Algebraische Topologie

Stefan Haller

Inhaltsverzeichnis

Dieses Skriptum findet sich unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/AT.html`.

I. Die Fundamentalgruppe

Der Begriff des einfachen Zusammenhangs ist in mehreren Gebieten der Mathematik anzutreffen. Etwa besagt der Riemannsche Abbildungssatz, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet in $\mathbb{C}$ biholomorph zu $\mathbb{C}$ oder der Einheitsscheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist. Etwas allgemeiner, jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche (d.h. komplexe 1-dimensionale Mannigfaltigkeit) ist zu genau einer der Flächen $\mathbb{C}$, $\mathbb{E}$ oder $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ biholomorph.

Ein Resultat aus der Theorie der Lie-Gruppen besagt, dass für eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe G und jede weitere Lie-Gruppe H die Abbildung die einem Lie-Gruppenhomomorphismus $G \to H$ den entsprechenden Lie-Algebrenhomomorphismus $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ zuordnet bijektiv ist. Daher sind zwei einfach zusammenhängende Lie-Gruppen genau dann isomorph wenn es ihre Lie-Algebren sind. Damit ist die Klassifikation der einfach zusammenhängenden Lie-Gruppen auf die Klassifikation der Lie-Algebren zurückgeführt.

Eine vollständige einfach zusammenhängende n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung (o.B.d.A. $\kappa = -1, 0, 1$) ist isometrisch zu $\mathbb{R}^n$ (falls $\kappa = 0$, euklidische Geometrie), S^n (falls $\kappa = 1$, sphärische Geometrie) oder H^n (falls $\kappa = -1$, hyperbolische Geometrie).

Jedem (zusammenhängenden) topologischen Raum mit Basispunkt kann seine Fundamentalgruppe zugeordnet werden. Ihre Elemente sind Homotopieklassen geschlossener Wege beim Basispunkt, die Konkatenation von Wegen liefert die Gruppenstruktur. Ein zusammenhängender Raum ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn seine Fundamentalgruppe trivial ist. Die Fundamentalgruppe liefert daher eine feine Abstufung zwischen den beiden Begriffen *einfach zusammenhängend* und *nicht einfach zusammenhängend.*

Die Fundamentalgruppe ist eine topologische Invariante, dh. homöomorphe zusammenhängende Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen. Gelingt es von zwei Räumen die Fundamentalgruppen auszurechnen, und sind diese nicht isomorph, dann waren die beiden Räume nicht homöomorph. Da die Fundamentalgruppe eine Homotopieinvariante ist, lässt sich sogar schließen, dass die beiden Räume nicht einmal homotopieäquivalent sein können. Dies macht die Fundamentalgruppe für die Topologie interessant.

Mit Hilfe des Satzes von Seifert–van Kampen kann für einige interessante Räume die Fundamentalgruppe tatsächlich bestimmt werden. Etwa lassen sich die Fundamentalgruppen der geschlossenen Flächen berechnen, woraus dann folgt, dass geschlossene Flächen unterschiedlichen Geschlechts nicht homotopieäquivalent, und daher auch nicht homöomorph sind. Andere Beipiele kommen aus der Knotentheorie, haben die Komplemente zweier Knoten in $\mathbb{R}^3$ nicht-isomorphe Fundamentalgruppen, dann können die Knoten nicht äquivalent sein.

Die Fundamentalgruppe hat gute funktorielle Eigenschaften, stetigen Abbildungen zwischen Räumen entsprechen Homomorphismen zwischen ihren Fundamentalgruppen. Dies ist eine typische Situation in der algebraischen Topologie: topologischen Räumen werden algebraische Objekte (Gruppen, Ringe, ...) zugeordnet, stetige Abbildungen entsprechen dabei in funktorieller Weise Homomorphismen zwischen diesen Objekte. Weitere Beipiele solcher topologischer Invarianten liefern die höheren Homotopiegruppen, die Homologiegruppen oder der Kohomologiering.

Die Berechnung der Fundamentalgruppe des Kreises, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, führt rasch zu einem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra und auch zu einem Beweis des Browerschen Fixpunktsatzes für stetige Abbildungen $D^2 \to D^2$. Sie erlaubt es auch für stetige Abbildungen $S^1 \to S^1$ einen Abbildungsgrad zu definieren. Für stetig differenzierbare Abbildungen kann dieser auch als Integral geschrieben werden und liefert daher ein erstes einfaches Beispiel für den Zusammenhang zwischen Analysis und Topologie.

Der in diesem Kapitel behandelte Stoff ist Standardmaterial das sich in vielen Lehrbüchern findet. Die Darstellung hier orientiert sich eng an jenen in [**4**, Chapter 1] und [**14**, Kapitel 5], es seien aber auch [**9**], [**11**] und [**15**] erwähnt.

I.1. Homotopie von Wegen. Es sei X ein topologischer Raum. Weiters bezeichne $I := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ das kompakte Einheitsintervall versehen mit der üblichen Teilraumtopologie. Unter einem *Weg* in X verstehen wir eine stetige Abbildung $f : I \to X$. Wir nennen f einen Weg von $f(0)$ nach $f(1)$. Stimmen die beiden Endpunkte eines Weges f überein, dh. gilt $f(0) = x = f(1)$, dann wird f ein *geschlossener* Weg oder eine *Schleife* bei x genannt. Ist $x \in X$, dann bezeichnen wir mit $c_x : I \to X$ den *konstanten Weg,* $c_x(s) := x$.

Unter einer *Homotopie von Wegen* in X verstehen wir eine stetige Abbildung $H : I \times I \to X$, sodass $H(0, t) = x_0$ und $H(1, t) = x_1$ unabhängig von t sind. Für jedes $t \in I$ ist dann $H_t : I \to X$, $H_t(s) := H(s, t)$, ein Weg von $H_t(0) = x_0$ nach $H_t(1) = x_1$. Zwei Wege $f, g : I \to X$ heißen *homotop* falls eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to X$ existiert, sodass $H_0 = f$ und $H_1 = g$, dh. $H(s, 0) = f(s)$ und $H(s, 1) = g(s)$ für alle $s \in I$. In diesem Fall wird H eine Homotopie von f nach g genannt, und wir schreiben $f \simeq g$ oder $f \overset{H}{\simeq} g$. Um zu betonen, dass die Endpunkte fix sind, sprechen wir auch von einer *Homotopie relativ Endpunkten* und sagen f ist homotop zu g relativ Endpunkten.

I.1.1. Proposition. *Homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege in X.*

Beweis. Zur *Reflexivität:* Ist f ein Weg in X, dann ist $H : I \times I \to X$, $H(s, t) := f(s)$, eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f$ nach $H_1 = f$, also gilt $f \overset{H}{\simeq} f$. Zur *Symmetrie:* Sei also $f \overset{H}{\simeq} g$. Dann ist $G : I \times I \to X$, $G(s, t) := H(s, 1 - t)$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $G_0 = H_1 = g$ nach

$G_1 = H_0 = f$, also gilt $g \overset{G}{\simeq} f$. Zur *Transitivität:* Seien also $f \overset{H'}{\simeq} g$ und $g \overset{H''}{\simeq} h$. Dann ist

$$H : I \times I \to X, \qquad H(s,t) := \begin{cases} H'(s,2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H''(s,2t-1) & \text{falls } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = H'_0 = f$ nach $H_1 = H''_1 = h$, also gilt $f \overset{H}{\simeq} h$. Die Stetigkeit von H folgt aus Lemma I.1.2 unten. □

Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\simeq$ heißen *Homotopieklassen.* Wir schreiben $[f]$ für die Homotopieklasse eines Weges f.

I.1.2. Lemma. *Es seien X und Y zwei topologische Räume und $f : Y \to X$ eine Abbildung. Weiters seien A und B zwei abgeschlossene Teilmengen von Y, sodass $Y = A \cup B$. In dieser Situation gilt: f ist genau dann stetig, wenn die Einschränkungen $f|_A : A \to X$ und $f|_B : B \to X$ beide stetig sind.*

Beweis. Mit f sind natürlich auch die Einschränkungen $f|_A$ und $f|_B$ stetig. Es bleibt daher zu zeigen, dass aus der Stetigkeit der Einschränkungen auch die Stetigkeit von f folgt. Sei dazu C eine abgeschlossene Teilmenge von X und $D := f^{-1}(C) \subseteq Y$. Es ist zu zeigen, dass D in Y abgeschlossen ist. Aus der Stetigkeit von $f|_A$ folgt, dass $D \cap A = f|_A^{-1}(D)$ abgeschlossen in A ist. Da A in Y abgeschlossen ist folgt, dass $D \cap A$ auch in Y abgeschlossen ist. Ebenso folgt aus der Stetigkeit von $f|_B$ und der Abgeschlossenheit von B, dass $D \cap B$ abgeschlossen in Y ist. Also ist auch ihre Vereinigung $(D \cap A) \cup (D \cap B) = D \cap (A \cup B) = D$ abgeschlossen in Y. □

I.1.3. Beispiel. Ist $f : I \to X$ ein Weg und $\varphi : I \to I$ stetig mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$, dann gilt $f \circ \varphi \simeq f$. Es ist nämlich $H : I \times I \to X$, $H(s,t) := f\big((1-t)\varphi(s) + ts\big)$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f \circ \varphi$ nach $H_1 = f$. Beachte, dass $(1-t)\varphi(s) + ts$ stets in I liegt und H daher wohldefiniert ist.

