektor n_α . Es gilt

$$\sigma_{\alpha,b}(v) = v - 2\langle n_\alpha, v - b \rangle n_\alpha,$$

denn $\sigma_{\alpha,b}(v) = \sigma_\alpha(v - b) + b = (v - b) - 2\langle n_\alpha, v - b \rangle n_\alpha + b = v - 2\langle n_\alpha, v - b \rangle n_\alpha$. Nach Proposition 2.3.54 gilt für den Fußpunkt F des Lots durch v auf Spiegelungsachse die Formel $v - F = \langle n_\alpha, v - b \rangle n_\alpha$. Obige Formel für $\sigma_{\alpha,b}$ ist daher zu $\sigma_{\alpha,b}(v) = v - 2(v - F)$ äquivalent. Via kartesischen Koordinaten entspricht dies genau den Spiegelungen in Definition 1.7.8.

3. Lineare Algebra

Im Zuge der Koordinatendarstellung von Geraden im vorangehenden Abschnitt haben wir gesehen, dass sich die Lösungsmenge einer nicht-degenerierten linearen Gleichung in zwei Variablen stets durch eine Parameterdarstellung beschreiben lässt: Sind a_1, a_2, b reelle Zahlen und $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, dann existieren stets $P, v \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq 0$, sodass

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \right\} = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\},$$

siehe Lemma 2.3.9. Beachte, dass dies für $a_1 = 0 = a_2$ nicht richtig bleibt. In diesem Fall ist die Lösungsmenge leer oder ganz \mathbb{R}^2 je nachdem, ob $b \neq 0$ oder $b = 0$.

Der Schnitt zweier Geraden der Ebene führt auf ein System von zwei linearen Gleichungen in zwei Variablen. Sind die Geraden nicht parallel, erhalten wir genau eine Lösung,

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} \right\} = \{P\}.$$

Im parallelen Fall sind die beiden Gleichungen nicht unabhängig: Sind die beiden Geraden disjunkt, widersprechen sich die Gleichungen und die Lösungsmenge ist leer; Stimmen die beiden Geraden überein, dann ist eine der beiden Gleichungen ein Vielfaches der anderen und die Lösungsmenge bildet eine Gerade, deren Beschreibung einen Parameter benötigt.

Nach Wahl eines affinen Koordinatensystems kann jede Ebene im Raum durch eine lineare Gleichung in drei Variablen beschrieben werden oder mit zwei unabhängigen Richtungen parametrisiert werden: Sind a_1, a_2, a_3, b reelle Zahlen und $(a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0)$ dann existieren $P \in \mathbb{R}^3$ und unabhängige Richtungen $v, w \in \mathbb{R}^3$, sodass

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = b \right\} = \{P + tv + sw : t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Der Schnitt zweier Ebenen im Raum führt auf ein System von zwei Gleichungen in drei Variablen. Sind die Ebenen nicht parallel, erhalten wir eine Gerade als Lösungsmenge. Es existiert daher $P, v \in \mathbb{R}^3$ mit $v \neq 0$, sodass

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \end{array} \right\} = \{P + tv : t \in \mathbb{R}\},$$

Wie zuvor sind die Gleichungen im parallelen Fall nicht unabhängig: Sind die beiden Ebenen disjunkt widersprechen sich die Gleichungen und Lösungsmenge ist leer. Stimmen die Ebenen überein, dann ist eine der beiden Gleichungen ein Vielfaches der anderen und die Lösungsmenge bildet eine Ebene, deren Beschreibung zwei Parameter benötigt.

Schneiden wir drei Ebenen in allgemeiner Lage, erhalten wir genau eine Lösung,

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array} \right\} = \{P\}.$$

Sind die Gleichungen nicht unabhängig, kann die Lösungsmenge eine Geraden oder Ebene bilden und es sind Parameter notwendig, um sie zu beschreiben.

In den oben diskutierten Fällen ist folgender Zusammenhang zwischen der Anzahl der Variablen, der Anzahl unabhängiger Gleichungen und der Anzahl unabhängiger Parameter beobachtbar:

$$\# \text{ unabhängiger Parameter} = \# \text{ Variablen} - \# \text{ unabhängiger Gleichungen.} \quad (80)$$

In anderen Worten: Jede neue unabhängige Gleichung reduziert die Anzahl unabhängiger Parameter der Lösungsmenge um Eins. Die geometrische Interpretation der Lösungsmenge als Schnitt von Ebenen oder Geraden ermöglicht ein intuitives Begreifen dieser Tatsache.

In diesem Abschnitt wollen wir nun allgemeine lineare Gleichungssysteme, mit einer beliebigen Anzahl von Variablen und eine beliebigen Anzahl von Gleichungen, systematisch untersuchen. Wir werden sehen, dass sich die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, sofern sie nicht leer ist, stets in Parameterform beschreiben lässt und, dass die Formel (80) ganz allgemein gilt. Dazu muss natürlich präzisiert werden, was mit unabhängigen Gleichungen und unabhängigen Parametern genau gemeint ist. Dies wird uns zum Dimensionsbegriff führen. Schließlich werden wir mit dem Eliminationsverfahren einen Algorithmus kennenlernen, mit dem lineare Gleichungssysteme effizient gelöst werden können, d.h. eine Parameterdarstellung ihrer Lösungsmenge bestimmt werden kann.

3.1. Lineare Abbildungen und Matrizen. Für jede natürliche Zahl n bezeichne

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} : v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller n -Tupel reeller Zahlen. Elemente von \mathbb{R}^n werde *Vektoren* oder *Spaltenvektoren* genannt. Ist $v \in \mathbb{R}^n$ dann wird die Eintragung in der i -ten Zeile als i -te *Komponenten* von v bezeichnet. Wir schreiben weiterhin $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$.

Analog zu den Rechenoperationen auf \mathbb{R}^2 definieren wir *Vektoraddition* und *Skalarmultiplikation* auf \mathbb{R}^n durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{pmatrix},$$

wobei $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n, \lambda \in \mathbb{R}$. Vektoren in \mathbb{R}^n werden also komponentenweise addiert und komponentenweise mit Skalaren multipliziert. Unter dem *Nullvektor* $0 \in \mathbb{R}^n$ verstehen wir den Vektor, dessen Komponenten alle 0 sind. Der Nullvektor ist offensichtlich neutrales Element bezüglich der Vektoraddition, d.h. es gilt $v + 0 = v = 0 + v$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

BEISPIEL 3.1.1.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Analog zu den Rechenregeln in Lemma 2.3.8 haben wir:

LEMMA 3.1.2 (Rechenregeln für Vektoraddition und Skalarmultiplikation). $(\mathbb{R}^n, +)$ bildet eine abelsche Gruppe. Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt weiters:

(a) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$

- (b) $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
(c) $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
(d) $1v = v$
(e) $(-1)v = -v$
(f) $\lambda v = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 0$ oder $v = 0$.

Lineare Abbildungen sind Abbildungen, die mit Vektoraddition und Skalarmultiplikation verträglich sind. Genauer haben wir:

DEFINITION 3.1.3 (Lineare Abbildung). Eine Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ wird *linear* genannt wenn $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ und $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt.

BEMERKUNG 3.1.4. Jede lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bildet den Nullvektor in \mathbb{R}^n auf den Nullvektor in \mathbb{R}^m ab, denn mit Lemma 3.1.2(f) folgt: $\varphi(0) = \varphi(0 \cdot 0) = 0 \cdot \varphi(0) = 0$.

BEISPIEL 3.1.5. Für $k \in \mathbb{R}$ ist $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = kx$, linear. Umgekehrt ist jede lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von dieser Form, denn $\varphi(x) = \varphi(x \cdot 1) = x\varphi(1) = kx$ mit $k = \varphi(1)$. Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x + 3$, ist nicht linear im Sinn der linearen Algebra, aber affin.

BEISPIEL 3.1.6. Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x + 8y + 9z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix}$, ist linear.

BEISPIEL 3.1.7. Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, ist linear.

BEMERKUNG 3.1.8. Für beliebige $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$\varphi \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

linear. Wir werden dies weiter unten nachrechnen.

BEMERKUNG 3.1.9 (Nullabbildung). Die Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi(v) := 0$, ist linear.

BEMERKUNG 3.1.10 (Identität). Die Abbildung, $\text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\text{id}(v) := v$, ist linear.

BEMERKUNG 3.1.11 (Koordinatenprojektionen). Die Abbildung $p_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $p_i(v) := v_i$, die einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ seinen Eintrag in der i -ten Zeile zuordnet ist linear.

BEMERKUNG 3.1.12 (Summe linearer Abbildungen). Sind $\varphi, \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ zwei lineare Abbildungen, dann ist auch ihre Summe $\varphi + \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$, eine lineare Abbildung. Aus den Rechenregeln in Lemma 3.1.2 folgt nämlich

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(v + w) &= \varphi(v + w) + \psi(v + w) = (\varphi(v) + \varphi(w)) + (\psi(v) + \psi(w)) \\ &= (\varphi(v) + \psi(v)) + (\varphi(w) + \psi(w)) = (\varphi + \psi)(v) + (\varphi + \psi)(w), \end{aligned}$$

und analog $(\varphi + \psi)(\lambda v) = \varphi(\lambda v) + \psi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) + \lambda\psi(v) = \lambda(\varphi(v) + \psi(v)) = \lambda(\varphi + \psi)(v)$, für $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

BEMERKUNG 3.1.13 (Vielfache linearer Abbildungen). Ist $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und $t \in \mathbb{R}$, dann ist auch $t\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(t\varphi)(v) := t\varphi(v)$, eine lineare Abbildung. Aus den Rechenregeln in Lemma 3.1.2 folgt nämlich

$$(t\varphi)(v + w) = t\varphi(v + w) = t(\varphi(v) + \varphi(w)) = t\varphi(v) + t\varphi(w) = (t\varphi)(v) + (t\varphi)(w),$$

und analog $(t\varphi)(\lambda v) = t\varphi(\lambda v) = t(\lambda\varphi(v)) = \lambda(t\varphi(v)) = \lambda(t\varphi)(v)$, für $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

BEMERKUNG 3.1.14 (Komposition linearer Abbildungen). Haben wir zwei lineare Abbildungen $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $\psi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ dann ist auch ihre Komposition, $\varphi \circ \psi: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(\varphi \circ \psi)(v) := \varphi(\psi(v))$, linear. Dies ist offensichtlich, denn $(\varphi \circ \psi)(v + w) = \varphi(\psi(v + w)) = \varphi(\psi(v) + \psi(w)) = \varphi(\psi(v)) + \varphi(\psi(w)) = (\varphi \circ \psi)(v) + (\varphi \circ \psi)(w)$ und analog $(\varphi \circ \psi)(\lambda v) = \varphi(\psi(\lambda v)) = \varphi(\lambda\psi(v)) = \lambda\varphi(\psi(v)) = \lambda(\varphi \circ \psi)(v)$ für $v, w \in \mathbb{R}^p$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

BEMERKUNG 3.1.15 (Umkehrabbildung). Ist $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine bijektive lineare Abbildung, dann ist auch die Umkehrabbildung, $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, linear.¹⁷ Ersetzen wir in $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ nämlich $v = \varphi^{-1}(v')$ und $w = \varphi^{-1}(w')$, wobei $v', w' \in \mathbb{R}^n$, so erhalten wir $\varphi(\varphi^{-1}(v') + \varphi^{-1}(w')) = v' + w'$ und Anwenden von φ^{-1} liefert $\varphi^{-1}(v') + \varphi^{-1}(w') = \varphi^{-1}(v' + w')$. Analog erhalten wir aus $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$ zunächst $\varphi(\lambda\varphi^{-1}(v')) = \lambda v'$ und dann $\lambda\varphi^{-1}(v') = \varphi^{-1}(\lambda v')$.

BEMERKUNG 3.1.16 (Gruppe der linearen Bijektionen). Die Menge aller bijektiven linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine (nicht kommutative) Gruppe, die wir mit $\text{GL}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen. Dies folgt aus den Bemerkungen 3.1.10, 3.1.14 und 3.1.15.

DEFINITION 3.1.17 (Matrizen). Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Unter einer (reellen) $(m \times n)$ -Matrix verstehen wir ein rechteckiges Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit Eintragungen $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen die Menge aller $(m \times n)$ -Matrizen mit $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Die Summe zweier Matrizen mit gleicher Zeilen- und Spaltenzahl wird komponentenweise durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

definiert. Auch *Skalarmultiplikation* mit $\lambda \in \mathbb{R}$ wird komponentenweise definiert,

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Unter der *Nullmatrix* $0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ verstehen wir die Matrix, deren Eintragungen alle 0 sind. Die Nullmatrix ist offensichtlich neutrales Element bezüglich der Addition, d.h. es gilt $A + 0 = A = 0 + A$ für alle $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

¹⁷Wir werden bald sehen, dass eine lineare Bijektion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ nur dann existiert, wenn $n = m$ gilt.

BEISPIEL 3.1.18.

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Wie zuvor lässt sich zeigen:

LEMMA 3.1.19 (Rechenregeln für Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen). $(\mathbb{R}^{m \times n}, +)$ bildet eine abelsche Gruppe. Für $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt weiters:

- (a) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$
- (b) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- (c) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- (d) $1A = A$
- (e) $(-1)A = -A$
- (f) $\lambda A = 0$ genau dann, wenn $\lambda = 0$ oder $A = 0$.

DEFINITION 3.1.20 (Produkt von Matrizen). Das Produkt einer $(m \times n)$ -Matrix mit einer $(n \times p)$ -Matrix ist folgende $(m \times p)$ -Matrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kp} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{kp} \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass das Produkt AB nur definiert ist, wenn die Zeilenzahl von B mit der Spaltenzahl von A übereinstimmt.

BEISPIEL 3.1.21.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 22 & -2 & 10 & 12 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (10), \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

BEMERKUNG 3.1.22. Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BEMERKUNG 3.1.23. Die Matrizenmultiplikation besitzt Nullteiler:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Wir bezeichnen den Eintrag in der i -ten Spalte und j -ten Zeile einer Matrix A mit A_{ij} . Damit lassen sich die Matrizenoperationen kompakter beschreiben:

$$\begin{aligned}(A + A')_{ij} &= A_{ij} + A'_{ij}, \\ (\lambda A)_{ij} &= \lambda A_{ij}, \\ (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = A_{i1} B_{1j} + A_{i2} B_{2j} + \cdots + A_{in} B_{nj},\end{aligned}$$

wobei $A, A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Unter der $(n \times n)$ -*Einheitsmatrix* verstehen wir die Matrix

$$I := I_n := \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

d.h. die Matrix, deren Diagonaleinträge gleich 1 und deren andere Einträge gleich 0 sind. Die Einheitsmatrix lässt sich mit dem Kronecker-Delta beschreiben,

$$I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Wir werden gleich sehen, dass die Einheitsmatrix neutrales Element bezüglich der Matrizenmultiplikation ist. Die i -te Spalte der Einheitsmatrix wird i -ter *Einheitsvektor* genannt und mit $e_i \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet. Beispielsweise sind

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die vier Einheitsvektoren des \mathbb{R}^4 .

LEMMA 3.1.24 (Rechenregeln der Matrizenmultiplikation). Für $A, A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B, B' \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $(A + A')B = AB + A'B$
- (b) $A(B + B') = AB + AB'$
- (c) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$
- (d) $A(BC) = (AB)C$
- (e) $AI_n = A = I_m A$

BEWEIS. Wir haben

$$\begin{aligned}((A + A')B)_{ij} &= \sum_{k=1}^n (A + A')_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n (A_{ik} + A'_{ik}) B_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} + \sum_{k=1}^n A'_{ik} B_{kj} = (AB)_{ij} + (A'B)_{ij} = (AB + A'B)_{ij},\end{aligned}$$

also $(A + A')B = AB + A'B$. Analog lässt sich $A(B + B') = AB + AB'$ zeigen. Ebenso

$$((\lambda A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^n (\lambda A)_{ik} B_{kj} = \sum_{k=1}^n \lambda A_{ik} B_{kj} = \lambda \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} = \lambda (AB)_{ij} = (\lambda(AB))_{ij},$$

also $(\lambda A)B = \lambda(AB)$. Analog lässt sich $A(\lambda B) = \lambda(AB)$ zeigen. Weiters

$$\begin{aligned} (A(BC))_{ij} &= \sum_{k=1}^n A_{ik} (BC)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \sum_{l=1}^p B_{kl} C_{lj} \\ &= \sum_{l=1}^p \left(\sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kl} \right) C_{lj} = \sum_{l=1}^p (AB)_{il} C_{lj} = ((AB)C)_{ij}, \end{aligned}$$

also $A(BC) = (AB)C$. Schließlich

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^n A_{ik} (I_n)_{kj} = \sum_{k=1}^n A_{ik} \delta_{kj} = A_{ij},$$

also $AI_n = A$. Analog lässt sich $I_m A = A$ zeigen. \square

Wir fassen Vektoren als Matrizen mit einer Spalte auf, d.h. wir identifizieren $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist daher das Produkt $Av \in \mathbb{R}^m$ definiert,

$$Av = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (81)$$

Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ liefert daher eine Abbildung $\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi_A(v) := Av$. Diese, mit der Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ assoziierte Abbildung, ist linear und wir erhalten so alle linearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Genauer gilt:

PROPOSITION 3.1.25 (Lineare Abbildungen und Matrizen). *Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist $\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi_A(v) := Av$, eine lineare Abbildung. Umgekehrt ist jede lineare Abbildung $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ von dieser Form, $\psi = \varphi_A$, für eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dabei sind die Spalten von A gerade die Bilder der Einheitsvektoren, d.h. $A = (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n))$.*

BEWEIS. Mit den Rechenregeln in Lemma 3.1.24 erhalten wir $\varphi_A(v + w) = A(v + w) = Av + Aw = \varphi_A(v) + \varphi_A(w)$ und analog $\varphi_A(\lambda v) = A(\lambda v) = \lambda(Av) = \lambda\varphi_A(v)$, wobei $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, also ist φ_A linear. Sei nun $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine beliebige lineare Abbildung. Jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ lässt sich in der Form

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \cdots + v_n e_n$$

schreiben. Mit der Linearität erhalten wir

$$\psi(v) = \psi(v_1e_1 + \cdots + v_n e_n) = v_1\psi(e_1) + \cdots + v_n\psi(e_n) = Av = \varphi_A(v),$$

also $\psi = \varphi_A$, wobei $A = (\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, siehe (81). \square

BEISPIEL 3.1.26. Die mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ assoziierte Abbildung $\varphi_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist durch

$$\varphi_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

gegeben. Die der Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ entsprechende Abbildung $\varphi_B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist

$$\varphi_B \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s + t \\ s + 5t \\ 4s + 9t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Das folgende Resultat klärt die Bedeutung der Rechenoperationen für Matrizen.

PROPOSITION 3.1.27 (Bedeutung der Matrizenoperationen). Für $A, A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\varphi_{A+A'} = \varphi_A + \varphi_{A'}$
- (b) $\varphi_{\lambda A} = \lambda\varphi_A$
- (c) $\varphi_{AB} = \varphi_A \circ \varphi_B$
- (d) $\varphi_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$

BEWEIS. Für $v \in \mathbb{R}^n$ folgt mit den Rechenregeln in Lemma 3.1.24

$$\varphi_{A+A'}(v) = (A + A')v = Av + A'v = \varphi_A(v) + \varphi_{A'}(v) = (\varphi_A + \varphi_{A'})(v),$$

also (a). Ebenso

$$\varphi_{\lambda A}(v) = (\lambda A)v = \lambda(Av) = \lambda\varphi_A(v) = (\lambda\varphi_A)(v),$$

also (b). Weiters haben wir

$$\varphi_{AB}(v) = (AB)v = A(Bv) = \varphi_A(Bv) = \varphi_A(\varphi_B(v)) = (\varphi_A \circ \varphi_B)(v),$$

und daher (c). Schließlich gilt auch $\varphi_{I_n}(v) = I_n v = v = \text{id}_{\mathbb{R}^n}(v)$, also (d). \square

BEMERKUNG 3.1.28 (Gruppe der invertierbaren Matrizen). Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird invertierbar genannt, wenn eine Matrix $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert, sodass $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. In diesem Fall ist A^{-1} eindeutig bestimmt und wird als *Inverse* von A bezeichnet. Ist nämlich $A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine weitere Matrix mit $AA' = I_n = A'A$, dann folgt mit den Rechenregeln in Lemma 3.1.24: $A' = A'I_n = A'(AA^{-1}) = (A'A)A^{-1} = I_n A^{-1} = A^{-1}$. Sind A und B invertierbare $(n \times n)$ -Matrizen, dann ist auch AB invertierbar und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, denn $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ und $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_n B = B^{-1}B = I_n$. Die Menge aller invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen bildet daher bezüglich der Matrizenmultiplikation eine (nicht kommutative) Gruppe, die als *allgemeine lineare Gruppe* bezeichnet, und mit $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ notiert wird. Die Einheitsmatrix I_n ist das neutrale Element in $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

BEMERKUNG 3.1.29 (Invertierbare Matrizen und lineare Bijektionen). Die mit einer invertierbaren Matrix A assoziierte lineare Abbildung $\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist bijektiv mit Umkehrabbildung $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$, denn $\varphi_A \circ \varphi_{A^{-1}} = \varphi_{AA^{-1}} = \varphi_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $\varphi_{A^{-1}} \circ \varphi_A = \varphi_{A^{-1}A} = \varphi_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, siehe Proposition 3.1.27. Ist andererseits φ_A bijektiv mit Umkehrabbildung ψ , dann existiert eine Matrix B mit $\psi = \varphi_B$, siehe Bemerkung 3.1.15 und Proposition 3.1.27. Es folgt $\varphi_{I_n} = \text{id}_{\mathbb{R}^n} = \varphi_A \circ \psi = \varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$, also $I_n = AB$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in Proposition 3.1.25. Analog erhalten wir $I_n = BA$, also ist A eine invertierbare Matrix. Wir schließen daraus, dass eine quadratische Matrix genau dann invertierbar ist, wenn die damit assoziierte lineare Abbildung bijektiv (invertierbar) ist. Daher ist

$$\text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{R}^n), \quad A \mapsto \varphi_A,$$

ein Gruppenisomorphismus, vgl. die Bemerkung 3.1.16 und 3.1.28.

BEISPIEL 3.1.30. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit Inverser

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix},$$

siehe Bemerkung 2.5.4. Daher ist die lineare Abbildung $\varphi_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 4y \end{pmatrix}$, bijektiv mit Umkehrabbildung $\varphi_{A^{-1}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\varphi_{A^{-1}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + y \\ 3x/2 - y/2 \end{pmatrix}$.

3.2. Teilräume und Dimension. Teilmengen von \mathbb{R}^n , die abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation sind werden als Teilräume bezeichnet. Genauer haben wir:

DEFINITION 3.2.1 (Teilraum). Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ wird (*linearer*) *Teilraum* genannt, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

- (a) $0 \in V$
- (b) $\forall v, v' \in V : v + v' \in V$
- (c) $\forall v \in V \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda v \in V$

Teilräume werden auch als *Teilvektorräume* oder *Untervektorräume* bezeichnet.

BEMERKUNG 3.2.2. Offensichtlich sind $\{0\}$ und \mathbb{R}^n zwei Teilräume von \mathbb{R}^n .

