Prüfung zur Vorlesung

Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

Sommersemester 2019

VO 250159 (Stefan Haller)

2. Termin am 30. September 2019

ab 11:30 Uhr in HS 1

2-stündig

Name: Matrikelnummer:

☐ 1. Antritt ☐ 2. Antritt ☐ 3. Antritt ☐ 4. Antritt

erreichte Punkte									
Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	gesamt
Punkte:									

Notenschlüssel					
Note:	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**
Punkte:	0–39	40–49	50–59	60–69	70–80

1. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere **(2P)** und beweise **(6P)** den Seiten-Seiten-Seiten Kongruenzsatz.

(b) Für welche $c > 0$ existiert ein Dreieck ABC mit Seitenlängen

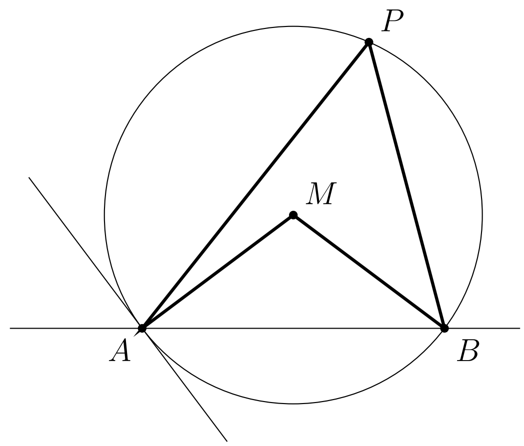
$$|BC| = 3, \qquad |CA| = 5 \qquad \text{und} \qquad |AB| = c?$$

Beschreibe die Menge aller c mit dieser Eigenschaft. **(2P)**

2. Aufgabe (10 Punkte)

Der Peripherie- und Tangentenwinkelsatz handelt von drei verschiedenen Punkten A, B und P auf einem Kreis mit Mittelpunkt M.

(a) Zeichne in der nachfolgenden Skizze den Peripheriewinkel ϕ, den Mittelpunktswinkel μ und den Tangentenwinkel τ ein. **(2P)**



(b) Welche Aussage macht der Peripherie- und Tangentenwinkelsatz über den Zusammenhang der drei Winkel ϕ, μ und τ? **(2P)**

(c) Beweise den Peripherie- und Tangentenwinkelsatz im oben skizzierten Fall, d.h. im Fall wo M im Inneren des Dreiecks ABP liegt. **(6P)**

3. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere **(1P)** und beweise **(3P)** die Dreiecksungleichung für Dreiecke in der Ebene.
(b) Formuliere **(1P)** und beweise **(3P)** die Dreiecksungleichung für Vektoren in $\mathbb{R}^2$.
(c) Erkläre, wie die beiden Dreiecksungleichungen in (a) und (b) zusammenhängen. **(2P)**

4. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Was verstehen wir unter der Dimension eines Teilraums von $\mathbb{R}^n$? **(1P)**
(b) Zeige, dass jeder Teilraum von $\mathbb{R}^n$ eine Basis besitzt. **(5P)**
(c) Berechne die Determinante der Matrix **(2P)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(d) Bilden die Spalten von A eine Basis von $\mathbb{R}^3$? **(1P)**
(e) Gib den Rang von A an. **(1P)**

5. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere **(1P)** und beweise **(5P)** das Additionstheorem für den Kosinus.

(b) Erkläre, wie aus dem Additionstheorem die Doppelwinkelformel

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

folgt. **(2P)**

(c) Gib Zahlen p, q, r an, sodass die Formel

$$\cos(4\alpha) = p\cos^4(\alpha) + q\cos^2(\alpha) + r$$

für alle Winkel α gilt. **(2P)**

6. Aufgabe (10 Punkte)

(a) Formuliere den Fundamentalsatz der Algebra. **(2P)**

(b) Gib eine komplexe Zahl w an, die folgender Gleichung genügt: **(3P)**

$$(1 + 2\mathbf{i})w + 3 + 4\mathbf{i} = 8 + 9\mathbf{i}.$$

(c) Gib die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 - (2 + 6\mathbf{i})z - 11 + 2\mathbf{i} = 0$$

in der Form $z = x + y\mathbf{i}$ an. **(5P)**

7. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung.

(a) Was verstehen wir unter einem Eigenwert von φ? **(1P)**
(b) Was verstehen wir unter einem Eigenvektor von φ? **(1P)**
(c) Was verstehen wir unter einem Eigenraum von φ? **(1P)**
(d) Wieviele verschiedene Eigenwerte kann eine 3×3 Matrix höchstens besitzen? **(1P)**
(e) Gib eine reelle 2×2 Matrix an, die genau einen Eigenwert besitzt. **(1P)**
(f) Bestimme alle Eigenwerte der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

und gib eine Basis von $\mathbb{R}^3$ an, die aus Eigenvektoren dieser Matrix besteht. **(5P)**

8. Aufgabe (10 Punkte)

Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^4$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -1 \\ 4x_1 & +8x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & -x_4 & = & 5 \\ -2x_1 & -4x_2 & +x_3 & -x_4 & = & -6 \end{array}$$

(a) Beschreibe L durch eine Parameterdarstellung. **(6P)**

(b) Gib ein minimales lineares Gleichungssystem für L an, d.h. eines, das aus möglichst wenigen linearen Gleichungen besteht. **(1P)**

(c) Gib eine Basis des Lösungsraums des assoziierten homogenen Gleichungssystems an. **(1P)**

(d) Gib eine reelle Zahl a an, für die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} 2y + 4z & = & 6 \\ 3y + az & = & 5 \end{array}$$

keine Lösung besitzt. **(2P)**