LÖSUNGEN

Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2019

VO 250159 (Stefan Haller)

am 28. Mai 2020

digital schriftlich von 8:30 bis 11:00 Uhr

`https://moodle.univie.ac.at/course/view.php?id=108015`

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punkte									
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
Punkte:									

Notenschlüssel					
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ und $B' \in \mathbb{R}^{p'\times q'}$ drei Matrizen. Unter welchen Voraussetzungen and m, n, p, q, p', q' sind die Ausdrücke $A(B + B')$ und $AB + AB'$ definiert? **(2P)** Zeige, dass in diesem Fall $A(B + B') = AB + AB'$ gilt. **(3P)**

(b) Bestimme eine Matrix X, für die

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(5P)**

a) $n = p = p'$ und $q = q'$

A_{ij} .... Eintragung in der i-ten Zeile und j-ten Spalte

$$(A(B+B'))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (B+B')_{kj}$$
$$= \sum_{k} A_{ik}(B_{kj} + B'_{kj})$$
$$= \sum_{k} A_{ik} B_{kj} + \sum_{k} A_{ik} B'_{kj}$$
$$= (AB)_{ij} + (AB')_{ij} = (AB+AB')_{ij}$$

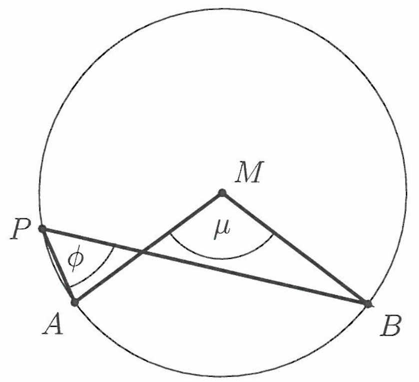
vgl. Lemma 3.1.24 (a)

b)
$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & -6 & -13 \end{pmatrix}$$

2. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Seien A, B und P drei verschiedene Punkte auf einem Kreis mit Mittelpunkt M, sodass B im Inneren des Winkel $\angle MPA$ liegt. Weiters bezeichnen ϕ den Peripheriewinkel und μ den Mittelpunktswinkel wie in der Skizze angedeutet.

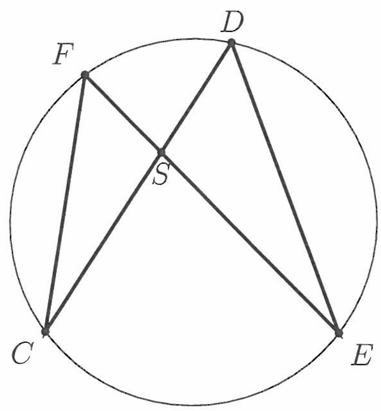


analog zum Beweis von Satz 1.5.29

Zeige, dass in dieser Situation der Peripheriewinkelsatz $\mu = 2\phi$ gilt. **(5P)**

(b) Seien C, D, E und F vier verschiedene Punkte auf einem Kreis, sodass sich die Sehnen CD und EF in einem Punkt S treffen. In dieser Situation besagt der Sehnensatz:

$$|CS| \cdot |DS| = |ES| \cdot |FS|.$$



Gib im folgenden Beweis des Sehnensatzes zu jeder der Behautungen eine kurze, stichwortartige Begründung an.

(1) $\angle CFE \equiv \angle EDC$. **(2P)** Peripheriewinkelsatz

(2) $\angle FSC \equiv \angle DSE$. **(1P)** Scheitelwinkel

(3) Die Dreiecke FSC und DSE sind ähnlich. **(1P)** w:w:w - Satz

(4) $|CS| \cdot |DS| = |ES| \cdot |FS|$ **(1P)**

aufgrund der Ähnlichkeit

$$\frac{|CS|}{|ES|} = \frac{|FS|}{|DS|}$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 7 & 9 & 4 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(3P)**

(b) Bilden die Spalten dieser Matrix eine Basis von $\mathbb{R}^3$? **(1P)**

(c) Bestimme die Dimension des Teilraums, der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

in $\mathbb{R}^4$ aufgespannt wird. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(3P)**