BEMERKUNG 3.2.3 (Durchschnitt von Teilräumen). Sind V und W zwei lineare Teilräume in \mathbb{R}^n , dann ist auch ihr Durchschnitt $V \cap W$ ein linearer Teilraum. Dies bleibt für Durchschnitte beliebig vieler Teilräume richtig.

BEMERKUNG 3.2.4 (Urbilder von Teilräumen). Ist $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und W ein Teilraum von \mathbb{R}^m , dann bildet $\varphi^{-1}(W)$ einen Teilraum von \mathbb{R}^n . Sind nämlich $v, v' \in \varphi^{-1}(W)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann folgt aus der Linearität $\varphi(0) = 0 \in W$, also $0 \in \varphi^{-1}(W)$, sowie $\varphi(v+v') = \varphi(v) + \varphi(v') \in W$, also $v+v' \in \varphi^{-1}(W)$, und $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v) \in W$, also $\lambda v \in \varphi^{-1}(W)$, denn W ist abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation. Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0) = \{v \in \mathbb{R}^n : \varphi(v) = 0\}$ ein Teilraum von \mathbb{R}^n .

DEFINITION 3.2.5 (Kern). Unter dem Kern einer linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ verstehen wir den Teilraum

$$\ker(\varphi) := \varphi^{-1}(0) = \{v \in \mathbb{R}^n : \varphi(v) = 0\}.$$

Unter dem Kern einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ verstehen wir den Kern der damit assoziierten linearen Abbildungen, d.h.

$$\ker(A) := \ker(\varphi_A) = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0\}.$$

BEMERKUNG 3.2.6. Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Eintragungen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ist daher

$$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. \right\}$$

ein Teilraum von \mathbb{R}^n . Beachte, dass dieser Teilraum durch ein homogenes System linearer Gleichungen beschrieben ist. Wir werden bald sehen, dass sich jeder Teilraum von \mathbb{R}^n in dieser Form schreiben lässt. Beispielsweise ist

$$\ker \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right. \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Teilraum von \mathbb{R}^3 , nämlich eine Gerade durch den Koordinatenursprung.

LEMMA 3.2.7 (Injektivität und Kern). *Eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann injektiv wenn $\ker(\varphi) = \{0\}$ gilt.*

BEWEIS. Sei zunächst $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear und injektiv. Aufgrund der Injektivität kann $\varphi^{-1}(0)$ höchstens ein Element enthalten. Wegen der Linearität gilt $\varphi(0) = 0$, d.h. $0 \in \varphi^{-1}(\{0\})$. Wir erhalten $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0) = \{0\}$.

Für die umgekehrte Implikation sei nun $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear und $\ker(\varphi) = \{0\}$. Weiters seien $v, w \in \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(v) = \varphi(w)$. Mit der Linearität folgt $\varphi(v - w) = \varphi(v) - \varphi(w) = 0$, also $v - w \in \ker(\varphi)$. Nach Voraussetzung an den Kern folgt $v - w = 0$ und daher $v = w$. \square

BEISPIEL 3.2.8. Wir wollen entscheiden, ob die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} := s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s + 5t \\ 3s + 6t \\ 4s + 7t \end{pmatrix},$$

injektiv ist. Dazu bestimmen wir den Kern von φ . Seien also $s, t \in \mathbb{R}$ mit $\varphi \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 0$. Wir erhalten die Gleichungen $2s + 5t = 0$, $3s + 6t = 0$ und $4s + 7t = 0$. Aus den ersten beiden Gleichungen folgt sofort $s = 0 = t$, also $\ker(\varphi) = \{0\}$. Nach Lemma 3.2.7 ist φ daher injektiv.

BEMERKUNG 3.2.9 (Bilder von Teilräumen). Ist $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung und V ein Teilraum von \mathbb{R}^n , dann bildet $\varphi(V)$ einen Teilraum von \mathbb{R}^m . Sind nämlich $v, v' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann folgt aus der Linearität $0 = \varphi(0) \in \varphi(V)$, $\varphi(v) + \varphi(v') = \varphi(v + v') \in \varphi(V)$ und $\lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \varphi(V)$, denn V ist abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation. Insbesondere ist $\varphi(\mathbb{R}^n) = \{\varphi(v) : v \in \mathbb{R}^n\}$ ein Teilraum von \mathbb{R}^m .

DEFINITION 3.2.10 (Bild). Unter dem Bild einer linearen Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ verstehen wir den Teilraum

$$\text{img}(\varphi) := \{\varphi(v) : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

Unter dem Bild einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ verstehen das Bild der damit assoziierten linearen Abbildungen, d.h.

$$\text{img}(A) := \text{img}(\varphi_A) := \{Av : v \in \mathbb{R}^n\}.$$

BEMERKUNG 3.2.11 (Linearkombinationen). Sind $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{R}^n$ dann wird jeder Vektor der Form $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$ mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ als *Linearkombination* der Vektoren v_1, \dots, v_r bezeichnet. Für die Menge aller Linearkombinationen schreiben wir

$$\text{span}(v_1, \dots, v_r) := \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i : \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dies ist ein Teilraum von \mathbb{R}^n , denn $0 = 0v_1 + \dots + 0v_r$,

$$(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) + (\lambda'_1 v_1 + \dots + \lambda'_r v_r) = (\lambda_1 + \lambda'_1) v_1 + \dots + (\lambda_r + \lambda'_r) v_r,$$

sowie $\mu(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) = (\mu\lambda_1) v_1 + \dots + (\mu\lambda_r) v_r$ für $\lambda_i, \lambda'_i, \mu \in \mathbb{R}$. Der Teilraum $\text{span}(v_1, \dots, v_r)$ ist offensichtlich der kleinste Teilraum von \mathbb{R}^n , der die Vektoren v_1, \dots, v_r enthält, und wird als der von v_1, \dots, v_r *aufgespannte Teilraum* bezeichnet. Im Fall $r = 0$ definieren wir $\text{span}(\emptyset) := \{0\}$, wobei \emptyset das leere System von Vektoren bezeichnet.

BEMERKUNG 3.2.12. Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Eintragungen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ bildet daher

$$\text{img}(A) = \{As : s \in \mathbb{R}^n\} = \left\{ s_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + s_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \mid s_1, \dots, s_n \in \mathbb{R} \right\}$$

einen Teilraum von \mathbb{R}^m , siehe (81). Beachte, dass dies mit dem von den Spaltenvektoren von A aufgespannten Teilraum übereinstimmt. Wir werden bald sehen, dass sich jeder Teilraum in dieser Form schreiben lässt. Beispielsweise bildet

$$\text{img} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \left\{ s_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} : s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

einen Teilraum in \mathbb{R}^3 , nämlich eine Ebene durch den Koordinatenursprung.

DEFINITION 3.2.13 (Erzeugendensystem). Ein System von Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ wird als *Erzeugendensystem* eines Teilraums V bezeichnet, wenn $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = V$ gilt. In diesem Fall sagen wir auch die Vektoren v_1, \dots, v_k spannen den Teilraum V auf. Auch $k = 0$ ist zugelassen, das leere System \emptyset bildet ein Erzeugendensystem des Teilraums $\{0\}$, in Zeichen: $\text{span}(\emptyset) = \{0\}$.

BEMERKUNG 3.2.14 (Erzeugendensysteme). Ist V ein Teilraum von \mathbb{R}^n und v_1, \dots, v_k ein System von Vektoren in V dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die Vektoren v_1, \dots, v_k bilden ein Erzeugendensystem von V .
- (b) Jeder Vektor in V lässt sich als Linearkombination von v_1, \dots, v_k schreiben, d.h. zu jedem $v \in V$ existieren Skalare $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}$, sodass $v = s_1 v_1 + \dots + s_k v_k$.
- (c) Die Abbildung $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow V$, $\phi \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} := s_1 v_1 + \dots + s_k v_k$, ist surjektiv.

BEISPIEL 3.2.15. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^2 , denn jeder Vektor in \mathbb{R}^2 lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{5x - 3y}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

schreiben. Auch die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^2 , denn jeder Vektor in \mathbb{R}^2 lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{5x - 3y}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{y}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

schreiben. Diesmal ist die Darstellung jedoch nicht eindeutig, es gilt auch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{7x - 6y}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{y}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

BEMERKUNG 3.2.16. Bilden die Vektoren v_1, \dots, v_r ein Erzeugendensystem eines Teilraums V in \mathbb{R}^n , und sind v_{r+1}, \dots, v_{r+k} beliebige weitere Vektoren in V , dann bildet auch v_1, \dots, v_{r+k} ein Erzeugendensystem von V .

BEISPIEL 3.2.17. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ bilden kein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^2 , etwa lässt sich der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht als Linearkombination von v_1 und v_2 schreiben.

BEISPIEL 3.2.18. Der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bildet ein Erzeugendensystem des Teilraums $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \right\}$ von \mathbb{R}^2 , denn jeder Vektor in V ist Vielfaches von v_1 .

BEISPIEL 3.2.19. Die drei Einheitsvektoren $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ bilden ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 , denn jeder Vektor in \mathbb{R}^3 lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

schreiben.

BEMERKUNG 3.2.20. Die Einheitsvektoren e_1, \dots, e_n bilden Erzeugendensystem von \mathbb{R}^n .

BEISPIEL 3.2.21. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 , denn jeder Vektor in \mathbb{R}^3 lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{15x - 20y + 3z}{30} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5y - 6z}{15} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{5} \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

schreiben. In Zeichen: $\text{span}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

BEISPIEL 3.2.22. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ bilden kein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 , denn der Einheitsvektor $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lässt sich offensichtlich nicht als Linearkombination von v_1, v_2, v_3 darstellen. Beachte, dass sich der dritte Vektor durch die anderen beiden ausdrücken lässt: $v_3 = 2v_1 + v_2$.

BEISPIEL 3.2.23. Betrachte den Teilraum $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x + 4y + 5z = 0 \right\}$ von \mathbb{R}^3 . Die beiden Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4/5 \end{pmatrix}$ bilden ein Erzeugendensystem von V , denn jeder Vektor in V lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3/5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4/5 \end{pmatrix} = xv_1 + yv_2$$

schreiben. In Zeichen: $V = \text{span}(v_1, v_2)$.

BEISPIEL 3.2.24. Betrachte den Teilraum $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} 2x + 3y + 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\}$ von \mathbb{R}^3 . Der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bildet ein Erzeugendensystem von V , denn jeder Vektor in V ist Vielfaches von v_1 . In Zeichen: $V = \text{span}(v_1)$.

DEFINITION 3.2.25 (Lineare Abhängigkeit). Ein System von Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ wird *linear abhängig* genannt, falls Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ existieren, die nicht alle gleich 0 sind, und für die

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

gilt.

BEMERKUNG 3.2.26. Sind $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig, so lässt sich wenigstens einer dieser Vektoren als Linearkombination der anderen ausdrücken. Ist etwa $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ und $\lambda_1 \neq 0$, dann gilt $v_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_1} v_k$. Lässt sich umgekehrt einer der Vektoren v_1, \dots, v_k als Linearkombination die anderen ausdrücken, so ist das System linear abhängig. Gilt nämlich etwa $v_1 = \mu_2 v_2 + \dots + \mu_k v_k$, so erhalten wir $(-1)v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_k v_k = 0$.

DEFINITION 3.2.27 (Lineare Unabhängigkeit). Ein System von Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ wird *linear unabhängig* genannt, wenn es nicht linear abhängig ist. Die Vektoren v_1, \dots, v_k sind also genau dann linear unabhängig wenn gilt:

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

Im Fall $k = 0$ definieren wir: Das leere System \emptyset ist linear unabhängig.

BEMERKUNG 3.2.28 (Lineare Unabhängigkeit). Für ein System von Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die Vektoren v_1, \dots, v_k sind linear unabhängig.
- (b) Ist $s_1v_1 + \dots + s_kv_k = s'_1v_1 + \dots + s'_kv_k$ für gewisse $s_i, s'_i \in \mathbb{R}$, dann muss schon $s_i = s'_i$ für alle $i = 1, \dots, k$ gelten.

- (c) Die lineare Abbildung $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} := s_1v_1 + \dots + s_kv_k$, ist injektiv.

Die Implikationen (b) \Leftrightarrow (c) \Rightarrow (a) sind trivial. Die Implikation (a) \Rightarrow (c) folgt aus Lemma 3.2.7 oder direkt: aus $s_1v_1 + \dots + s_kv_k = s'_1v_1 + \dots + s'_kv_k$ zunächst $(s_1 - s'_1)v_1 + \dots + (s_k - s'_k)v_k = 0$, also $s_i - s'_i = 0$ und daher $s_i = s'_i$ für alle i wegen der linearen Unabhängigkeit.

BEISPIEL 3.2.29. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, aus

$$0 = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{pmatrix}$$

folgt nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

BEISPIEL 3.2.30. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn es gilt die nicht-triviale Relation $2v_1 - 1v_2 = 0$. Hier lässt sich jeder der beiden Vektoren durch den anderen ausdrücken: $v_2 = 2v_1$ und $v_1 = \frac{1}{2}v_2$.

BEISPIEL 3.2.31. Die Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 von \mathbb{R}^3 sind linear unabhängig. Aus

$$0 = \lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \lambda_3e_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

folgt nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

BEMERKUNG 3.2.32. Die Einheitsvektoren e_1, \dots, e_n in \mathbb{R}^n sind linear unabhängig.

BEISPIEL 3.2.33. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig in \mathbb{R}^3 . Aus

$$0 = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 5\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 6\lambda_2 \\ 4\lambda_1 + 7\lambda_2 \end{pmatrix}$$

folgt (durch eine einfache Rechnung) nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

BEISPIEL 3.2.34. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig in \mathbb{R}^3 . Aus

$$0 = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \lambda_3v_3 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 7\lambda_3 \\ 3\lambda_2 + 6\lambda_3 \\ 5\lambda_3 \end{pmatrix}$$

folgt nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

BEISPIEL 3.2.35. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig, denn es gilt die nicht-triviale Relation $3v_1 - 2v_2 + 0v_3 = 0$. In diesem Beispiel haben wir $v_1 = \frac{2}{3}v_2$ und $v_2 = \frac{3}{2}v_1$ aber v_3 lässt sich nicht als Linearkombination von v_1 und v_2 darstellen.

BEMERKUNG 3.2.36. Ein System, das nur aus einem Vektor $v_1 \in \mathbb{R}^n$ besteht ist genau dann linear unabhängig, wenn $v_1 \neq 0$ gilt.

BEMERKUNG 3.2.37. Lassen wir in einem linear unabhängigen System einige (oder alle) Vektoren weg, erhalten wir stets ein linear unabhängiges System.

DEFINITION 3.2.38 (Basis). Unter einer (geordneten) Basis eines Teilraums V von \mathbb{R}^n verstehen wir ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V .

PROPOSITION 3.2.39 (Basis und Parameterdarstellung). Ist V ein Teilraum von \mathbb{R}^n und b_1, \dots, b_k ein System von Vektoren in V dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) Die Vektoren b_1, \dots, b_k bilden eine Basis von V .
- (b) Zu jedem $v \in V$ existieren eindeutige Skalare $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}$, sodass $v = s_1b_1 + \dots + s_kb_k$.
- (c) Die Abbildung $\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow V$, $\phi \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} := s_1b_1 + \dots + s_kb_k$, ist eine (lineare) Bijektion.

BEWEIS. Dies folgt durch Kombination der Bemerkungen 3.2.14 und 3.2.28. □

BEISPIEL 3.2.40. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von \mathbb{R}^2 . In Beispiel 3.2.15 haben wir nämlich gesehen, dass diese Vektoren ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^2 bilden, und in Beispiel 3.2.29 haben wir die lineare Unabhängigkeit überprüft.

BEISPIEL 3.2.41. Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von \mathbb{R}^3 . In Beispiel 3.2.21 haben wir nämlich gesehen, dass diese Vektoren ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 bilden, und in Beispiel 3.2.34 haben wir die lineare Unabhängigkeit überprüft.

BEMERKUNG 3.2.42 (Standardbasis). Die Einheitsvektoren e_1, \dots, e_n bilden eine Basis von \mathbb{R}^n , die als *Standardbasis* bezeichnet wird. Dies folgt aus den Bemerkungen 3.2.20 und 3.2.32.

BEISPIEL 3.2.43. In Beispiel 3.2.18 bildet der Vektor v_1 eine Basis des Teilraums V .

BEISPIEL 3.2.44. In Beispiel 3.2.23 bilden die Vektoren v_1, v_2 eine Basis von V .

BEISPIEL 3.2.45. In Beispiel 3.2.24 bildet der Vektor v_1 eine Basis des Teilraums V .

Es liegt nahe, die Dimension eines Teilraums V von \mathbb{R}^n durch die Anzahl der Vektoren einer Basis von V zu definieren, denn so viele Parameter sind für eine Parametrisierung notwendig, siehe Proposition 3.2.39. Dabei drängen sich zwei Fragen auf: Besitzt jeder Teilraum von \mathbb{R}^n tatsächlich eine Basis? Haben alle Basen von V dieselbe Anzahl von Vektoren?

Der Schlüssel zum Dimensionsbegriff ist folgendes Resultat.

SATZ 3.2.46 (Austauschsatz von Steinitz). Sei v_1, \dots, v_r ein Erzeugendensystem eines Teilraums V von \mathbb{R}^n und w_1, \dots, w_k linear unabhängig in V . Dann gilt

$$k \leq r$$

und nach geeignetem Umnummerieren der Vektoren v_1, \dots, v_r bildet auch

$$w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_r$$

ein Erzeugendensystem von V .

BEWEIS. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach k . Für $k = 0$ ist die Aussage trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $k \geq 1$ und die Aussage für $k - 1$ bereits gezeigt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $k - 1 \leq r$ und, nach geeignetem Umnummerieren der Vektoren v_1, \dots, v_r bildet

$$w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_r \tag{82}$$

ein Erzeugendensystem von V . Daher existieren Skalare $\lambda_i \in \mathbb{R}$, sodass

$$w_k = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{k-1} w_{k-1} + \lambda_k v_k + \dots + \lambda_r v_r. \tag{83}$$

Da das System w_1, \dots, w_k linear unabhängig ist folgt $k \leq r$ und mindestens einer der Skalare $\lambda_k, \dots, \lambda_r$ muss verschieden von 0 sein. Andernfalls erhielten wir die Relation $w_k = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{k-1} w_{k-1}$, was der linearen Unabhängigkeit des Systems w_1, \dots, w_k widerspräche. Durch Umnummerieren der Vektoren v_i können wir also $\lambda_k \neq 0$ erreichen. Aus (83) erhalten wir daher

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} w_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} w_{k-1} + \frac{1}{\lambda_k} w_k - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} v_{k+1} - \dots - \frac{\lambda_r}{\lambda_k} v_r.$$

Dies zeigt, dass der Vektor v_k im Erzeugnis des Systems

$$w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_r \tag{84}$$

liegt. Mit (82) ist daher auch (84) ein Erzeugendensystem für V . \square

KOROLLAR 3.2.47. Jeder Teilraum von \mathbb{R}^n besitzt eine Basis. Je zwei Basen eines Teilraums bestehen aus gleichvielen Vektoren.

BEWEIS. Sei V ein Teilraum in \mathbb{R}^n . Wir erinnern uns daran, dass die Einheitsvektoren e_1, \dots, e_n ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^n bilden, siehe Bemerkung 3.2.42. Für jedes linear unabhängige System b_1, \dots, b_k in \mathbb{R}^n haben wir nach Satz 3.2.46 daher die Schranke $k \leq n$. Es gibt also eine maximale Zahl k mit folgender Eigenschaft: Es existiert ein linear unabhängiges System von Vektoren b_1, \dots, b_k in V . Jedes solche System muss ein Erzeugendensystem von V sein. Um dies einzusehen, sei $v \in V$ beliebig. Aus der Maximalität von k folgt, dass das System v, b_1, \dots, b_k linear abhängig ist. Es existieren daher Skalare $\lambda_0, \dots, \lambda_k$, die nicht alle verschwinden und für die $\lambda_0 v + \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k = 0$ gilt. Es muss $\lambda_0 \neq 0$ sein, denn andernfalls erhielten wir die nicht-triviale Relation $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k = 0$, was der linearen Unabhängigkeit des Systems b_1, \dots, b_k widerspräche. Somit $v = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} b_1 - \dots - \frac{\lambda_k}{\lambda_0} b_k$, also $v \in \text{span}(b_1, \dots, b_k)$. Dies zeigt, dass b_1, \dots, b_k ein Erzeugendensystem von V bildet. Da diese Vektoren auch linear unabhängig sind, bilden sie also eine Basis von V . Sind b_1, \dots, b_k und c_1, \dots, c_l zwei Basen von V , dann folgt aus Satz 3.2.46 $k \leq l$ und $l \leq k$, also $k = l$. \square

DEFINITION 3.2.48 (Dimension). Unter der Dimension eines Teilraums V von \mathbb{R}^n verstehen wir die Anzahl der Vektoren in einer (und dann jeder) Basis von V . Wir notieren die Dimension von V mit $\dim(V)$.

BEMERKUNG 3.2.49. Da die Standardbasis e_1, \dots, e_n von \mathbb{R}^n aus genau n Vektoren besteht gilt $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, siehe Bemerkung 3.2.42.

BEMERKUNG 3.2.50. Ein Teilraum V von \mathbb{R}^n ist genau dann 0-dimensional wenn das leere System \emptyset ein Erzeugendensystem bildet, d.h. wenn $V = \{0\}$ gilt. Der Nullvektor bildet *keine* Basis von $V = \{0\}$.

BEMERKUNG 3.2.51. Ist $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$, dann bildet $\text{span}(v)$ einen 1-dimensionalen Teilraum von \mathbb{R}^n . Umgekehrt ist jeder 1-dimensionale Teilraum in \mathbb{R}^n von dieser Form.

BEMERKUNG 3.2.52. Sind v_1, v_2 linear unabhängig in \mathbb{R}^n , dann bildet $\text{span}(v_1, v_2)$ einen 2-dimensionalen Teilraum von \mathbb{R}^n . Umgekehrt ist jeder 2-dimensionale Teilraum in \mathbb{R}^n von dieser Form.

KOROLLAR 3.2.53. Für jeden k -dimensionalen Teilraum V von \mathbb{R}^n gilt:

- (a) Jedes linear unabhängige System in V besteht aus höchstens k Vektoren. Sind v_1, \dots, v_k linear unabhängig in V , dann bilden diese Vektoren schon eine Basis von V .
- (b) Jedes Erzeugendensystem von V besteht aus mindestens k Vektoren. Ist v_1, \dots, v_k ein Erzeugendensystem von V , dann bilden diese Vektoren schon eine Basis von V .

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert eine Basis b_1, \dots, b_k von V . Insbesondere bilden diese Vektoren ein Erzeugendensystem von V . Sind v_1, \dots, v_l linear unabhängig in V , dann folgt aus Satz 3.2.46 daher $l \leq k$. Ist $l = k$, dann folgt aus Satz 3.2.46 auch, dass v_1, \dots, v_k ein Erzeugendensystem, und daher eine Basis, von V bilden. Dies zeigt (a).