I.1.4. Beispiel. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und $f, g : I \to X$ zwei Wege mit $f(0) = g(0)$ und $f(1) = g(1)$. Dann gilt $f \simeq g$, denn $H : I \times I \to X$, $H(s,t) := (1-t)f(s) + tg(s)$, ist eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$. Beachte, dass wegen der Konvexität von X diese Homotopie tatsächlich Werte in X hat.

I.2. Konstruktionen mit Wegen. Es sei X ein topologischer Raum. Sind f und g zwei Wege in X mit $f(1) = g(0)$, dann ist

$$fg : I \to X, \qquad (fg)(s) := \begin{cases} f(2s) & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s-1) & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg von $f(0)$ nach $g(1)$. Er wird der *Produktweg*, die *Konkatenation* oder auch *Zusammensetzung* von f und g genannt.

I.2.1. Lemma. *Es seien f_0, f_1, g_0 und g_1 Wege in X, sodass $f_0 \simeq f_1$, $g_0 \simeq g_1$, $f_0(1) = g_0(0)$ und daher auch $f_1(1) = g_1(0)$. Dann gilt $f_0g_0 \simeq f_1g_1$.*

Beweis. Sind $F : I \times I \to X$ und $G : I \times I \to X$ Homotopien von Wegen mit $f_0 \overset{F}{\simeq} f_1$ und $g_0 \overset{G}{\simeq} g_1$, dann definiert

$$H : I \times I \to X, \qquad H(s,t) := \begin{cases} F(2s,t) & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2, \\ G(2s-1,t) & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f_0g_0$ nach $H_1 = f_1g_1$. Die Stetigkeit von H folgt wieder aus Lemma I.1.2. □

I.2.2. Lemma. *Sind f, g und h drei Wege in X mit $f(1) = g(0)$ und $g(1) = h(0)$, dann gilt $(fg)h \simeq f(gh)$.*

Beweis. $(fg)h$ ist eine Reparametrisierung von $f(gh)$, denn es gilt $(fg)h = (f(gh)) \circ \varphi$ mit

$$\varphi : I \to I, \qquad \varphi(s) := \begin{cases} \text{2s} & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/4, \\ \text{s+1/4} & \text{falls } 1/4 \leq s \leq 1/2, \text{ und} \\ \text{s/2+1/2} & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Aus Beispiel I.1.3 folgt daher $(fg)h \simeq f(gh)$. □

I.2.3. Lemma. *Es sei f ein Weg in X und $x := f(0)$, $y := f(1)$. Dann gilt für die Konkatenationen mit den konstanten Wegen $fc_y \simeq f$ sowie $c_xf \simeq f$.*

Beweis. Der Weg fc_y ist eine Reparametrisierung von f, denn es gilt $fc_y = f \circ \varphi$ mit

$$\varphi : I \to I, \qquad \varphi(s) := \begin{cases} 2s & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Aus Beispiel I.1.3 folgt daher $fc_y \simeq f$. Analog lässt sich $c_xf \simeq f$ zeigen. □

Für einen Weg $f : I \to X$ ist $\bar{f} : I \to X$, $\bar{f}(s) := f(1-s)$, ein Weg von $f(1)$ nach $f(0)$. Er wird als der zu f *inverse Weg* bezeichnet.

I.2.4. Lemma. *Es sei f ein Weg in X und $x := f(0)$, $y := f(1)$. Dann gilt $f\bar{f} \simeq c_x$ und $\bar{f}f \simeq c_y$.*

Beweis. Es ist

$$H : I \times I \to X, \qquad H(s,t) := \begin{cases} f(2s) & \text{falls } 0 \leq s \leq t/2, \\ f(t) & \text{falls } t/2 \leq s \leq 1-t/2, \\ f(2-2s) & \text{falls } 1-t/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = c_x$ nach $H_1 = f\bar{f}$. Die Stetigkeit von H folgt wieder aus Lemma I.1.2. Analog lässt sich $\bar{f}f \simeq c_y$ zeigen. □

I.3. Definition der Fundamentalgruppe. Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Mit $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnen wir die Menge aller Homotopieklassen geschlossener Wege bei x_0, genauer

$$\pi_1(X, x_0) := \big\{\text{Wege } f : I \to X \text{ mit } f(0) = x_0 = f(1)\big\}/ \simeq$$

wobei $\simeq$ die in Abschnitt I.1 besprochene Äquivalenzrelation der Homotopie relativ Endpunkten bezeichnet. Ist f ein Weg in X mit $f(0) = x_0 = f(1)$ dann schreiben wir $[f]$ für seine Äquivalenzklasse in $\pi_1(X, x_0)$. Nach Lemma I.2.1 definiert die Konkatenation von Wegen eine Multiplikation

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0), \qquad ([f], [g]) \mapsto [f][g] := [fg]$$

die nach Lemma I.2.2 assotiativ ist, $\big([f][g]\big)[h] = [f]\big([g][h]\big)$. Die Äquivalenzklasse des konstanten Weges c_{x_0} ist nach Lemma I.2.3 neutrales Element dieser Multiplikation, $[f][c_{x_0}] = [f] = [c_{x_0}][f]$. Nach Lemma I.2.4 gilt weiters $[f][\bar{f}] = [c_{x_0}] = [\bar{f}][f]$. Zusammenfassend erhalten wir

I.3.1. Proposition. *Die Konkatenation von Wegen definiert auf* $\pi_1(X, x_0)$ *eine Gruppenstruktur,* $[f][g] = [fg]$. *Das neutrale Element wird durch den konstanten Weg* c_{x_0} *repräsentiert,* $1 = [c_{x_0}]$. *Das zu* $[f]$ *inverse Element wird durch den inversen Weg repräsentiert,* $[f]^{-1} = [\bar{f}]$.

I.3.2. Definition (Fundamentalgruppe). Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ wird als die *Fundamentalgruppe* oder *erste Homotopiegruppe* von X beim Basispunkt x_0 bezeichnet.

I.3.3. Bemerkung. Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist i.A. nicht kommutativ und wird daher i.A. multiplikativ notiert. Insbesondere schreiben wir $1 \in \pi_1(X, x_0)$ für das neutrale Element und σ^{-1} für das Inverse von $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Ist die Fundamentalgruppe abelsch, so wird sie manchmal auch additiv notiert. Ist sie trivial, dh. besteht sie nur aus dem neutralen Element $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$, dann wird dies üblicherweise durch die additive Schreibweise $\pi_1(X, x_0) = 0$ ausgedrückt.

I.3.4. Beispiel. Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und $x_0 \in X$ so gilt $\pi_1(X, x_0) = 0$, siehe Beispiel I.1.4.

Wir wenden uns nun der Frage zu, inwiefern die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ eines Raumes X vom Basispunkt x_0 abhängt.

I.3.5. Proposition. *Es sei* $h : I \to X$ *ein Weg und* $x_0 := h(0)$, $x_1 := h(1)$. *Dann definiert* $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$, $\beta_h([f]) := [hf\bar{h}]$, *einen Isomorphismus von Gruppen,* $\beta_h^{-1} = \beta_{\bar{h}}$.

Beweis. Nach den Beobachtungen in Abschnitt I.2 ist β_h wohldefiniert,[1] und für $[f], [g] \in \pi_1(X, x_1)$ gilt $\beta_h\big([f][g]\big) = [hfg\bar{h}] = [hfc_{x_1}g\bar{h}] = [hf\bar{h}hg\bar{h}] =$

[1]Genaugenommen müssten wir hier Klammern setzten, $\beta_h([f]) = [(hf)\bar{h}]$ oder $\beta_h([f]) = [h(f\bar{h})]$, nach Lemma I.2.2 stimmen die Homotopieklassen $[(hf)\bar{h}]$ und $[h(f\bar{h})]$ aber überein.

$[hf\bar{h}][hg\bar{h}] = \beta_h([f])\beta_h([g])$, also ist β_h ein Gruppenhomomorphismus. Verwenden wir noch die triviale Tatsache $\bar{\bar{h}} = h$ so erhalten wir $\big(\beta_{\bar{h}} \circ \beta_h\big)([f]) = \beta_{\bar{h}}\big([hf\bar{h}]\big) = [\bar{h}hf\bar{h}\bar{\bar{h}}] = [\bar{h}hf\bar{h}h] = [c_{x_1}fc_{x_1}] = [f]$. Daher gilt $\beta_{\bar{h}} \circ \beta_h = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_1)}$. Ebenso lässt sich $\beta_h \circ \beta_{\bar{h}} = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ zeigen, also sind β_h und $\beta_{\bar{h}}$ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. □

I.3.6. Bemerkung. Sind x_0 und x_1 zwei Basispunkte in X die in derselben Wegzusammenhangskomponente von X liegen, dann sind nach Proposition I.3.5 die Gruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph. Für wegzusammenhängendes X schreiben wir daher oft auch $\pi_1(X)$. Liegen x_0 und x_1 nicht in derselben Wegzusammenhangskomponente, dann dürfen wir uns i.A. keinerlei Relation zwischen den Gruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ erwarten.