(d) Sind die Vektoren in (1) linear unabhängig? Begründe! **(1P)**

(e) Bilden die Vektoren in (1) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$? Begründe! **(1P)**

(f) Lässt sich jeder Vektor in $\mathbb{R}^4$ als Linearkombination der Vektoren in (1) ausdrücken? Begründe! **(1P)**

a) $\det\begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 7 & 9 & 4 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 7 \cdot 1 \cdot 2 = 14$

Zeilenumformungen (Bem. 3.4.18)

b) Ja, da Determinante $\neq 0$ (vgl. ~~Satz 3.4.19~~ Bem 3.4.21)

c) Mit Zeilenumformungen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

hat Rang 4, der Teilraum hat daher Dimension 4

d) Nein, fünf Vektoren in $\mathbb{R}^4$ sind stets linear abhängig.
vgl. Korollar 3.2.53(a)

e) Ja, denn sie spannen einen 4-dimensionalen Teilraum auf, vgl. Korollar 3.2.54

f) Ja, wegen (e).

4. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimme alle Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und gib eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren dieser Matrix besteht. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(6P)**

(b) Gib eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ an, die die Eigenwerte 2 und 4 hat. **(4P)**

a) Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 2, \; \lambda_3 = 3$

$\ker \begin{pmatrix} 0 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ker \begin{pmatrix} -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\ker \begin{pmatrix} -2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Basis aus Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $0 = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & a-\lambda \end{pmatrix} = (a-\lambda)^2 - b^2$

$\Rightarrow (a-\lambda)^2 = b^2 \Rightarrow a - \lambda = \pm b \Rightarrow$ Eigenwerte $\lambda = a \pm b$

$\left.\begin{matrix} 4 = a+b \\ 2 = a-b \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 3, \; b = 1$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ hat

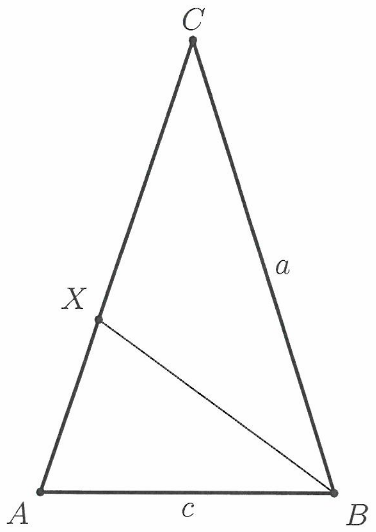
Eigenwerte 2 und 4.

5. Aufgabe (10 Punkte)

Es soll die Identität

$$\cos(72^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

bewiesen werden. Betrachte dazu ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basiswinkel $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = 72^\circ$ und bezeichne die Seitenlängen mit $c := |AB|$ und $a := |BC| = |CA|$. Weiters sei X der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale bei B mit der Dreiecksseite CA.



Gib im folgenden Beweis zu jeder der einzelnen Behauptungen eine kurze, stichwortartige Begründung an. **(jeweils 1P)**

(a) $\sphericalangle BCA = 36^\circ$ — Winkelsumme im Dreieck ABC

(b) $\angle XCB \equiv \angle XBC \equiv \angle XBA$ — beide Winkel bei B haben $72^\circ/2 = 36^\circ$

(c) Die Dreiecke ABC und XAB sind ähnlich. — w:w:w-Satz

(d) $|XC| = |XB| = c$ — Dreiecke XBC gleichschenkelig nach b) (und BXA)

(e) $|XA| = a - c$ — $|XA| = |CA| - |XC| = a - c$ nach d)

(f) $\frac{c}{a} = \frac{a-c}{c}$

(g) $\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0$

(h) $\frac{c}{a} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

(i) $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

(j) $\cos(72^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

f) nach c) und e)

g) folgt aus f)

h) quadratische Lösungsformel

i) $\frac{c}{a} > 0$

j) $\cos(72^\circ) = \frac{c/2}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ nach i)

6. Aufgabe (10 Punkte)

Für jeden Winkel α betrachten wir die Matrizen

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige $S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta}$, für je zwei Winkel α und β. **(4P)**

