INFORMATIONEN ZUR PRÜFUNG GEOMETRIE UND LINEARE ALGEBRA FÜR DAS LEHRAMT

SOMMERSEMESTER 2019 (LVN 250159)

STEFAN HALLER

2. JULI 2019

Die Leistungskontrolle erfolgt durch eine 2-stündige schriftliche Prüfung ohne Hilfsmittel über den gesamten Inhalt der Vorlesung. Bei der Prüfung wird erwartet, dass Sie

- Definitionen aller Begriffe sinngemäß wiedergeben können,
- die Aussagen aller Sätze, Korollare, Propositionen, Lemmas und Bemerkungen sinngemäß wiedergeben können,
- von ausgewählten (s.u.) Resultaten Beweise nachvollziehbar reproduzieren können,
- und die Begriffe und Methoden an konkreten Beispiele (s.u.) anwenden können.

Die Hauptachsentransformation im Abschnitt 3.5 des Vorlesungsskriptums ist für die Prüfung nicht relevant. Die komplexen Zahlen im Anhang A aber sehr wohl.

Beweise bei der Prüfung

Zur Prüfung werden Beweise nur von folgenden Resultaten der Vorlesung erwartet:

Aus Abschnitt 1:

- Winkel-Seiten-Winkel (WSW) Kongruenzsatz (Satz 1.4.2)
- Seiten-Seiten-Seiten (SSS) Kongruenzsatz (Satz 1.4.18)
- Satz vom Außenwinkel (Satz 1.4.24)
- Größerer Winkel liegt größerer Seite gegenüber (Satz 1.4.25)
- Driecksungleichung (Satz 1.4.26)
- Seiten-Winkel-Winkel (SWW) Kongruenzsatz (Satz 1.4.27)
- Seiten-Seiten-Winkel (SSW) Kongruenzsatz (Satz 1.4.28)
- Existenz des Lots (Satz 1.4.36)
- Winkelsumme im Dreieck (Satz 1.5.7)
- Parallelogramm (Satz 1.5.10)
- Existenz des Umkreismittelpunkts (Satz 1.5.14)
- Tangenten stehen normal auf den Radius (Satz 1.5.20)
- Existenz des Inkreismittelpunkts (Satz 1.5.26)
- Satz von Thales (Satz 1.5.28)
- Peripherie- und Tangentenwinkelsatz (Satz 1.5.29)
- Seiten-Winkel-Seiten (S:W:S) Ähnlichkeitssatz (Satz 1.5.44)
- Strahlensatz (Satz 1.5.47)
- Satzgruppe des Pythagoras (Satz 1.5.49)
- Existenz des Höhenschnittpunkts (Satz 1.5.53)

- Existenz des Schwerpunkts (Satz 1.5.56)
- Euler Gerade (Satz 1.5.58)
- Schnitt von Kreis und Gerade (Satz 1.6.5)
- Tangenten an Kreis (Satz 1.6.15)

Aus Abschnitt 2:

- Orientierter Strahlensatz (Satz 2.1.12)
- Satz von Menelaos (Satz 2.1.13)
- Geraden in Koordinaten (Satz 2.3.6)
- Beweis des orientierten Strahlensatzes mittels Koordinaten (Seite 95)
- Cauchy–Schwartz Ungleichung (Lemma 2.3.38)
- Dreiecksungleichung (Lemma 2.3.39)
- Abstand von Punkten in kartesischen Koordinaten (Satz 2.3.41)
- Normalprojektion und Normalabstand (Proposition 2.3.54)
- Höhenschnittpunkt mit kartesischem Koordinatensystem (Ende von Abschnitt 2.3)
- Sinussatz (Satz 2.4.12)
- Kosinussatz (Satz 2.4.13)
- Winkel in kartesischen Koordinaten (Proposition 2.4.15)
- Additionstheoreme (Satz 2.4.20)
- Inkreismittelpunkts mit trigonometrischen Formeln (Ende von Abschnitt 2.4)
- Charakterisierung orthogonaler Matrizen (Lemma 2.5.9)

Aus Abschnitt 3:

- Rechenregeln für Matrizenmultiplikation (Lemma 3.1.24)
- Kern und Injektivität linearer Abbildungen (Lemma 3.2.7)
- Austauschsatz von Steinitz (Satz 3.2.46)
- Existenz einer Basis (Korollar 3.2.47)
- Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 3.2.57)