I.3.7. Bemerkung. Der Isomorphismus β_h aus Proposition I.3.5 hängt nur von der Homotopieklasse von h ab, dh. aus $h \simeq h'$ folgt $\beta_h = \beta_{h'}$. Genauer, für zwei Wege h, h' von x_0 nach x_1 gilt $\beta_h = \beta_{h'}$ genau dann, wenn $[h\bar{h}']$ im Zentrum[2] $Z(\pi_1(X, x_0))$ der Fundamentalgruppe liegt, vgl. Aufgabe 6. Ist $\pi_1(X, x_0)$ nicht abelsch, dann gilt $Z(\pi_1(X, x_0)) \neq \pi_1(X, x_0)$ und der in Proposition I.3.5 konstruierte Isomorphismus hängt tatsächlich von $[h]$ ab. Ist die Fundamentalgruppe nicht abelsch, erhalten wir daher *keine kanonische Idendifikation* von $\pi_1(X, x_0)$ mit $\pi_1(X, x_1)$.

I.3.8. Definition (Einfacher Zusammenhang). Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend,* falls $\pi_1(X) = 0$.

I.3.9. Beispiel. Jede konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend, siehe Beispiel I.3.4.

I.3.10. Proposition. *Für einen topologischer Raum X sind äquivalent:*

(i) *X ist einfach zusammenhängend.*
(ii) *Zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$ gibt es genau eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1.*

Beweis. Wir zeigen zunächst (i)⇒(ii): Seien dazu $x_0, x_1 \in X$. Aus dem Wegzusammenhang von X folgt, dass es zumindest eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 gibt. Sind $f, g : I \to X$ zwei Wege von x_0 nach x_1, dann ist $f\bar{g}$ eine Schleife bei x_0 die wegen $\pi_1(X, x_0) = 0$ homotop zum konstanten Weg c_{x_0} sein muss, $f\bar{g} \simeq c_{x_0}$. Es folgt $f \simeq fc_{x_1} \simeq f(\bar{g}g) \simeq (f\bar{g})g \simeq c_{x_0}g \simeq g$, also kann es höchstens eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 geben. Nun zur Implikation (ii)⇒(i): Da eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 existiert, muss X wegzusammenhängend sein. Betrachten wir nun $x_1 = x_0$, so folgt $\pi_1(X, x_0) = 0$ aus der Annahme, dass nur eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 existiert. □

[2] Das Zentrum einer Gruppe G ist $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg\}$. Das Zentrum ist stets ein abelscher Normalteiler. Es gilt $Z(G) = G$ genau dann, wenn G abelsch ist.

I.4. Die Fundamentalgruppe des Kreises. Wir wollen in diesen Abschnitt die Fundamentalgruppe von $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ bestimmen. Als Basispunkt verwenden wir $x_0 := 1 \in S^1$. Für $n \in \mathbb{Z}$ betrachten wir den Weg

$$\omega_n : I \to S^1, \qquad \omega_n(s) := e^{2\pi \mathbf{i} ns} = \cos(2\pi ns) + \mathbf{i}\sin(2\pi ns). \tag{I.1}$$

Da $\omega_n(0) = \omega_n(1) = 1$ ist jedes ω_n eine Schleife bei x_0 und definiert daher eine Homotopieklasse $[\omega_n] \in \pi_1(S^1) := \pi_1(S^1, x_0)$.

I.4.1. Satz. *Die Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1)$, $\phi(n) := [\omega_n]$, siehe* (I.1)*, ist ein Isomorphismus von Gruppen, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

Für den Beweis von Satz I.4.1 betrachten wir die Abbildung

$$p : \mathbb{R} \to S^1, \qquad p(s) := e^{2\pi \mathbf{i} s}. \tag{I.2}$$

Drei Eigenschaften von p werden wesentlich in den Beweis von Satz I.4.1 eingehen. Erstens ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend, siehe Beispiel I.3.9, weiters ist $p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ und schließlich hat p die sogenannte Homotopieliftungseigenschaft.

I.4.2. Proposition (Homotopieliftungseigenschaft). *Es seien $H : Y \times I \to S^1$ und $\tilde{h} : Y \to \mathbb{R}$ stetig mit $p \circ \tilde{h} = H_0$. Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$.*[3]

I.4.3. Bemerkung. Bezeichnen wir mit $\iota_0 : Y \to Y \times I$, $\iota_0(y) := (y, 0)$, die Inklusion bei 0, so lässt sich die Aussage von Proposition I.4.2 schön an nebenstehenden Diagramm veranschaulichen. Die Voraussetzung in Proposition I.4.2 besagt gerade, dass das äußere Quadrat kommutiert, dh. die Komposition $p \circ \tilde{h}$ stimmt mit der Komposition $H \circ \iota_0$ überein. Die Konklusion von Proposition I.4.2 besagt nun, dass eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \to \mathbb{R}$ existiert, die die beiden Dreiecke kommutativ macht, dh. die Komposition $\tilde{H} \circ \iota_0$ stimmt mit $\tilde{h}$ überein, und $p \circ \tilde{H}$ stimmt mit H überein.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\iota_0"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\exists! \tilde{H}"] & S^1 \end{tikzcd}$$

I.4.4. Bemerkung. Sind $f : X \to S^1$ und $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ stetige Abbildungen mit $p \circ \tilde{f} = f$, dann wird $\tilde{f}$ ein *Lift* von f genannt. In diesem Fall sagen wir auch f kann über p zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}$ geliftet werden. Nicht jede Abbildung lässt sich stetige über p liften, etwa besitzt die identische Abbildung $\mathrm{id}_{S^1} : S^1 \to S^1$ keinen Lift, siehe Satz I.4.1. Existiert ein Lift $\tilde{f}$ von f, dann ist dieser nicht eindeutig, denn durch Translation mit ganzen Zahlen erhalten wir unendlich viele weitere Lifte.

Wir verschieben den Beweis von Proposition I.4.2 auf das Ende dieses Abschnittes und betrachten zunächst die folgenden beiden Spezialfälle $Y = \{*\}$, der einpunktige Raum, sowie $Y = I$, siehe die Propositionen I.4.5 und I.4.7 unten.

[3]Ist $G : Y \times I \to X$ eine Abbildung und $t \in I$ so schreiben wir $G_t : Y \to X$ für die durch $G_t(y) := G(y, t)$ definierte Abbildung. In dieser Proposition also $H_0(y) := H(y, 0)$ und $\tilde{H}_0(y) := \tilde{H}(y, 0)$.

I.4.5. Proposition. *Es sei $f : I \to S^1$ ein Weg und $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $p(\tilde{x}) = f(0)$. Dann existiert genau ein Weg $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$.*

Beweis. Wenden wir Proposition I.4.2 auf den einpunktigen Raum $Y := \{*\}$, die Abbildung $\tilde{h} : \{*\} \to \mathbb{R}$, $\tilde{h}(*) := \tilde{x}$, und $H : \{*\} \times I \to S^1$, $H(*, t) := f(t)$, an so erhalten wir eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{H} : \{*\} \times I \to \mathbb{R}$ die $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$ erfüllt. Offensichtlich hat dann $\tilde{f}(t) := \tilde{H}(*, t)$ alle gewünschten Eigenschaften. □

I.4.6. Beispiel. Für die Wege $\tilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{\omega}_n(s) := ns$, $n \in \mathbb{Z}$, gilt $\tilde{\omega}_n(0) = 0$, $\tilde{\omega}_n(1) = n$ und $p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$. Insbesondere ist $\tilde{\omega}_n$ ein Lift von ω_n, siehe (I.1). Beachte, dass $\tilde{\omega}_n$ nur für $n = 0$ geschlossen ist. Wir werden die Wege $\tilde{\omega}_n$ auch im Beweis von Satz I.4.1 unten verwenden.

