Lösungen

Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2019

VO 250159 (Stefan Haller)

2. Termin am 30. September 2019

ab 11:30 Uhr in HS 1

2-stündig

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punkte									
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
Punkte:									

Notenschlüssel					
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere **(2P)** und beweise **(6P)** den Seiten-Seiten-Seiten Kongruenzsatz.

(b) Für welche $c > 0$ existiert ein Dreieck ABC mit Seitenlängen

$$|BC| = 3, \qquad |CA| = 5 \qquad \text{und} \qquad |AB| = c?$$

Beschreibe die Menge aller c mit dieser Eigenschaft. **(2P)**

a) Satz 1.4.18

b) Es müssen die Dreiecksungleichungen gelten:

$$\begin{cases} 3 < 5 + c & \text{(immer erfüllt)} \\ 5 < 3 + c & \text{(d.h. } 2 < c\text{)} \\ c < 3 + 5 & \text{(d.h. } c < 8\text{)} \end{cases}$$

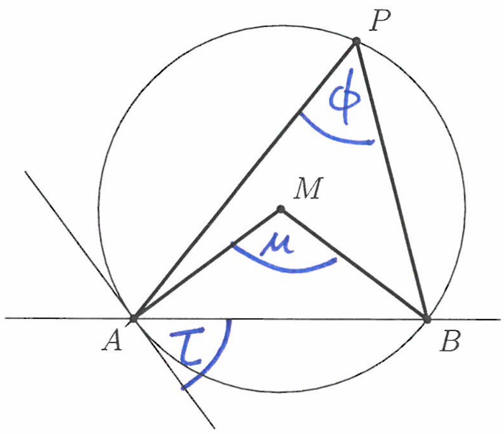
vgl. Satz 1.4.26 und Satz 1.6.12

Dreieck existiert genau dann, wenn c im Intervall $(2, 8)$ liegt.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Der Peripherie- und Tangentenwinkelsatz handelt von drei verschiedenen Punkten A, B und P auf einem Kreis mit Mittelpunkt M.

(a) Zeichne in der nachfolgenden Skizze den Peripheriewinkel ϕ, den Mittelpunktswinkel μ und den Tangentenwinkel τ ein. **(2P)**



(b) Welche Aussage macht der Peripherie- und Tangentenwinkelsatz über den Zusammenhang der drei Winkel ϕ, μ und τ? **(2P)**

(c) Beweise den Peripherie- und Tangentenwinkelsatz im oben skizzierten Fall, d.h. im Fall wo M im Inneren des Dreiecks ABP liegt. **(6P)**

Vgl. Satz 1.5.29

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere **(1P)** und beweise **(3P)** die Dreiecksungleichung für Dreiecke in der Ebene.
(b) Formuliere **(1P)** und beweise **(3P)** die Dreiecksungleichung für Vektoren in $\mathbb{R}^2$.
(c) Erkläre, wie die beiden Dreiecksungleichungen in (a) und (b) zusammenhängen. **(2P)**

a) Vgl. 1.4.26

b) Vgl. 2.3.39(c)

c) Seien $x(A), x(B), x(C)$ kartesische Koordinaten der Eckpunkte eines Dreieckes ABC.

Bezeichne: $a := |BC|$, $b := |CA|$, $c := |AB|$

$u := x(A) - x(C)$, $v := x(B) - x(A)$

Dann gilt: $\|u\| = b$, $\|v\| = c$, $\|u+v\| = a$

Somit

$$a < b + c \iff \|u+v\| < \|u\| + \|v\|$$

Δ-Ungleichung für Dreiecke

Δ-Ungleichung für Vektoren in $\mathbb{R}^2$

4. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter der Dimension eines Teilraums von $\mathbb{R}^n$? **(1P)**
(b) Zeige, dass jeder Teilraum von $\mathbb{R}^n$ eine Basis besitzt. **(5P)**
(c) Berechne die Determinante der Matrix **(2P)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(d) Bilden die Spalten von A eine Basis von $\mathbb{R}^3$? **(1P)**
(e) Gib den Rang von A an. **(1P)**

a) vgl. Def. 3.2.48

b) vgl. Kor. 3.2.47

c) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

d) Ja, da $\det(A) \neq 0$ vgl. Bem 3.4.21

e) $\mathrm{rk}(A) = 3$, da $\det(A) \neq 0$ vgl. 3.2.66

5. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere **(1P)** und beweise **(5P)** das Additionstheorem für den Kosinus.

