LÖSUNGEN

Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2019

VO 250159 (Stefan Haller)

am 23. Oktober 2020

digital schriftlich von 15:00 bis 17:30 Uhr

`https://moodle.univie.ac.at/course/view.php?id=108015`

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punkte									
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
Punkte:									

Notenschlüssel					
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme alle a, sodass

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$$

gilt. Dabei bezeichnet I die 3×3 Einheitsmatrix und 0 bezeichnet die 3×3 Nullmatrix. Begründe die Antwort. **(5P)**

(b) Bestimme eine Matrix X, für die

$$X \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(5P)**

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I = \begin{pmatrix} 1-3+3-1 & 3a-6a+3a & 3a^2-3a^2 \\ 0 & 1-3+3-1 & \\ 0 & 0 & 1-3+3-1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dies gilt für alle $a \in \mathbb{R}$.

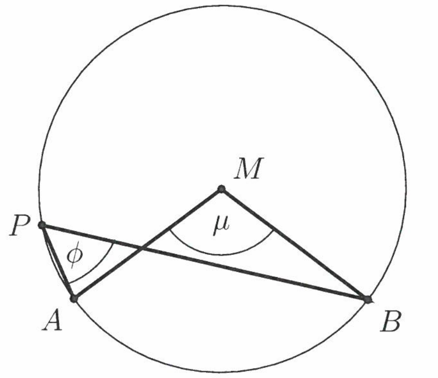
b)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -2 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Seien A, B und P drei verschiedene Punkte auf einem Kreis mit Mittelpunkt M, sodass B im Inneren des Winkel $\angle MPA$ liegt. Weiters bezeichnen ϕ den Peripheriewinkel und μ den Mittelpunktswinkel wie in der Skizze angedeutet.



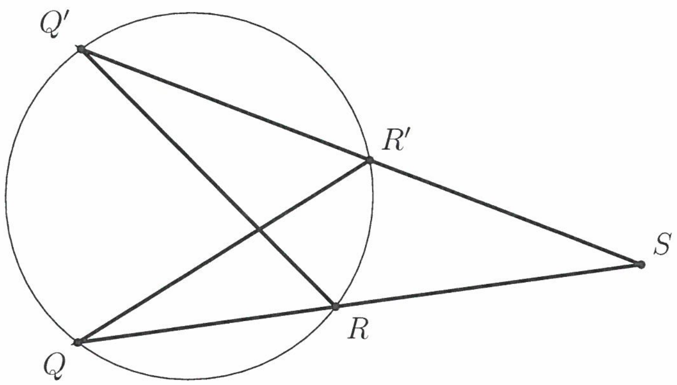
analog zum Beweis von Satz 1.5.29

Zeige, dass in dieser Situation der Peripheriewinkelsatz $\mu = 2\phi$ gilt. **(5P)**

(b) Seien Q, R, Q' und R' vier verschiedene Punkte auf einem Kreis so, dass sich die Sekanten $g(Q, R)$ und $g(Q', R')$ in einem Punkt S außerhalb des Kreises treffen. In dieser Situation besagt der Sekantensatz:

$$|SQ| \cdot |SR| = |SQ'| \cdot |SR'|.$$

Wir nehmen an, dass Q und Q' auf der selben Seite der Geraden $g(R, R')$ liegen.



Gib im folgenden Beweis des Sekantensatzes zu jeder der Behautungen eine kurze, stichwortartige Begründung an.

(1) $\angle RQR' \equiv \angle R'Q'R$. **(2P)** Peripheriewinkelsatz

(2) Die Dreiecke SQR' und $SQ'R$ sind ähnlich. **(2P)** W:W:W

(3) $|SQ| \cdot |SR| = |SQ'| \cdot |SR'|$ **(1P)**

Winkel bei S gemeinsam
Winkel bei Q
= Winkel bei Q'

aufgrund der Ähnlichkeit

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimme die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und gib die Umkehrabbildung der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y + z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

an. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(6P)**

(b) Verwende die Cramer'sche Regel, um folgendes Gleichungssystem zu lösen: **(4P)**

$$a + b = 3$$
$$a + c = 4$$
$$b + c = 5$$

a)

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Umkehrabbildung: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x+z}{2} \\ \frac{y+z}{2} \end{pmatrix}$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 3 - 4 = -2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 5 - 3 = -4 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 5 = -6 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{-6}{-2} = 3$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimme alle Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und gib eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren dieser Matrix besteht. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(6P)**

(b) Gib eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

an, die die Eigenwerte 5 und 7 hat. **(4P)**

a) $0 = (2-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) - (2-\lambda) = (2-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 1\right)$

$\underline{\lambda_1 = 1}, \quad \underline{\lambda_2 = 2}, \quad \underline{\lambda_3 = 3}$

$E_{\lambda_1} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$E_{\lambda_2} = \ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_{\lambda_3} = \ker\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Basis aus Eigenvektoren</u>: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $0 = \begin{vmatrix} a-5 & b \\ b & a-5 \end{vmatrix} = (a-5)^2 - b^2 = a^2 - 10a + 25 - b^2 \quad (\mathrm{I})$

$0 = \begin{vmatrix} a-7 & b \\ b & a-7 \end{vmatrix} = (a-7)^2 - b^2 = a^2 - 14a + 49 - b^2 \quad (\mathrm{II})$