I.4.7. Proposition. *Es sei $\tilde{h} : I \to \mathbb{R}$ ein Weg und $H : I \times I \to S^1$ eine Homotopie von Wegen mit $H_0 = p \circ \tilde{h}$. Dann existiert eine eindeutige Homotopie von Wegen $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$.*

Beweis. Wenden wir Proposition I.4.2 mit $Y := I$ an, so erhalten wir eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$. Es ist noch zu zeigen, dass $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ Endpunkten ist. Für $i = 0, 1$ betrachten wir dazu den Weg $\tilde{\sigma}_i : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{\sigma}_i(t) := \tilde{H}(i, t)$. Aus $p \circ \tilde{H} = H$ folgt $(p \circ \tilde{\sigma}_i)(t) = H(i, t)$ und dies ist konstant in t, da H eine Homotopie von Wegen ist. Aus $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$ erhalten wir weiters $\tilde{\sigma}_i(0) = \tilde{H}(i, 0) = \tilde{h}(i)$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition I.4.5 folgt daher, dass $\tilde{\sigma}_i$ mit dem konstanten Weg $c_{\tilde{h}(i)}$ übereinstimmen muss. Also ist $\tilde{H}$ tatsächlich eine Homotopie von Wegen. □

Beweis von Satz I.4.1. *Zur Surjektivität von ϕ:* Sei $f : I \to S^1$ eine Schleife bei $x_0 = 1$. Zu zeigen ist, dass $n \in \mathbb{Z}$ mit $\phi(n) = [f]$ existiert. Nach Proposition I.4.5, und da $p(0) = x_0$, existiert ein Weg $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(0) = 0$. Da $p(\tilde{f}(1)) = f(1) = x_0$, und weil $p^{-1}(x_0) = \mathbb{Z}$, muss $\tilde{f}(1)$ ganzzahlig sein, $n := \tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$. Beobachte nun, dass $\tilde{f}$ und $\tilde{\omega}_n$ aus Beispiel I.4.6 beides Wege in $\mathbb{R}$ sind die bei 0 starten und bei n enden. Aus dem einfachen Zusammenhang von $\mathbb{R}$, siehe Beispiel I.3.9, und Proposition I.3.10 erhalten wir eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{\omega}_n \overset{H}{\simeq} \tilde{f}$. Es ist dann $p \circ H : I \times I \to S^1$ eine Homotopie von Wegen mit $\omega_n = p \circ \tilde{\omega}_n \overset{p \circ H}{\simeq} p \circ \tilde{f} = f$, also $\phi(n) = [\omega_n] = [f]$.

Zur Injektivität von ϕ: Seien also $m, n \in \mathbb{Z}$ und $\phi(m) = \phi(n)$. Zu zeigen ist $n = m$. Da $\phi(m) = \phi(n)$ existiert eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to S^1$ mit $\omega_m \overset{H}{\simeq} \omega_n$. Nach Proposition I.4.7, und da $p \circ \tilde{\omega}_m = \omega_m$, existiert eine Homotopie von Wegen $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{\omega}_m$. Da $\tilde{H}$ die Endpunkte fixiert gilt insbesondere $\tilde{H}_1(0) = \tilde{H}_0(0) = \tilde{\omega}_m(0) = 0$ und $\tilde{H}_1(1) = \tilde{H}_0(1) = \tilde{\omega}_m(1) = m$. Weiters ist $p \circ \tilde{H}_1 = H_1 = \omega_n$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition I.4.5 folgt daher $\tilde{H}_1 = \tilde{\omega}_n$, und wir erhalten $m = \tilde{H}_1(1) = \tilde{\omega}_n(1) = n$.

Zur Homomorphismus Eigenschaft von ϕ: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Es ist zu zeigen $\phi(m+n) = \phi(m)\phi(n)$. Betrachte dazu die Translation $\tau_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau_m(s) := m+s$. Dann ist $\tilde{\omega}_m(\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$ ein Weg in $\mathbb{R}$ der bei 0 startet und bei $m+n$ endet. Auch $\tilde{\omega}_{m+n}$ ist ein Weg von 0 nach $m+n$. Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, schließen wir, siehe Proposition I.3.10, $\tilde{\omega}_{m+n} \overset{H}{\simeq} \tilde{\omega}_m(\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$, für eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to \mathbb{R}$. Es folgt $\omega_{m+n} = p \circ \tilde{\omega}_{m+n} \overset{p \circ H}{\simeq} p \circ \big(\tilde{\omega}_m(\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)\big) = (p \circ \tilde{\omega}_m)(p \circ \tau_m \circ \tilde{\omega}_n) = (p \circ \tilde{\omega}_m)(p \circ \tilde{\omega}_n) = \omega_m\omega_n$, also $\omega_{m+n} \simeq \omega_m\omega_n$ und damit $\phi(m+n) = \phi(m)\phi(n)$. □

Es bleibt schließlich noch Proposition I.4.2 zu beweisen. Wir beginnen mit einigen Lemmata. Für den Rest des Abschnitts seien $H : Y \times I \to S^1$ und $\tilde{h} : Y \to \mathbb{R}$ stetig mit $p \circ \tilde{h} = H_0$ wie in Proposition I.4.2.

I.4.8. Lemma (Überlagerungseigenschaft). *Es existieren offene Teilmengen $U_\alpha \subseteq S^1$ und offene Teilmengen $\tilde{U}_\alpha^j \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \{0, 1\}$, $j \in \mathbb{Z}$, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) $U_0 \cup U_1 = S^1$.
(ii) $p^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{U}_\alpha^j$.
(iii) $\tilde{U}_\alpha^j \cap \tilde{U}_\alpha^k = \emptyset$, *falls* $j \neq k$.
(iv) $p|_{\tilde{U}_\alpha^j} : \tilde{U}_\alpha^j \to U_\alpha$ *ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Setzen wir $U_0 := S^1 \setminus \{1\}$ und $U_1 := S^1 \setminus \{-1\}$, so ist $\{U_0, U_1\}$ eine offene Überdeckung von S^1, und es gilt $p^{-1}(U_0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sowie $p^{-1}(U_1) = \mathbb{R} \setminus \big(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}\big)$. Die Intervalle $\tilde{U}_0^j := (j, j+1)$ und $\tilde{U}_1^j := (j - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$, $j \in \mathbb{Z}$, haben dann die gewünschten Eigenschaften. □

I.4.9. Lemma. *Zu jedem Punkt $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung N von y, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$, sodass für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt $H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq U_{\alpha_i}$.*

Beweis. Zu jedem $s \in I$ existiert $\alpha_s \in \{0, 1\}$ mit $H(y, s) \in U_{\alpha_s}$, siehe Lemma I.4.8(i). Da H stetig ist, finden wir zu jedem $s \in I$ eine offene Umgebung N_s von y und eine offene Umgebung J_s von s mit $H(N_s \times J_s) \subseteq U_{\alpha_s}$. Klarerweise bildet $\{J_s\}_{s \in I}$ eine offene Überdeckung von I. Da I kompakt ist, existieren $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und $s_1, \dots, s_n \in I$ mit $[t_{i-1}, t_i] \subseteq J_{s_i}$, $1 \leq i \leq n$, siehe Lemma I.4.12 unten. Betrachte nun die offene Umgebung $N := \bigcap_{i=1}^n N_{s_i}$ von y. Für $1 \leq i \leq n$ gilt dann $H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq H\big(N_{s_i} \times J_{s_i}\big) \subseteq U_{\alpha_{s_i}}$. Mit $\alpha_i := \alpha_{s_i}$ folgt daher die Behauptung. □

I.4.10. Lemma. *Zu jedem $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung V von y und eine stetige Abbildung $\tilde{G} : V \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{G} = H|_{V \times I}$ und $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_V$.*

Beweis. Nach Lemma I.4.9 existieren eine offene Umgebung N von y, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$, sodass

$$H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq U_{\alpha_i} \qquad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \tag{I.3}$$

Wegen (I.3) und $p\circ\tilde h=H_0$ ist $p(\tilde h(y))=H_{t_0}(y)\in U_{\alpha_1}$, also existiert $j_1\in\mathbb{Z}$ mit $\tilde h(y)\in\tilde U^{j_1}_{\alpha_1}$, siehe Lemma I.4.8(ii). Betrachte die offene Umgebung $V^1:=N\cap\tilde h^{-1}(\tilde U^{j_1}_{\alpha_1})$ von y und die Abbildung

$$\tilde G^1:V^1\times[t_0,t_1]\to\tilde U^{j_1}_{\alpha_1}\subseteq\mathbb{R},\qquad \tilde G^1:=\big(p|_{\tilde U^{j_1}_{\alpha_1}}\big)^{-1}\circ H|_{V^1\times[t_0,t_1]}.$$

Nach (I.3) und Lemma I.4.8(iv) ist $\tilde G^1$ wohldefiniert und stetig. Offensichtlich gilt $p\circ\tilde G^1=H|_{V^1\times[t_0,t_1]}$. Aus $H_0=p\circ\tilde h$ erhalten wir $p\circ\tilde G^1_{t_0}=H_{t_0}|_{V^1}=p\circ\tilde h|_{V^1}$, und da p auf $\tilde U^{j_1}_{\alpha_1}$ injektiv ist folgt $\tilde G^1_{t_0}=\tilde h|_{V^1}$.