(b) Zeige $S_\alpha^2 = I$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet. **(2P)**

(c) Die lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto S_\alpha \cdot v$, beschreibt eine Spiegelung an einer Geraden durch den Koordinatenursprung. Zeige, dass der Punkt $\begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$ unter dieser Spiegelung fix bleibt **(2P)** und gib eine Gleichung der Spiegelungsachse an. **(2P)**

a) $S_\alpha S_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ \sin\beta & -\cos\beta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{matrix}\cos(-\beta) = \cos\beta \\ \sin(-\beta) = -\sin\beta\end{matrix}}$ $= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) & -\cos\alpha\sin(-\beta) - \sin\alpha\cos(-\beta) \\ \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) & -\sin\alpha\sin(-\beta) + \cos\alpha\cos(-\beta) \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Additions theoreme}}$ $= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix} = R_{\alpha-\beta}$

b) Aus a) folgt $S_\alpha^2 = S_\alpha S_\alpha = R_{\alpha-\alpha} = R_0 = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix}$

$= I$

c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha/2 \\ \sin\alpha/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$

$\boxed{\begin{matrix}\cos(\frac{\alpha}{2}) = \cos(-\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(\frac{\alpha}{2}) = -\sin(-\frac{\alpha}{2})\end{matrix}}$ $= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos(-\frac{\alpha}{2}) - \sin\alpha\sin(-\frac{\alpha}{2}) \\ \sin\alpha\cos(-\frac{\alpha}{2}) + \cos\alpha\sin(-\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{Additions theoreme}}$ $= \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\frac{\alpha}{2}) \\ \sin(\alpha-\frac{\alpha}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha/2 \\ \sin\alpha/2 \end{pmatrix}$

Spiegelungsachse: $\sin(\frac{\alpha}{2})\cdot x - \cos(\frac{\alpha}{2})\cdot y = 0$

7. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Gib die Lösung der Gleichung

$$(2+3\mathbf{i})w+4+5\mathbf{i}=17+18\mathbf{i}.$$

in der Form $w=x+\mathbf{i}y$ mit $x,y\in\mathbb{R}$ an. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(3P)**

(b) Faktorisiere das Polynom

$$p(z)=z^3-2z^2+(1-2\mathbf{i})z$$

in Linearfaktoren. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(5P)**

(c) Für welche ganzen Zahlen n gilt $\mathbf{i}^n=1$? **(2P)**

a) $w = \dfrac{17+18i-4-5i}{2+3i} = \dfrac{13+13i}{2+3i} = \dfrac{13(1+i)(2-3i)}{4+9} = 5-i$

b) $p(z)=0$ $\quad \boxed{z_1=0}$

$p(z)=(z^2-2z+1-2i)z$

$z^2-2z+1-2i=0$

$z = 1\pm\sqrt{1-1+2i} = 1\pm\sqrt{2i} = 1\pm(1+i)$

$\boxed{z_2=2+i}$ $\quad \boxed{z_3=-i}$

$p(z)=z(z-2-i)(z+i)$

c) Für alle $n\in\mathbb{Z}$, die durch 4 teilbar sind.

8. Aufgabe (10 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^6$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & +2x_5 & +2x_6 & = & -1 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & & +12x_5 & +14x_6 & = & 16 \\ 3x_1 & +6x_2 & +9x_3 & -2x_4 & +10x_5 & +11x_6 & = & 6 \end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(6P)**

(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assozierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(d) Gib ein System von vier linearen Gleichungen in drei Variablen x, y, z an, das einen 1-dimensionalen Lösungsraum hat. **(2P)**

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 12 & 14 & 16 \\ 3 & 6 & 9 & -2 & 10 & 11 & 6 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 10 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b_4 = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $L = \{ \xi + t_1 b_1 + t_2 b_2 + t_3 b_3 + t_4 b_4 \mid t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R} \}$

b) $\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_5 + 7x_6 = 8 \\ x_4 + 4x_5 + 5x_6 = 9 \end{array}\right\}$

c) b_1, b_2, b_3, b_4

d)
$$\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{array}$$