Um (b) einzusehen, verwende wir die lineare Unabhängigkeit von b_1, \dots, b_k . Bilden die Vektoren v_1, \dots, v_l ein Erzeugendensystem von V , dann folgt aus Satz 3.2.46 $k \leq l$. Sei nun $k = l$ und v_1, \dots, v_k ein Erzeugendensystem von V . Es genügt zu zeigen, dass diese Vektoren auch linear unabhängig sind. Um dies einzusehen, nehmen wir indirekt an, das System v_1, \dots, v_k wäre linear abhängig. Es gilt daher $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$ für gewisse Skalare λ_i , die nicht alle verschwinden. O.B.d.A. sei $\lambda_k \neq 0$. Somit $v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} v_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} v_{k-1}$, also liegt v_k im Erzeugnis der Vektoren v_1, \dots, v_{k-1} . Wir sehen daher, dass auch v_1, \dots, v_{k-1} ein Erzeugendensystem von V bildet. Da jedes Erzeugendensystem von V aus mindestens k Vektoren bestehen muss, erhalten wir einen Widerspruch. Somit müssen v_1, \dots, v_k linear unabhängig sein. \square

KOROLLAR 3.2.54. Sind W und V zwei Teilräume in \mathbb{R}^n und $W \subseteq V$ dann gilt

$$\dim(W) \leq \dim(V).$$

Ist darüber hinaus $\dim(W) = \dim(V)$, dann folgt schon $W = V$.

BEWEIS. Sei $l = \dim(W)$ und b_1, \dots, b_l eine Basis von W . Da diese Vektoren auch in V linear unabhängig sind, erhalten wir $l \leq \dim(V)$ aus Korollar 3.2.53(a). Gilt $l = \dim(V)$ dann folgt aus Korollar 3.2.53(a), dass b_1, \dots, b_l eine Basis von V bilden. Insbesondere spannen diese Vektoren ganz V auf und wir erhalten $V = \text{span}(b_1, \dots, b_l) = W$. \square

BEISPIEL 3.2.55 (Teilräume von \mathbb{R}^2). Da $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ kann die Dimension eines Teilraums von \mathbb{R}^2 nur die Werte 0, 1 oder 2 annehmen, siehe Korollar 3.2.54. Nach Bemerkung 3.2.50 ist $\{0\}$ der einzige 0-dimensionale Teilraum von \mathbb{R}^2 . Nach Korollar 3.2.54 ist \mathbb{R}^2 der einzige 2-dimensionale Teilraum von \mathbb{R}^2 . Nach Bemerkung 3.2.51 sind die 1-dimensionalen

Teilräume von \mathbb{R}^2 genau die Teilräume der Form $\text{span}(v)$ mit $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$. Wir sehen daher, dass jeder Teilraum V in \mathbb{R}^2 von der Form

$$V = \{0\}, \quad V = \text{span}(v) \quad \text{oder} \quad V = \mathbb{R}^2$$

ist, wobei $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$.

BEISPIEL 3.2.56 (Teilräume von \mathbb{R}^3). Da $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ kann die Dimension eines Teilraums von \mathbb{R}^3 nur die Werte 0, 1, 2 oder 3 annehmen, siehe Korollar 3.2.54. Wie zuvor, siehe auch Bemerkung 3.2.52, folgt, dass jeder Teilraum V in \mathbb{R}^3 von der Form

$$V = \{0\}, \quad V = \text{span}(v), \quad V = \text{span}(v_1, v_2), \quad \text{oder} \quad V = \mathbb{R}^3$$

ist, wobei $0 \neq v \in \mathbb{R}^3$ und v_1, v_2 linear unabhängig in \mathbb{R}^3 sind. Die nicht-trivialen Fälle entsprechen also genau den Geraden bzw. Ebenen durch den Koordinatenursprung.

SATZ 3.2.57 (Dimensionsformel). Für jede lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt

$$\dim \ker(\varphi) + \dim \text{img}(\varphi) = n.$$

BEWEIS. Sei b_1, \dots, b_k eine Basis von $\ker(\varphi)$. Da diese Vektoren linear unabhängig in \mathbb{R}^n sind, lassen sie sich nach Satz 3.2.46 (etwa durch geeignete Einheitsvektoren) zu einer Basis von \mathbb{R}^n ergänzen, d.h. es existieren Vektoren b_{k+1}, \dots, b_n in \mathbb{R}^n , sodass b_1, \dots, b_n eine Basis von \mathbb{R}^n bildet. Es genügt zu zeigen, dass $\varphi(b_{k+1}), \dots, \varphi(b_n)$ eine Basis von $\text{img}(\varphi)$ bildet, denn dann folgt $\dim \text{img}(\varphi) = n - k = n - \dim \ker(\varphi)$.

Da die Vektoren b_1, \dots, b_n ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^n bilden, kann jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ in der Form $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ geschrieben werden. Mit der Linearität von φ folgt

$$\varphi(v) = \lambda_1 \varphi(b_1) + \dots + \lambda_n \varphi(b_n) = \lambda_{k+1} \varphi(b_{k+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(b_n),$$

denn $\varphi(b_1) = \dots = \varphi(b_k) = 0$, da die Vektoren b_1, \dots, b_k in $\ker(\varphi)$ liegen. Dies zeigt, dass $\varphi(b_{k+1}), \dots, \varphi(b_n)$ ein Erzeugendensystem von $\text{img}(\varphi)$ bilden.

Um auch die lineare Unabhängigkeit von $\varphi(b_{k+1}), \dots, \varphi(b_n)$ zu zeigen, seien $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ so, dass $\lambda_{k+1} \varphi(b_{k+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(b_n) = 0$. Mit der Linearität von φ erhalten wir

$$\varphi(\lambda_{k+1} b_{k+1} + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_{k+1} \varphi(b_{k+1}) + \dots + \lambda_n \varphi(b_n) = 0,$$

also liegt $\lambda_{k+1} b_{k+1} + \dots + \lambda_n b_n$ im Kern von φ . Da b_1, \dots, b_k ein Erzeugendensystem des Kerns bildet, existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ mit

$$\lambda_{k+1} b_{k+1} + \dots + \lambda_n b_n = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k.$$

Da die Vektoren b_1, \dots, b_n linear unabhängig sind, muss $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ gelten. Dies zeigt, dass $\varphi(b_{k+1}), \dots, \varphi(b_n)$ linear unabhängig sind. \square

KOROLLAR 3.2.58. Für jede lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt

$$n - m \leq \dim \ker(\varphi) \leq n \quad \text{und} \quad \dim \text{img}(\varphi) \leq \min\{n, m\}.$$

BEWEIS. Da $\text{img}(\varphi)$ einen Teilraum von \mathbb{R}^m bildet, ist $\dim \text{img}(\varphi) \leq m$, siehe Korollar 3.2.54. Mit Satz 3.2.57 erhalten wir daraus auch $\dim \ker(\varphi) = n - \dim \text{img}(\varphi) \geq n - m$. Da $\ker(\varphi)$ einen Teilraum von \mathbb{R}^n ist, gilt auch $\dim \ker(\varphi) \leq n$. Da $\dim \ker(\varphi) \geq 0$, erhalten wir aus Satz 3.2.57 auch $\dim \text{img}(\varphi) = n - \dim \ker(\varphi) \leq n - 0 = n$. \square

KOROLLAR 3.2.59. Ist $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine invertierbare (d.h. bijektive) lineare Abbildung, dann muss $n = m$ gelten.

BEWEIS. Da φ surjektiv ist, gilt $\text{img}(\varphi) = \mathbb{R}^m$, also $\dim \text{img}(\varphi) = m$. Da φ injektiv ist, gilt $\ker(\varphi) = \{0\}$, also $\dim \ker(\varphi) = 0$, siehe Lemma 3.2.7. Mit der Dimensionsformel in Satz 3.2.57 erhalten wir $n = \dim \ker(\varphi) + \dim \text{img}(\varphi) = 0 + m = m$.¹⁸ \square

KOROLLAR 3.2.60. Für eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind äquivalent:

- (a) φ ist bijektiv (invertierbar).
- (b) φ ist surjektiv.
- (c) φ ist injektiv.

BEWEIS. Die Implikationen (a) \Rightarrow (b) und (a) \Rightarrow (c) sind trivial.

Um die Implikation (b) \Rightarrow (a) zu zeigen, sei φ surjektiv. Dann gilt $\text{img}(\varphi) = \mathbb{R}^n$, also $\dim \text{img}(\varphi) = n$ und daher $\dim \ker(\varphi) = n - n = 0$ nach der Dimensionsformel in Satz 3.2.57. Mit Bemerkung 3.2.50 folgt $\ker(\varphi) = \{0\}$, also ist φ nach Lemma 3.2.7 injektiv.

Um die Implikation (c) \Rightarrow (a) zu zeigen, sei φ injektiv. Dann gilt $\ker(\varphi) = \{0\}$ nach Lemma 3.2.7, also $\dim \ker(\varphi) = 0$ und daher $\dim \text{img}(\varphi) = n - 0 = n$ nach der Dimensionsformel in Satz 3.2.57. Mit Korollar 3.2.54 folgt $\text{img}(\varphi) = \mathbb{R}^n$, also ist φ surjektiv. \square

DEFINITION 3.2.61 (Rang einer Matrix). Unter dem Rang einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ verstehen wir die Zahl

$$\text{rank}(A) := \dim \text{img}(A) = \dim \text{img}(\varphi_A),$$

d.h. die Dimension des von den Spalten aufgespannten Teilraums in \mathbb{R}^m .

BERMERKUNG 3.2.62. Nach Satz 3.2.57 gilt $\dim \ker(A) = n - \dim \text{img}(A) = n - \text{rank}(A)$.

BERMERKUNG 3.2.63. Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt

$$n - m \leq \dim \ker(A) \leq n \quad \text{und} \quad \text{rank}(A) \leq \min\{n, m\}.$$

Dies folgt aus Korollar 3.2.58.

BEISPIEL 3.2.64. Ein homogenes System aus 5 linearen Gleichungen in sieben Variablen besitzt stets einen Lösungsraum, der mindestens 2-dimensional ist. Dies folgt aus der vorangehenden Bemerkung 3.2.63 oder der Dimensionsformel in Bemerkung 3.2.62, denn $\dim \ker(A) = n - \dim \text{img}(A) \geq n - m = 7 - 5 = 2$, siehe auch Bemerkung 3.2.6.

BEISPIEL 3.2.65. Zur Beschreibung eines 6-dimensionalen Teilraums in \mathbb{R}^{13} sind mindestens 7 lineare Gleichungen notwendig. Aus Bemerkung 3.2.63 oder der Dimensionsformel in Bemerkung 3.2.62 erhalten wir nämlich $m \geq \dim \text{img}(A) = n - \dim \ker(A) = 13 - 6 = 7$.

KOROLLAR 3.2.66. Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gilt:

- (a) Die Spalten von A sind genau dann linear unabhängig in \mathbb{R}^m wenn $\text{rank}(A) = n$.
- (b) Die Spalten von A bilden genau dann ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^m wenn $\text{rank}(A) = m$.
- (c) Die Spalten von A bilden genau dann eine Basis von \mathbb{R}^m wenn $\text{rank}(A) = n = m$ gilt.

BEWEIS. Die Spalten von A sind genau dann linear unabhängig, wenn $\ker(A) = \{0\}$ gilt, siehe Bemerkung 3.2.28. Nach Bemerkung 3.2.50 ist dies genau dann der Fall, wenn $\dim \ker(A) = 0$ gilt. Wegen der Dimensionsformel in Satz 3.2.57 ist dies zu $\dim \text{img}(A) = n$ äquivalent. Da $\text{rank}(A) = \dim \text{img}(A)$ folgt (a).

¹⁸Alternativ kann dieses Korollar durch Spezialisierung des Beweises von Satz 3.2.57 gezeigt werden: Jede invertierbare lineare Abbildung bildet Basen auf Basen ab.

Die Spalten von A bilden genau dann ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^m , wenn $\text{img}(A) = \mathbb{R}^m$ gilt. Nach Korollar 3.2.54 ist dies genau dann der Fall, wenn $\dim \text{img}(A) = m$ gilt. Da $\text{rank}(A) = \dim \text{img}(A)$ folgt (b).

Die Aussage in (c) folgt sofort aus (a) und (b). □

BEMERKUNG 3.2.67 (Invertierbare Matrizen). Nach Korollar 3.2.59 kann eine Matrix nur dann invertierbar sein, wenn sie quadratisch ist, vgl. Bemerkung 3.1.29. Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (a) A ist invertierbar.
- (b) $\text{rank}(A) = n$.
- (c) Die Spalten von A bilden eine Basis von \mathbb{R}^n .
- (d) Die Spalten von A bilden ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^n .
- (e) Die Spalten von A sind linear unabhängig.

Die Äquivalenz (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e) folgt aus Korollar 3.2.66. Die Äquivalenz (a) \Leftrightarrow (c) aus Bemerkung 3.1.29 und Proposition 3.2.39.

BEMERKUNG 3.2.68. Zwei Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ bilden genau dann eine Basis von \mathbb{R}^2 , wenn $ad - bc \neq 0$, vgl. Bemerkung 2.5.4.

BEMERKUNG 3.2.69 (Hyperebenen). Ist $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-triviale lineare Abbildung, dann muss $\dim \text{img}(\varphi) = 1$ gelten und die Dimensionsformel in Satz 3.2.57 liefert $\dim \ker(\varphi) = n - 1$. Eine nicht-triviale lineare homogene Gleichung in n Variablen besitzt daher stets einen $(n - 1)$ -dimensionalen Lösungsraum. Solche Teilräume werden als *Hyperebenen* bezeichnet.

BEISPIEL 3.2.70. Da der Teilraum $V := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + 3y + 4z = 0 \right\}$ durch eine nicht-triviale lineare Gleichung in drei Variablen beschrieben wird, gilt $\dim(V) = 3 - 1 = 2$. Offensichtlich sind $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ zwei linear unabhängige Vektoren in V . Nach Korollar 3.2.53(a) bilden sie daher eine Basis von V . Es ist daher $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow V$, $\phi \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung von V .

BEISPIEL 3.2.71. Da die Spalten der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^2 bilden gilt $\text{rank}(A) = 2$. Für die Dimension des Lösungsraums

$$L = \ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \left| \begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0 \\ 9x_1 + 8x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0 \end{array} \right. \right\}$$

erhalten wir $\dim(L) = 5 - \text{rank}(A) = 5 - 2 = 3$, siehe Bemerkung 3.2.62.

3.3. Elimination. Wir betrachten ein homogenes System von m linearen Gleichungen in n Variablen x_1, \dots, x_n mit Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Aus Bemerkung 3.2.6 wissen wir, dass der Lösungsraum,

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right\},$$

einen Teilraum von \mathbb{R}^n bildet. Wir wollen nun einen Algorithmus beschreiben, der es erlaubt die Dimension und eine Basis von L zu bestimmen, und so eine Beschreibung von L durch eine Parameterdarstellung zu erhalten.

Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer $(m \times n)$ -Matrix zusammen,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (85)$$

Damit lässt sich das Gleichungssystem kompakter in der Form

$$Ax = 0$$

schreiben, $x \in \mathbb{R}^n$. Für den Lösungsraum erhalten wir

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} = \ker(A).$$

DEFINITION 3.3.1 (Elementare Zeilenumformungen). Unter einer elementaren Zeilenumformung verstehen wir jede der folgenden Operationen mit Matrizen:

- (a) Vertauschen zweier Zeilen.
- (b) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar ungleich Null.
- (c) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

LEMMA 3.3.2. *Kern und Rang einer Matrix bleiben bei elementaren Zeilenumformungen unverändert.*

BEWEIS. Der Kern einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ besteht aus allen Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$, deren Komponenten das homogene lineare System

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

lösen, wobei wir die Eintragungen von A , wie zuvor, mit a_{ij} bezeichnen, siehe (85). Elementare Zeilenumformungen von A entsprechen Äquivalenzumformungen des Gleichungssystems und lassen den Lösungsraum daher unverändert. Aus der Dimensionsformel in Bemerkung 3.2.62 folgt, dass auch der Rang gleich bleibt. \square

Durch geschicktes Anwenden elementarer Zeilenumformungen kann die Koeffizientenmatrix eines Gleichungssystems so weit vereinfacht werden, dass eine Basis ihres Kerns abgelesen werden kann. Wir wollen dies zunächst an einem Beispiel erläutern und anschließend den allgemeinen Algorithmus formulieren.

BEISPIEL 3.3.3. Wir betrachten folgendes homogenes System von vier linearen Gleichungen in vier Variablen

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 7x_2 + 15x_3 + 14x_4 &= 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned} \tag{86}$$

und bezeichnen den Lösungsraum aller Vektoren $x \in \mathbb{R}^4$, deren Komponenten diesem Gleichungssystem genügen, mit L . Wir wollen die Dimension und eine Basis von L bestimmen und damit L durch eine Parameterdarstellung beschreiben. Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 15 & 14 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

und erhalten $L = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$. Durch Anwenden elementarer Zeilenumformungen auf A erhalten wir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 15 & 14 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & -2 & 6 & 2 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 8 \\ 0 & 4 & 15 & 14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Lemma 3.3.2 hat das Gleichungssystem (86) denselben Lösungsraum wie:

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_4 &= 0 \\ x_2 - 4x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Damit lässt sich sofort die allgemeine Lösung angeben. Wir können x_4 beliebig wählen, aus der dritten Gleichung erhalten wir dann $x_3 = -2x_4$, und mit der zweiten Gleichung $x_2 = 4x_4$ und mit der ersten Gleichung $x_1 = -6x_4$. Die allgemeine Lösung von (86) hat daher die Form

$$\begin{pmatrix} -6x_4 \\ 4x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

wobei $x_4 \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Der Lösungsraum L des Systems (86) ist daher 1-dimensional und

der Vektor $\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ bildet eine Basis. Somit ist $\phi: \mathbb{R} \rightarrow L$, $\phi(t) := t \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, eine Bijektion,

d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums.

DEFINITION 3.3.4 (Zeilenstufenform). Eine Matrix hat *Zeilenstufenform* wenn sie die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a_{1,j_1} & * \cdots * & * & * \cdots * & * & \cdots & * & * \cdots * & * & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & a_{2,j_2} & * \cdots * & * & \cdots & * & * \cdots * & * & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & a_{3,j_3} & \cdots & 0 & * \cdots * & * & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & a_{k-1,j_{k-1}} & * \cdots * & * & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 & a_{k,j_k} & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

hat, wobei $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, $a_{i,j_i} \neq 0$ für $i = 1, \dots, k$, und $*$ beliebige Eintragungen bezeichnen. Eine Matrix hat *reduzierte Zeilenstufenform*, wenn sie folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * & 0 & \cdots & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * & 0 & \cdots & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & \cdots & 0 & * \cdots * & 0 & * \cdots * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 1 & * \cdots * & 0 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & * \cdots * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}$$

BEISPIEL 3.3.5. Folgende Matrizen haben reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei bezeichnen $*$ wieder beliebige Eintragungen.

SATZ 3.3.6 (Elimination). Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf (reduzierte) Zeilenstufenform $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gebracht werden. Sind dabei $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ wie in Definition 3.3.4 dann gilt:

- (a) $\text{rank}(A) = \dim \text{img}(A) = k$ und $\dim \ker(A) = n - k$.
- (b) Die ersten k Zeilen der Zeilenstufenform \tilde{A} liefern ein minimales lineares Gleichungssystem für $\ker(A)$.
- (c) Die Spalten von A mit den Nummern j_1, \dots, j_k bilden eine Basis von $\text{img}(A)$.
- (d) Ist die Zeilenstufenform \tilde{A} reduziert, so bilden die Vektoren

$$e_j - \sum_{l=1}^m \tilde{A}_{lj} e_{j_l}, \quad j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\},$$

eine Basis von $\ker(A)$.

BEWEIS. Wir bringen die Matrix A spaltenweise von links nach rechts auf reduzierte Zeilenstufenform. Induktiv nehmen wir an, die ersten $q - 1$ Spalten von A haben bereits reduzierte Zeilenstufenform, wobei $q - 1 < n$. Bezeichne $p - 1$ die Anzahl der nicht-trivialen Zeilen der ersten $q - 1$ Spalten von A . Ist $p - 1 = m$, dann hat A reduzierte Zeilenstufenform. O.B.d.A. sei daher $p - 1 < m$. Somit $A_{p,1} = \dots = A_{p,q-1} = 0$. Sind die Elemente $A_{p,q}, \dots, A_{m,q}$ alle Null, dann sind auch die ersten q Spalten von A in reduzierter Zeilenstufenform, und der Induktionsschritt erledigt. O.B.d.A. sei also einer der Einträge $A_{p,q}, \dots, A_{m,q}$ verschieden von Null. Durch Vertauschen zweier Zeilen können wir weiters $A_{p,q} \neq 0$ erreichen. Durch Multiplikation der p -ten Zeile mit $1/A_{p,q}$, dürfen wir weiters annehmen, dass $A_{p,q} = 1$. Durch Addition geeigneter Vielfacher der p -ten Zeile zu den restlichen Zeilen können wir schließlich auch $A_{i,q} = 0$, für alle $i \neq p$ erreichen. Beachte, dass die verwendeten Zeilenumformungen die ersten $q - 1$ Spalten von A unverändert lassen. Wir erhalten also eine Matrix, deren ersten q Spalten in reduzierter Zeilenstufenform vorliegen. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt, also lässt sich A durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform \tilde{A} bringen.

Im Fall $\tilde{A} = A$ lassen sich die Aussagen (a), (b) und (d) aufgrund der einfachen Zeilenstufenform sofort ablesen. Nach Lemma 3.3.2 gilt $\ker(\tilde{A}) = \ker(A)$ und $\text{rank}(\tilde{A}) = \text{rank}(A)$, also bleiben diese Aussagen auch für A richtig. Um (c) einzusehen, betrachten wir die Matrix B , die wir aus A erhalten, indem wir alle Spalten bis auf die mit Nummern j_1, \dots, j_k streichen. Wenden wir die selben Zeilenumformungen, die uns von A zu \tilde{A} geführt haben, auf B an, so erhalten wir eine Matrix \tilde{B} , deren Spalten gerade die Spalten von \tilde{A} mit Nummern j_1, \dots, j_k sind. Die Matrix \tilde{B} hat daher Zeilenstufenform mit k nicht-trivialen Zeilen, es gilt somit $\ker(\tilde{B}) = \{0\}$. Mit Lemma 3.3.2 folgt $\ker(B) = \{0\}$, also sind die Spalten von B linear unabhängig. Folglich sind auch die Spalten von A mit Nummern j_1, \dots, j_k linear unabhängig in $\text{img}(A)$. Da $\dim \text{img}(A) = k$, bilden diese Spalten eine Basis von $\text{img}(A)$, siehe Korollar 3.2.53(a). \square

BEISPIEL 3.3.7. Es bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Systems:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 12x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_4 + 10x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 7x_5 &= 0 \end{aligned} \tag{87}$$

Wir wollen nun:

- (1) $\dim(L)$ und eine Basis von L bestimmen.
- (2) Ein minimales lineares Gleichungssystem für L angeben.

Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 12 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher $L = \ker(A)$. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 12 & 12 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 10 \\ 3 & 2 & 4 & 9 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt $\dim(L) = 5 - 2 = 3$. Nach Satz 3.3.6(d) bilden die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von L . Insbesondere ist

$$\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow L, \quad \phi \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s_1 - 3s_2 - s_3 \\ s_1 - 2s_3 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix},$$

eine (lineare) Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung für L . Nach Satz 3.3.6(b) erhalten wir aus den nicht-trivialen Zeilen der reduzierten Zeilenstufenform folgendes minimale lineare Gleichungssystem für L :

$$\begin{array}{rcccc} x_1 & +2x_3 & +3x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_2 & -x_3 & & +2x_5 & = 0 \end{array}$$

BEISPIEL 3.3.8. Es bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^3$ den Lösungsraum des Systems:

$$\begin{array}{rcccc} 4x_1 & +8x_2 & +8x_3 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & = & 0 \end{array} \tag{88}$$

Wir wollen eine Basis des Lösungsraums bestimmen. Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher $L = \ker(A)$. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt $\dim(L) = 3 - 2 = 1$. Nach Satz 3.3.6(d) bildet der Vektor

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von L . Insbesondere ist

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow L, \quad \phi(s) = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ 0 \end{pmatrix},$$

eine (lineare) Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung für L .

BEISPIEL 3.3.9. Es bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^3$ den Lösungsraum des Systems:

$$\begin{aligned} +2x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 11x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{89}$$

Wir wollen eine Basis von L bestimmen. Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 11 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher $L = \ker(A)$. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 3 & 6 & 11 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 11 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt $\dim(L) = 3 - 3 = 0$, d.h. $L = \{0\}$ und \emptyset ist eine Basis von L .

BEISPIEL 3.3.10. Es bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Systems:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 11x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 14x_4 + 30x_5 &= 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 12x_4 + 34x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 20x_4 + 41x_5 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 7x_5 &= 0 \end{aligned} \tag{90}$$

Wir wollen nun:

- (1) $\dim(L)$ und eine Basis von L bestimmen.
- (2) Ein minimales lineares Gleichungssystem für L angeben.

Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssystems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher $L = \ker(A)$. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 19 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt $\dim(L) = 5 - 3 = 2$. Nach Satz 3.3.6(d) bilden die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von L . Insbesondere ist

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow L, \quad \phi \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s - t \\ s \\ -3t \\ t \\ 0 \end{pmatrix},$$

eine (lineare) Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung für L . Nach Satz 3.3.6(b) erhalten wir aus den nicht-trivialen Zeilen der reduzierten Zeilenstufenform folgendes minimale lineare Gleichungssystem für L :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

BEISPIEL 3.3.11. Wir wollen den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 13 & 21 & 32 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Durch elementare Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 13 & 21 & 32 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 13 & 21 & 32 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher $\text{rank}(A) = 4$. Die Matrix A ist daher invertierbar, ihre Spalten bilden eine Basis von \mathbb{R}^4 , siehe Bemerkung 3.2.67.

BEISPIEL 3.3.12. Wir wollen verifizieren, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 21 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 sind, und drei dieser Vektoren bestimmen, die eine Basis von \mathbb{R}^3 bilden. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 3 & -6 \\ 4 & 11 & 18 & 21 & 19 \end{pmatrix}.$$

Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 3 & -6 \\ 4 & 11 & 18 & 21 & 19 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher $\text{rank}(A) = 3$. Nach Satz 3.3.6(c) bilden die Vektoren v_1, v_2, v_5 eine Basis von \mathbb{R}^3 , siehe Korollar 3.2.66(b). Insbesondere bilden die Vektoren v_1, \dots, v_5 ein Erzeugendensystem von \mathbb{R}^3 . Beachte, dass etwa v_1, v_2, v_3 keine Basis von \mathbb{R}^3 bilden.

BEISPIEL 3.3.13. Betrachte den Teilraum $W = \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \subseteq \mathbb{R}^5$, der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 12 \\ 20 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 34 \\ 41 \\ 7 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Wir wollen eine Basis von W bestimmen, die aus gewissen der Vektoren v_i besteht. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher $W = \text{img}(A)$. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 19 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher $\dim(W) = 3$. Nach Satz 3.3.6(c) bilden die Vektoren v_1, v_3, v_5 eine Basis von W . Beachte, dass etwa v_1, v_2, v_5 keine Basis von W bildet.

BEISPIEL 3.3.14. Wir wollen entscheiden, ob die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 3 & 8 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 \\ 3 & 8 & 8 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher $\text{rank}(A) = 3$. Somit sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig, siehe Korollar 3.2.66(a)

BEISPIEL 3.3.15. Wir wollen entscheiden, ob die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 9 & 12 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 10 & 14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher $\text{rank}(A) = 2$. Somit sind v_1, v_2, v_3 nicht linear unabhängig, siehe Korollar 3.2.66(a).

BEISPIEL 3.3.16. Wir wollen entscheiden, ob die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von \mathbb{R}^3 bilden. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 14 & 7 & 5 \\ -7 & 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 14 & 7 & 5 \\ -7 & 9 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher $\text{rank}(A) = 3$. Somit bilden v_1, v_2, v_3 eine Basis von \mathbb{R}^3 , siehe Korollar 3.2.66(c).

BEISPIEL 3.3.17. Wir wollen entscheiden, ob die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

eine Basis von \mathbb{R}^4 bilden. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & 13 & 2 \\ -10 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 1 \\ 6 & 9 & 13 & 2 \\ -10 & 4 & 3 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & 7 & -1 \\ 0 & 9 & 13 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher $\text{rank}(A) = 3$. Somit bilden v_1, v_2, v_3, v_4 keine Basis von \mathbb{R}^4 , siehe Korollar 3.2.66(c).

BEISPIEL 3.3.18. Wir wollen zunächst den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 & 14 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 12 & 9 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Durch Vertauschen der ersten und dritten Zeile erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 & 14 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 12 & 9 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeile zu den anderen Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vertauschen der zweiten und dritten Zeile liefert:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der zweiten Zeile zu den letzten beiden Zeilen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der dritten Zeile zur vierten und sechsten Zeile erhalten wir schließlich eine Matrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz 3.3.6(a) gilt daher $\text{rank}(A) = 3$. Aus dieser Rechnung lässt sich noch viel mehr über A sagen. Nach Satz 3.3.6(b) bildet

$$\begin{aligned} 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 + x_6 + 3x_7 + 4x_8 &= 0 \\ 3x_6 + 4x_7 + x_8 &= 0 \\ 4x_7 + 5x_8 &= 0 \end{aligned} \tag{91}$$

ein minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum $L = \{x \in \mathbb{R}^8 \mid Ax = 0\}$, und es gilt $\dim(L) = 5$. Nach Satz 3.3.6(c) bilden die folgenden Spalten von A eine Basis von $\text{img}(A)$:

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad a_7 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 14 \\ 17 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bringen wir A durch weitere Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 & 1/2 & 3/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 & 1/2 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3/2 & 2 & 0 & 0 & 19/24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dann folgt aus Satz 3.3.6(d), dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -19/24 \\ 0 \\ 0 \\ 4/3 \\ -5/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraums $L = \{x \in \mathbb{R}^8 \mid Ax = 0\}$ bilden. Somit ist $\phi: \mathbb{R}^5 \rightarrow L$,

$$\phi \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -19/24 \\ 0 \\ 0 \\ 4/3 \\ -5/4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung von L . Schließlich erhalten wir aus der reduzierten Zeilenstufenform folgendes minimale lineare Gleichungssystem für L , vgl. (91):

$$\begin{aligned} x_3 + \frac{3}{2}x_4 + 2x_5 + \frac{19}{24}x_8 &= 0 \\ x_6 - \frac{4}{3}x_8 &= 0 \\ x_7 + \frac{5}{4}x_8 &= 0 \end{aligned}$$

Wir betrachten nun ein inhomogenes System von m linearen Gleichungen in n Variablen:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned} \tag{92}$$

Wir wollen, für fixe Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und fixe Konstanten $y_i \in \mathbb{R}$, den Lösungsraum

$$L := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \mid \begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = y_m \end{array} \right\},$$

beschreiben. Wir fassen die Koeffizienten und Konstanten des Gleichungssystems zu einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und einem Vektor $y \in \mathbb{R}^m$ zusammen,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \tag{93}$$

Damit lässt sich das Gleichungssystem kompakter in der Form

$$Ax = y$$

schreiben, $x \in \mathbb{R}^n$. Für den Lösungsraum erhalten wir

$$L = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = y\}.$$

Ein inhomogenes Gleichungssystem wird i.A. keine Lösung besitzen. Ist ξ eine (spezielle) Lösung, d.h. $A\xi = y$, dann haben wir

$$x \in L \Leftrightarrow Ax = y \Leftrightarrow A(x - \xi) = 0 \Leftrightarrow x - \xi \in \ker(A) \Leftrightarrow x \in \xi + \ker(A),$$

und daher

$$L = \xi + \ker(A) = \{\xi + v : v \in \ker(A)\}.$$

In diesem Fall erhalten wir den Lösungsraum des inhomogenen Systems $Ax = y$ daher durch Verschieben des Lösungsraums $\ker(A)$ des assoziierten homogenen Systems $Ax = 0$. Ist b_1, \dots, b_k eine Basis von $\ker(A)$, dann ist also

$$\phi: \mathbb{R}^k \rightarrow L, \quad \phi \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_k \end{pmatrix} := \xi + s_1 b_1 + \dots + s_k b_k,$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung von L . Insbesondere gilt

$$L = \{\xi + s_1 b_1 + \dots + s_k b_k : s_1, \dots, s_k \in \mathbb{R}\}.$$

Um den Lösungsraum eines inhomogenen Systems zu beschreiben, genügt es daher eine spezielle Lösung zu finden und eine Basis des Lösungsraums des entsprechenden homogenen Systems zu bestimmen.

SATZ 3.3.19 (Inhomogene lineare Gleichungssysteme). *Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Das inhomogene System*

$$Ax = y \tag{94}$$

ist genau dann lösbar, wenn

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(A|y)$$

gilt. Durch Zeilenumformungen lässt sich die erweiterte Matrix $(A|y)$ auf die Form $(\tilde{A}|\tilde{y})$ bringen, wobei \tilde{A} (reduzierte) Zeilenstufenform hat. Sind $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$ wie in Definition 3.3.4, so ist (94) also genau dann lösbar, wenn $\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_{k+2} = \dots = \tilde{y}_m = 0$ gilt. In diesem Fall liefern die ersten k Zeilen von $(\tilde{A}|\tilde{y})$ ein minimales inhomogenes Gleichungssystem, das dieselbe Lösungsmenge wie (94) besitzt. Ist darüber hinaus die Zeilenstufenform \tilde{A} reduziert, dann bildet

$$\xi = \tilde{y}_1 e_{j_1} + \dots + \tilde{y}_k e_{j_k}$$

eine spezielle Lösung von (94), d.h. es gilt $A\xi = y$. Mit Satz 3.3.6(d) erhalten wir aus \tilde{A} eine Basis b_1, \dots, b_{n-k} für den Lösungsraum des homogenen Systems $Ax = 0$. Die allgemeine Lösung von (94) ist dann von der Form

$$x = \xi + s_1 b_1 + \dots + s_{n-k} b_{n-k}, \quad s_1, \dots, s_{n-k} \in \mathbb{R}.$$

BEWEIS. Bezeichnen $A = (a_1, \dots, a_n)$ die Spalten von A , dann gilt

$$\text{rank}(A) = \dim \text{span}(a_1, \dots, a_n) \quad \text{und} \quad \text{rank}(A|y) = \dim \text{span}(a_1, \dots, a_n, y).$$

Die Bedingung $\text{rank}(A) = \text{rank}(A|y)$ ist daher zu

$$\text{span}(a_1, \dots, a_n) = \text{span}(a_1, \dots, a_n, y)$$

äquivalent, siehe Korollar 3.2.54. Dies ist wiederum zu $y \in \text{span}(a_1, \dots, a_n)$ äquivalent. Da $\text{span}(a_1, \dots, a_n) = \text{img}(A)$, ist dies genau dann der Fall, wenn das System $Ax = y$ eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt.

Elementare Zeilenumformungen der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|y)$ entsprechen Äquivalenzumformungen des Gleichungssystems (92). Es gilt daher

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}x = \tilde{y},$$

d.h. die Lösungsmenge von $Ax = y$ stimmt mit der von $\tilde{A}x = \tilde{y}$ überein. Daraus lassen sich nun sofort die restlichen Behauptungen ablesen. \square

BEISPIEL 3.3.20. Wir wollen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= -1 \end{aligned} \tag{95}$$

bestimmen. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & -1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 8 & -4 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem (95) besitzt daher die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

BEISPIEL 3.3.21. Wir wollen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= -3 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= -4 \end{aligned} \tag{96}$$

bestimmen. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 7 & -4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Daraus lesen wir eine spezielle Lösung ξ sowie eine Basis b_1 für den Lösungsraum des homogenen Systems ab, vgl. Satz 3.3.19:

$$\xi = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (96) ist daher

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Bezeichnet L den Lösungsraum des Systems (96), dann ist also

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow L, \quad \phi(s) := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums. Auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum lässt sich ablesen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & -2x_3 & = -1 \\ x_2 & +3x_3 & = -1 \end{array}$$

BEISPIEL 3.3.22. Wir wollen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rccccrc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = & -1 \\ x_1 & +7x_2 & +17x_3 & +20x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & -x_2 & -16x_3 & -17x_4 & = & 2 \end{array} \quad (97)$$

bestimmen. Durch Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 17 & 20 & 9 \\ 2 & -1 & -16 & -17 & 2 \end{array} \right) & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 14 & 16 & 5 \\ 0 & -5 & -22 & -25 & -6 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -18 & -3 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem (97) besitzt daher keine Lösung, vgl. Satz 3.3.19.

BEISPIEL 3.3.23. Wir wollen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rccccrc} 5x_1 & -5x_2 & +10x_3 & +10x_4 & = & -5 \\ 2x_1 & & +8x_3 & +10x_4 & = & 12 \\ 2x_1 & +x_2 & +10x_3 & +13x_4 & = & 19 \\ 3x_1 & -5x_2 & +2x_3 & & = & -17 \end{array} \quad (98)$$

bestimmen. Durch elementare Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -5 & 10 & 10 & -5 \\ 2 & 0 & 8 & 10 & 12 \\ 2 & 1 & 10 & 13 & 19 \\ 3 & -5 & 2 & 0 & -17 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 14 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 21 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -14 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Daraus lesen wir eine spezielle Lösung ξ sowie eine Basis b_1, b_2 für den Lösungsraum des homogenen Systems ab, vgl. Satz 3.3.19:

$$\xi = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (98) ist daher

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}.$$

Bezeichnet L den Lösungsraum des Systems (98), dann ist also

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow L, \quad \phi \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums. Auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum lässt sich ablesen:

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +4x_3 & +5x_4 = 6 \\ x_2 & +2x_3 & +3x_4 = 7 \end{array}$$

BEISPIEL 3.3.24. Wir wollen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & +6x_3 & +4x_4 & & +3x_6 & = & 5 \\ x_1 & +5x_2 & +10x_3 & -4x_4 & -4x_5 & -x_6 & = & 9 \\ 2x_1 & +2x_2 & +12x_3 & +8x_4 & +2x_5 & +12x_6 & = & 12 \\ -3x_1 & -3x_2 & -18x_3 & -12x_4 & +3x_5 & & = & -12 \end{array} \quad (99)$$

bestimmen. Mittels Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & -4 & -4 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 8 & 2 & 12 & 12 \\ -3 & -3 & -18 & -12 & 3 & 0 & -12 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 3 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 3 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir sehen daher bereits, dass das Gleichungssystem lösbar ist. Durch weitere Zeilenumformungen bringen wir die Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Daraus lesen wir eine spezielle Lösung ξ sowie eine Basis b_1, b_2, b_3 für den Lösungsraum des homogenen Systems ab, vgl. Satz 3.3.19:

$$\xi = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (99) ist daher

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}.$$

Bezeichnet L den Lösungsraum des Systems (99), dann ist also

$$\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow L, \quad \phi \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Bijektion, d.h. eine Parameterdarstellung des Lösungsraums. Auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum lässt sich ablesen:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +5x_3 & +6x_4 & & +x_6 & = & 3 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & & +2x_6 & = & 2 \\ & & 3 & & x_5 & +3x_6 & = & 1 \end{array}$$

Wollen wir die Inverse einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ berechnen, dann müssen wir also jene Matrix $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bestimmen, für die $AX = I_n$ gilt. Dies kann als lineares Gleichungssystem mit n^2 vielen Gleichungen in den n^2 vielen Eintragungen von X verstanden werden. Allerdings zerfällt dieses Gleichungssystem in n unabhängige Systeme, eines für jede Spalte von X , mit je n Gleichungen in n Unbekannten,

$$A \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = e_1, \quad A \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = e_2, \quad \dots \quad A \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = e_n. \quad (100)$$

Diese Systeme lassen sich bequem gleichzeitig mit folgendem Algorithmus lösen:

SATZ 3.3.25 (Algorithmus zur Bestimmung der Inversen). *Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine invertierbare $(n \times n)$ -Matrix, dann kann die $n \times (2n)$ -Matrix $(A|I_n)$ durch elementare Zeilenumformungen auf die Gestalt $(I_n|X)$ gebracht werden und es gilt $A^{-1} = X$.*

BEWEIS. Die Matrix A kann durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden, siehe Satz 3.3.6. Wegen der Invertierbarkeit von A ist $\text{rank}(A) = n$, also muss die reduzierte Zeilenstufenform mit der Einheitsmatrix I_n übereinstimmen. Wenn wir die selben Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix $(A|I_n)$ an, erhalten wir also $(A|I_n) \rightsquigarrow (I_n|X)$ für eine $(n \times n)$ -Matrix X . Nach Satz 3.3.19 lösen die Spalten von X die Gleichungssysteme (100). Es gilt daher $AX = I_n$, also $X = A^{-1}$. \square

BEISPIEL 3.3.26. Wir wollen die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Die Inverse von A ist daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

BEISPIEL 3.3.27. Wir wollen untersuchen, ob die lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 \\ -x_3 + 2x_4 \end{pmatrix},$$

invertierbar ist und gegebenenfalls ihre Umkehrabbildung bestimmen. Wir versuchen daher, die Inverse der entsprechenden Matrix,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

zu bestimmen, siehe Proposition 3.1.25 und Bemerkung 3.1.29. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1/5 & -2/5 & -8/5 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -2/5 & -9/5 & -6/5 & -3/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/5 & 6/5 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{array} \right) \\ & \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3/5 & 6/5 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Somit ist A invertierbar mit inverser

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 2/5 & 1/5 \\ 3/5 & 6/5 & 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 & 6/5 & 3/5 \\ 1/5 & 2/5 & 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Umkehrabbildung von φ ist daher

$$\varphi^{-1}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 3x_4 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}.$$

BEMERKUNG 3.3.28 (Zeilen- und Spaltenrang). Wir haben den Rang einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ als Dimension des von ihren Spaltenvektoren aufgespannten Teilraums in \mathbb{R}^m definiert, siehe Definition 3.2.61. Dieser Rang wird daher manchmal auch als *Spaltenrang* von A bezeichnet. Er kann äquivalent als die maximale Zahl linear unabhängiger Spalten von A verstanden werden, siehe Korollar 3.2.53(a). Unter dem *Zeilenrang* von A verstehen wir die Dimension des Teilraums in \mathbb{R}^n , der von den Zeilenvektoren von A aufgespannt wird. Dies ist die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilen von A . Beachte, dass der von den Zeilenvektoren von A aufgespannte Teilraum bei elementaren Zeilenumformungen offensichtlich unverändert bleibt. Daher ändert sich der Zeilenrang bei Zeilenumformungen nicht. Nach Lemma 3.3.2 bleibt auch der Spaltenrang bei Zeilenumformungen unverändert. Zeilen- und Spaltenrang einer Matrix stimmen daher mit Zeilen- und Spaltenrang ihrer reduzierten Zeilenstufenform überein. Für Matrizen in reduzierter Zeilenstufenform stimmen Zeilen- und Spaltenrang offensichtlich überein. Dies zeigt, dass Zeilen- und Spaltenrang stets gleich sind: Die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilen von A stimmt stets mit der maximalen Zahl linear unabhängiger Spalten überein. Da die Unterscheidung zwischen Zeilen- und Spaltenrang also nicht notwendig ist, werden beide als Rang bezeichnet.

Das Eliminationsverfahren (Zeilenumformungen), das wir oben kennengelernt haben, erlaubt es Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme durch Parameterdarstellungen zu beschreiben. Soll umgekehrt eine in parametrisierter Form vorliegende Teilmenge durch ein lineares Gleichungssystem beschrieben werden, benötigen wir Spaltenumformungen.

DEFINITION 3.3.29 (Elementare Spaltenumformungen). Unter einer elementaren Spaltenumformung verstehen wir jede der folgenden Operationen mit Matrizen:

- (a) Vertauschen zweier Spalten.
- (b) Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar ungleich Null.
- (c) Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte.

Da der von den Spalten aufgespannte Teilraum bei elementaren Spaltenumformungen offensichtlich gleich bleibt haben wir:

LEMMA 3.3.30. *Bild und Rang einer Matrix bleiben bei elementaren Spaltenumformungen unverändert.*

Durch elementare Spaltenumformungen kann jede Matrix auf reduzierte Spaltenstufenform gebracht werden, vgl. Satz 3.3.6. Dabei sind (reduzierte) Spaltenstufenformen analog zu den (reduzierten) Zeilenstufenformen definiert, wobei allerdings die Rollen von Zeilen

und Spalten vertauscht werden. Aus einer Spaltenstufenform lässt sich sofort eine Basis des Bildes, d.h. eine Basis des von den Spaltenvektoren erzeugten Teilraums, ablesen. Ist die Spaltenstufenform reduziert, können wir auch ein (minimales) lineares Gleichungssystem für das Bild ablesen. Wir wollen dies an einigen Beispielen veranschaulichen.

BEISPIEL 3.3.31. Wir betrachten die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -10 \\ -11 \end{pmatrix}$$

und bezeichne den davon aufgespannten Teilraum mit $V := \text{span}(v_1, v_2, v_3, v_4)$. Wir wollen ein lineares Gleichungssystem für V bestimmen. Dazu fassen wir die Vektoren zu einer Matrix zusammen und bringen sie mittels elementarer Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & 6 & -10 \\ -2 & 1 & 8 & -11 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 8 & -4 \\ -2 & 5 & 10 & -5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die reduzierte Spaltenstufenform dasselbe Bild hat, siehe Lemma 3.3.30, bilden ihre nicht-trivialen Spalten eine Basis b_1, b_2 von V ,

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich auch ein (minimales) lineares Gleichungssystem für V angeben:

$$\begin{array}{cccc} -2x_1 & -4x_2 & +x_3 & = 0 \\ -3x_1 & -5x_2 & & +x_4 = 0 \end{array}$$

BEISPIEL 3.3.32. Wir betrachten die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und bezeichne den davon aufgespannten Teilraum mit $V := \text{span}(v_1, v_2, v_3)$. Wir wollen ein lineares Gleichungssystem für V bestimmen. Dazu fassen wir die Vektoren zu einer Matrix

zusammen und bringen sie mittels elementarer Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & 1 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 7 \\ 5 & 18 & 14 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 10 & -3 \\ 5 & 18 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Da die reduzierte Spaltenstufenform dasselbe Bild hat, siehe Lemma 3.3.30, bilden ihre nicht-trivialen Spalten eine Basis b_1, b_2, b_3 von V ,

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Damit lässt sich auch ein (minimales) lineares Gleichungssystem für V angeben:

$$\begin{array}{cccccc} -x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +x_4 & & = 0 \\ -6x_1 & -5x_2 & -4x_3 & & +x_5 & = 0 \end{array}$$

BEISPIEL 3.3.33. Wir wollen die Teilmenge

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

von \mathbb{R}^4 durch ein lineares Gleichungssystem beschreiben. Wir betrachten zunächst den, von den Richtungsvektoren aufgespannten Teilraum

$$V := \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Wie zuvor bestimmen wir mittels Spaltenumformungen ein Gleichungssystem für V ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 9 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 9 & -10 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$$

und erhalten

$$V = \{x \in \mathbb{R}^4 : -7x_1 - 8x_2 - 9x_3 + x_4 = 0\}.$$

Einsetzen eines Punktes von H liefert

$$H = \{x \in \mathbb{R}^4 : -7x_1 - 8x_2 - 9x_3 + x_4 = 2\}.$$

BEMERKUNG 3.3.34. Es ist nun auch evident, dass sich jeder Teilraum von \mathbb{R}^n durch ein homogenes lineares Gleichungssystem beschreiben lässt. Jeder Teilraum besitzt nämlich eine Basis und mittels Spaltenumformungen lässt sich stets ein lineares Gleichungssystem für deren Erzeugnis angeben.