Wegen (I.3) und $p\circ\tilde G^1=H|_{V^1\times[t_0,t_1]}$ ist $p(\tilde G_{t_1}(y))=H_{t_1}(y)\in U_{\alpha_2}$, also existiert $j_2\in\mathbb{Z}$ mit $\tilde G^1_{t_1}(y)\in\tilde U^{j_2}_{\alpha_2}$, siehe Lemma I.4.8(ii). Betrachte die offene Umgebung $V^2:=V^1\cap(\tilde G^1_{t_1})^{-1}(\tilde U^{j_2}_{\alpha_2})$ von y und die Abbildung

$$\tilde G^2:V^2\times[t_1,t_2]\to\tilde U^{j_2}_{\alpha_2}\subseteq\mathbb{R},\qquad \tilde G^2:=\big(p|_{\tilde U^{j_2}_{\alpha_2}}\big)^{-1}\circ H|_{V^2\times[t_1,t_2]}.$$

Nach (I.3) und Lemma I.4.8(iv) ist $\tilde G^2$ wohldefiniert und stetig. Offensichtlich gilt $p\circ\tilde G^2=H|_{V^2\times[t_1,t_2]}$. Es folgt $p\circ\tilde G^2_{t_1}=H_{t_1}|_{V^2}=p\circ\tilde G^1_{t_1}|_{V^2}$, und da p auf $\tilde U^{j_2}_{\alpha_2}$ injektiv ist, erhalten wir $\tilde G^2_{t_1}=\tilde G^1_{t_1}|_{V^1}$.

Induktiv fortfahrend erhalten wir offene Umgebungen $V^1\supseteq V^2\supseteq\cdots\supseteq V^n$ von y und stetige Abbildungen $\tilde G^i:V^i\times[t_{i-1},t_i]\to\subseteq\tilde U^{j_i}_{\alpha_i}\subseteq\mathbb{R}$, $1\leq i\leq n$, sodass

$$p\circ\tilde G^i=H|_{V^i\times[t_{i-1},t_i]},\quad \tilde G^1_{t_0}=\tilde h|_{V^1}\quad\text{und}\quad \tilde G^i_{t_{i-1}}=\tilde G^{i-1}_{t_{i-1}}|_{V^i}\quad\text{für } i=2,\dots,n.$$

Betrachte nun die offene Umgebung $V:=V^n$ von y und definiere eine Abbildung $\tilde G:V\times I\to\mathbb{R}$ durch $\tilde G|_{V\times[t_{i-1},t_i]}:=\tilde G^i|_{V\times[t_{i-1},t_i]}$. Da $\tilde G^i_{t_{i-1}}|_V=\tilde G^{i-1}_{t_{i-1}}|_V$ ist dies wohldefiniert. Aus der Stetigkeit von $\tilde G^i|_{V\times[t_{i-1},t_i]}$ und Lemma I.1.2 folgt, dass $\tilde G$ stetig ist. Aus $p\circ\tilde G^i=H|_{V^i\times[t_{i-1},t_i]}$ erhalten wir $p\circ\tilde G=H|_{V\times I}$. Schließlich folgt aus $\tilde G^1_{t_0}=\tilde h|_{V^1}$ auch $\tilde G_0=\tilde h|_V$. Also hat $\tilde G$ alle gewüschten Eigenschaften. □

I.4.11. Lemma. *Sind $\tilde f,\tilde g:I\to\mathbb{R}$ zwei Wege mit $p\circ\tilde f=p\circ\tilde g$ und $\tilde f(0)=\tilde g(0)$, dann gilt $\tilde f=\tilde g$.*

Beweis. Wir betrachten die Menge $Z:=\big\{s\in I:\tilde f(s)=\tilde g(s)\big\}$. Da $\tilde f$ und $\tilde g$ beide stetig sind, ist Z eine abgeschlossene Teilmenge von I. Da $\tilde f(0)=\tilde g(0)$ ist $0\in Z$, also $Z\neq\emptyset$. Wir werden unten zeigen, dass Z auch offen in I ist. Aus dem Zusammenhang von I folgt dann $Z=I$, also $\tilde f=\tilde g$. Um die Offenheit von I zu zeigen, sei $s\in Z$. Nach Lemma I.4.8 existieren $\alpha\in\{0,1\}$ und $j\in\mathbb{Z}$ mit $\tilde f(s)=\tilde g(s)\in\tilde U^j_\alpha$. Betrachte die offene Umgebung $W:=\tilde f^{-1}(\tilde U^j_\alpha)\cap\tilde g^{-1}(\tilde U^j_\alpha)$ von s. Da $p\circ\tilde f=p\circ\tilde g$, und da $p|_{\tilde U^j_\alpha}:\tilde U^j_\alpha\to U_\alpha$ injektiv ist, siehe Lemma I.4.8(iv), erhalten wir $\tilde f|_W=\tilde g|_W$. Also ist $W\subseteq Z$ und daher Z offen in I. □

Beweis von Proposition I.4.2. Nach Lemma I.4.10 existiert zu jedem $y\in Y$ eine offene Umgebung V^y von y und eine stetige Abbildung $\tilde G^y:V^y\times I\to\mathbb{R}$ mit $p\circ\tilde G^y=H|_{V^y\times I}$ und $\tilde G^y_0=\tilde h|_{V^y}$. Sind $y_1,y_2\in Y$, so stimmen die Abbildungen

$\tilde{G}^{y_1}$ und $\tilde{G}^{y_2}$ auf $(V^{y_1} \cap V^{y_2}) \times I$ überein, denn ist $y \in V^{y_1} \cap V^{y_2}$ dann gilt für die Wege $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(t) := \tilde{G}^{y_1}(y,t)$, und $\tilde{g} : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}(t) := \tilde{G}^{y_2}(y,t)$ sowohl $(p \circ \tilde{f})(t) = H(y,t) = (p \circ \tilde{g})(t)$, $t \in I$, als auch $\tilde{f}(0) = \tilde{h}(y) = \tilde{g}(0)$, und daher $\tilde{G}^{y_1}(y,t) = \tilde{f}(t) = \tilde{g}(t) = \tilde{G}^{y_2}(y,t)$ für alle $t \in I$, siehe Lemma I.4.11. Wir erhalten daher eine Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \to \mathbb{R}$, sodass $\tilde{H}|_{V^y \times I} = \tilde{G}^y$, für jedes $y \in Y$. Da die Einschränkung von $\tilde{H}$ auf jede der offenen Mengen $V^y \times I$ stetig ist, muss $\tilde{H}$ stetig sein. Aus $p \circ \tilde{G}^y = H|_{V^y \times I}$ erhalten wir $p \circ \tilde{H} = H$. Schließlich folgt aus $\tilde{G}^y_0 = \tilde{h}|_{V^y}$ auch $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$. Damit ist die Existenz der Abbildung $\tilde{H}$ in Proposition I.4.2 gezeigt. Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu verifizieren. Seien dazu $\tilde{H}^1, \tilde{H}^2 : Y \times I \to \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H}^1 = H = p \circ \tilde{H}^2$ und $\tilde{H}^1_0 = \tilde{h} = \tilde{H}^2$. Zu $y \in Y$ betrachten wir die Wege $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(t) := \tilde{H}^1(y,t)$, und $\tilde{g} : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{g}(t) := \tilde{H}^2(y,t)$. Dann gilt $(p \circ \tilde{f})(t) = H(y,t) = (p \circ \tilde{g})(t)$, $t \in I$, sowie $\tilde{f}(0) = \tilde{h}(y) = \tilde{g}(0)$. Aus Lemma I.4.11 folgt daher $\tilde{H}^1(y,t) = \tilde{f}(t) = \tilde{g}(t) = \tilde{H}^2(y,t)$ für alle $t \in I$, also stimmen $\tilde{H}^1$ und $\tilde{H}^2$ überein. □

Im Beweis von Lemma I.4.9 haben wir von der Lebesguesche Überdeckungszahl Gebrauch gemacht, und wollen daher dieses elementare Resultat kurz wiederholen.

I.4.12. Lemma (Überdeckungszahl von Lebesgue). *Es sei (X,d) ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass jeder Ball mit Radius ε zur Gänze in einer der Überdeckungsmengen von $\mathcal{U}$ enthalten ist. Genauer, für jedes $x \in X$ existiert $U \in \mathcal{U}$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, wobei $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}$ den offenen Ball mit Mittelpunkt x und Radius ε bezeichnet.*

Beweis. Da $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X bildet, existiert zu jedem $x \in X$ ein $r_x > 0$ und $U_x \in \mathcal{U}$ mit $B_{2r_x}(x) \subseteq U_x$. Die Bälle $B_{r_x}(x)$ bilden eine offene Überdeckung von X. Wegen der Kompaktheit von X überdecken schon endlich viele davon ganz X, dh. $B_{r_{x_1}}(x_1) \cup \cdots \cup B_{r_{x_n}}(x_n) = X$ für gewisse $x_1, \dots, x_n \in X$. Wir zeigen nun, dass $\varepsilon := \min\{r_{x_1}, \dots, r_{x_n}\} > 0$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. Sei dazu $x \in X$. Wähle $1 \leq i \leq n$ mit $x \in B_{r_i}(x_i)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $B_{r_i}(x) \subseteq B_{2r_i}(x_i)$, und daher $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{r_i}(x) \subseteq B_{2r_i}(x_i) \subseteq U_{x_i}$. Also liegt $B_\varepsilon(x)$ zur Gänze in der Überdeckungsmenge U_{x_i}. □

I.5. Erste Anwendungen. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *Retrakt* von X, falls eine stetige Abbildung $r : X \to A$ existiert mit $r(x) = x$ für alle $x \in A$. Jede solche Abbildung r wird *Retraktion von X auf A* genannt. Eine Retraktion ist also nichts anderes als eine stetige *Linksinverse* der kanonischen Inklusion $\iota : A \to X$, dh. $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$.

