Lösungen

Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2019

VO 250159 (Stefan Haller)

3. Termin am 30. November 2019

ab 9:45 Uhr in HS 1

2-stündig

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☒ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punkte									
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
Punkte:									

Notenschlüssel					
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere **(2P)** und beweise **(6P)** den Seiten-Seiten-Winkel Kongruenzsatz.

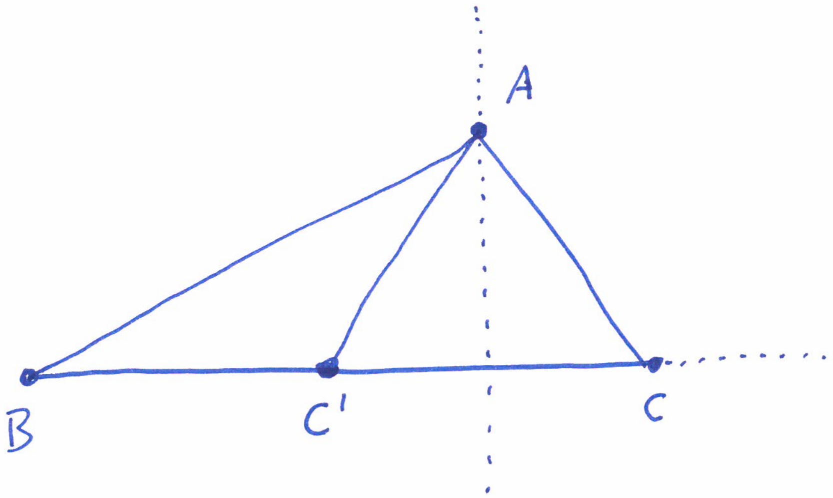
(b) Gib die kartesischen Koordinaten von vier Punkten A, B, C, C' der Ebene an, für die gilt

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABC', \qquad |CA| = |C'A|, \qquad |BC| \neq |BC'|.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Seiten-Seiten-Winkel Kongruenzsatz? **(2P)**

a) vgl. Satz 1.4.28

b)



$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$C' = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Kein Widerspruch zu SSW-Satz, da die Voraussetzung $|AC| \geq |AB|$ nicht erfüllt ist.

2. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Zeige, dass gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms kongruent sind. **(3P)**
(b) Zeige, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. **(5P)**
(c) Für welche Dreiecke liegt der Höhenschnittpunkt im Inneren des Dreiecks? **(2P)**

a) vgl. Satz 1.5.10

b) vgl. Satz 1.5.53

c) spitzwinkelige Dreiecke

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere **(1P)** und beweise **(3P)** den Satz von Thales.

(b) Sei Γ ein Kreis und A ein Punkt im Äußeren von Γ. Zeige, dass genau zwei Tangenten durch A an Γ existieren. **(5P)**.

(c) Durch welche Punkte der Ebene läuft genau eine Tangente an Γ? **(1P)**

a) vgl. Satz 1.5.28

b) vgl. Satz 1.5.16

c) durch die Punkte auf Γ

4. Aufgabe (10 Punkte)

Seien A, B, C drei Punkte der Ebene mit kartesischen Koordinaten:

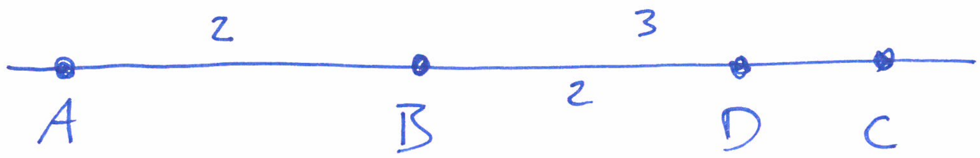
$$x(A) = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen. **(2P)**
(b) Bestimme die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{BC}{CA}$. **(2P)**
(c) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes D auf der Geraden durch A, B, C an, für den $\frac{AD}{DB} = -2$ gilt. **(2P)**
(d) Formuliere den Satz von Ceva. **(2P)**
(e) Erkläre, wie aus dem Satz von Ceva folgt, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. **(2P)**

a) $x(B) - x(A) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$x(C) - x(B) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

