Lösungen

Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2019

VO 250159 (Stefan Haller)

4. Termin am 28. Februar 2020

ab 11:30 Uhr in HS 4

2-stündig

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punkte									
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
Punkte:									

Notenschlüssel					
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere **(2P)** und beweise **(6P)** den Seiten-Seiten-Seiten Kongruenzsatz.

(b) Für welche $a > 0$ existiert ein Dreieck ABC mit Seitenlängen

$$|BC| = a, \qquad |CA| = 3 \qquad \text{und} \qquad |AB| = 4?$$

Beschreibe die Menge aller a, für die so ein Dreieck existiert. **(2P)**

a) Vgl. Satz 1.4.18

b) für jedes a im offenen Intervall $(1,7)$ wegen der Dreiecksungleichung, dh für alle $1 < a < 7$.

2. Aufgabe (10 Punkte)

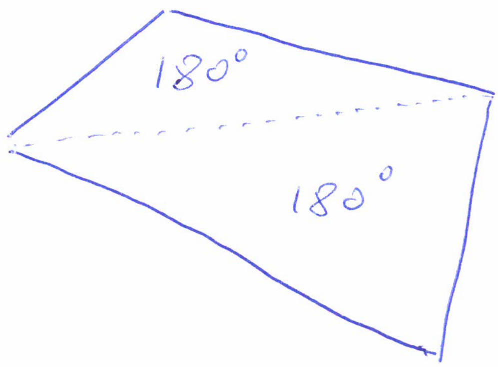
(a) Formuliere das Parallelenaxiom. **(2P)**
(b) Formuliere den Stufenwinkelsatz. **(2P)**
(c) Zeige, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck $2R = 180°$ beträgt. **(4P)**
(d) Welche Winkelsumme haben konvexe Vierecke? **(2P)**

a) vgl. Beginn des Abschnitts 1.5.

b) vgl. Satz 1.5.4

c) vgl. Satz 1.5.7

d) 360°



3. Aufgabe (10 Punkte)

Seien A, B, C drei Punkte der Ebene mit kartesischen Koordinaten:

$$x(A) = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen. **(2P)**

(b) Bestimme die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{BC}{CA}$. **(2P)**

(c) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes D auf der Geraden durch A, B, C an, für den $\frac{AD}{DB} = -2$ gilt. **(2P)**

(d) Bestimme den Abstand des Punktes E mit Koordinaten

$$x(E) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

von der Geraden durch A, B, C. **(2P)**

(e) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes F der Ebene an, der von der Geraden durch A, B, C Abstand 10 hat. **(2P)**

a) $x(B) - x(A) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$x(C) - x(A) = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Da die beiden Vektoren parallel sind, liegen A, B, C auf einer Geraden.

b) $\frac{AB}{BC} = 3, \quad \frac{BC}{CA} = -\frac{1}{4}$

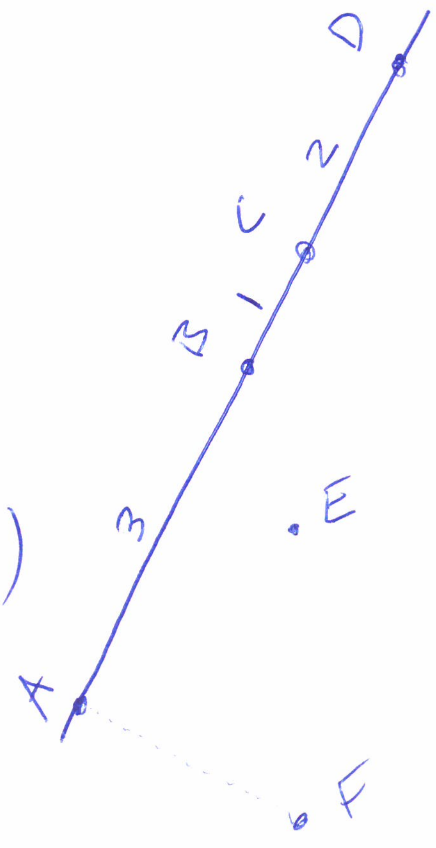
c) $x(D) = \begin{pmatrix} 13 \\ 17 \end{pmatrix}$

d) $n = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \|n\| = 5$

$d = \frac{\langle x(E) - x(A), n \rangle}{\|n\|} = 5$

e) $x(F) = x(A) + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \end{pmatrix}$

nur eine von vielen möglichen Lösungen



4. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere den Sinussatz. **(2P)**
(b) Beweise den Sinussatz. **(5P)**
(c) In einem Dreieck gelte, mit der üblichen Bezeichnung der Seiten und Winkel,