Es bezeichne

$$D^n := \big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\big\}$$

den abgeschlossenen n-dimensionalen *Einheitsball,* versehen mit der von $\mathbb{R}^n$ induzieten Teilraumtopologie. Weiters bezeichne

$$S^n := \big\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\big\}$$

die n-dimensionale *Einheitssphäre,* versehen mit der von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierten Teilraumtopologie. Beachte, dass S^{n-1} ein Teilraum von D^n ist, $S^{n-1} \subseteq D^n$. Etwa ist $S^0 = \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}$ und $D^1 = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$. Da D^1 zusammenhängend ist, kann es keine Retraktion von D^1 auf S^0 geben, jede stetige Abbildung $r : D^1 \to S^0$ muss entweder konstant 1 oder konstant -1 sein.

I.5.1. Satz. *S^1 ist nicht Retrakt von D^2, dh. es gibt keine stetige Abbildung $r : D^2 \to S^1$ mit $r(x) = x$ für alle $x \in S^1$.*

Beweis. Indirekt angenommen $r : D^2 \to S^1$ ist eine Retraktion von D^2 auf S^1, dh. $r \circ \iota = \mathrm{id}_{S^1}$ wobei $\iota : S^1 \to D^2$ die kanonische Inklusion bezeichnet. Wir fassen S^1 und D^2 als Teilräume von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ auf, und verwenden $x_0 := 1 \in S^1 \subseteq D^2 \subseteq \mathbb{C}$ als Basispunkt. Betrachte die Schleife $\omega_1 : I \to S^1$, $\omega_1(s) := e^{2\pi\mathbf{i}s}$, siehe (I.1). Da D^2 einfach zusammenhängend ist, siehe Beispiel I.3.9, existiert eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to D^2$ mit $\iota \circ \omega_1 \overset{H}{\simeq} c_{x_0}$. Es ist dann $r \circ H : I \times I \to S^1$ eine Homotopie von Wegen in S^1. Mittels $r \circ \iota = \mathrm{id}_{S^1}$ folgt $\omega_1 = r \circ \iota \circ \omega_1 \overset{r\circ H}{\simeq} r \circ c_{x_0} = c_{x_0}$, also repräsentiert ω_1 das neutrale Element in $\pi_1(S^1, x_0)$. Dies widerspricht aber Satz I.4.1, also kann S^1 nicht Retrakt von D^2 sein. $\square$

I.5.2. Bemerkung. Die Aussage von Satz I.5.1 bleibt auch in höheren Dimensionen richtig, S^{n-1} ist nicht Retrakt von D^n, $n \in \mathbb{N}$. Wir werden dies später zeigen, die Fundamentalgruppe reicht hierfür nicht aus.

I.5.3. Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $f : D^2 \to D^2$ besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Indirekt angenommen $f : D^2 \to D^2$ hat keinen Fixpunkt. Dann können wir eine stetige Abbildung $r : D^2 \to S^1$ definieren, indem wir $x \in D^2$ den eindeutig bestimmten Schnittpunkt des Halbstrahls $\{x + t(x - f(x)) : t \geq 0\}$ mit S^1 zuordnen. Eine einfache Rechnung zeigt, dass diese Abbildung durch die Formel $r : D^2 \to S^1$, $r(x) := x + t(x)\big(x - f(x)\big)$ gegeben ist, wobei $t : D^2 \to [0, \infty)$,

$$t(x) := \frac{\big\langle x, f(x) - x\big\rangle + \sqrt{\big\langle x, f(x) - x\big\rangle^2 + \big(1 - |x|^2\big)\big|f(x) - x\big|^2}}{\big|f(x) - x\big|^2}.$$

In dieser Darstellung ist auch die Stetigkeit von r evident. Für $x \in S^1$ gilt $r(x) = x$, denn aus $1 \geq \big|f(x)\big|^2 = \big|x + f(x) - x\big|^2 = \big|x\big|^2 + 2\big\langle x, f(x) - x\big\rangle + \big|f(x) - x\big|^2 \geq 1 + 2\big\langle x, f(x) - x\big\rangle + 0$ folgt $\langle x, f(x) - x\rangle \leq 0$ und damit $t(x) = 0$. Also ist r eine Retraktion von D^2 auf S^1, ein Widerspruch zu Satz I.5.1. Daher muss f einen Fixpunkt besizten. $\square$

I.5.4. Bemerkung. Auch Satz I.5.3 bleibt in beliebigen Dimensionen richtig, jede stetige Abbildung $f : D^n \to D^n$ besitzt einen Fixpunkt, $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ folgt dies aus dem Zwischenwertsatz der Analysis. Für $n > 2$ werden wir dies mit Hilfe derselben Konstruktion aus der höherdimensionalen Version von Satz I.5.1 herleiten, vgl. Bemerkung I.5.2. Es lässt sich auch umgekehrt Satz I.5.1 auf elementare Weise aus Satz I.5.3 herleiten, denn setzen wir eine Retraktion $r : D^2 \to S^1$ mit einer Drehung $\rho : S^1 \to S^1$ zusammen, würden wir eine fixpunktfreie Abbildung $\iota \circ \rho \circ r : D^2 \to D^2$ erhalten.

I.5.5. Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.*

Beweis. Sei also

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \qquad n \geq 0,\ a_i \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0$$

ein Polynom und $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zu zeigen ist $n = 0$. Die Schleife

$$f : I \to S^1, \qquad f(s) := \frac{p(e^{2\pi \mathbf{i} s})/p(1)}{|p(e^{2\pi \mathbf{i} s})/p(1)|}$$

definiert ein Element $[f] \in \pi_1(S^1, x_0)$, wobei $x_0 := 1 \in S^1$. Die Abbildung

$$H : I \times I \to S^1, \qquad H(s,t) := \frac{p(te^{2\pi \mathbf{i} s})/p(t)}{|p(te^{2\pi \mathbf{i} s})/p(t)|}$$

ist eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = f$. Daher repräsentiert f das neutrale Element in $\pi_1(S^1, x_0)$. Andererseits ist

$$\tilde{G} : I \times I \to \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$
$$\tilde{G}(s,t) := t^n p(e^{2\pi \mathbf{i} s}/t) = a_n e^{2\pi \mathbf{i} n s} + t a_{n-1} e^{2\pi \mathbf{i}(n-1)s} + \cdots + t^{n-1} a_1 e^{2\pi \mathbf{i} s} + t^n a_0$$

eine stetige Abbildung, und

$$G : I \times I \to S^1, \qquad G(s,t) := \frac{\tilde{G}(s,t)/\tilde{G}(0,t)}{|\tilde{G}(s,t)/\tilde{G}(0,t)|}$$

definiert eine Homotopie relative Endpunkten von $G_0 = w_n$ nach $G_1 = f$, vgl. (I.1). Also gilt $[\omega_n] = [f] \in \pi_1(S^1, x_0)$, und daher ist auch $[\omega_n]$ das neutrale Element in $\pi_1(S^1, x_0)$. Aus Satz I.4.1 folgt nun $n = 0$. □

I.6. Induzierte Homomorphismen. Unter einem *punktierten Raum* verstehen wir ein Paar (X, x_0) wobei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Basispunkt ist. Punktierte Räume werden auch als *Räume mit Basispunkt* bezeichnet. Jedem punktierten Raum (X, x_0) haben wir in Abschnitt I.3 seine Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ zugeordnet.

Sind (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte Räume und ist $\varphi : X \to Y$ stetig mit $\varphi(x_0) = y_0$, dann nennen wir φ eine *Abbildung punktierter Räume* oder auch *basispunkterhaltende stetige Abbildung* und schreiben $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$. Ist $\psi : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ eine weitere Abbildung punktierter Räume, dann ist auch die Komposition $\psi \circ \varphi : (X, x_0) \to (Z, z_0)$ eine Abbildung punktierter Räume. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, x_0) \to (X, x_0)$ ist basispunkterhaltend. Unter einem Homöomorphismus punktierter Räume verstehen wir einen basispunkterhaltenden Homöomorphismus.