Rechenbeispiele

Bei manchen Prüfungsaufgaben sollen die Begriffe und Methoden an konkreten Beispielen angewandt werden. Neben den Beispielen der Vorlesung sind hierfür folgende Übungsaufgaben besonders relevant: 9.2, 10.2, 10.3, 10.4, 11.1, 11.2, 11.5, 12.2, 12.5(b,c), 12.6, 12.7, 12.8, 13.1, 13.2, 13.3, 13.4, 13.5, 13.6, 13.7, 13.8, 14.1, 14.2, 14.3, 14.4, 14.6, 14.8, 15.1, 15.3, 15.4, 15.6

Einige typische Prüngsfragen

- Was verstehen wir unter dem Inneren eines Winkels? Gib eine präzise Definition.
- Formuliere und beweise den Seiten-Winkel-Winkel (SWW) Kongruenzsatz.
- Sei g eine Gerade und A ein Punkt, der nicht auf g liegt.
  (a) Was verstehen wir unter dem Lot auf g durch A?
  (b) Zeige, dass dieses Lot existiert und eindeutig ist.
- Wann werden zwei Dreiecke ähnlich genannt? Gib eine präzise Definition.
- Formuliere den Winkel-Winkel-Winkel (W:W:W) Ähnlichkeitssatz.

- Sei M der Mittelpunkt einer Strecke AB. Gib folgende Teilverhältnisse an:
$$\frac{AM}{MB} = \qquad\qquad \frac{AB}{BM} = \qquad\qquad \frac{MA}{AB} =$$
- Formuliere den Satz von Ceva.
- Was verstehen wir unter einem affinen Koordinatensystem auf einer Geraden, und was ist mit der Koordinatenabbilung eines affinen Koordinatensystems auf einer Geraden gemeint?
- Sei $x\colon g \to \mathbb{R}$ die Koordinatenabbildung eines affinen Koordinatensystems auf einer Geraden g. Wie kann das Teilverhältnis $\frac{AB}{BC}$ dreier Punkte $A, B, C \in g$ durch ihre Koordinaten $x(A), x(B), x(C) \in \mathbb{R}$ berechnet werden?
$$\frac{AB}{BC} =$$
- Formuliere und beweise die Dreiecksungleichung für Vektoren in $\mathbb{R}^2$.
- Gib eine (2×2)-Matrix mit Determinante 17 an.
- Erkläre was mit folgender Aussage gemeint ist: "Die Determinante einer (2×2)-Matrix ist schiefsymmetrisch in den Spalten."
- Berechne den Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Eckpunkte A, B, C folgende kartesische Koordinaten haben:
$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$
- Berechne die Koordinaten des Schwerpunkts eines Dreiecks, dessen Eckpunkte A, B, C in einem affinen Koordinatensystem folgende Koordinaten haben:
$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}.$$
- Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems:
$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & -2x_2 & -2x_3 & & -10x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & -x_2 & -7x_3 & -2x_4 & -21x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & & -4x_3 & +2x_4 & -2x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & +5x_2 & -x_3 & +3x_4 & +22x_5 & = & 0 \end{array}$$
Bestimme $\dim(L)$ und eine Basis von L. Gib auch ein minimales lineares Gleichungssystem für L an.
- Wann wird ein System von Vekoren $v_1, \ldots, v_k$ in $\mathbb{R}^n$ linear abhängig genannt?
- Zeige, dass das System von Vektoren
$$\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 17 \\ 10 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 17 \\ 12 \end{pmatrix}$$
linear unabhägig ist.
- Zeige, dass das System von Vektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix},$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bildet. Gib drei der Vektoren v_i an, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

- Bezeichne W den von den Vektoren
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \\ -6 \\ 12 \\ 20 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ -2 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 8 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix}$$
aufgespannten Teilraum in $\mathbb{R}^5$. Bestimme $\dim(W)$. Gib geeignete der Vektoren v_i an, die eine Basis von W bilden.
- Bestimme den Rang der Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 2 & 7 & 12 & 17 & 22 \\ -1 & 2 & 5 & 8 & 11 \end{pmatrix}.$$
- Zeige, dass das System
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bildet.
- Bestimme alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:
$$\begin{array}{lrrrcr} 3x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +6x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & & +10x_3 & +8x_4 & = & 12 \\ 2x_1 & +x_2 & +13x_3 & +10x_4 & = & 19 \\ 3x_1 & -5x_2 & & +2x_4 & = & -17 \end{array}$$
Beschreibe den Lösungsraum durch eine Parameterdarstellung. Gib auch ein minimales lineares Gleichungssystem für den Lösungsraum an.
- Bestimme die Inverse der Matrix
$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$
- Beschreibe
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$
durch ein lineares Gleichungssystem.
- Bestimme eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Bestimme alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 + (1 + 2\mathbf{i})z + 1 - 5\mathbf{i} = 0$.
- Faktorisiere das Polynom $p(z) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ in Linearfaktoren.