Lösungen

Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2019

VO 250159 (Stefan Haller)

1. Termin am 26. Juni 2019

ab 7:00 Uhr in HS 1 und HS 6

2-stündig

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punkte									
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
Punkte:									

Notenschlüssel					
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter einem rechten Winkel? Gib eine präzise Definition. **(1P)**
(b) Formuliere den W:W:W-Ähnlichkeitssatz. **(2P)**
(c) Formuliere **(1P)** und beweise **(4P)** den Satz von Pythagoras.
(d) Warum ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks stets länger als die beiden Katheten? **(2P)**

a) Def. 1.4.30

b) Satz 1.5.43

c) Satz 1.5.49

d) weil sie dem größten (rechten) Winkel gegenüber liegt
vgl. Bem. 1.4.34

2. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere den Strahlensatz. **(2P)**

(b) Zeige, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. **(6P)**

(c) Der Schwerpunkt S eines nicht gleichseitigen Dreiecks liegt auf der Eulerschen Gerade durch den Höhenschnittpunkt H und den Umkreismittelpunkt U. Gib die Teilverhältnisse $\frac{HS}{SU}$ und $\frac{SH}{HU}$ an. **(2P)**

a) Satz 1.5.47

b) Satz 1.5.56

c) $\frac{HS}{SU} = 2 \qquad \frac{SH}{HU} = -\frac{2}{3}$

Vgl. Satz 1.5.58

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter dem Normalabstand eines Punktes von einer Geraden in der Ebene? **(2P)**

(b) Gib eine Formel an, die es erlaubt die kartesischen Koordinaten des Fußpunktes des Lots durch einen Punkt auf eine Gerade in der Ebene zu berechnen. Erkläre alle dabei auftretenden Variablen. **(2P)** Beweise diese Formel. **(4P)**

(c) Betrachte drei Punkte A, B, P in der Ebene mit kartesischen Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x(P) = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Berechne den Normalabstand von P zur Geraden durch A und B. **(2P)**

a) Def. 1.5.21

b) Prop. 2.3.54

c) RV von $g(A,B)$: $x(B)-x(A) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

NV von $g(A,B)$: $u = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

$w = x(P) - x(A) = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$d(P, g(A,B)) = \frac{|\langle u, w \rangle|}{\|u\|} = \frac{|4 \cdot 14 - 3 \cdot 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{50}{5} = \underline{\underline{10}}$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter der Dimension eines Teilraums von $\mathbb{R}^n$? Gib eine präzise Definition. **(1P)**
(b) Gib einen 3-dimensionalen Teilraum in $\mathbb{R}^4$ an. **(1P)**
(c) Wie lautet die Dimensionsformel für lineare Abbildungen $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$? **(1P)**
(d) Beweise die Dimensionsformel in (c). **(5P)**
(e) Wieviele lineare Gleichungen sind jedenfalls nötig, um einen 13-dimensionalen Teilraum in $\mathbb{R}^{17}$ zu beschreiben. **(2P)**

a) Def. 3.2.48

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_4 = 0 \right\}$ oder

$\operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

c), d) Satz 3.2.57

e) mindestens $17 - 13 = 4$ Gleichungen

5. Aufgabe (10 Punkte)

Betrachte die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme die Inverse von A. **(4P)**
(b) Gib eine Matrix X mit $AX = B$ an. **(2P)**
(c) Warum existiert keine Matrix Y mit $YA = B$? **(2P)**
(d) Gib zwei 2×2-Matrizen C und D an, für die $CD \neq DC$ gilt. **(2P)**

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

c) weil YA drei Spalten und B vier Spalten hat.

d) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$CD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $DC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Berechne **(4P)** die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Bilden die Spalten dieser Matrix eine Basis von $\mathbb{R}^3$? **(1P)**

(b) Bestimme die Dimension des Teilraums, der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^5$ aufgespannt wird. **(4P)** Sind diese Vektoren linear unabhängig? **(1P)**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$, also bilden Spalten Basis von $\mathbb{R}^3$

b) Dimension des Teilraums ist 3, denn

$$\text{rank}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} = 3$$

Vektoren sind linear abhängig.

7. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere den Kosinussatz. **(2P)**
(b) Beweise den Kosinussatz. **(5P)**
(c) In einem Dreieck gelte, mit der üblichen Bezeichnung der Seiten und Winkel,

$$a = 1, \qquad b = \sqrt{2}, \qquad \alpha = 30^\circ.$$

Sind die anderen Winkel und Seitenlängen dadurch eindeutig bestimmt? **(1P)** Berechne den Winkel β, bzw. alle möglichen Werte von β, falls mehrere Lösungen existieren. **(2P)**

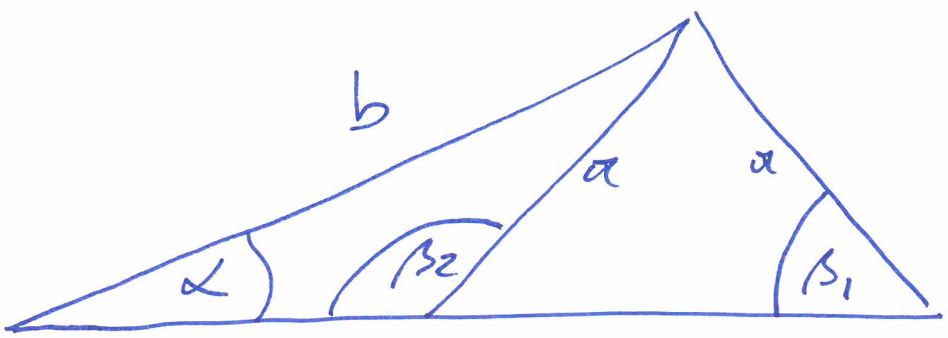
a) b) Satz 2.4.13

c) Sinussatz: $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin\beta}{b}$

$$\sin\beta = \frac{b}{a}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{1}\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 45^\circ, \quad \beta_2 = 135^\circ$$

Dreieck nicht eindeutig bestimmt (2 Lösungen)



8. Aufgabe (10 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +3x_4 & +4x_5 & = & 11 \\ -x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -3x_4 & +8x_5 & = & 7 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & -4x_5 & = & -1 \end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(6P)**

(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assozierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(d) Gib ein System von drei linearen Gleichungen in den drei Variablen x, y, z an, dessen Lösungsraum eine Gerade bildet. **(2P)**

a) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 & 11 \\ -1 & -2 & 2 & -3 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & -4 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : s, t, u \in \mathbb{R} \right\}$$

b) $$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + 3x_4 & = & 5 \\ x_3 + 4x_5 & = & 6 \end{array}$$

c) b_1, b_2, b_3 oben

d) $$\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{array}$$