I.6.1. PROPOSITION. *Eine Abbildung punktierter Räume $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$, $\varphi_*([f]) := [\varphi \circ f]$. Ist $\psi : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ eine weitere Abbildung punktierter Räume, dann gilt $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ sowie $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$.*

BEWEIS. Sei also $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Abbildung punktierter Räume, und f eine Schleife bei x_0. Dann ist $\varphi \circ f$ eine Schleife bei y_0. Sind f_0, f_1 zwei Schleife bei x_0 mit $f_0 \overset{H}{\simeq} f_1$, so ist $\varphi \circ H : I \times I \to Y$ eine Homtopie von Wegen mit $\varphi \circ f_0 \overset{\varphi\circ H}{\simeq} \varphi \circ f_1$, also $[\varphi \circ f_0] = [\varphi \circ f_1] \in \pi_1(Y, y_0)$. Dies zeigt, dass φ_* wohldefiniert ist. Für zwei Schleifen f, g bei x_0 gilt offensichtlich $\varphi \circ (fg) = (\varphi \circ f)(\varphi \circ g)$, also ist φ_* ein Homomorphismus. Die verbleibenden Aussagen sind trivial. □

I.6.2. PROPOSITION. *Ist $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ ein Homöomorphismus punktierter Räume, so ist die induzierte Abbildung $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Es bezeichne $\varphi^{-1} : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ die Umkehrabbildung. Aus Proposition I.6.1 erhalten wir $(\varphi^{-1})_* \circ \varphi_* = (\varphi^{-1} \circ \varphi)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ sowie $\varphi_* \circ (\varphi^{-1})_* = (\varphi \circ \varphi^{-1})_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$. Daher sind φ_* und $(\varphi^{-1})_*$ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. □

I.6.3. BEMERKUNG. Sind $\varphi, \psi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ zwei Homöomorphismen punktierter Räume, dann stimmen die induzierten Isomorphismen φ_* und ψ_* i.A. nicht überein, siehe etwa Beispiel I.6.5 unten.

I.6.4. PROPOSITION. *Es sei (X, x_0) ein punktierter Raum und es bezeichne X_0 die Wegzusammenhangskomponente von x_0. Dann induzierte die kanonische Inklusion $\iota : (X_0, x_0) \to (X, x_0)$ einen Isomorphismus $\iota_* : \pi_1(X_0, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, x_0)$.*

BEWEIS. *Zur Surjektivität von ι_*:* Ist $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0, dann liegt diese zur Gänze in X_0 und kann daher als Schleife $f' : I \to X_0$ aufgefasst werden, $\iota \circ f' = f$. Diese repräsentiert ein Element $[f'] \in \pi_1(X_0, x_0)$ für das offensichtlich $\iota_*[f'] = [\iota \circ f'] = [f]$ gilt. *Zur Injektivität von ι_*:* Es sei $f' : I \to X_0$ eine Schleife bei x_0 mit $\iota_*[f'] = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Dann existiert eine Homotopie relativ Endpunkten $H : I \times I \to X$ mit $\iota \circ f' \overset{H}{\simeq} c_{x_0}$. Da $I \times I$ wegzusammenhängend ist, nimmt H nur Werte in X_0 an, kann daher als Homotopie $H' : I \times I \to X_0$ aufgefasst werden, $\iota \circ H' = H$. Aus der Injektivität von ι folgt $f' \overset{H'}{\simeq} c_{x_0}$, also ist $[f'] = 1 \in \pi_1(X_0, x_0)$, und ι_* daher injektiv. □

I.6.5. Beispiel. Betrachte $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und den Basispunkt $x_0 := 1 \in S^1$. Für $k \in \mathbb{Z}$ bezeichne $p_k : (S^1, x_0) \to (S^1, x_0)$, $p(z) := z^k$. Die induzierte Abbildung $(p_k)_* : \pi_1(S^1, x_0) \to \pi_1(S^1, x_0)$ erfüllt dann $\big(\phi^{-1} \circ (p_k)_* \circ \phi\big)(n) = kn$, $n \in \mathbb{Z}$, wobei $\phi : \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, x_0)$ den Isomorphismus aus Satz I.4.1 bezeichnet. Es ist nämlich $(p_k \circ \omega_n)(s) = (e^{2\pi \mathbf{i} ns})^k = e^{2\pi \mathbf{i} kns} = \omega_{kn}(s)$, vgl. (I.1), und daher $\big(\phi^{-1} \circ (p_k)_* \circ \phi\big)(n) = \phi^{-1}\big((p_k)_*[\omega_n]\big) = \phi^{-1}([p_k \circ \omega_n]) = \phi^{-1}[\omega_{kn}] = kn$. In anderen Worten, das nebenstehende Diagramm ist kommutativ, wobei $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z}$ den Gruppenhomomorphismus bezeichnet der durch Multiplikation mit k gegeben ist, $n \mapsto nk$. Beachte, dass p_1 und p_{-1} beides Homöomorphismen sind, die induzierten Homomorphismen $(p_1)_*$ und $(p_{-1})_*$ aber nicht übereinstimmen.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\phi", "\cong"'] \arrow[d, "\cdot k"] & \pi_1(S^1, x_0) \arrow[d, "(p_k)_*"] \\ \mathbb{Z} \arrow[r, "\phi", "\cong"'] & \pi_1(S^1, x_0) \end{tikzcd}$$

I.6.6. Beispiel. $S^n \setminus \{P\}$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ und daher einfach zusammenhängend, $P \in S^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Um dies einzusehen betrachten wir zunächst die Inversion mit Pol P,

$$\nu_P : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{P\}, \qquad \nu_P(x) := P + \frac{2}{\|x - P\|^2}(x - P).$$

Eine einfache Rechnung zeigt $\nu_P^2 = \nu_P \circ \nu_P = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{P\}}$, insbesondere ist ν_P ein Homöomorphismus. Weiters gilt

$$\|\nu_P(x)\|^2 = 1 + \frac{4\langle x, P\rangle}{\|x - P\|^2}$$

und daher ist $\nu_P(x) \in S^n$ genau dann, wenn $x \in P^\perp = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, P\rangle = 0\}$. Die Einschränkung von ν_P liefert daher einen Homöomorphismus

$$\varphi_P : P^\perp \to S^n \setminus \{P\}, \qquad \varphi_P(x) = P + \frac{2}{\|x - P\|^2}(x - P).$$

Dieser Homöomorphismus wird die *stereographische Projektion mit Pol P* genannt.[4] Als Hyperebene in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist $P^\perp$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, daher ist auch $S^n \setminus \{P\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$. Nach Proposition I.6.2 und Beispiel I.3.9 ist daher $S^n \setminus \{P\}$ einfach zusammenhängend.

I.6.7. Satz. *S^n ist einfach zusammenhängend, für $n \geq 2$.*

Beweis. Bezeichne mit $N := (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ den Nordpol und mit $x_0 := S := (-1, 0, \dots, 0) \in S^n$ den Südpol. Weiters betrachte die offenen Teilmengen $U := S^n \setminus \{N\}$ und $V := S^n \setminus \{S\}$. Nach Beispiel I.6.6 ist $\pi_1(U, x_0) = 0$, es genügt daher zu zeigen, dass die von der kanonischen Inklusion $\iota : (U, x_0) \to (S^n, x_0)$ induzierte Abbildung $\iota_* : \pi_1(U, x_0) \to \pi_1(S^n, x_0)$ surjektiv ist. Sei dazu $f : I \to S^n$ eine Schleife bei x_0. Es ist zu zeigen, dass f homotop relativ Endpunkten zu einer Schleife in U ist. Da $\{U, V\}$ eine offene Überdeckung von S^n ist, bilden auch

[4] Unter *der* stereographischen Projektion wird üblicherweise die stereographische Projektion mit Pol $P = N = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ verstanden.

die beiden Mengen $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ eine offene Überdeckung des Intervalls I. Nach Lemma I.4.12 finden wir daher $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = 1$, sodass für jedes $i = 1, \dots, m$ entweder $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U$ oder $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq V$ gilt. Durch Weglassen gewisser s_i können wir erreichen, dass $f(s_i) \neq N$, für jedes $0 \leq i \leq m$, denn ist $f(s_i) = N$ dann muss $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq V$ und $f([s_i, s_{i+1}]) \subseteq V$ gelten. Betrachte die reparametrisierten Einschränkungen $f_i : I \to S^n$, $f_i(s) := f\big((1-s)s_{i-1}+ss_i\big)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Nach Beispiel I.1.3 gilt dann $f \simeq f_1 f_2 \cdots f_m$, wobei wir wieder auf die Klammersetzung verzichten, da sie für die Aussage unwesentlich ist, vgl. Lemma I.2.2. Es genügt nun zu zeigen, dass jedes f_i homotop relativ Endpunkten zu einem Weg in U ist, denn dann ist auch f homotop relativ Endpunkten zu einer Schkeife in U, siehe Lemma I.2.1. Für die i mit $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U$ ist nichts zu zeigen. Betrachten wir also ein i mit $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq V$, dh. $f_i(I) \subseteq V$. Die stereographischen Projektion $\varphi_S : \mathbb{R}^n = S^\perp \to S^n \setminus \{S\} = V$ aus Beispiel I.6.6 ist ein Homöomorphismus mit $\varphi_S(0) = N$. Also ist $\varphi_S^{-1} \circ f_i : I \to \mathbb{R}^n$ ein Weg in $\mathbb{R}^n$ und es gilt $(\varphi_S^{-1} \circ f_i)(0) \neq 0 \neq (\varphi_S^{-1} \circ f_i)(1)$, denn $f(s_i) \neq N$. Da $n \geq 2$ finden wir einen Weg $g_i : I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $g_i(0) = (\varphi_S^{-1} \circ f_i)(0)$ und $g_i(1) = (\varphi_S^{-1} \circ f_i)(1)$. Nach Konstruktion ist $\varphi_S \circ g_i$ ein Weg in $V \setminus \{N\} \subseteq U$. Da $\mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist, sind die beiden Wege $\varphi_S^{-1} \circ f_i$ und g_i homotop relativ Endpunkten in $\mathbb{R}^n$, siehe Proposition I.3.10, also sind auch f_i und $\varphi_S \circ g_i$ homotop relativ Endpunkten in $V \subseteq S^n$. $\square$