3.4. Determinanten. In Bemerkung 2.5.4 haben wir gesehen, dass eine 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt. Im invertierbaren Fall kann die Inverse auch leicht angegeben werden,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Die dabei auftretende Zahl $ad - bc$ wird als Determinante der Matrix bezeichnet.

DEFINITION 3.4.1. Unter der *Determinante* einer 2×2 -Matrix verstehen wir die Zahl

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc.$$

Mit der Determinante lässt sich die Lösung von Gleichungssystemen explizit angeben.

PROPOSITION 3.4.2 (Cramer'sche Regel). Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine invertierbare Matrix und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, dann besitzt das Gleichungssystem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2$$

die eindeutige Lösung

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\det(A)} \begin{vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{vmatrix}. \quad (101)$$

BEWEIS. Mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ lässt sich das Gleichungssystem in der Form $Ax = y$ schreiben. Multiplikation von links mit A^{-1} führt auf $x = A^{-1}y$. Die eindeutige Lösung ist daher

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22}y_1 - a_{12}y_2 \\ -a_{21}y_1 + a_{11}y_2 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Komponenten der eindeutigen Lösung x sind also durch (101) gegeben. \square

BEISPIEL 3.4.3. Wir wollen das Gleichungssystem

$$2x_1 + 5x_2 = 3$$

$$x_1 + 4x_2 = -6$$

mit der Cramer'schen Regel (101) lösen und erhalten

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{42}{3} = 14 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-15}{3} = -5.$$

LEMMA 3.4.4 (Charakterisierende Eigenschaften der Determinante). *Die Determinante ist linear und schiefsymmetrisch in den Spalten, d.h. für $v, v', w, w' \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \det(v + v', w) &= \det(v, w) + \det(v', w), & \det(\lambda v, w) &= \lambda \det(v, w), \\ \det(v, w + w') &= \det(v, w) + \det(v, w'), & \det(v, \lambda w) &= \lambda \det(v, w), \end{aligned}$$

$$\det(v, w) = -\det(w, v).$$

Für die Einheitsmatrix I gilt weiters

$$\det(I) = 1.$$

Die Determinante ist durch diese Eigenschaften eindeutig charakterisiert.

BEWEIS. Die Linearität der Determinante in der ersten Spalte lässt sich leicht durch eine direkte Rechnung überprüfen:

$$\begin{aligned} \det(v + v', w) &= \det \begin{pmatrix} v_1 + v'_1 & w_1 \\ v_2 + v'_2 & w_2 \end{pmatrix} = (v_1 + v'_1)w_2 - w_1(v_2 + v'_2) \\ &= (v_1w_2 - w_1v_2) + (v'_1w_2 - w_1v'_2) = \det(v, w) + \det(v', w) \end{aligned}$$

und

$$\det(\lambda v, w) = \det \begin{pmatrix} \lambda v_1 & w_1 \\ \lambda v_2 & w_2 \end{pmatrix} = (\lambda v_1)w_2 - w_1(\lambda v_2) = \lambda(v_1w_2 - w_1v_2) = \lambda \det(v, w).$$

Auch die Schiefsymmetrie ist offensichtlich:

$$\det(w, v) = \det \begin{pmatrix} w_1 & v_1 \\ w_2 & v_2 \end{pmatrix} = w_1v_2 - v_1w_2 = -\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = -\det(v, w).$$

Linearität in der zweiten Spalte folgt durch Kombination dieser beiden Eigenschaften:

$$\det(v, w + w') = -\det(w + w', v) = -\det(w, v) - \det(w', v) = \det(v, w) + \det(v, w')$$

und analog $\det(v, \lambda w) = -\det(\lambda w, v) = -\lambda \det(w, v) = \lambda \det(v, w)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die Determinantenfunktion durch diese Eigenschaften eindeutig charakterisiert ist. Sei dazu $\delta: \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Abbildung, die jeder 2×2 -Matrix eine reelle Zahl zuordnet, linear und schiefsymmetrisch in den Spalten ist und die Normierungsbedingung $\delta(I) = 1$ erfüllt. Schreiben wir

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dann folgt aus der Bilinearität

$$\begin{aligned}\delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= a \cdot \delta \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} + c \cdot \delta \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \\ &= ab \cdot \delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + ad \cdot \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + cb \cdot \delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + cd \cdot \delta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aus der Schiefsymmetrie erhalten wir $\delta(v, v) = -\delta(v, v) = 0$ für jedes $v \in \mathbb{R}^2$, sowie $\delta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Insgesamt ergibt sich

$$\delta \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - cb) \cdot \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = ad - bc = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

wobei im vorletzten Gleichheitszeichen die Normierung $\delta(I) = 1$ eingegangen ist. \square

BEMERKUNG 3.4.5. Die Determinante ist auch linear und schiefsymmetrisch in den Zeilen. Dies lässt sich analog beweisen.

BEMERKUNG 3.4.6. Für je zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B). \quad (102)$$

Dies lässt sich leicht durch eine direkte Rechnung überprüfen, siehe Übungen. Einen konzeptionelleren Beweis, der sich leicht auf größere Matrizen verallgemeinern lässt, werden wir im Beweis von Satz 3.4.19 kennen lernen. Ist A invertierbar, so erhalten wir daraus $1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$, also $\det(A) \neq 0$ und

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

Aufgrund der multiplikativen Formel (102) liefert die Determinante einen (surjektiven) Gruppenhomomorphismus

$$\det: \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

wobei $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation des Körpers als (abelsche) Gruppe aufgefasst wird.

BEMERKUNG 3.4.7. Für $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$|\det(v, w)| = \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}. \quad (103)$$

Beachte, dass der Ausdruck unter der Wurzel wegen der Cauchy–Schwartz Ungleichung nicht negativ sein kann, siehe Lemma 2.3.38. Bis aufs Vorzeichen lässt sich die Determinante daher mit dem Skalarprodukt berechnen. Um (103) zu überprüfen sei $v = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.

Damit erhalten wir

$$\det(v, w)^2 = (ad - bc)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$$

und daher (103).

DEFINITION 3.4.8 (Fächeneinhalt von Dreiecken). Den Fächeneinhalt eines Dreiecks ABC mit Seitenlängen a, b, c und gegenüberliegenden Winkeln α, β, γ definieren wir durch

$$A := F(ABC) := \frac{1}{2}ab \sin \gamma = \frac{1}{2}bc \sin \alpha = \frac{1}{2}ca \sin \beta. \quad (104)$$

BEMERKUNG 3.4.9. Diese Definition des Flächeninhalts ist durch die bekannte Flächenformel für Dreiecke motiviert,

$$A = \frac{\text{Basis} \times \text{Höhe}}{2}.$$

Nach dem Sinussatzes 2.4.12 stimmen die drei Ausdrücke in (104) überein, d.h. es kommt dabei nicht darauf an, welche Seite zur Berechnung des Flächeninhalts herangezogen wird. Dies lässt sich auch in der Form

$$\frac{2A}{abc} = \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

schreiben. Es gilt die Heron'sche Formel

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{wobei} \quad s = \frac{a+b+c}{2}$$

den halben Umfang bezeichnet. Dies folgt mit dem Kosinussatz 2.4.13 durch eine direkte Rechnung, in der mehrmals die binomische Formel eingeht:

$$\begin{aligned} 16A^2 &= 4a^2b^2 \sin^2 \gamma \\ &= 4a^2b^2(1 - \cos^2 \gamma) \\ &= 4a^2b^2 - 4a^2b^2 \cos^2 \gamma \\ &= 4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2 \\ &= (2ab - (c^2 - a^2 - b^2))(2ab + (c^2 - a^2 - b^2)) \\ &= ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2) \\ &= ((a+b) + c)((a+b) - c)(c + (a-b))(c - (a-b)) \\ &= 16s(s-c)(s-b)(s-a) \end{aligned}$$

PROPOSITION 3.4.10 (Flächeninhalt von Dreiecken in Koordinaten). *Ist ABC ein Dreieck und $x: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Koordinatenabbildung eines kartesischen Koordinatensystems dann gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks*

$$F(ABC) = \frac{1}{2} |\det(v, w)|,$$

wobei $v := x(B) - x(C)$ und $w := x(A) - x(C)$.

BEWEIS. Nach Satz 2.3.41 gilt

$$\begin{aligned} a &= |CB| = \|x(B) - x(C)\| = \|v\|, \\ b &= |CA| = \|x(A) - x(C)\| = \|w\| \end{aligned}$$

und mit Proposition 2.4.15 erhalten wir $ab \cos \gamma = \langle v, w \rangle$. Somit

$$\begin{aligned} 2F(ABC) &= ab \sin \gamma \\ &= ab \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \\ &= \sqrt{a^2b^2 - a^2b^2 \cos^2 \gamma} \\ &= \sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2} \\ &= |\det(v, w)|, \end{aligned}$$

wobei im letzten Gleichheitszeichen Gleichung (103) eingegenagen ist. □

BEISPIEL 3.4.11. Es soll der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet werden, dessen Eckpunkte bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems die Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

haben. Wir berechnen $v = x(B) - x(C) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, $w = x(A) - x(C) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und erhalten mit Proposition 3.4.10

$$F(ABC) = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \right| = \frac{|3 \cdot 5 - 4 \cdot 6|}{2} = \frac{|-9|}{2} = \frac{9}{2}.$$

BEMERKUNG 3.4.12 (Determinante als orientierter Flächeninhalt). Seien $v, w \in \mathbb{R}^2$. Die Determinante $\det(v, w)$ liefert einen *orientierten Flächeninhalt* des Parallelogramms mit Eckpunkten $0, v, w, v + w$. Wie immer dieser orientierte Flächeninhalt definiert wird, er sollte die Eigenschaften in Lemma 3.4.4 besitzen und muss daher mit der Determinante übereinstimmen. Ähnlich lässt sich argumentieren, dass $\frac{1}{2} \det(v, w)$ der orientierte Flächeninhalt des Dreiecks mit Eckpunkten $0, v, w$ ist.

Auch größeren quadratischen Matrizen kann eine Determinante mit analogen Eigenschaften zugeordnet werden.

DEFINITION 3.4.13. Unter der *Determinante* einer 3×3 -Matrix verstehen wir die Zahl

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Diese Formel wird als *Regel von Sarrus* bezeichnet.

BEISPIEL 3.4.14.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 9 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 7 + 1 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 7 - 1 \cdot 2 \cdot 1 = 0$$

BEMERKUNG 3.4.15 (Entwicklung nach erster Zeile und Spalte). Die Regel von Sarrus lässt sich auch wie folgt schreiben:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

BEWERTUNG 3.4.16 (Determinante von Dreiecksmatrizen). Für Dreiecksmatrizen gilt

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt für die Determinante der Einheitsmatrix:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

LEMMA 3.4.17 (Eigenschaften der Determinante).

(a) Die Determinante ist linear in jeder Spalte, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \det(u + u', v, w) &= \det(u, v, w) + \det(u', v, w), & \det(\lambda u, v, w) &= \lambda \det(u, v, w), \\ \det(u, v + v', w) &= \det(u, v, w) + \det(u, v', w), & \det(u, \lambda v, w) &= \lambda \det(u, v, w), \\ \det(u, v, w + w') &= \det(u, v, w) + \det(u, v, w'), & \det(u, v, \lambda w) &= \lambda \det(u, v, w). \end{aligned}$$

für alle $u, u', v, v', w, w' \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. (Multilinearität)

(b) Bei Vertauschung zweier Spalten ändert die Determinante das Vorzeichen, d.h.

$$-\det(u, v, w) = \det(v, u, w) = \det(w, v, u) = \det(u, w, v)$$

für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. (Schiefsymmetrie)

(c) Stimmen zwei Spalten einer Matrix überein, dann verschwindet ihre Determinante.

(d) Bei Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte bleibt die Determinante unverändert.

(e) Die Determinante ist linear in jeder Zeile.

(f) Bei Vertauschung zweier Zeilen ändert die Determinante ihr Vorzeichen.

(g) Stimmen zwei Zeilen einer Matrix überein dann verschwindet ihre Determinante.

(h) Bei Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile bleibt die Determinante unverändert.

(i) $\det(I_3) = 1$. (Normierung durch Einheitsmatrix)

(j) Ist δ eine Abbildung, die jeder (3×3) -Matrix A eine Zahl $\delta(A)$ so zuordnet, dass (a) und (b) erfüllt sind, dann gilt $\delta(A) = \det(A)\delta(I_3)$ für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

(k) Die Determinante ist durch die Eigenschaften (a), (b) und (i) eindeutig charakterisiert.

BEWEIS. Die Eigenschaften in (a) und (b) folgen unmittelbar aus der Definition bzw. der Formel in Bemerkung 3.4.15. Die Aussage in (c) folgt sofort aus (b). Die Eigenschaft (d) ist eine Konsequenz von (a) und (c), denn

$$\det(u, v + \lambda u, w) = \det(u, v, w) + \lambda \det(u, u, w) = \det(u, v, w),$$

und analog für andere Spalten. Die Eigenschaften (e) bis (h) lassen sich analog verifizieren. Die Determinante der Einheitsmatrix haben wir bereits in Bemerkung 3.4.16 berechnet.

Sei nun δ wie in (j). Wie zuvor folgt aus (b), dass δ auch die Eigenschaft (c) besitzt. Wir schreiben die Spalten einer Matrix mit Hilfe der Einheitsvektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 a_{i1}e_i, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^3 a_{j2}e_j, \quad \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^3 a_{k3}e_k,$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\delta \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} &= \delta \left(\sum_{i=1}^3 a_{i1}e_i, \sum_{j=1}^3 a_{j2}e_j, \sum_{k=1}^3 a_{k3}e_k \right) \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 a_{i1}a_{j2}a_{k3} \cdot \delta(e_i, e_j, e_k) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i, j, k \leq 3 \\ \text{alle verschieden}}} a_{i1}a_{j2}a_{k3} \cdot \delta(e_i, e_j, e_k) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) + a_{21}a_{32}a_{13} \cdot \delta(e_2, e_3, e_1) + a_{31}a_{12}a_{23} \cdot \delta(e_3, e_1, e_2) \\
&\quad + a_{11}a_{32}a_{23} \cdot \delta(e_1, e_3, e_2) + a_{21}a_{12}a_{33} \cdot \delta(e_2, e_1, e_3) + a_{31}a_{22}a_{13} \cdot \delta(e_3, e_2, e_1) \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) + a_{21}a_{32}a_{13} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) + a_{31}a_{12}a_{23} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) \\
&\quad - a_{11}a_{32}a_{23} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) - a_{21}a_{12}a_{33} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) - a_{31}a_{22}a_{13} \cdot \delta(e_1, e_2, e_3) \\
&= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \delta(I_3)
\end{aligned}$$

Dies zeigt (j). Die Aussage (k) folgt unmittelbar aus (j). □

BEMERKUNG 3.4.18 (Berechnung mittels Zeilenumformungen). Nach Lemma 3.4.17 kann die Determinante durch Zeilenumformungen bestimmt werden. Beispielsweise gilt

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$$

wobei wir im letzten Schritt Bemerkung 3.4.16 verwendet haben. Beim Vertauschen zweier Zeilen und bei Multiplikation einzelner Zeilen müssen wir den Faktor verbuchen. Etwa gilt:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 14 \end{pmatrix} &= -\det \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & 14 \end{pmatrix} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 3 & -1 & 14 \end{pmatrix} = -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \\
&= -2 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = -6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -6 \cdot 2 = -12.
\end{aligned}$$

SATZ 3.4.19. Für je zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

$$\det(AB) = \det(A) \det(B). \tag{105}$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

BEWEIS. Wir fixieren A und betrachten die Abbildung δ , die jeder (3×3) -Matrix B die Zahl $\delta(B) := \det(AB)$ zuordnet. Bezeichnen wir die Spalten von B mit $B = (u, v, w)$, dann ist $AB = (Au, Av, Aw)$ und daher $\delta(B) = \det(AB) = \det(Au, Av, Aw)$. Da die Determinante

linear und schiefssymmetrisch in den Spalten ist, ist daher auch $\delta(B)$ linear und schiefssymmetrisch in den Spalten von B . Mit Lemma 3.4.17(j) folgt $\delta(B) = \det(B)\delta(I_3)$ und daher $\det(AB) = \det(B)\det(A)$. Damit ist (105) gezeigt. Ist A invertierbar, dann folgt daraus $1 = \det(I_3) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$, also $\det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Sei nun A nicht invertierbar. Nach Bemerkung 3.2.67 sind die Spalten von A linear abhängig. Es existiert daher eine Spalte, die sich als Linearkombination der anderen beiden schreiben lässt. O.B.d.A. sei A von der Form $A = (u, v, \lambda u + \mu v)$ für $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Es folgt $\det(A) = \lambda \det(u, v, u) + \mu \det(u, v, v) = 0$. Dies zeigt, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. \square

BEMERKUNG 3.4.20. Analog zu der Beschreibung $GL_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det(A) \neq 0\}$, siehe Bemerkung 2.5.4, liefert Satz 3.4.19 folgende Beschreibung der allgemeinen linearen Gruppe durch eine (nicht lineare) Ungleichung, siehe Bemerkung 3.1.28,

$$GL_3(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : \det(A) \neq 0\}.$$

Die Determinante schränkt sich zu einem surjektiven Gruppenhomomorphismus,

$$\det: GL_3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

ein, wobei $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation des Körpers als (abelsche) Gruppe aufgefasst wird.

BEMERKUNG 3.4.21. Drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ bilden genau dann eine Basis von \mathbb{R}^3 wenn $\det(u, v, w) \neq 0$. Dies folgt aus Satz 3.4.19 und Bemerkung 3.2.67.

BEISPIEL 3.4.22. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von \mathbb{R}^3 , denn $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ bilden keine Basis von \mathbb{R}^3 , denn $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = 0$. Die beiden Determinanten haben wir in Beispiel 3.4.14 berechnet.

Mit Hilfe von Determinanten lässt sich auch die Lösungen eines Gleichungssystems in drei Variablen durch eine explizite Formel analog zu der in Proposition 3.4.2 angeben:

SATZ 3.4.23 (Cramer'sche Regel). Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ eine invertierbare Matrix und $y \in \mathbb{R}^3$. Dann besitzt das Gleichungssystem

$$Ax = y$$

eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^3$, und für die Komponenten von $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ gilt

$$x_1 = \frac{\det(y, a_2, a_3)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(a_1, y, a_3)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(a_1, a_2, y)}{\det(A)},$$

wobei $A = (a_1, a_2, a_3)$ die Spalten von A bezeichnen.

BEWEIS. Da A invertierbar ist, existiert ein eindeutiges $x \in \mathbb{R}^3$ mit $Ax = y$. Für die 3×3 -Matrix $X' = (x, e_2, e_3)$ gilt $\det(X') = x_1$ und $AX' = (Ax, Ae_2, Ae_3) = (y, a_2, a_3)$. Mit (105) erhalten wir

$$\det(A)x_1 = \det(A) \det(X') = \det(AX') = \det(y, a_2, a_3).$$

Division durch $\det(A)$ liefert die gewünschte Formel für die erste Komponente x_1 der Lösung.

Betrachten wir die Matrix $X'' = (e_1, x, e_3)$, erhalten wir analog $\det(X'') = x_2$, $AX'' = (Ae_1, Ax, Ae_3) = (a_1, y, a_3)$,

$$\det(A)x_2 = \det(A) \det(X'') = \det(AX'') = \det(a_1, y, a_3),$$

und daher die Formel für x_2 . Für $X''' = (e_1, e_2, x)$ schließlich gilt $\det(X''') = x_3$, $AX''' = (Ae_1, Ae_2, Ax) = (a_1, a_2, y)$,

$$\det(A)x_3 = \det(A) \det(X''') = \det(AX''') = \det(a_1, a_2, y),$$

und daher die Formel für x_3 . □

BEISPIEL 3.4.24. Wir wollen das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +2x_2 & +5x_3 = 8 \\ -2x_1 & +3x_2 & -x_3 = 5 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 = 9 \end{array}$$

mit Hilfe der Cramer'schen Regel lösen. Dazu berechnen wir folgende Determinanten:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 - 10 - 45 + 1 + 4 = -53$$

$$\det(y|a_2|a_3) = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24 - 18 + 25 - 135 + 8 - 10 = -106$$

$$\det(a_1|y|a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 24 - 90 - 75 + 9 + 16 = -159$$

$$\det(a_1|a_2|y) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 27 + 30 - 16 - 72 - 5 + 36 = 0$$

Nach Satz 3.4.23 gilt daher

$$x = \frac{1}{-53} \begin{pmatrix} -106 \\ -159 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{106}$$

Zum Vergleich wollen wir dasselbe Gleichungssystem nochmals mit dem Eliminationsverfahren lösen:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ -2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 9 \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 7 & 9 & 21 \\ 0 & -5 & -14 & -15 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 9/7 & 3 \\ 0 & -5 & -14 & -15 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 9/7 & 3 \\ 0 & 0 & -53/7 & 0 \end{array} \right) \\ &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & 9/7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir erhalten so die selbe Lösung (106).

BEMERKUNG 3.4.25. Für die Inverse einer invertierbaren (3×3) -Matrix erhalten wir aus der Cramer'schen Regel in Satz 3.4.23 folgende explizite Formel analog zu der Formel für invertierbare (2×2) -Matrizen in Bemerkung 2.5.4:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir etwa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Um die geometrische Bedeutung von 3×3 -Determinanten herauszuarbeiten und den Zusammenhang mit dem Kreuzprodukt zu formulieren, verallgemeinern wir zunächst das Skalarprodukt und die Norm in naheliegender Weise auf Vektoren in \mathbb{R}^n , vgl. Definition 2.3.35.