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad \gamma = 60°.$$

Warum sind die anderen Winkel und Seitenlängen dadurch eindeutig bestimmt? **(1P)**
Berechne die dritte Seitenlänge c. **(2P)**

a), b) vgl. Satz 2.4.12

c) wegen des SWS-Satzes.

mittels Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$= 1 + 4 - 4 \underbrace{\cos 60°}_{1/2}$$

$$= 3$$

also $c = \sqrt{3}$

5. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter der Dimension eines Teilraums von $\mathbb{R}^n$? **(1P)**
(b) Wie lautet die Dimensionsformel für lineare Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$? **(1P)**
(c) Beweise die Dimensionsformel in (b). **(5P)**
(d) Bestimme den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

und gib $\dim \ker(A)$ an. **(3P)**

a) vgl. Def. 3.2.48

b) $\dim \operatorname{img} \varphi + \dim \ker \varphi = n$

c) vgl. Satz 3.2.57

d) $$\begin{pmatrix} 1&2&1&2&1&2 \\ 1&2&1&3&3&3 \\ 2&4&2&5&4&5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&2&1&2 \\ 0&0&0&1&2&1 \\ 0&0&0&1&2&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&2&1&2 \\ 0&0&0&1&2&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

also $\operatorname{rk}(A) = 2$

und $\dim \ker(A) = 6 - \operatorname{rk}(A) = 4$.

6. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter den Eigenwerten und Eigenvektoren einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? Gib eine präzise Definition. **(2P)**

(b) Wieviele verschiedene Eigenwerte kann eine 3×3 Matrix höchstens besitzen? **(1P)**

(c) Gib eine reelle 2×2 Matrix A an, die genau einen Eigenwert besitzt. **(1P)**

(d) Gib eine reelle 2×2 Matrix B an, die zwei verschiedene Eigenwerte besitzt. **(1P)**

(e) Bestimme alle Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und gib eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren dieser Matrix besteht. **(5P)**

a) Vgl. Def. 3.4.41

b) höchstens 3, siehe Satz 3.4.50

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

oder $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ...

d) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 4)$

Eigenwerte $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$

$E_{\lambda_0} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_{\lambda_1} = \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_{\lambda_2} = \ker \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Basis: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Betrachte die beiden komplexen Zahlen

$$z = 5 - 5\mathbf{i} \qquad \text{und} \qquad w = 1 + 2\mathbf{i}.$$

Gib jede der drei komplexen Zahlen

$z + w =$ $6-3i$

$z \cdot w =$ $15+5i$

$\frac{z}{w} =$ $\frac{5-5i}{1+2i} = \frac{(5-5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-5-15i}{5} = -1-3i$

in der Form $x + y\mathbf{i}$ an, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. **(3P)**

(b) Bestimme alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - 2z - 2 - 4\mathbf{i} = 0$$

und gib sie in der Form $z = x + y\mathbf{i}$ an. **(5P)**

(c) Gib eine quadratische Gleichung in einer komplexen Variable z an, die genau eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ besitzt. **(2P)**

b) $z = 1 \pm \sqrt{3+4i}$ (quadratische Lösungsformel)

$= 1 \pm (2+i)$ (vgl. (127))

also $z_1 = 3+i$

$z_2 = -1-i$

c) $z^2 = 0$

oder $(z-1)^2 = 0$

oder $z^2 - 2z + 1 = 0$

8. Aufgabe (10 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrcr}
x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\
-x_1 & -2x_2 & +x_3 & +7x_4 & = & 11 \\
-2x_1 & -4x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 4 \\
x_1 & +2x_2 & & -3x_4 & = & -5 \\
3x_1 & +6x_2 & +x_3 & -5x_4 & = & -9
\end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(6P)**

(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assozierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(d) Gib ein System von zwei linearen Gleichungen in drei Variablen x, y, z an, dessen Lösungsraum leer ist. **(2P)**

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -2 & 1 & 7 & 11 \\
-2 & -4 & -1 & 2 & 4 \\
1 & 2 & 0 & -3 & -5 \\
3 & 6 & 1 & -5 & -9
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 2 & 8 & 12 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\
0 & 0 & -1 & -4 & -6 \\
0 & 0 & -2 & -8 & -12
\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 0 & -3 & -5 \\
0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $L = \{ \xi + s b_1 + t b_2 \mid s, t \in \mathbb{R} \}$

b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -5 \\ x_3 + 4x_4 = 6 \end{cases}$

c) b_1, b_2

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$