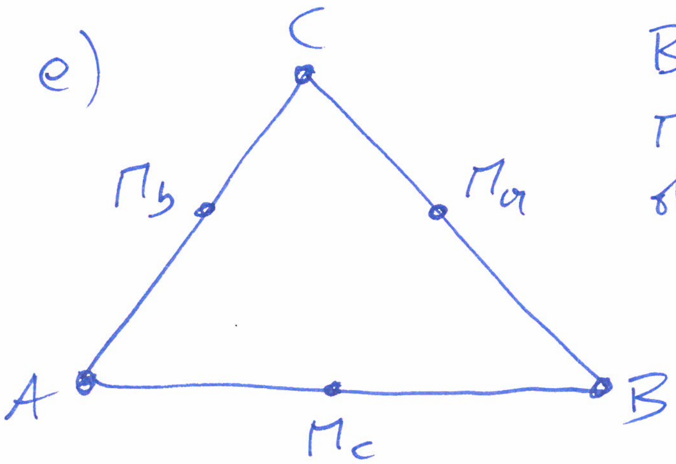
Da diese beiden Vektoren parallel sind, liegen A, B, C auf einer Geraden.



b) $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ $\qquad \frac{BC}{CA} = -\frac{3}{5}$ $\qquad$ c) $x(D) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

d) vgl. Satz 2.1.14

e)

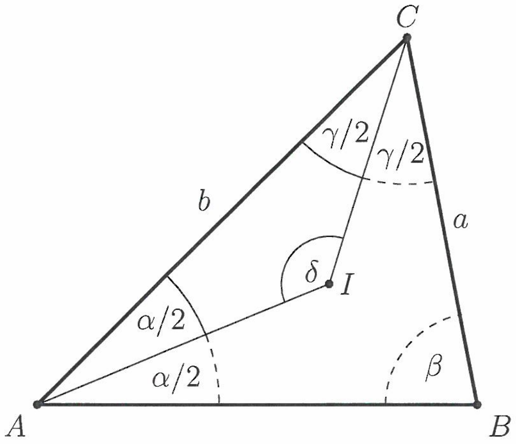


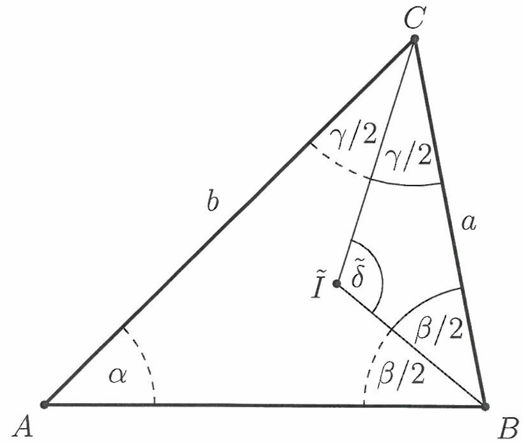
Bezeichnen M_a, M_b, M_c die Mittelpunkte der Dreiecksseiten, dann gilt $\frac{AM_b}{M_bC} = \frac{BM_c}{M_cA} = \frac{CM_a}{M_aB} = 1$

also $\frac{AM_b}{M_bC} \cdot \frac{BM_c}{M_cA} \cdot \frac{CM_a}{M_aB} = 1$

5. Aufgabe (10 Punkte)

Die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks schneiden sich stets in einem Punkt. Im folgenden trigonometrischen Beweis dieser Tatsache werden Punkte, Winkel und Seitenlängen eines Dreiecks ABC wie in der Skizze angedeutet bezeichnet.