DEFINITION 3.4.26 (Skalarprodukt und Norm). Unter dem *Standardskalarprodukt* oder *inneren Produkt* zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ verstehen wir die Zahl

$$\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n, \quad \text{wobei } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ und } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Unter der *Norm* von v verstehen wir die Zahl

$$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}.$$

Analog zu Lemma 2.3.36 haben wir:

LEMMA 3.4.27 (Eigenschaften des Skalarprodukts). Für $v, v', w, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ (Symmetrie)
- (b) $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$ und $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ (Linearität in der ersten Variable)
- (c) $\langle v, w + w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$ und $\langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ (Linearität in der zweiten Variable)
- (d) $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (positiv definit)

Auch die Cauchy–Schwartz Ungleichung bleibt in \mathbb{R}^n richtig, der Beweis, den wir in Lemma 2.3.38 gegeben haben, kann unverändert übernommen werden.

LEMMA 3.4.28 (Cauchy–Schwartz Ungleichung). Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn ein der beiden Vektor ein Vielfaches des anderen ist.

Wie zuvor, vgl. Lemma 3.4.29, erhalten wir daraus die Dreiecksungleichung, also:

LEMMA 3.4.29 (Eigenschaften der Norm). Für $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $\|v\| \geq 0$ und $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (nicht-degeneriert)
- (b) $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ (Homogenität)
- (c) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (Dreiecksungleichung)

Sind $v, w \in \mathbb{R}^n$, dann wird $\|w - v\|$ als Abstand von v zu w interpretiert, vgl. Satz 2.3.41. Gilt $v \neq 0 \neq w$, so existiert ein eindeutiger Winkel $0^\circ \leq \alpha < 180^\circ$ mit

$$\cos \alpha = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|},$$

der als Winkel zwischen v und w bzw. als Winkel $\angle v0w$ interpretiert wird, vgl. Proposition 2.4.15. Insbesondere stehen v und w genau dann normal (orthogonal) aufeinander, wenn $\langle v, w \rangle = 0$ gilt.

BEMERKUNG 3.4.30 (Orthonormalbasen). Unter einer Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n verstehen wir ein System von Vektoren b_1, \dots, b_n in \mathbb{R}^n , für das gilt

$$\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Eine Orthonormalbasis b_1, \dots, b_n besteht daher aus normierten Vektoren, die paarweise orthogonal aufeinander stehen. Daraus folgt, dass die Vektoren linear unabhängig sind, und daher eine Basis von \mathbb{R}^n bilden, vgl. Korollar 3.2.53. Sind nämlich $\lambda_i \in \mathbb{R}$ Skalare, für die $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$ gilt, so folgt

$$0 = \langle b_1, 0 \rangle = \langle b_1, \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n \rangle = \lambda_1 \underbrace{\langle b_1, b_1 \rangle}_1 + \lambda_2 \underbrace{\langle b_1, b_2 \rangle}_0 + \dots + \lambda_n \underbrace{\langle b_1, b_n \rangle}_0 = \lambda_1.$$

Nehmen wir das innere Produkt mit b_i , erhalten wir analog $\lambda_i = 0$. Ist nun $v \in \mathbb{R}^n$ dann existieren also eindeutige Skalare $\mu_j \in \mathbb{R}$ mit $v = \sum_{j=1}^n \mu_j b_j$. Nehmen wir das innere Produkt mit b_i erhalten wir wie zuvor $\langle b_i, v \rangle = \langle b_i, \sum_{j=1}^n \mu_j b_j \rangle = \sum_{j=1}^n \mu_j \langle b_i, b_j \rangle = \sum_{j=1}^n \mu_j \delta_{ij} = \mu_i$. Bezüglich einer Orthonormalbasis b_1, \dots, b_n lässt sich also jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ in der Form

$$v = \langle b_1, v \rangle b_1 + \dots + \langle b_n, v \rangle b_n \tag{107}$$

schreiben. Die Standardbasis e_1, \dots, e_n bildet eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n .

BEMERKUNG 3.4.31 (Normalvektordarstellung affiner Hyperebenen). Wir betrachten eine affine Hyperebene, d.h. eine Teilmenge, die sich durch eine nicht-degenerierte lineare Gleichung beschreiben lässt,

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b\},$$

wobei $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$. Wir wissen, dass sich H durch eine Parameterdarstellung mit $n - 1$ linear unabhängigen Richtungen beschreiben lässt. Fassen wir die Koeffizienten zu

einem Vektor $\nu = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ zusammen, so lässt sich H mit Hilfe des inneren Produktes in der

Form

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \nu, x \rangle = b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \nu, x - P \rangle = 0\}$$

schreiben, wobei P einen beliebigen Punkt in H bezeichnet. Eine Darstellung dieser Form wird als *Normalvektordarstellung* von H bezeichnet, vgl. Bemerkung 2.3.51. Dabei wird ν *Normalvektor* von H genannt, denn er steht normal auf jeden Vektor der Form $Q - P$, wobei $P, Q \in H$. Die Koeffizienten des linearen Teils einer Ebenengleichung bilden daher die Komponenten eines Normalvektors der entsprechenden Ebene.

DEFINITION 3.4.32 (Kreuzprodukt). Unter dem Kreuzprodukt zweier Vektoren in \mathbb{R}^3 verstehen wir den Vektor

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

LEMMA 3.4.33 (Eigenschaften des Kreuzproduktes). Für beliebige $x, x', y, y', z \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (a) $(x + x') \times y = x \times y + x' \times y$ und $(\lambda x) \times y = \lambda(x \times y)$. (Linearität im ersten Argument)
- (b) $x \times (y + y') = x \times y + x \times y'$ und $x \times (\lambda y) = \lambda(x \times y)$. (Linearität im zweiten Argument)
- (c) $x \times y = -y \times x$ und $x \times x = 0$. (Schiefssymmetrie)
- (d) $\langle x \times y, z \rangle = \det(x, y, z) = \langle x, y \times z \rangle$.
- (e) $\langle x \times y, x \rangle = 0 = \langle x \times y, y \rangle$.
- (f) $(x \times y) \times z = \langle z, x \rangle y - \langle y, z \rangle x$. (Graßmann-Identität)
- (g) $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$.
- (h) $(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$. (Jacobi-Identität)

BEWEIS. (a) und (b) lassen sich durch einfache direkte Rechnungen überprüfen. Auch die Schiefssymmetrie $x \times y = -y \times x$ ist offensichtlich. Daraus folgt sofort $x \times x = -x \times x = 0$. Die Gleichung $\det(x, y, z) = \langle x, y \times z \rangle$ entspricht i.W. unserer Definition der Determinante durch die Regel von Sarrus, vgl. die zweite Gleichung in Bemerkung 3.4.15. Mit Lemma 3.4.27(a) und Lemma 3.4.17(b) erhalten wir daraus auch

$$\langle x \times y, z \rangle = \langle z, x \times y \rangle = \det(z, x, y) = -\det(x, z, y) = \det(x, y, z).$$

(e) folgt sofort aus (d) und Lemma 3.4.17(c), denn $\langle x \times y, x \rangle = \det(x, y, x) = 0$ und analog $\langle x \times y, y \rangle = \det(x, y, y) = 0$. Wir überprüfen (f) durch eine direkte Rechnung:

$$\begin{aligned} (x \times y) \times z &= \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_3y_1 - x_1y_3)z_3 - (x_1y_2 - x_2y_1)z_2 \\ (x_1y_2 - x_2y_1)z_1 - (x_2y_3 - x_3y_2)z_3 \\ (x_2y_3 - x_3y_2)z_2 - (x_3y_1 - x_1y_3)z_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (z_2x_2 + z_3x_3)y_1 - (y_2z_2 + y_3z_3)x_1 \\ (z_1x_1 + z_3x_3)y_2 - (y_1z_1 + y_3z_3)x_2 \\ (z_2x_2 + z_1x_1)y_3 - (y_1z_1 + y_2z_2)x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle z, x \rangle y_1 - \langle y, z \rangle x_1 \\ \langle z, x \rangle y_2 - \langle y, z \rangle x_2 \\ \langle z, x \rangle y_3 - \langle y, z \rangle x_3 \end{pmatrix} = \langle z, x \rangle y - \langle y, z \rangle x. \end{aligned}$$

Kombinieren wir (d) und (f) erhalten wir

$$\begin{aligned} \|x \times y\|^2 &= \langle x \times y, x \times y \rangle = \langle (x \times y) \times x, y \rangle = \langle \langle x, x \rangle y - \langle y, x \rangle x, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2, \end{aligned}$$

wobei die Eigenschaften in Lemma 3.4.27 eingegangen sind. Die Jacobi Identität in (h) folgt unmittelbar aus (f). \square

PROPOSITION 3.4.34 (Geometrische Interpretation des Kreuzproduktes). *Zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn $v \times w \neq 0$ gilt. In diesem Fall bildet $v, w, v \times w$ eine Basis von \mathbb{R}^3 und es gilt $\det(v, w, v \times w) > 0$. Darüber hinaus stimmt $\|v \times w\|$ mit dem Flächeninhalt des Parallelogramms überein, das von v und w aufgespannt wird.*

BEWEIS. Sind v und w linear abhängig, dann gilt o.B.d.A. $w = \lambda v$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und daher $v \times w = v \times (\lambda v) = \lambda(v \times v) = 0$ nach Lemma 3.4.33 (b) und (c). Ist umgekehrt $v \times w = 0$, dann gilt $\|v\| \|w\| = |\langle v, w \rangle|$ nach Lemma 3.4.33 (g) und daher sind v, w linear abhängig, siehe Lemma 3.4.28. Im linear unabhängigen Fall erhalten wir $\det(v, w, v \times w) = \langle v \times w, v \times w \rangle = \|v \times w\|^2 > 0$ aus Lemma 3.4.33(d). Wie im Beweis von Proposition 3.4.10 lässt sich zeigen, dass das Parallelogramm, das von v und w aufgespannt wird, Flächeninhalt $\sqrt{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}$ besitzt. Mit Lemma 3.4.33(g) erhalten wir die gewünschte Formel für diesen Flächeninhalt. \square

BEMERKUNG 3.4.35 (Geometrische Charakterisierung des Kreuzproduktes). Das Kreuzprodukt zweier linear unabhängiger Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist durch folgende drei Eigenschaften eindeutig charakterisiert:

- (a) $v \times w$ steht normal auf v und w .
- (b) $\|v \times w\|$ ist der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von v und w aufgespannt wird.
- (c) $\det(v, w, v \times w) > 0$.

Nach Proposition 3.4.34 und Lemma 3.4.33(e) erfüllt das Kreuzprodukt diese drei Eigenschaften. Sei nun n ein weiterer Vektor in \mathbb{R}^3 , der die drei Eigenschaften (a)–(c) besitzt. Da $v, w, v \times w$ eine Basis von \mathbb{R}^3 bildet, existieren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $n = \lambda_1 v + \lambda_2 w + \lambda_3 v \times w$. Aus (a) erhalten wir mit Lemma 3.4.33(e) die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle n, v \rangle = \langle v, v \rangle \lambda_1 + \langle w, v \rangle \lambda_2, \\ 0 &= \langle n, w \rangle = \langle v, w \rangle \lambda_1 + \langle w, w \rangle \lambda_2. \end{aligned}$$

Da $\det \begin{pmatrix} \langle v, v \rangle & \langle w, v \rangle \\ \langle v, w \rangle & \langle w, w \rangle \end{pmatrix} = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2 \neq 0$ besitzt diese System nur die triviale Lösung und wir erhalten $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$, also $n = \lambda_3 v \times w$. Mit (b) und Lemma 3.4.29(b) folgt

$|\lambda_3| = 1$. Mit (c) erhalten wir schließlich $\lambda_3 = 1$ und daher $n = v \times w$. Dies zeigt, dass $v \times w$ der einzige Vektor ist, der diese drei Eigenschaften besitzt.

BEMERKUNG 3.4.36. Das Kreuzprodukt ist hilfreich, wenn eine in Parameterdarstellung vorliegende Ebene in \mathbb{R}^3 durch eine Gleichung beschrieben werden soll, denn das Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren ist Normalvektor der Ebene und erlaubt es sofort eine Gleichung anzugeben, siehe Bemerkung 3.4.31. Wir wollen dies am Beispiel der Ebene

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

demonstrieren. Mit dem Kreuzprodukt bestimmen wir einen Normalvektor der Ebene,

$$n = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \\ 6 \cdot 7 - 4 \cdot 9 \\ 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und erhalten die Darstellung $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = -3\}$, wobei wir die Konstante durch Einsetzen des Punktes $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in E$ bestimmt haben. Zum Vergleich lösen wir dasselbe

Problem mit den Methoden von Abschnitt 3.3, siehe Beispiel 3.3.33. Wir fassen also die Richtungsvektoren zu einer Matrix zusammen, bringen diese durch Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform,

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 5/4 & 8 \\ 3/2 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5/4 & -3/4 \\ 3/2 & -3/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5/4 & 1 \\ 3/2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

und lesen eine Gleichung für E ab: $x_1 - 2x_2 + x_3 = -3$.

BEMERKUNG 3.4.37. Das Kreuzprodukt ist auch hilfreich, wenn die Richtung der Schnittgeraden zweier Ebenen in \mathbb{R}^3 bestimmt werden soll, denn das Kreuzprodukt von Normalvektoren der beiden Ebenen ist Richtungsvektor dieser Schnittgerade. Wir wollen dies am Beispiel der beiden Ebenen

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\} \quad \text{und} \quad E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 9\}$$

demonstrieren. Mit dem Kreuzprodukt bestimmen wir einen Richtungsvektor

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 - 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 5 - 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 6 - 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Schnittgeraden $g := E_1 \cap E_2$. Wir erhalten so keinen Punkt von g und daher auch keine Parameterdarstellung. Zum Vergleich verwenden wir das Eliminationsverfahren, um die Parameterdarstellung der Schnittgeraden zu bestimmen. Durch Zeilenumformungen bringen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix auf reduzierte Zeilenstufenform,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -11 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 11/4 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 2 & 11/4 \end{array} \right),$$

und lesen eine Parameterdarstellung ab: $g = \left\{ \begin{pmatrix} -3/2 \\ 11/4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

BEMERKUNG 3.4.38 (Geometrische Interpretation der Determinante). Sind u, v, w drei linear unabhängige Vektoren in \mathbb{R}^3 dann stimmt $|\det(u, v, w)|$ mit dem Volumen des Parallelepipeds überein, das von u, v und w aufgespannt wird und daher die Eckpunkte $0, u, v, w, u + v, u + w, v + w, u + v + w$ besitzt. Für das Volumen V dieses Parallelepipeds gilt nämlich $V = A \cdot h$, wobei A die Fläche des von u, v aufgespannten Parallelogramms bezeichnet und h die Höhe bezüglich dieser Seitenfläche bezeichnet. Aus Proposition 3.4.34 erhalten wir $A = \|u \times v\|$ und Proposition 2.3.54 liefert $h = \frac{|\langle u \times v, w \rangle|}{\|u \times v\|}$. Mit Lemma 3.4.33(d) folgt nun

$$|\det(u, v, w)| = |\langle u \times v, w \rangle| = \|u \times v\| \cdot h = A \cdot h = V.$$

BEMERKUNG 3.4.39 (Determinante und orientiertes Volumen). Analog zum 2-dimensionalen Fall in Bemerkung 3.4.12 ist das orientierte Volumen eines von drei Vektoren $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelepipeds durch die Determinante $\det(u, v, w)$ gegeben. Um dies einzusehen, bezeichne $\delta(u, v, w)$ das orientierte Volumen dieses Parallelepipeds, d.h. des Parallelepipeds mit den Eckpunkten $0, u, v, w, u + v, u + w, v + w, u + v + w$. Offensichtlich gilt $\delta(I_3) = 1$, denn der Einheitswürfel hat Volumen 1. Eine einfache elementargeometrische Überlegung zeigt, dass $\delta(u, v, w)$ linear in den Spalten ist. Da wir das orientierte Volumen betrachten, ändert $\delta(u, v, w)$ das Vorzeichen wenn zwei der drei Vektoren vertauscht werden. Nach Lemma 3.4.17(k) muss daher $\delta(u, v, w) = \det(u, v, w)$ gelten, die Determinante $\det(u, v, w)$ berechnet also das orientierte Volumen des von u, v, w aufgespannten Parallelepipeds.

BEMERKUNG 3.4.40. Determinanten können für beliebig große quadratische Matrizen definiert werden. Etwa kann eine zur Formel in Bemerkung 3.4.15 analoge Beziehung verwendet werden, um die Determinante einer $(n \times n)$ -Matrix rekursiv mit Hilfe der Determinanten von $(n - 1) \times (n - 1)$ -Teilmatrizen zu definieren. Für (4×4) -Matrizen liefert dies:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

Induktiv lässt sich zeigen, dass die Determinante einer $n \times n$ -Matrix linear und schiefsymmetrisch in den Spalten ist und für die Einheitsmatrix den Wert 1 liefert. Alle weiteren, oben besprochenen Eigenschaften der Determinante bleiben für beliebig große Matrizen richtig. Die Beweise waren so gewählt, dass sie sich in naheliegender Weise auf größere Matrizen verallgemeinern lassen. Insbesondere ist eine $n \times n$ -Matrix A genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Auch die Formel $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ bleibt für $n \times n$ -Matrizen richtig, im invertierbaren Fall gilt daher $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$. Große Determinanten lassen sich mit Zeilenumformungen effizient berechnen, vgl. Bemerkung 3.4.18.

DEFINITION 3.4.41 (Eigenwerte und Eigenvektoren). Sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ wird *Eigenwert* von φ genannt, falls ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass $v \neq 0$ und

$$\varphi(v) = \lambda v.$$

In diesem Fall wird v als *Eigenvektor* zum Eigenwert λ bezeichnet, und

$$E_\lambda := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(v) = \lambda v\} = \ker(\varphi - \lambda \text{id})$$

wird der *Eigenraum* zum Eigenwert λ genannt.

Unter den Eigenwerten, Eigenvektoren und Eigenräumen einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verstehen wir die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume der damit assoziierten linearen Abbildung $\varphi_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi_A(v) = Av$. Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist also genau dann Eigenwert von A , wenn $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ mit $Av = \lambda v$ existiert. Der entsprechende Eigenraum von A ist $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v\} = \ker(A - \lambda I_n)$.

BEMERKUNG 3.4.42. Eigenräume sind lineare Teilräume. Auf diesen Teilräumen wirkt die lineare Abbildung (Matrix) einfach durch Multiplikation (Streckung) mit dem entsprechenden Eigenwert.

PROPOSITION 3.4.43. *Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann Eigenwert einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, wenn $\text{rank}(A - \lambda I_n) < n$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn*

$$\det(A - \lambda I_n) = 0.$$

BEWEIS. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} \lambda \text{ ist Eigenwert von } A &\Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^n : Av = \lambda v, v \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow \dim \ker(A - \lambda I_n) > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{rank}(A - \lambda I_n) < n \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I_n \text{ ist nicht invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Bemerkungen 3.2.62 und 3.2.67 sowie Satz 3.4.19 verwendet, siehe Bemerkung 3.4.40. □

DEFINITION 3.4.44 (Charakteristisches Polynom). Unter dem charakteristischen Polynom einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ verstehen wir das Polynom $\det(A - \lambda I_n)$.

Nach Proposition 3.4.43 sind die Eigenwerte einer Matrix gerade die (reellen) Nullstellen ihres charakteristischen Polynoms. Da das charakteristische Polynom einer $(n \times n)$ -Matrix Grad n hat, kann diese Matrix höchstens n verschiedene Eigenwerte besitzen. In Satz 3.4.50 unten werden wir einen anderen Beweis dieser Tatsache geben, der ohne Determinante auskommt.

BEISPIEL 3.4.45. Wir wollen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Aus Proposition 3.4.43 erhalten wir folgende Gleichung für die Eigenwerte:

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 1 = (\lambda - 2)(\lambda - 4).$$

Die Matrix A hat daher genau zwei Eigenwerte, $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$. Für die zugehörigen Eigenräume erhalten wir

$$E_{\lambda_1} = \ker(A - 2I_2) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\lambda_2} = \ker(A - 4I_2) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von \mathbb{R}^2 aus Eigenvektoren bildet.

BEISPIEL 3.4.46. Wir wollen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Da

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 & -2 \\ 2 & 6 - \lambda & 4 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(6 - \lambda)(-\lambda) + 8 + 8 - 2(6 - \lambda) + 8(1 - \lambda) - 4\lambda \\ &= -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 \\ &= (2 - \lambda)^2(3 - \lambda) \end{aligned}$$

hat A genau zwei Eigenwerte, $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$, siehe Proposition 3.4.43. Für die zugehörigen Eigenräume erhalten wir:

$$E_{\lambda_1} = \ker(A - \lambda_1 I_3) = \ker \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{\lambda_2} = \ker(A - \lambda_2 I_3) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beachte, dass $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis von \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren bildet.

BEISPIEL 3.4.47. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

hat genau drei Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$ und $\lambda_3 = 7$. Für die Eigenräume gilt

$$E_3 = \text{span}(e_1), \quad E_5 = \text{span}(e_2), \quad E_7 = \text{span}(e_3).$$

Allgemeiner sind die Eigenwerte einer Diagonalmatrix gerade die (verschiedenen) Eintragungen entlang der Diagonale. Die Eigenräume werden von den entsprechenden Einheitsvektoren aufgespannt.

BEISPIEL 3.4.48. Wir wollen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Aus Proposition 3.4.43 erhalten wir folgende Gleichung für die Eigenwerte:

$$0 = \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 5 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 5 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = (5 - \lambda)^3.$$

Die Matrix A hat also nur einen Eigenwerte, $\lambda_1 = 5$. Der zugehörige Eigenraum ist

$$E_{\lambda_1} = \ker(A - 5I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diesmal erhalten wir keine Basis von \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren.

BEISPIEL 3.4.49. Wir wollen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Aus Proposition 3.4.43 erhalten wir folgende Gleichung für die Eigenwerte:

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Die Matrix A hat also keinen einzigen (reellen) Eigenwert.

SATZ 3.4.50. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschiedene Eigenwerte von A und $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ entsprechende Eigenvektoren, d.h. $v_i \neq 0$ und $Av_i = \lambda_i v_i$, für $i = 1, \dots, k$. Dann sind die Vektoren v_1, \dots, v_k linear unabhängig in \mathbb{R}^n . Insbesondere kann A höchstens n verschiedene Eigenwerte besitzen und es gilt

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_k}) \leq n. \quad (108)$$

BEWEIS. Wir führen den Beweis durch Induktion nach k . Der Fall $k = 1$ ist trivial, denn nach Voraussetzung gilt $v_i \neq 0$. Für den Induktionsschritt dürfen wir daher v_1, \dots, v_{k-1} als linear unabhängig voraussetzen. Seien nun $\mu_1, \dots, \mu_k \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_{k-1} v_{k-1} + \mu_k v_k = 0. \quad (109)$$

Wenden wir auf diese Gleichung A an, erhalten wir wegen $Av_i = \lambda_i v_i$,

$$\mu_1 \lambda_1 v_1 + \mu_2 \lambda_2 v_2 + \dots + \mu_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} + \mu_k \lambda_k v_k = 0.$$

Subtrahieren wir davon λ_k -mal die Gleichung (109) folgt

$$\mu_1 (\lambda_1 - \lambda_k) v_1 + \mu_2 (\lambda_2 - \lambda_k) v_2 + \dots + \mu_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) v_{k-1} = 0.$$

Da v_1, \dots, v_{k-1} linear unabhängig sind, muss also

$$\mu_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0, \quad i = 1, \dots, k-1,$$

gelten. Nach Voraussetzung sind die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paarweise verschieden, also $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$, für $i = 1, \dots, k-1$. Wir erhalten somit

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{k-1} = 0.$$

Mit (109) folgt auch $\mu_k v_k = 0$ und da $v_k \neq 0$ schließlich $\mu_k = 0$. Dies zeigt, dass die Vektoren v_1, \dots, v_k linear unabhängig sind. Mit Korollar 3.2.53 erhalten wir nun $k \leq n$.

