Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2019

VO 250159 (Stefan Haller)

am 28. Mai 2020

digital schriftlich von 8:30 bis 11:00 Uhr

`https://moodle.univie.ac.at/course/view.php?id=108015`

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punkte									
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
Punkte:									

Notenschlüssel					
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ und $B' \in \mathbb{R}^{p' \times q'}$ drei Matrizen. Unter welchen Voraussetzungen and m, n, p, q, p', q' sind die Ausdrücke $A(B + B')$ und $AB + AB'$ definiert? **(2P)** Zeige, dass in diesem Fall $A(B + B') = AB + AB'$ gilt. **(3P)**

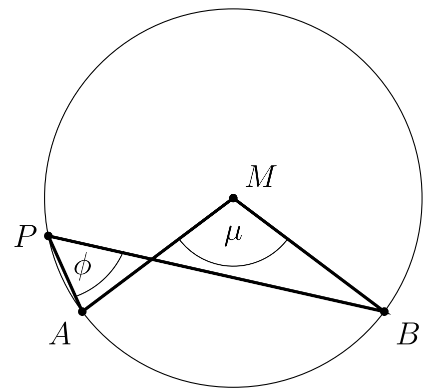
(b) Bestimme eine Matrix X, für die

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(5P)**

2. Aufgabe (10 Punkte)

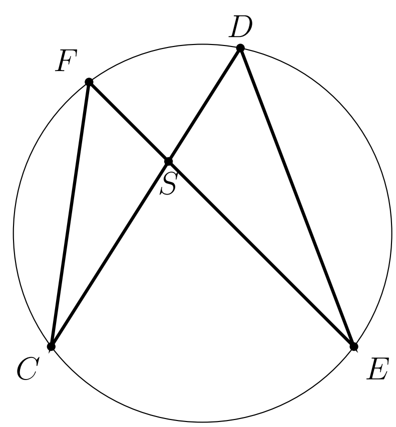
(a) Seien A, B und P drei verschiedene Punkte auf einem Kreis mit Mittelpunkt M, sodass B im Inneren des Winkel $\angle MPA$ liegt. Weiters bezeichnen ϕ den Peripheriewinkel und μ den Mittelpunktswinkel wie in der Skizze angedeutet.



Zeige, dass in dieser Situation der Peripheriewinkelsatz $\mu = 2\phi$ gilt. **(5P)**

(b) Seien C, D, E und F vier verschiedene Punkte auf einem Kreis, sodass sich die Sehnen CD und EF in einem Punkt S treffen. In dieser Situation besagt der Sehnensatz:

$$|CS| \cdot |DS| = |ES| \cdot |FS|.$$



Gib im folgenden Beweis des Sehnensatzes zu jeder der Behautungen eine kurze, stichwortartige Begründung an.

(1) $\angle CFE \equiv \angle EDC$. **(2P)**
(2) $\angle FSC \equiv \angle DSE$. **(1P)**
(3) Die Dreiecke FSC und DSE sind ähnlich. **(1P)**
(4) $|CS| \cdot |DS| = |ES| \cdot |FS|$ **(1P)**

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 7 & 9 & 4 \\ 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(3P)**

(b) Bilden die Spalten dieser Matrix eine Basis von $\mathbb{R}^3$? **(1P)**

(c) Bestimme die Dimension des Teilraums, der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

in $\mathbb{R}^4$ aufgespannt wird. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(3P)**

(d) Sind die Vektoren in (1) linear unabhängig? Begründe! **(1P)**

(e) Bilden die Vektoren in (1) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$? Begründe! **(1P)**

(f) Lässt sich jeder Vektor in $\mathbb{R}^4$ als Linearkombination der Vektoren in (1) ausdrücken? Begründe! **(1P)**

4. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Bestimme alle Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

und gib eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren dieser Matrix besteht. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(6P)**

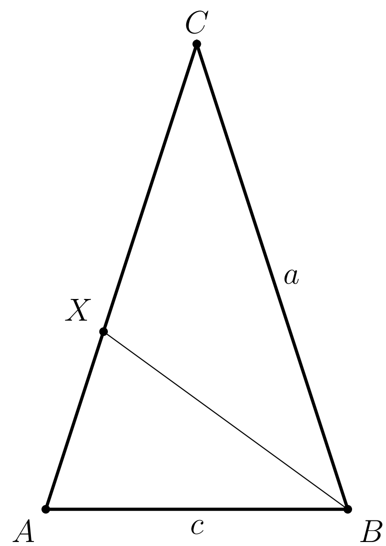
(b) Gib eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ an, die die Eigenwerte 2 und 4 hat. **(4P)**

5. Aufgabe (10 Punkte)

Es soll die Identität

$$\cos(72^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

bewiesen werden. Betrachte dazu ein gleichschenkeliges Dreieck mit Basiswinkel $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = 72^\circ$ und bezeichne die Seitenlängen mit $c := |AB|$ und $a := |BC| = |CA|$. Weiters sei X der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale bei B mit der Dreiecksseite CA.



Gib im folgenden Beweis zu jeder der einzelnen Behauptungen eine kurze, stichwortartige Begründung an. **(jeweils 1P)**

(a) $\sphericalangle BCA = 36^\circ$
(b) $\angle XCB \equiv \angle XBC \equiv \angle XBA$
(c) Die Dreiecke ABC und XAB sind ähnlich.
(d) $|XC| = |XB| = c$
(e) $|XA| = a - c$
(f) $\frac{c}{a} = \frac{a-c}{c}$
(g) $\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{a} - 1 = 0$
(h) $\frac{c}{a} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
(i) $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
(j) $\cos(72^\circ) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

6. Aufgabe (10 Punkte)

Für jeden Winkel α betrachten wir die Matrizen

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige $S_\alpha S_\beta = R_{\alpha-\beta}$, für je zwei Winkel α und β. **(4P)**

(b) Zeige $S_\alpha^2 = I$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet. **(2P)**

(c) Die lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto S_\alpha \cdot v$, beschreibt eine Spiegelung an einer Geraden durch den Koordinatenursprung. Zeige, dass der Punkt $\begin{pmatrix} \cos(\alpha/2) \\ \sin(\alpha/2) \end{pmatrix}$ unter dieser Spiegelung fix bleibt **(2P)** und gib eine Gleichung der Spiegelungsachse an. **(2P)**

7. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Gib die Lösung der Gleichung

$$(2 + 3\mathbf{i})w + 4 + 5\mathbf{i} = 17 + 18\mathbf{i}.$$

in der Form $w = x + \mathbf{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(3P)**

(b) Faktorisiere das Polynom

$$p(z) = z^3 - 2z^2 + (1 - 2\mathbf{i})z$$

in Linearfaktoren. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(5P)**

(c) Für welche ganzen Zahlen n gilt $\mathbf{i}^n = 1$? **(2P)**

8. Aufgabe (10 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^6$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & +2x_5 & +2x_6 & = & -1 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & & +12x_5 & +14x_6 & = & 16 \\ 3x_1 & +6x_2 & +9x_3 & -2x_4 & +10x_5 & +11x_6 & = & 6 \end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein. **(6P)**

(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assozierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(d) Gib ein System von vier linearen Gleichungen in drei Variablen x, y, z an, das einen 1-dimensionalen Lösungsraum hat. **(2P)**