Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2019

VO 250159 (Stefan Haller)

am 23. Oktober 2020

digital schriftlich von 15:00 bis 17:30 Uhr

`https://moodle.univie.ac.at/course/view.php?id=108015`

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punkte									
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
Punkte:									

Notenschlüssel					
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachte die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme alle a, sodass

$$A^3 - 3A^2 + 3A - I = 0$$

gilt. Dabei bezeichnet I die 3×3 Einheitsmatrix und 0 bezeichnet die 3×3 Nullmatrix. Begründe die Antwort. **(5P)**

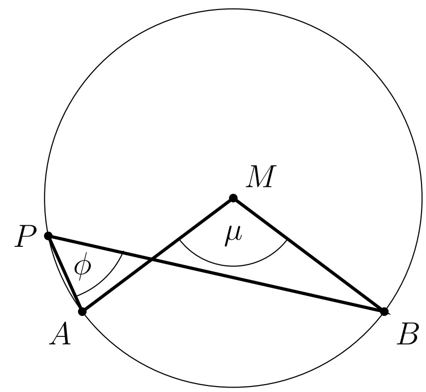
(b) Bestimme eine Matrix X, für die

$$X \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(5P)**

2. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Seien A, B und P drei verschiedene Punkte auf einem Kreis mit Mittelpunkt M, sodass B im Inneren des Winkel $\angle MPA$ liegt. Weiters bezeichnen ϕ den Peripheriewinkel und μ den Mittelpunktswinkel wie in der Skizze angedeutet.

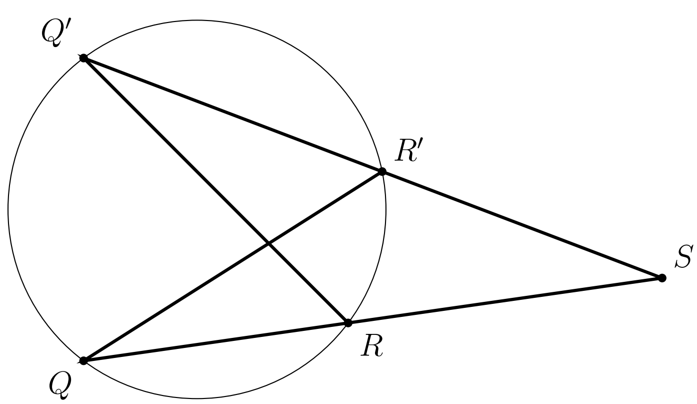


Zeige, dass in dieser Situation der Peripheriewinkelsatz $\mu = 2\phi$ gilt. **(5P)**

(b) Seien Q, R, Q' und R' vier verschiedene Punkte auf einem Kreis so, dass sich die Sekanten $g(Q, R)$ und $g(Q', R')$ in einem Punkt S außerhalb des Kreises treffen. In dieser Situation besagt der Sekantensatz:

$$|SQ| \cdot |SR| = |SQ'| \cdot |SR'|.$$

Wir nehmen an, dass Q und Q' auf der selben Seite der Geraden $g(R, R')$ liegen.



Gib im folgenden Beweis des Sekantensatzes zu jeder der Behautungen eine kurze, stichwortartige Begründung an.

(1) $\angle RQR' \equiv \angle R'Q'R$. **(2P)**

(2) Die Dreiecke SQR' und $SQ'R$ sind ähnlich. **(2P)**

(3) $|SQ| \cdot |SR| = |SQ'| \cdot |SR'|$ **(1P)**

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimme die Inverse A^{-1} der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und gib die Umkehrabbildung der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - y + z \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

an. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(6P)**

(b) Verwende die Cramer'sche Regel, um folgendes Gleichungssystem zu lösen: **(4P)**

$$\begin{aligned} a + b &= 3 \\ a + c &= 4 \\ b + c &= 5 \end{aligned}$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimme alle Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und gib eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren dieser Matrix besteht. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(6P)**

(b) Gib eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

an, die die Eigenwerte 5 und 7 hat. **(4P)**

5. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimme den Rang **(2P)** der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sind die Spalten von A linear unabhängig? **(1P)**

(c) Bilden die Spalten von A ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$? **(1P)**

(d) Bilden die Spalten von A eine Basis von $\mathbb{R}^3$? **(1P)**

(e) Welche Dimension hat der von den Spalten von A aufgespannte Teilraum? **(1P)**

(f) Gib die Dimension von $\ker A$ an. **(1P)**

(g) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar? **(1P)**

(h) Für welche x hat B Rang 2? **(1P)**

(i) Für welche x hat B Rang 1? **(1P)**

6. Aufgabe (10 Punkte)

Seien A, B, C drei Punkte der Ebene mit kartesischen Koordinaten:

$$x(A) = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen. **(2P)**

(b) Bestimme die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{BC}{CA}$. **(2P)**

(c) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes D auf der Geraden durch A, B, C an, für den $\frac{AD}{DB} = -2$ gilt. **(2P)**

(d) Bestimme den Abstand des Punktes E mit Koordinaten

$$x(E) = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

von der Geraden durch A, B, C. **(2P)**

(e) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes F der Ebene an, der von der Geraden durch A, B, C Abstand 10 hat. **(2P)**

7. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Gib die Lösung der Gleichung

$$(5+4\mathbf{i})w+3+2\mathbf{i}=12+\mathbf{i}.$$

in der Form $w=x+\mathbf{i}y$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ an. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(3P)**

(b) Gib die beiden Lösungen der Gleichung

$$z^2-(2-2\mathbf{i})z+3-6\mathbf{i}=0$$

in der Form $z=x+\mathbf{i}y$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ an. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(5P)**

(c) Für welche ganzen Zahlen n gilt $(-\mathbf{i})^n=1$? **(2P)**

8. Aufgabe (10 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^6$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & & +x_3 & & -x_5 & -2x_6 & = & -2 \\ & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & -x_5 & -3x_6 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & +3x_4 & -x_5 & -x_6 & = & 4 \end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(6P)**

(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assozierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(d) Gib ein System von drei linearen Gleichungen in vier Variablen a, b, c, d an, das einen 2-dimensionalen Lösungsraum hat. **(2P)**