Um die Ungleichung (108) zu zeigen, bezeichnen wir die Dimensionen der Eigenräume mit $r_i := \dim(E_{\lambda_i})$ und wählen

$$\begin{aligned} &\text{eine Basis } b_1^{(1)}, \dots, b_{r_1}^{(1)} \text{ von } E_{\lambda_1}, \\ &\text{eine Basis } b_1^{(2)}, \dots, b_{r_2}^{(2)} \text{ von } E_{\lambda_2}, \\ &\quad \vdots \\ &\text{eine Basis } b_1^{(k)}, \dots, b_{r_k}^{(k)} \text{ von } E_{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass das System

$$b_1^{(1)}, \dots, b_{r_1}^{(1)}, b_1^{(2)}, \dots, b_{r_2}^{(2)}, \dots, b_1^{(k)}, \dots, b_{r_k}^{(k)} \quad (110)$$

linear unabhängig ist, denn dann erhalten wir

$$\dim(E_{\lambda_1}) + \dots + \dim(E_{\lambda_k}) = r_1 + \dots + r_k \leq n$$

aus Korollar 3.2.53. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, seien $\lambda_j^{(i)}$ Skalare mit

$$\underbrace{\lambda_1^{(1)} b_1^{(1)} + \dots + \lambda_{r_1}^{(1)} b_{r_1}^{(1)}}_{v_1} + \underbrace{\lambda_1^{(2)} b_1^{(2)} + \dots + \lambda_{r_2}^{(2)} b_{r_2}^{(2)}}_{v_2} + \dots + \underbrace{\lambda_1^{(k)} b_1^{(k)} + \dots + \lambda_{r_k}^{(k)} b_{r_k}^{(k)}}_{v_k} = 0.$$

Setzen wir $v_i := \lambda_1^{(i)} b_1^{(i)} + \dots + \lambda_{r_i}^{(i)} b_{r_i}^{(i)}$, so gilt $v_i \in E_{\lambda_i}$ und $v_1 + v_2 + \dots + v_k = 0$. Aus dem vorangehenden Absatz folgt $v_i = 0$, für jedes $i = 1, \dots, k$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $b_1^{(i)}, \dots, b_{r_i}^{(i)}$ folgt $\lambda_j^{(i)} = 0$, für jedes $i = 1, \dots, k$ und jedes $j = 1, \dots, r_i$. Dies zeigt, dass (110) ein linear unabhängiges System von Vektoren bildet. \square

BEMERKUNG 3.4.51. In (108) kann strikte Ungleichheit eintreten, vgl. Beispiel 3.4.48, selbst wenn wir über alle Eigenwerte summieren. In Beispiel 3.4.45 gilt Gleichheit, $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 1 + 1 = 2 = n$, und ebenso in Beispiel 3.4.46, $\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2 + 1 = 3 = n$.

BEMERKUNG 3.4.52 (Diagonalisierbarkeit). Besitzt eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ genau n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und sind b_1, \dots, b_n entsprechende Eigenvektoren, d.h. $b_i \neq 0$ und $Ab_i = \lambda_i b_i$ für $i = 1, \dots, n$, dann bildet b_1, \dots, b_n eine Basis von \mathbb{R}^n . Dies folgt aus Satz 3.4.50 und Korollar 3.2.53. In diesem Fall ist $B := (b_1, \dots, b_n)$ eine invertierbare Matrix, siehe Bemerkung 3.2.67, und es gilt

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

wobei auf der rechten Seite eine Diagonalmatrix steht, d.h. eine Matrix, in der neben den Diagonaleinträgen nur Nuller vorkommen. Die Gleichung oben lässt sich durch eine einfache Rechnung überprüfen:

$$\begin{aligned} AB &= A(b_1, \dots, b_n) = (Ab_1, \dots, Ab_n) \\ &= (\lambda_1 b_1, \dots, \lambda_n b_n) = (b_1, \dots, b_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wird *diagonalisierbar* genannt, wenn eine invertierbare Matrix B existiert, sodass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist. Die Rechnung oben zeigt, dass dies genau dann der Fall ist, wenn eine Basis von \mathbb{R}^n existiert, die aus Eigenvektoren von A besteht. Die Matrix in Beispiel 3.4.48 ist nicht diagonalisierbar. Offensichtlich ist jede Diagonalmatrix diagonalisierbar, in diesem Fall bilden die Einheitsvektoren eine Basis aus Eigenvektoren und wir können für B die Einheitsmatrix verwenden, vgl. Beispiel 3.4.47. Für die Diagonalisierbarkeit ist es daher nicht notwendig (aber hinreichend, siehe oben), dass die Matrix n verschiedene Eigenwerte besitzt.

Symmetrisch Matrizen sind diagonalisierbar:

SATZ 3.4.53. *Eine symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ besitzt stets eine Orthonormalbasis b_1, b_2 aus Eigenvektoren. Es ist daher $R := (b_1, b_2)$ eine orthogonale Matrix, für die*

$$R^{-1}AR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (111)$$

*gilt, wobei λ_1 und λ_2 die Eigenwerte zu b_1 und b_2 bezeichnen.*¹⁹

BEWEIS. Nach Proposition 3.4.43 gilt für die Eigenwerte λ von A

$$0 = \det(A - \lambda I_2) = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2,$$

also

$$\lambda = \frac{a + c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a - c)^2}{4} + b^2}.$$

Beachte, dass der Radikand nicht negativ ist. Der Radikand kann nur Null sein, wenn $a = c$ und $b = 0$ gilt, d.h. wenn A ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. In diesem Fall ist jeder Vektor Eigenvektor und daher jede Orthonormalbasis eine Basis aus Eigenvektoren.

O.B.d.A. sei der Radikand daher größer als Null. Dann existieren zwei verschiedene reelle Eigenwerte λ_1 und λ_2 . Seien b_1 und b_2 normierte Eigenvektoren, d.h. $Ab_1 = \lambda_1 b_1$, $Ab_2 = \lambda_2 b_2$ und $\|b_1\| = 1 = \|b_2\|$. Aus der Symmetrie von A folgt durch eine einfache Rechnung $\langle Av, w \rangle = \langle v, Aw \rangle$, für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$. Wir erhalten

$$\lambda_1 \langle b_1, b_2 \rangle = \langle \lambda_1 b_1, b_2 \rangle = \langle Ab_1, b_2 \rangle = \langle b_1, Ab_2 \rangle = \langle b_1, \lambda_2 b_2 \rangle = \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle,$$

also $(\lambda_2 - \lambda_1)\langle b_1, b_2 \rangle = 0$ und daher $\langle b_1, b_2 \rangle = 0$. Somit ist b_1, b_2 eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A . Nach Lemma 2.5.9 ist die Matrix $R := (b_1, b_2)$ daher orthogonal. Mit Bemerkung 3.4.52 erhalten wir auch (111). \square

¹⁹Ersetzen wir gegebenenfalls b_2 durch $-b_2$, so können wir darüber hinaus $\det(R) = 1$ erreichen, dann ist R also eine Rotationsmatrix, siehe Lemma 2.5.9.

3.5. Hauptachsentransformation. Als Anwendung von Satz 3.4.53 wollen wir nun Lösungsmengen quadratischer Gleichungen in zwei Variablen untersuchen.

DEFINITION 3.5.1 (Quadratische Funktionen). Unter einem quadratischen Polynom auf \mathbb{R}^2 verstehen wir eine Abbildung $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

mit Koeffizienten $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Unter einer (degenerierten) Quadrik in \mathbb{R}^2 verstehen wir die Nullstellenmenge eines quadratischen Polynoms.

BEISPIEL 3.5.2. Kegelschnitte sind Quadriken:

$$\begin{array}{ll} \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 & \text{Ellipse in Hauptlage, } a, b > 0 \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 & \text{Hyperbel in Hauptlage, } a, b > 0 \\ x^2 = 2py & \text{Parabel in Hauptlage, } p > 0 \end{array}$$

Auch degeneriertere Kurven treten als Quadriken auf:

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 = -1 & \text{keine Lösung} \\ x^2 + y^2 = 0 & \text{nur ein Punkt} \\ x^2 - y^2 = 0 & \text{zwei sich schneidene Geraden} \\ x^2 = 1 & \text{zwei parallele Geraden} \\ x^2 = 0 & \text{eine Gerade} \\ 0 = 0 & \text{ganze Ebene} \end{array}$$

Bei der Quadrik

$$29x^2 + 24xy + 36y^2 + 10x - 120y = 55$$

ist zunächst völlig unklar, um welchen Typ es sich handelt. Wir werden sie in Beispiel 3.5.4 unten diskutieren.

LEMMA 3.5.3. Zu jedem quadratischen Polynom

$$q = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

existiert eine Rotationsmatrix R , sodass die Substitution $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ das Polynom auf folgende Form ohne gemischte Terme bringt

$$q = a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' + f',$$

wobei $a', b', c', d', e' \in \mathbb{R}$ und $f' = f$.

BEWEIS. Nach Satz 3.4.53 existiert eine Rotationsmatrix R mit

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} R = R \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}.$$

Für den quadratischen Teil erhalten wir mit Lemma 2.5.9:

$$\begin{aligned}
 ax^2 + 2bxy + cy^2 &= \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \left\langle R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \left\langle R \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, R \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= a'(x')^2 + c'(y')^2.
 \end{aligned}$$

Da die Substitution den linearen Teil von q wieder auf einen linearen Ausdruck transformiert, folgt das Lemma. \square

BEISPIEL 3.5.4. Wir wollen folgende Quadrik untersuchen:

$$29x^2 + 24xy + 36y^2 + 10x - 120y = 55. \quad (112)$$

Um die gemischten Terme zu eliminieren, gehen wir wie in Lemma 3.5.3 vor und bestimmen die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 36 \end{pmatrix}$, die den quadratischen Termen entspricht. Nach Proposition 3.4.43 sind die Eigenwerte Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 29 - \lambda & 12 \\ 12 & 36 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 65\lambda + 900.$$

Durch Lösen der quadratischen Gleichung erhalten wir die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 = 45 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 20.$$

Wir bestimmen den Eigenraum zu $\lambda_1 = 45$:

$$\ker \begin{pmatrix} 29 - \lambda_1 & 12 \\ 12 & 36 - \lambda_1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -16 & 12 \\ 12 & -9 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die diagonalisierende Rotationsmatrix ist daher $R = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Substituieren wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{3x' - 4y'}{5}, \quad y = \frac{4x' + 3y'}{5}, \quad (113)$$

in (112), erhalten wir nach einer Rechnung:

$$45(x')^2 + 20(y')^2 - 90x' - 80y' = 55$$

oder äquivalent, nach Division durch 5:

$$9(x')^2 + 4(y')^2 - 18x' - 16y' = 11.$$

Durch ergänzen der Quadrate können wir auch den linearen Teil absorbieren:

$$9(x' - 1)^2 + 4(y' - 2)^2 = 36.$$

Die Substitution (Translation)

$$x'' = x' - 1, \quad y'' = y' - 2 \quad (114)$$

bringt die Quadrik daher in die Form

$$9(x'')^2 + 4(y'')^2 = 36$$

oder äquivalent, nach Division durch 36:

$$\left(\frac{x''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y''}{3}\right)^2 = 1. \quad (115)$$

Dies ist eine Ellipse in Hauptlage mit Halbachsen 2 und 3. Durch eine Bewegung, nämlich die Komposition der Rotation (113) mit der Translation (114), kann die ursprüngliche Quadrik auf diese Ellipse in Hauptlage abgebildet werden. Diese Transformation wird als *Hauptachsentransformation* bezeichnet. Bei der ursprüngliche Quadrik (112) handelt es sich daher ebenfalls um eine Ellipse mit Halbachsen 2 und 3. Der Mittelpunkt von (115) ist $M'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit den Substitutionen (113) und (118) erhalten wir den Mittelpunkt der ursprünglichen Ellipse in (112), $M = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Die beiden Achsen der Ellipse (115) sind durch $x'' = 0$ bzw. $y'' = 0$ gegeben. Die Achsen der ursprünglichen Ellipse sind daher durch $3x + 4y = 5$ bzw. $-4x + 3y = 10$ beschrieben. Dabei haben wir die inverse Substitution zu (113) verwendet, sie ist durch die inverse Rotationsmatrix gegeben und lautet:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad x' = \frac{3x + 4y}{5}, \quad y' = \frac{-4x + 3y}{5}.$$

Die Scheitel der Ellipse (115) lauten

$$S_1'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad S_2'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad S_3'' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad S_4'' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Scheitel der ursprünglichen Ellipse erhalten wir

$$S_1 = \begin{pmatrix} -17/5 \\ 19/5 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 7/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 18/5 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} -11/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}.$$

BEISPIEL 3.5.5. Wir wollen folgende Quadrik untersuchen:

$$-119x^2 + 240xy + 119y^2 - 572x - 494y = -338. \quad (116)$$

Um die gemischten Terme zu eliminieren, gehen wir wie in Lemma 3.5.3 vor und bestimmen die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} -119 & 120 \\ 120 & 119 \end{pmatrix}$, die den quadratischen Termen entspricht. Nach Proposition 3.4.43 sind die Eigenwerte Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 = \det \begin{pmatrix} -119 - \lambda & 120 \\ 120 & 119 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 28561.$$

Durch Lösen der quadratischen Gleichung erhalten wir die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 = 169 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -169.$$

Wir bestimmen den Eigenraum zu $\lambda_1 = 169$:

$$\ker \begin{pmatrix} -119 - \lambda_1 & 120 \\ 120 & 119 - \lambda_1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -288 & 120 \\ 120 & -50 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 12 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Die diagonalisierende Rotationsmatrix ist daher $R = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$. Substituieren wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & -12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{5x' - 12y'}{13}, \quad y = \frac{12x' + 5y'}{13}, \quad (117)$$

in (116), erhalten wir nach einer Rechnung:

$$169(x')^2 - 169(y')^2 - 676x' + 338y' = -338$$

oder äquivalent, nach Division durch 169:

$$(x')^2 - (y')^2 - 4x' + 2y' = -2.$$

Durch Ergänzen der Quadrate können wir auch den linearen Teil eliminieren:

$$(x' - 2)^2 - (y' - 1)^2 = 1.$$

Die Substitution (Translation)

$$x'' = x' - 2, \quad y'' = y' - 1 \quad (118)$$

bringt die Quadrik daher in die Form

$$(x'')^2 - (y'')^2 = 1. \quad (119)$$

Dies ist eine Hyperbel in Hauptlage. Durch eine Bewegung, nämlich die Komposition der Rotation (117) mit der Translation (118), kann die ursprüngliche Quadrik auf diese Hyperbel in Hauptlage abgebildet werden. Bei der ursprüngliche Quadrik (116) handelt es sich daher ebenfalls um eine Hyperbel. Die Hyperbel (119) hat Mittelpunkt $M'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mit den Substitutionen (117) und (118) erhalten wir den Mittelpunkt $M = \begin{pmatrix} -2/13 \\ 29/13 \end{pmatrix}$ der ursprünglichen Quadrik in (116). Die beiden Achsen von (119) sind durch $x'' = 0$ bzw. $y'' = 0$ gegeben. Mit den Substitutionen (117) und (118) erhalten wir die Achsen der Hyperbel in (116), sie sind durch $5x + 12y = 26$ bzw. $-12x + 5y = 13$ gegeben. Dabei haben wir die inverse Substitution von (117) verwendet, sie ist durch die inverse Rotationsmatrix gegeben und lautet:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad x' = \frac{5x + 12y}{13}, \quad y' = \frac{-12x + 5y}{13}.$$

Die beiden Scheitel der Hyperbel (119) sind $S_1'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $S_1'' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Für die beiden Scheitel von (116) erhalten wir $S_1 = \begin{pmatrix} 3/13 \\ 41/13 \end{pmatrix}$ und $S_1 = \begin{pmatrix} -7/13 \\ 17/13 \end{pmatrix}$. Ebenso lassen sich die Asymptoten und Brennpunkte der Hyperbel in (116) bestimmen.

BEISPIEL 3.5.6. Wir wollen folgende Quadrik untersuchen:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 5\sqrt{2}x - 7\sqrt{2}y = -22. \quad (120)$$

Um die gemischten Terme zu eliminieren, gehen wir wie in Lemma 3.5.3 vor und bestimmen die Eigenwerte der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, die den quadratischen Termen entspricht. Nach

Proposition 3.4.43 sind die Eigenwerte Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda.$$

Lösen der quadratischen Gleichung liefert die beiden Eigenwerte

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 0.$$

Wir bestimmen den Eigenraum zu $\lambda_1 = 1$:

$$\ker \begin{pmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda_1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die diagonalisierende Rotationsmatrix ist daher $R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Substituieren wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \text{d.h.} \quad x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}, \quad (121)$$

in (120), erhalten wir nach einer Rechnung:

$$2(x')^2 - 12x' - 2y' = -22$$

oder äquivalent

$$(x')^2 - 6x' - y' = -11.$$

Durch Ergänzen der Quadrate können wir einen linearen Term absorbieren:

$$(x' - 3)^2 = y' - 2.$$

Die Substitution (Translation)

$$x'' = x' - 3, \quad y'' = y' - 2 \quad (122)$$

bringt die Quadrik daher in die Form

$$(x'')^2 = y''. \quad (123)$$

Dies ist eine Parabel in Hauptlage. Durch eine Bewegung, nämlich die Komposition der Rotation (121) mit der Translation (122), kann die ursprüngliche Quadrik auf diese Parabel in Hauptlage abgebildet werden. Bei der ursprüngliche Quadrik (116) handelt es sich daher ebenfalls um eine Parabel. Wie zuvor, können der Scheitel, die Achse, die Leitlinie und der Brennpunkt der ursprünglichen Parabel (120) sofort aus den entsprechenden Elementen der Parabel in (123) mit Hilfe der Transformationen in (121) und (122) bestimmt werden.

Anhang A. Die komplexen Zahlen

A.1. Der Körper der komplexen Zahlen. Die Gleichung $x^2 = -1$ hat keine reelle Lösung. Wir postulieren eine neue Zahl \mathbf{i} , die dieser Gleichung genügt, d.h.

$$\mathbf{i}^2 = -1. \tag{124}$$

Wir rechnen zunächst naiv und nehmen an, dass für diese Zahl die vertrauten Rechengesetze gelten. Sind x und y reell, dann können wir daher auch die Zahl $x + y\mathbf{i}$ bilden. Eine einfache Rechnung, in der die Relation (124) sowie die Distributiv-, Assoziativ- und Kommutativgesetze für Addition und Multiplikation eingehen, führt auf:

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1\mathbf{i}) + (x_2 + y_2\mathbf{i}) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathbf{i}, \\ (x_1 + y_1\mathbf{i}) \cdot (x_2 + y_2\mathbf{i}) &= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Die Menge der Zahlen der Form $x + y\mathbf{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist daher abgeschlossen unter Addition und Multiplikation. Diese Überlegungen garantieren jedoch nicht, dass mit diesen Zahlen tatsächlich konsistent gerechnet werden kann, schließlich haben wir dies ja zu Beginn vorausgesetzt. Sie führen uns aber zu folgender Definition der komplexen Zahlen.

DEFINITION A.1.1 (Komplexe Zahlen). Unter dem Körper der komplexen Zahlen verstehen wir die Menge aller Paare reeller Zahlen $\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ mit der Addition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2).$$

LEMMA A.1.2. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Das neutrale Element bezüglich der Addition ist $(0, 0)$. Das neutrale Element bezüglich der Multiplikation ist $(1, 0)$. Für $(x, y) \neq (0, 0)$, ist das multiplikative Inverse durch $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ gegeben.

BEWEIS. Zur Assoziativität und Distributivität:

$$\begin{aligned} &((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)) \cdot (x_3, y_3) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) \cdot (x_3, y_3) \\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3, (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + y_1x_2)x_3) \\ &= (x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + y_2x_3), x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)) \\ &= (x_1, y_1) \cdot (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3) \\ &= (x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(x_1, y_1) \cdot ((x_2, y_2) + (x_3, y_3)) \\ &= (x_1, y_1) \cdot (x_2 + x_3, y_2 + y_3) \\ &= (x_1(x_2 + x_3) - y_1(y_2 + y_3), x_1(y_2 + y_3) + y_1(x_2 + x_3)) \\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3), (x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1y_3 + y_1x_3)) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2) + (x_1x_3 - y_1y_3, x_1y_3 + y_1x_3) \\ &= (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) + (x_1, y_1) \cdot (x_3, y_3) \end{aligned}$$

Alle anderen Körperaxiome lassen sich noch einfacher überprüfen. □

Die Abbildung $\iota: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $\iota(x) := (x, 0)$ ist ein injektiver Körperhomomorphismus, d.h. es gilt $\iota(x_1 + x_2) = \iota(x_1) + \iota(x_2)$ und $\iota(x_1 x_2) = \iota(x_1) \iota(x_2)$. Ob wir in \mathbb{R} rechnen oder in \mathbb{C} , ist also unerheblich. Wir unterdrücken daher ι und fassen ab jetzt $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ auf $x \leftrightarrow (x, 0)$.

Unter der *imaginären Einheit* verstehen wir die komplexe Zahl $\mathbf{i} := (0, 1)$. Wir haben $\mathbf{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = \iota(-1)$, also $\mathbf{i}^2 = -1$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ erhalten wir $x + y\mathbf{i} = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = (x, y)$. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich daher in der Form

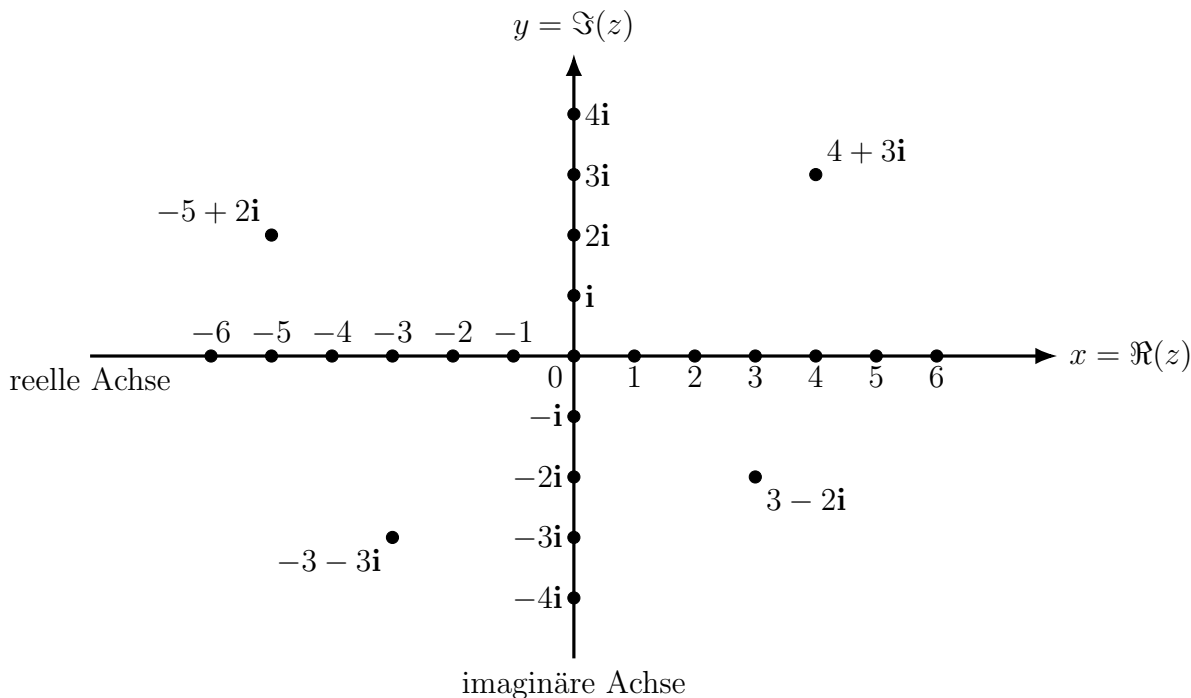
$$z = x + y\mathbf{i}$$

schreiben mit eindeutig bestimmten reellen Zahlen x und y . Dabei werden x und y *Real- bzw. Imaginärteil* von z genannt und mit $\Re(z) := x$ und $\Im(z) := y$ bezeichnet.