Gib in jeder der folgenden Zeilen eine kurze, stichwortartige Begründung für die Gleichheit an. **(jeweils 1P)**

(1)	$180° = \delta + \alpha/2 + \gamma/2$	Winkelsumme in AIC
(2)	$90° = \alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2$	Winkelsumme in ABC
(3)	$\delta = 90° + \beta/2$	(1) − (2)
(4)	$\sin(\delta) = \cos(\beta/2)$	(3) und $\sin(90°+x) = \cos(x)$
(5)	$\lvert CI\rvert = \dfrac{b\sin(\alpha/2)}{\sin(\delta)}$	Sinussatz in AIC
(6)	$= \dfrac{b\sin(\alpha/2)}{\cos(\beta/2)}$	(4)
(7)	$= \dfrac{b\sin(\alpha)}{2\cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)}$	Doppelwinkelformel $\sin(\alpha) = 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2)$
(8)	$\lvert C\tilde{I}\rvert = \dfrac{a\sin(\beta)}{2\cos(\beta/2)\cos(\alpha/2)}$	analog zu (7)
(9)	$\lvert CI\rvert = \lvert C\tilde{I}\rvert$	(7), (8) und Sinussatz in ABC
(10)	$I = \tilde{I}$	I und Ĩ beide auf Winkelsymmetrale bei C und gleichweit von C entfernt wegen (9)

6. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere **(1P)** und beweise **(5P)** die Cauchy–Schwarz Ungleichung für Vektoren in $\mathbb{R}^2$.

(b) Sei $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Erkläre, warum kein Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ existiert, für den $\|u\| = 1$ und $\langle v, u \rangle = 6$ gilt. **(2P)**

(c) Seien A, B, P drei Punkte der Ebene mit kartesischen Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix}, \qquad x(B) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad x(P) = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Berechne den Abstand von P zur Geraden durch A und B. **(2P)**

a) vgl. Lemma 2.3.38

b) nach Cauchy-Schwarz gilt

$|\langle v, u \rangle| \leq \|v\| \cdot \|u\| = 5 \cdot 1 = 5$, denn

$\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

c) $x(B) - x(A) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

$n = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$, $\quad \|n\| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$

$w = x(P) - x(A) = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$d = \frac{|\langle n, w \rangle|}{\|n\|} = \frac{\left|\left\langle \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle\right|}{13} = \frac{2}{13}$$

vgl. 2.3.54

7. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter einer orthogonalen 2×2 Matrix? **(1P)**

(b) Gib reelle Zahlen a, b, c an, für die die Matrix

$$\frac{1}{c}\begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

orthogonal ist. **(2P)**

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Matrix und $\|Av\| = \|v\|$, für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass dann auch $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt. **(4P)**

(d) Erkläre, warum die Matrizengleichungen

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

für alle Winkel α, β gelten. **(3P)**

a) vgl. Def. 2.5.10

b) $a=-4,\ b=3,\ c=5$ $\qquad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in O_2$

c) vgl. Lemma 2.5.9 a) $\Rightarrow$ b)

d)

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

wegen Additionsthm für Sinus und Kosinus

mit $\beta = -\alpha$ folgt und $\cos(0)=1, \sin(0)=0$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

also sind die Matrizen invers zu einander

8. Aufgabe (10 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & -x_5 & = & -5 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & & = & -1 \\ 2x_1 & +6x_2 & +4x_3 & -2x_4 & & = & -2 \\ -x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & -x_5 & = & 0 \end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(6P)**

(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assoziierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(d) Gib eine reelle Zahl a an, für die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 3y + 6z & = & 9 \\ 2y + az & = & 6 \end{array}$$

unendlich viele Lösungen besitzt. **(2P)**

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) $L = \{ \xi + s b_1 + t b_2 \mid s, t \in \mathbb{R} \}$

b) $\left\{ \begin{array}{rl} x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 2 \\ x_4 & = 3 \\ x_5 & = 4 \end{array} \right.$

c) b_1, b_2

d) $a = 4$