Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2019

VO 250159 (Stefan Haller)

4. Termin am 28. Februar 2020

ab 11:30 Uhr in HS 4

2-stündig

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punkte									
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
Punkte:									

Notenschlüssel					
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere **(2P)** und beweise **(6P)** den Seiten-Seiten-Seiten Kongruenzsatz.

(b) Für welche $a > 0$ existiert ein Dreieck ABC mit Seitenlängen

$$|BC| = a, \qquad |CA| = 3 \qquad \text{und} \qquad |AB| = 4?$$

Beschreibe die Menge aller a, für die so ein Dreieck existiert. **(2P)**

2. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere das Parallelenaxiom. **(2P)**
(b) Formuliere den Stufenwinkelsatz. **(2P)**
(c) Zeige, dass die Winkelsumme in jedem Dreieck $2R = 180°$ beträgt. **(4P)**
(d) Welche Winkelsumme haben konvexe Vierecke? **(2P)**

3. Aufgabe (10 Punkte)

Seien A, B, C drei Punkte der Ebene mit kartesischen Koordinaten:

$$x(A) = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen. **(2P)**

(b) Bestimme die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{BC}{CA}$. **(2P)**

(c) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes D auf der Geraden durch A, B, C an, für den $\frac{AD}{DB} = -2$ gilt. **(2P)**

(d) Bestimme den Abstand des Punktes E mit Koordinaten

$$x(E) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

von der Geraden durch A, B, C. **(2P)**

(e) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes F der Ebene an, der von der Geraden durch A, B, C Abstand 10 hat. **(2P)**

4. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere den Sinussatz. **(2P)**
(b) Beweise den Sinussatz. **(5P)**
(c) In einem Dreieck gelte, mit der üblichen Bezeichnung der Seiten und Winkel,

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad \gamma = 60^\circ.$$

Warum sind die anderen Winkel und Seitenlängen dadurch eindeutig bestimmt? **(1P)**
Berechne die dritte Seitenlänge c. **(2P)**

5. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter der Dimension eines Teilraums von $\mathbb{R}^n$? **(1P)**
(b) Wie lautet die Dimensionsformel für lineare Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$? **(1P)**
(c) Beweise die Dimensionsformel in (b). **(5P)**
(d) Bestimme den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

und gib $\dim \ker(A)$ an. **(3P)**

6. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter den Eigenwerten und Eigenvektoren einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$? Gib eine präzise Definition. **(2P)**

(b) Wieviele verschiedene Eigenwerte kann eine 3×3 Matrix höchstens besitzen? **(1P)**

(c) Gib eine reelle 2×2 Matrix A an, die genau einen Eigenwert besitzt. **(1P)**

(d) Gib eine reelle 2×2 Matrix B an, die zwei verschiedene Eigenwerte besitzt. **(1P)**

(e) Bestimme alle Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und gib eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren dieser Matrix besteht. **(5P)**

7. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Betrachte die beiden komplexen Zahlen

$$z = 5 - 5\mathbf{i} \qquad \text{und} \qquad w = 1 + 2\mathbf{i}.$$

Gib jede der drei komplexen Zahlen

$$z + w =$$

$$z \cdot w =$$

$$\frac{z}{w} =$$

in der Form $x + y\mathbf{i}$ an, wobei $x, y \in \mathbb{R}$. **(3P)**

(b) Bestimme alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - 2z - 2 - 4\mathbf{i} = 0$$

und gib sie in der Form $z = x + y\mathbf{i}$ an. **(5P)**

(c) Gib eine quadratische Gleichung in einer komplexen Variable z an, die genau eine Lösung $z \in \mathbb{C}$ besitzt. **(2P)**

8. Aufgabe (10 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & -2x_2 & +x_3 & +7x_4 & = & 11 \\ -2x_1 & -4x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ x_1 & +2x_2 & & -3x_4 & = & -5 \\ 3x_1 & +6x_2 & +x_3 & -5x_4 & = & -9 \end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(6P)**

(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assozierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(d) Gib ein System von zwei linearen Gleichungen in drei Variablen x, y, z an, dessen Lösungsraum leer ist. **(2P)**