$\mathrm{I} - \mathrm{II} \Rightarrow 4a - 24 = 0 \Rightarrow a = 6$

$\mathrm{I} \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$

$\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

5. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimme den Rang **(2P)** der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$rg(A) = 2$

(b) Sind die Spalten von A linear unabhängig? **(1P)** Nein

(c) Bilden die Spalten von A ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$? **(1P)** Nein

(d) Bilden die Spalten von A eine Basis von $\mathbb{R}^3$? **(1P)** Nein

(e) Welche Dimension hat der von den Spalten von A aufgespannte Teilraum? **(1P)** 2

(f) Gib die Dimension von $\ker A$ an. **(1P)** 4

(g) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? **(1P)**

$0 \neq \det(B) = x(1-x^2)$

also $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$

(h) Für welche x hat B Rang 2? **(1P)** $x = 0, 1, -1$

(i) Für welche x hat B Rang 1? **(1P)** kein x

6. Aufgabe (10 Punkte)

Seien A, B, C drei Punkte der Ebene mit kartesischen Koordinaten:

$$x(A) = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen. **(2P)**

(b) Bestimme die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{BC}{CA}$. **(2P)**

(c) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes D auf der Geraden durch A, B, C an, für den $\frac{AD}{DB} = -2$ gilt. **(2P)**

(d) Bestimme den Abstand des Punktes E mit Koordinaten

$$x(E) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

von der Geraden durch A, B, C. **(2P)**

(e) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes F der Ebene an, der von der Geraden durch A, B, C Abstand 10 hat. **(2P)**

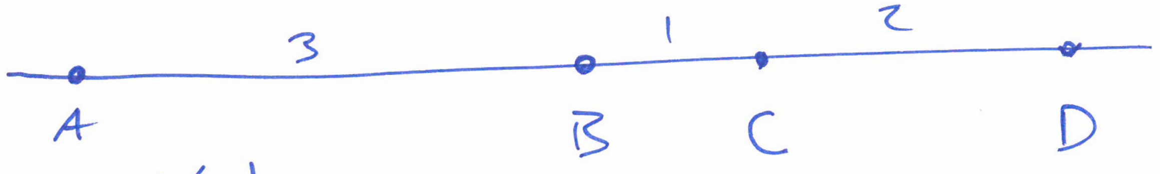
a) $x(B) - x(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$x(C) - x(A) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Da diese Vektoren parallel, liegen A, B, C auf einer Geraden

b) $\frac{AB}{BC} = 3 \qquad \frac{BC}{CA} = -\frac{1}{4}$

c) $x(D) = \begin{pmatrix} 14 \\ 18 \end{pmatrix}$



d) $n = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \|n\| = 5$

$d = \frac{\langle x(E) - x(A), n \rangle}{\|n\|} = 5$

e) $x(F) = x(A) + 2\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -12 \end{pmatrix}$

nur eine von vielen möglichen Lösungen

7. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Gib die Lösung der Gleichung

$$(5+4\mathbf{i})w + 3 + 2\mathbf{i} = 12 + \mathbf{i}.$$

in der Form $w = x + \mathbf{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(3P)**

(b) Gib die beiden Lösungen der Gleichung

$$z^2 - (2-2\mathbf{i})z + 3 - 6\mathbf{i} = 0$$

in der Form $z = x + \mathbf{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(5P)**

(c) Für welche ganzen Zahlen n gilt $(-\mathbf{i})^n = 1$? **(2P)**

a) $$w = \frac{12+i-3-2i}{5+4i} = \frac{9-i}{5+4i} = \frac{(9-i)(5-4i)}{25+16}$$

$$= \frac{45-5i-36i-4}{41} = \frac{41-41i}{41} = \underline{\underline{1-i}}$$

b) $$z = 1-i \pm \sqrt{(1-i)^2-(3-6i)}$$ quadr. Lösungsf.

$$= 1-i \pm \sqrt{1-2i-1-3+6i}$$

$$= 1-i \pm \sqrt{4i-3}$$

$$\cancel{= 1-i \pm \sqrt{\frac{(-3)^2+4^2+4}{2}}}$$

$$\cancel{= 1-i \pm (2+i)}$$ ~~vgl. (127)~~

$$= 1-i \pm (1+2i)$$ vgl. (127)

$$\underline{z_1 = 2+i}, \quad \underline{z_2 = -3i}$$

c) $$n \in 4\mathbb{Z} = \{\ldots, -8, -4, 0, 4, 8, \ldots\}$$

8. Aufgabe (10 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^6$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & & +x_3 & & -x_5 & -2x_6 & = & -2 \\ & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & -x_5 & -3x_6 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -x_5 & -x_6 & = & 4 \end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(6P)**

(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assozierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(d) Gib ein System von drei linearen Gleichungen in vier Variablen a, b, c, d an, das einen 2-dimensionalen Lösungsraum hat. **(2P)**

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $L = \{ \xi + s_1 b_1 + s_2 b_2 + s_3 b_3 \mid s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \}$

b) urspr. Gleichungssys. ist minimal

c) b_1, b_2, b_3

d) $a = 0$
$2a = 0$
$b = 0$

oder

d) $a + b + c + d = 0$
$a + b + c + 2d = 0$
$2a + 2b + 2c + 2d = 0$