

Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2019

VO 250159 (Stefan Haller)

3. Termin am 30. November 2019

ab 9:45 Uhr in HS 1

2-stündig

Name:

Matrikelnummer:

1. Antritt 2. Antritt 3. Antritt 4. Antritt

erreichte Punkte									
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
Punkte:									

Notenschlüssel					
Note:	5	4	3	2	1
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

1. Aufgabe (10 Punkte)

- (a) Formuliere (**2P**) und beweise (**6P**) den Seiten-Seiten-Winkel Kongruenzsatz.
(b) Gib die kartesischen Koordinaten von vier Punkten A, B, C, C' der Ebene an, für die gilt

$$\angle ABC = \angle ABC', \quad |CA| = |C'A|, \quad |BC| \neq |BC'|.$$

Warum widerspricht dies nicht dem Seiten-Seiten-Winkel Kongruenzsatz? (**2P**)

2. Aufgabe (10 Punkte)

- (a) Zeige, dass gegenüberliegende Seiten eines Parallelogramms kongruent sind. **(3P)**
- (b) Zeige, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. **(5P)**
- (c) Für welche Dreiecke liegt der Höhenschnittpunkt im Inneren des Dreiecks? **(2P)**

3. Aufgabe (10 Punkte)

- (a) Formuliere (**1P**) und beweise (**3P**) den Satz von Thales.
- (b) Sei Γ ein Kreis und A ein Punkt im Äußeren von Γ . Zeige, dass genau zwei Tangenten durch A an Γ existieren. (**5P**).
- (c) Durch welche Punkte der Ebene läuft genau eine Tangente an Γ ? (**1P**)

4. Aufgabe (10 Punkte)

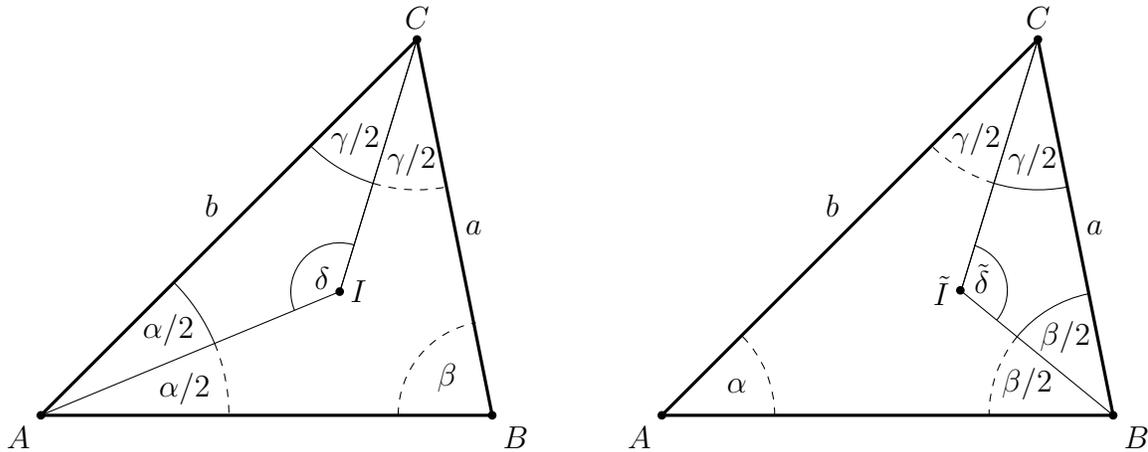
Seien A, B, C drei Punkte der Ebene mit kartesischen Koordinaten:

$$x(A) = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x(C) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeige, dass die Punkte A, B, C auf einer Geraden liegen. **(2P)**
- (b) Bestimme die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{BC}{CA}$. **(2P)**
- (c) Gib die kartesischen Koordinaten eines Punktes D auf der Geraden durch A, B, C an, für den $\frac{AD}{DB} = -2$ gilt. **(2P)**
- (d) Formuliere den Satz von Ceva. **(2P)**
- (e) Erkläre, wie aus dem Satz von Ceva folgt, dass sich die drei Schwerlinien eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. **(2P)**

5. Aufgabe (10 Punkte)

Die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks schneiden sich stets in einem Punkt. Im folgenden trigonometrischen Beweis dieser Tatsache werden Punkte, Winkel und Seitenlängen eines Dreiecks ABC wie in der Skizze angedeutet bezeichnet.



Gib in jeder der folgenden Zeilen eine kurze, stichwortartige Begründung für die Gleichheit an. **(jeweils 1P)**

$$(1) \quad 180^\circ = \delta + \alpha/2 + \gamma/2$$

$$(2) \quad 90^\circ = \alpha/2 + \beta/2 + \gamma/2$$

$$(3) \quad \delta = 90^\circ + \beta/2$$

$$(4) \quad \sin(\delta) = \cos(\beta/2)$$

$$(5) \quad |CI| = \frac{b \sin(\alpha/2)}{\sin(\delta)}$$

$$(6) \quad = \frac{b \sin(\alpha/2)}{\cos(\beta/2)}$$

$$(7) \quad = \frac{b \sin(\alpha)}{2 \cos(\alpha/2) \cos(\beta/2)}$$

$$(8) \quad |C\tilde{I}| = \frac{a \sin(\beta)}{2 \cos(\beta/2) \cos(\alpha/2)}$$

$$(9) \quad |CI| = |C\tilde{I}|$$

$$(10) \quad I = \tilde{I}$$

6. Aufgabe (10 Punkte)

- (a) Formuliere **(1P)** und beweise **(5P)** die Cauchy–Schwarz Ungleichung für Vektoren in \mathbb{R}^2 .
- (b) Sei $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Erkläre, warum kein Vektor $u \in \mathbb{R}^2$ existiert, für den $\|u\| = 1$ und $\langle v, u \rangle = 6$ gilt. **(2P)**
- (c) Seien A, B, P drei Punkte der Ebene mit kartesischen Koordinaten

$$x(A) = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \end{pmatrix}, \quad x(B) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad x(P) = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Berechne den Abstand von P zur Geraden durch A und B . **(2P)**

7. Aufgabe (10 Punkte)

- (a) Was verstehen wir unter einer orthogonalen 2×2 Matrix? **(1P)**
(b) Gib reelle Zahlen a, b, c an, für die die Matrix

$$\frac{1}{c} \begin{pmatrix} 3 & a \\ 4 & b \end{pmatrix}$$

orthogonal ist. **(2P)**

- (c) Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine Matrix und $\|Av\| = \|v\|$, für alle $v \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass dann auch $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt. **(4P)**
(d) Erkläre, warum die Matrizengleichungen

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix}$$

für alle Winkel α, β gelten. **(3P)**

8. Aufgabe (10 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcccccc} x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & -x_5 & = & -5 \\ x_1 & +3x_2 & +2x_3 & -x_4 & & = & -1 \\ 2x_1 & +6x_2 & +4x_3 & -2x_4 & & = & -2 \\ -x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +2x_4 & -x_5 & = & 0 \end{array}$$

- (a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(6P)**
- (b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**
- (c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assoziierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**
- (d) Gib eine reelle Zahl a an, für die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 3y + 6z & = & 9 \\ 2y + az & = & 6 \end{array}$$

unendlich viele Lösungen besitzt. **(2P)**