Wir sehen daher, dass mit Zahlen der Form $x + y\mathbf{i}$ tatsächlich in konsistenter Weise gerechnet werden kann und, dass die vertrauten Körperaxiome auch für diese größere Klasse von Zahlen gültig bleiben.

BEMERKUNG A.1.3 (Unmöglichkeit der Anordnung). Wir erinnern uns daran, dass Quadrate in einem geordneten Körper nie negativ sind. Aus der Relation $\mathbf{i}^2 = -1$ folgt daher, dass auf dem Körper der komplexen Zahlen keine, mit Addition und Multiplikation verträgliche Totalordnung existiert.

Die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} kann in naheliegender Weise mit \mathbb{R}^2 identifiziert werden, wobei die komplexe Zahl $z = x + y\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ dem Punkt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ entspricht. Wir können uns komplexe Zahlen daher als Punkte der Ebene vorstellen und sprechen von der *komplexen Zahlenebene*. Die reellen Zahlen entsprechen dabei genau den Punkten der ersten Koordinatenachse, die rein imaginären Zahlen, $y\mathbf{i}$ mit $y \in \mathbb{R}$, liegen auf der zweiten Koordinatenachse. Die Addition komplexer Zahlen entspricht der Vektoraddition in \mathbb{R}^2 , denn beide sind komponentenweise definiert.



Ist $z = x + y\mathbf{i}$ so wird $\bar{z} := x - y\mathbf{i}$ die *komplex Konjugierte* von z genannt. Die komplexe Konjugation ist ein Körperisomorphismus, d.h. mit Addition und Multiplikation in folgendem Sinn verträglich:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \quad \text{und} \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2,$$

für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Darüber hinaus ist die komplexe Konjugation involutiv, d.h. es gilt $\bar{\bar{z}} = z$, für alle $z \in \mathbb{C}$. Die reellen Zahlen bilden die Fixpunktmenge der komplexen Konjugation, d.h. $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} = z\}$, und es gilt $\bar{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$. Schließlich lassen sich Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl $z = x + y\mathbf{i}$ mit Hilfe der komplexen Konjugation wie folgt ausdrücken:

$$x = \Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{und} \quad y = \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2\mathbf{i}}.$$

Die komplexe Konjugation entspricht der Spiegelung an der ersten Koordinatenachse.

Beachte, dass $\bar{z}z$ stets reell und größer gleich Null ist, denn $(x - y\mathbf{i})(x + y\mathbf{i}) = x^2 + y^2$. Unter dem *Betrag* einer komplexen Zahl $z = x + y\mathbf{i}$ verstehen wir die reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{\bar{z}z} = \sqrt{x^2 + y^2} = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|.$$

Dies kann als Abstand zum Koordinatenursprung 0 interpretiert werden. Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $|z_1 z_2|^2 = \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_1 z_2 = \bar{z}_1 z_1 \bar{z}_2 z_2 = |z_1|^2 |z_2|^2$, also

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|. \quad (125)$$

Insbesondere $1 = |1| = |z z^{-1}| = |z| |z^{-1}|$ und daher auch

$$|z^{-1}| = |z|^{-1} \quad (126)$$

für $0 \neq z \in \mathbb{C}$. Für die multiplikative Inverse einer komplexen Zahl $z \neq 0$ verwenden wir auch die Bruchschreibweise $\frac{1}{z} = 1/z = z^{-1}$ und allgemeiner $\frac{w}{z} = w/z = w z^{-1}$. Erweitern wir einen Bruch komplexer Zahlen mit der komplex Konjugierten des Nenners, $\frac{w}{z} = \frac{w \bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{w \bar{z}}{|z|^2}$, erhalten wir einen Bruch mit reellen Nenner und damit eine Möglichkeit den Quotienten zu bestimmen.

BEISPIEL A.1.4. Beim Rechnen mit komplexen Zahlen verwenden wir die vertrauten Rechenregeln und gelegentlich die Relation $\mathbf{i}^2 = -1$. So erhalten wir etwa:

$$\begin{aligned} (2 + 3\mathbf{i}) + (4 + 5\mathbf{i}) &= 6 + 8\mathbf{i} \\ (2 + 3\mathbf{i}) \cdot (4 + 5\mathbf{i}) &= 8 + 22\mathbf{i} + 15\mathbf{i}^2 = -7 + 22\mathbf{i} \\ (2 + 3\mathbf{i})^{-1} &= \frac{1}{2 + 3\mathbf{i}} = \frac{2 - 3\mathbf{i}}{(2 + 3\mathbf{i})(2 - 3\mathbf{i})} = \frac{2 - 3\mathbf{i}}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}\mathbf{i} \\ \frac{2 + 3\mathbf{i}}{4 + 5\mathbf{i}} &= \frac{(2 + 3\mathbf{i})(4 - 5\mathbf{i})}{(4 + 5\mathbf{i})(4 - 5\mathbf{i})} = \frac{23 + 2\mathbf{i}}{41} = \frac{23}{41} + \frac{2}{41}\mathbf{i} \end{aligned}$$

BEMERKUNG A.1.5 (Multiplikative Gruppe). Da \mathbb{C} ein Körper ist bildet $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation eine abelsche Gruppe. Aus (125) und (126) folgt, dass $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ eine Untergruppe bildet. Die Menge dieser komplexen Zahlen entspricht dem Einheitskreis der Zahlenebene.

BEMERKUNG A.1.6 (Skalarprodukt und Determinante). Auch das Skalarprodukt lässt sich mit Hilfe der komplexen Konjugation und Multiplikation schreiben. Für $z_1 = x_1 + y_1\mathbf{i}$ und $z_2 = x_2 + y_2\mathbf{i}$ erhalten wir

$$\Re(\bar{z}_1 z_2) = \Re((x_1 - y_1\mathbf{i})(x_2 + y_2\mathbf{i})) = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Ähnlich lässt sich die Determinante schreiben,

$$\Im(\bar{z}_1 z_2) = \Im((x_1 - y_1\mathbf{i})(x_2 + y_2\mathbf{i})) = x_1 y_2 - y_1 x_2 = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}.$$

A.2. Algebraische Vollständigkeit. In den komplexen Zahlen besitzt die Gleichung $z^2 = -1$ zwei Lösungen, $z = \pm\mathbf{i}$. Weiteren Lösungen kann es nicht geben, denn aus $0 = z^2 + 1 = z^2 - \mathbf{i}^2 = (z - \mathbf{i})(z + \mathbf{i})$ folgt $z - \mathbf{i} = 0$ oder $z + \mathbf{i} = 0$. Interessanterweise hat das Hinzunehmen einer Lösung von $z^2 = -1$ zur Folge, dass nun jede komplexe Zahl Quadratwurzeln besitzt: Ist $w \in \mathbb{C}$, so existiert $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = w$. Schreiben wir $z = x + y\mathbf{i}$ und $w = a + b\mathbf{i}$, dann soll also $x^2 - y^2 = a$ und $2xy = b$ gelten. Dies führt auf

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \quad \text{und} \quad y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}, \quad (127)$$

wobei im Fall $b \geq 0$ zwei gleiche und andernfalls zwei verschiedene Vorzeichen zu nehmen sind. Beachte, dass die Radikanden reell und nicht negativ sind. Das Wurzelzeichen bezeichnet hier die übliche, nicht negative reelle Wurzel. Wir erhalten also zwei Lösungen, die sich um ein Vorzeichen unterscheiden: $z_1 = x + y\mathbf{i}$ und $z_2 = -z_1$. Weitere Lösungen kann es nicht geben, denn aus $0 = z^2 - w = z^2 - z_1^2 = (z - z_1)(z + z_1)$ folgt $z = z_1$ oder $z = -z_1$. Für $w = 0$ fallen diese beiden Wurzeln zusammen, d.h. die einzige Lösung von $z^2 = 0$ ist $z = 0$. Im Fall $w \neq 0$ erhalten wir zwei verschiedene Wurzeln.

BEISPIEL A.2.1. Wir wollen die komplexen Wurzeln von $-2\mathbf{i}$ bestimmen, d.h. die Lösungen von $z^2 = -2\mathbf{i}$ finden. Aus den Formeln oben erhalten wir $x = 1$ und $y = -1$, also $z_1 = 1 - \mathbf{i}$ und $z_2 = -1 + \mathbf{i}$.

BEMERKUNG A.2.2 (Quadratische Gleichungen). Jede quadratische Gleichung

$$z^2 + pz + q = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $p, q \in \mathbb{C}$ besitzt zwei Lösungen, die sich mit der üblichen Lösungsformel bestimmen lassen,

$$z_{12} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad (128)$$

wobei $\pm\sqrt{p^2 - 4q}$ hier die beiden komplexen Wurzeln von $p^2 - 4q$ bezeichnet. Im Fall $p^2 - 4q = 0$ fallen die beiden Lösungen zusammen, andernfalls erhalten wir zwei verschiedene Lösungen. Weitere Lösungen kann es nicht geben, denn wir erhalten die Faktorisierung

$$z^2 + pz + q = (z - z_1)(z - z_2).$$

BEISPIEL A.2.3. Wir wollen alle komplexen Lösungen von

$$z^2 + (2 - 3\mathbf{i})z - 5 - 5\mathbf{i} = 0$$

bestimmen. Nach der quadratischen Lösungsformel in (128) gilt

$$z = \frac{-2 + 3\mathbf{i} \pm \sqrt{15 + 8\mathbf{i}}}{2}.$$

Aus (127) erhalten wir

$$\sqrt{15 + 8\mathbf{i}} = \pm(4 + \mathbf{i}).$$

Die ursprüngliche Gleichung besitzt daher die beiden Lösungen

$$z_1 = \frac{-2 + 3\mathbf{i} + (4 + \mathbf{i})}{2} = 1 + 2\mathbf{i} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{-2 + 3\mathbf{i} - (4 + \mathbf{i})}{2} = -3 + \mathbf{i}.$$

Das ursprüngliche Polynom lässt sich daher wie folgt faktorisieren:

$$z^2 + (2 - 3\mathbf{i})z - 5 - 5\mathbf{i} = (z - 1 - 2\mathbf{i})(z + 3 - \mathbf{i}).$$

Über \mathbb{C} lässt sich jede nicht-triviale algebraische (d.h. polynomiale) Gleichung lösen, vgl. den Fundamentalsatz unten. Daher wird \mathbb{C} *algebraisch vollständig* genannt.

SATZ A.2.4 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom besitzt eine Nullstelle über \mathbb{C} . Genauer ist damit folgendes gemeint: Ist*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

ein Polynom mit $n \geq 1$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$, dann existiert $z_0 \in \mathbb{C}$ mit

$$p(z_0) = 0.$$

KOROLLAR A.2.5 (Faktorisierung in Linearfaktoren). *Über \mathbb{C} zerfällt jedes Polynom in Linearfaktoren. Genauer ist damit folgendes gemeint: Ist*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$$

ein Polynom mit $n \geq 1$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$, dann existieren $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, sodass

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Dabei sind z_1, \dots, z_n die (alle) Nullstellen von p , jedoch nicht notwendigerweise verschieden.

BEWEIS. O.B.d.A. sei p normiert, d.h. $a_n = 1$. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra existiert $z_n \in \mathbb{C}$ mit $p(z_n) = 0$. Polynomdivision liefert $p(z) = q(z)(z - z_n) + r$, wobei q ein normiertes Polynom vom Grad $n - 1$ bezeichnet und $r \in \mathbb{C}$. Aus $p(z_n) = 0$ folgt $r = 0$, also

$$p(z) = q(z)(z - z_n).$$

Mittels Induktion nach n erhalten wir z_1, \dots, z_{n-1} , sodass

$$q(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}).$$

Kombinieren wir dies mit der vorangehenden Gleichung folgt das Korollar. □

BEISPIEL A.2.6. Wir wollen das Polynom

$$p(z) = z^3 - (1 + 2\mathbf{i})z^2 + (2\mathbf{i} - 1)z + 1$$

in Linearfaktoren aufspalten. Wir erraten die Nullstelle $z_1 = 1$ von p . Polynomdivision liefert

$$p(z) = (z^2 - 2\mathbf{i}z - 1)(z - 1).$$

Mit der quadratischen Lösungsformel erhalten wir

$$z_{23} = \frac{2\mathbf{i} \pm \sqrt{(2\mathbf{i})^2 - 4 \cdot 1}}{2} = \mathbf{i},$$

also $z^2 - 2\mathbf{i}z - 1 = (z - \mathbf{i})^2$. Die Faktorisierung des ursprünglichen Polynoms lautet daher

$$p(z) = (z - \mathbf{i})^2(z - 1).$$

Das Polynom p hat also nur zwei verschiedene Nullstellen: 1 und \mathbf{i} . Dabei wird \mathbf{i} als doppelte Nullstelle bezeichnet, da der entsprechende Linearfaktor $z - \mathbf{i}$ in der Faktorisierung von p zweimal auftritt.

BEISPIEL A.2.7. Wir wollen alle komplexen Lösungen von $z^3 = 8$ bestimmen. Wir erraten eine Lösung $z_1 = 2$. Polynomdivision liefert

$$z^3 - 8 = (z^2 + 2z + 4)(z - 2).$$

Für die Lösungen der quadratischen Gleichung $z^2 + 2z + 4 = 0$ liefert die Lösungsformel

$$z_{23} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}\mathbf{i}}{2} = -1 \pm \sqrt{3}\mathbf{i}.$$

Wir erhalten

$$z^3 - 8 = (z - 2)(z + 1 - \sqrt{3}\mathbf{i})(z + 1 + \sqrt{3}\mathbf{i}).$$

Die Gleichung $z^3 = 8$ hat daher drei komplexe Lösungen:

$$z_1 = 2, \quad z_2 = -1 + \sqrt{3}\mathbf{i}, \quad -1 - \sqrt{3}\mathbf{i}.$$

A.3. Komplexe Zahlen als konforme lineare Abbildungen. Multiplikation mit der komplexen Zahl $z = x + y\mathbf{i}$ liefert eine Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $w \mapsto zw$. Bezeichnen wir $w = a + b\mathbf{i}$, dann lässt sich dies in der Form

$$a + b\mathbf{i} \mapsto (x + y\mathbf{i})(a + b\mathbf{i}) = (xa - yb) + (xb + ya)\mathbf{i}$$

schreiben. Identifizieren wir $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, so erhalten wir eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xa - yb \\ xb + ya \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die der Multiplikation mit z entspricht, ist daher linear und ihre Matrix hat spezielle Gestalt.

Wir können komplexe Zahlen daher mit spezielle 2×2 -Matrizen identifizieren:

$$x + y\mathbf{i} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass Addition und Multiplikation komplexer Zahlen genau den Matrizenoperationen entsprechen:

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -(y_1 + y_2) \\ y_1 + y_2 & x_1 + x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & -y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 & -y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & -(x_1y_2 + x_2y_1) \\ x_1y_2 + x_2y_1 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere entspricht \mathbf{i} der Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{i}^2 = -1$ entspricht $J^2 = -I$. Beachte

$$\det \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Für $z \neq 0$ ist die Matrix invertierbar mit Inverser

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

und dies entspricht der inversen komplexen Zahl $1/z = \frac{1}{x+y\mathbf{i}} = \frac{x-y\mathbf{i}}{x^2+y^2}$.

Wir wollen nun die Matrizen, die wir so erhalten, geometrisch charakterisieren.

PROPOSITION A.3.1 (Konforme Matrizen). *Für eine 2×2 -Matrix A sind äquivalent:*

- (a) $A = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ für geeignete $x, y \in \mathbb{R}$.
- (b) $A = r \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ für einen geeigneten Winkel $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$ und $r \geq 0$.
- (c) $\det A \geq 0$ und es existiert $r \geq 0$, sodass $\|Av\| = r\|v\|$, für alle $v \in \mathbb{R}^2$.
- (d) $\det A \geq 0$ und es existiert $r \geq 0$, sodass $\langle Av, Aw \rangle = r^2 \langle v, w \rangle$, für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$.
- (e) $AJ = JA$

BEWEIS. Die Äquivalenzen (e) \Leftrightarrow (a) \Leftrightarrow (b) sind offensichtlich und (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) folgt sofort aus Lemma 2.5.9. \square

Eine invertierbare lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird *konform* genannt, wenn die entsprechende Matrix A die Eigenschaften in Proposition A.3.1 hat. Diese linearen Abbildungen sind *winkeltreu*, denn es gilt

$$\frac{\langle Av, Aw \rangle}{\|Av\| \|Aw\|} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}.$$

Die linearen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, die der Multiplikation mit komplexen Zahlen $z \neq 0$ entsprechen, sind also genau die konformen linearen Abbildungen.

A.4. Polardarstellung. Für jeden Winkel $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$ betrachten wir die komplexe Zahl

$$\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha.$$

Beachte, dass diese Zahl Betrag Eins hat und daher am Einheitskreis liegt. Sie entspricht einer Rotation um den Winkel α . Für zwei Winkel α und β erhalten wir aus den Additionstheoremen für die Winkelfunktionen

$$(\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha) \cdot (\cos \beta + \mathbf{i} \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + \mathbf{i} \sin(\alpha + \beta). \quad (129)$$

Die Multiplikation komplexer Zahlen am Einheitskreis entspricht daher der Winkeladdition. Aus (129) folgt auch $(\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha) \cdot (\cos(-\alpha) + \mathbf{i} \sin(-\alpha)) = 1$, also

$$(\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha)^{-1} = \cos(-\alpha) + \mathbf{i} \sin(-\alpha). \quad (130)$$

PROPOSITION A.4.1 (Formel von de Moivre). *Für $n \in \mathbb{Z}$ und jeden Winkel $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$ gilt*

$$(\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + \mathbf{i} \sin(n\alpha).$$

BEWEIS. Für $n = 0$ und $n = 1$ ist dies offensichtlich. Für $n \geq 1$ lässt sich die Formel mittels vollständiger Induktion nach n aus (129) herleiten. Mit (130) folgt sie dann auch für negative ganze Zahlen. \square

BEISPIEL A.4.2 (Einheitswurzeln). Sei $n \in \mathbb{N}$. Unter einer n -ten Einheitswurzel verstehen wir jede komplexe Zahl ζ , für die $\zeta^n = 1$ gilt. Mit der Formel von de Moivre, können wir sofort alle n -ten Einheitswurzeln ζ_1, \dots, ζ_n angeben:

$$\zeta_k = \cos\left(\frac{k}{n} 360^\circ\right) + \mathbf{i} \sin\left(\frac{k}{n} 360^\circ\right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Beachte auch $\zeta_k = (\zeta_1)^k$. Die zweiten Einheitswurzeln lauten -1 und 1 . Die dritten Einheitswurzeln lauten $\frac{-1+\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}$, 1 . Die vierten Einheitswurzeln lauten \mathbf{i} , -1 , $-\mathbf{i}$, 1 .

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich in der Form

$$z = r(\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha)$$

schreiben, wobei $r = |z| \geq 0$ und $\alpha \in \tilde{\mathcal{W}}$ einen geeigneten Winkel bezeichnet. Im Fall $z = 0$ können wir jeden Winkel α verwenden. Für $z \neq 0$ ist der Winkel bis auf ganzzahlige Vielfache von 360° bestimmt. Dies wird als *Polardarstellung* komplexer Zahlen bezeichnet.

Aus (129) erhalten wir sofort

$$r(\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha) \cdot s(\cos \beta + \mathbf{i} \sin \beta) = (rs)(\cos(\alpha + \beta) + \mathbf{i} \sin(\alpha + \beta)) \quad (131)$$

Bei der Multiplikation komplexer Zahlen in Polardarstellung werden daher die Absolutbeträge multipliziert und die Winkel addiert. Aus der Formel von de Moivre erhalten wir sofort

$$(r(\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha))^n = r^n(\cos(n\alpha) + \mathbf{i} \sin(n\alpha))$$

für $n \in \mathbb{Z}$ und $r > 0$. Damit lassen sich Wurzeln komplexer Zahlen leicht bestimmen.

BEISPIEL A.4.3 (Komplexe Wurzeln). Die n -ten Wurzeln von $r(\cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha)$ lauten

$$\sqrt[n]{r}(\cos(\frac{1}{n}\alpha + \frac{k}{n} 360^\circ) + \mathbf{i} \sin(\frac{1}{n}\alpha + \frac{k}{n} 360^\circ)), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Die n -ten Wurzeln von $r \geq 0$ lauten

$$\sqrt[n]{r}(\cos(\frac{k}{n} 360^\circ) + \mathbf{i} \sin(\frac{k}{n} 360^\circ)), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Unter der *komplexen Exponentialfunktion* verstehen wir die Abbildung $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\exp(z) := e^z := e^x(\cos(\frac{y}{2\pi} 360^\circ) + \mathbf{i} \sin(\frac{y}{2\pi} 360^\circ)),$$

wobei $z = x + y\mathbf{i}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Für reelle z stimmt dies mit der üblichen Exponentialfunktion überein. Insbesondere haben wir $e^0 = 1$. Beachte $|e^z| = e^{\Re(z)}$. Für rein imaginäre $z = y\mathbf{i}$ liegt e^z am Einheitskreis, und es gilt

$$e^{y\mathbf{i}} = \cos(\frac{y}{2\pi} 360^\circ) + \mathbf{i} \sin(\frac{y}{2\pi} 360^\circ),$$

wobei $\alpha = \frac{y}{2\pi} 360^\circ$ den Winkel mit *Bogenmaß* y bezeichnet. Aus (129) erhalten wir sofort

$$e^z \cdot e^w = e^{z+w},$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$. Insbesondere folgt $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$, also $e^z \neq 0$ und

$$e^{-z} = 1/e^z,$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Exponentialfunktion hat Periode $2\pi\mathbf{i}$, d.h.

$$e^{z+2\pi\mathbf{i}} = e^z$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Aus der Formel von de Moivre erhalten wir sofort

$$(e^z)^n = e^{nz}$$

für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Die n -ten Einheitswurzeln lassen in der Form

$$\zeta_k = e^{2\pi i k/n}, \quad k = 1, \dots, n$$

schreiben. Schließlich gilt Eulers Formel,

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$