(b) Erkläre, wie aus dem Additionstheorem die Doppelwinkelformel

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

folgt. **(2P)**

(c) Gib Zahlen p, q, r an, sodass die Formel

$$\cos(4\alpha) = p\cos^4(\alpha) + q\cos^2(\alpha) + r$$

für alle Winkel α gilt. **(2P)**

a) Vgl. Satz 2.4.20

b)
$$\begin{aligned}\cos(2\alpha) &= \cos(\alpha+\alpha)\\ &= \cos(\alpha)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\sin(\alpha)\\ &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)\\ &= \cos^2(\alpha) - (1-\cos^2(\alpha))\\ &= 2\cos^2(\alpha) - 1\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\cos(4\alpha) &= \cos(2\cdot 2\alpha)\\ &= 2\cos^2(2\alpha) - 1\\ &\overset{b}{=} 2(2\cos^2(\alpha)-1)^2 - 1\\ &= 8\cos^4(\alpha) - 8\cos^2(\alpha) + 1\end{aligned}$$

$p = 8$ $\quad q = -8$ $\quad r = 1$

6. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere den Fundamentalsatz der Algebra. **(2P)**

(b) Gib eine komplexe Zahl w an, die folgender Gleichung genügt: **(3P)**

$$(1+2\mathbf{i})w + 3 + 4\mathbf{i} = 8 + 9\mathbf{i}.$$

(c) Gib die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - (2+6\mathbf{i})z - 11 + 2\mathbf{i} = 0$$

in der Form $z = x + y\mathbf{i}$ an. **(5P)**

a) vgl. Satz A.2.4.

b) $w = \dfrac{8+9i-3-4i}{1+2i} = \dfrac{5+5i}{1+2i}$

$= \dfrac{(5+5i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{15-5i}{5} = 3-i$

c) quadratische Lösungsformel:

$z = 1+3i \pm \sqrt{(1+3i)^2 - (-11+2i)}$

$= 1+3i \pm \sqrt{3+4i}$

$= 1+3i \pm (2+i)$

$\boxed{z_1 = 3+4i}$ $\boxed{z_2 = -1+2i}$

vgl A.2.2
A.2.3

$\sqrt{3+4i} = \sqrt{\dfrac{\sqrt{3^2+4^2}+3}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{3^2+4^2}-3}{2}}$

$\sqrt{3+4i} = \pm(2+i)$

vgl. ~~[illegible]~~ (127) in A2

7. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung.

(a) Was verstehen wir unter einem Eigenwert von φ? **(1P)**
(b) Was verstehen wir unter einem Eigenvektor von φ? **(1P)**
(c) Was verstehen wir unter einem Eigenraum von φ? **(1P)**
(d) Wieviele verschiedene Eigenwerte kann eine 3×3 Matrix höchstens besitzen? **(1P)**
(e) Gib eine reelle 2×2 Matrix an, die genau einen Eigenwert besitzt. **(1P)**
(f) Bestimme alle Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

und gib eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren dieser Matrix besteht. **(5P)**

a), b), c) vgl. Def 3.4.41

d) höchstens 3 vgl. Satz 3.4.50

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 17 & 0 \\ 0 & 17 \end{pmatrix}$

oder $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ ...

f) char. Polynom (vgl. Bsp 3.4.46)

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 3 & -\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)\lambda^2 - (3-\lambda)9$$
$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 9)$$
$$= (3-\lambda)^2(3+\lambda)$$

Eigenwerte $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$

$$E_{\lambda_1} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$E_{\lambda_2} = \ker \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Basis aus Eigenvektoren: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

8. Aufgabe (10 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^4$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & +8x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ -2x_1 & -4x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -6 \end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(6P)**
(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**
(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assoziierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**
(d) Gib eine reelle Zahl a an, für die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 2y + 4z & = & 6 \\ 3y + az & = & 5 \end{array}$$

keine Lösung besitzt. **(2P)**

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & 8 & -2 & 2 & 12 \\ 3 & 6 & -2 & -1 & 5 \\ -2 & -4 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -8 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \xi = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $L = \{ \xi + s b_1 + t b_2 \mid s, t \in \mathbb{R} \}$

b) $\left.\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7 \\ x_3 + 5x_4 = 8 \end{array}\right\}$

c) b_1, b_2

d) $\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & a \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{a = 6}$

(parallele verschiedene Geraden)