I.6.8. Beispiel. Wir erinnern uns, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die Menge aller 1-dimensionalen komplexen linearen Teilräume von $\mathbb{C}^{n+1}$ bezeichnet, $n \in \mathbb{N}_0$. Führen wir auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : \lambda v = w$ ein, dann können wir $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit $\big(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\!\sim$ identifizieren, $\mathbb{C}v \leftrightarrow [v]$. Wir versehen $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit der Quotiententopologie,

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n := \big(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\!\sim.$$

Betrachten wir S^{2n+1} als Teilraum von $\mathbb{C}^{n+1}$, $S^{2n+1} = \big\{v \in \mathbb{C}^{n+1} : \|v\| = 1\big\}$, dann induziert die kanonische Inklusion $S^{2n+1} \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ einen Homöomorphismus $S^{2n+1}/\!\sim\, \cong \big(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\!\sim$. Seine Inverse ist die von der radialen Projektion $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^{2n+1}$, $v \mapsto \frac{1}{\|v\|}v$, induzierte stetige Abbildung $\big(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\!\sim\, \to S^{2n+1}/\!\sim$. Da S^{2n+1} kompakt ist, und da auch die Äquivalenzklassen in S^{2n+1} abgeschlossen sind, sehen wir, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ein kompakter Hausdorffraum ist. $\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ ist ein einpunktiger Raum. $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ ist homöomorph zu S^2 und daher einfach zusammenhängend, siehe Satz I.6.7 und Proposition I.6.2. Tatsächlich induziert die Abbildung $\varphi : S^3 \to S^2$, $\varphi(z, w) := \big(2\bar{z}w, |w|^2 - |z|^2\big)$, einen Homöomorphismus $S^3/\!\sim\, \cong S^2$, siehe Aufgabe 8. Wir werden später sehen, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ einfach zusammenhängend ist, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$, siehe Beispiel I.9.17 unten.

I.6.9. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die spezielle unitäre Gruppe

$$\mathrm{SU}_n := \big\{U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) : U^*U = I_n,\ \det U = 1\big\},$$

versehen mit der von $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Hier bezeichnet $I_n \in \mathrm{SU}_n$ die $(n\times n)$-Einheitsmatrix. Da durch stetige Gleichungen gegeben, ist SU_n abgeschlossen in $\mathbb{C}^{n^2}$. Da die Spalten einer unitären Matrix Einheitsvektoren bilden, ist $\mathrm{SU}_n \subseteq \mathbb{C}^{n^2}$ auch beschränkt. Nach dem Satz von Heine–Borel ist SU_n daher kompakt. SU_1 ist ein einpunktiger Raum. SU_2 ist homöomorph zu S^3 und daher einfach zusammenhängend, siehe Satz I.6.7 und Proposition I.6.2. Um einen Homöomorphismus $S^3 \cong \mathrm{SU}_2$ anzugeben betrachten wir S^3 als Teilraum von $\mathbb{C}^2$, $S^3 = \big\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 : |z|^2+|w|^2 = 1\big\}$. Es ist dann

$$\varphi : S^3 \to \mathrm{SU}_2, \qquad \varphi(z,w) := \begin{pmatrix} z & -\bar w \\ w & \bar z\end{pmatrix}$$

ein Homöomorphismus, siehe Aufgabe 7. Wir werden später sehen, dass SU_n einfach zusammenhägend ist, für jedes $n\in\mathbb{N}$.

I.6.10. Satz. *Es existiert keine stetige Abbildung $f : S^2 \to S^1$ mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x\in S^2$.*

Beweis. Wir gehen indirekt vor und nehmen an $f : S^2\to S^1$ ist eine stetige Abbidung mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x\in S^2$. Weiters betrachten wir die Inklusion von S^1 als Äquator in S^2, $\iota : (S^1,x_0)\to(S^2,y_0)$, $\iota(z) := (z,0)$, wobei $x_0 = 1\in S^1\subseteq\mathbb{C}$ den üblichen Basispunkt bezeichnet und wir $y_0 := \iota(x_0)\in S^2$ als Basispunkt von $S^2\subseteq\mathbb{C}\times\mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ verwenden. Die Abbildung $g : S^2\to S^1$, $g(y) := f(y)/f(y_0)$, ist dann basispunkterhaltend, $g : (S^2,y_0)\to(S^1,x_0)$, und hat ebenfalls die Eigenschaft $g(-y) = -g(y)$, $y\in S^2$. Schließlich betrachten wir die Komposition $h := g\circ\iota : (S^1,x_0)\to(S^1,x_0)$, für die dann natürlich $h(-z) = -h(z)$ gilt, $z\in S^1$. Betrachte nun den induzierten Homomorphismus

$$h_* : \pi_1(S^1,x_0)\to\pi_1(S^1,x_0). \tag{I.4}$$

Nach Satz I.6.7 ist $\pi_1(S^2,y_0) = 0$, aus $h_* = (g\circ\iota)_* = g_*\circ\iota_*$ folgt daher, dass h_* mit dem trivialen (konstanten) Homomorphismus übereinstimmt. Unter Verwendung der Relation $h(-z) = -h(z)$ werden wir nun einen Widerspruch herleiten indem wir zeigen, dass (I.4) nicht der triviale Homomorphismus sein kann.

Dazu betrachten wir wieder die Schleife $\omega_1 : I\to S^1$, siehe (I.1). Da $(h\circ\omega_1)(0) = h(x_0) = x_0 = p(0)$ existiert ein Weg $\tilde h : I\to\mathbb{R}$ mit $p\circ\tilde h = h\circ\omega_1$ und $\tilde h(0) = 0$, siehe Proposition I.4.5. Es gilt $p(\tilde h(\frac12)) = h(\omega_1(\frac12)) = h(-x_0) = -h(x_0) = -1$, also existiert $q\in\mathbb{Z}$ mit $\tilde h(\frac12) = q+\frac12$. Weiters ist

$$\tilde h\big(\tfrac s2+\tfrac12\big) = \tilde h\big(\tfrac s2\big)+q+\tfrac12, \qquad \text{für alle } s\in I. \tag{I.5}$$

Um dies einzusehen betrachte die durch die beiden Seiten dieser Gleichung gegebenen Wege $\alpha,\beta : I\to\mathbb{R}$, $\alpha(s) := \tilde h(\frac s2+\frac12)$, $\beta(s) := \tilde h(\frac s2)+q+\frac12$. Da $\alpha(0) = \tilde h(\frac12) = q+\frac12$ und $\beta(0) = \tilde h(0)+q+\frac12 = q+\frac12$ sehen wir, dass α und β beim gleichen Punkt starten, $\alpha(0) = \beta(0)$. Für $s\in I$ gilt

$$(p\circ\alpha)(s) = p\big(\tilde h\big(\tfrac s2+\tfrac12\big)\big) = h\big(\omega_1\big(\tfrac s2+\tfrac12\big)\big) = h\big(-\omega_1\big(\tfrac s2\big)\big) = -h\big(\omega_1\big(\tfrac s2\big)\big),$$

wobei wir im letzten Gleichheitszeichen die Relation $h(-z) = -h(z)$ verwendet haben. Andererseits gilt auch

$$(p \circ \beta)(s) = p\big(\tilde{h}\big(\tfrac{s}{2}\big) + q + \tfrac{1}{2}\big) = p\big(\tilde{h}\big(\tfrac{s}{2}\big) + \tfrac{1}{2}\big) = -p\big(\tilde{h}\big(\tfrac{s}{2}\big)\big) = -h\big(\omega_1\big(\tfrac{s}{2}\big)\big).$$

Daher liften α und β denselben Weg in S^1, dh. $p \circ \alpha = p \circ \beta$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition I.4.5 erhalten wir daher $\alpha = \beta$ womit (I.5) gezeigt wäre. Setzen wir in (I.5) $s = 1$ so erhalten wir $\tilde{h}(1) = \tilde{h}(\frac{1}{2}) + q + \frac{1}{2} = 2q + 1 \neq 0$. Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, schließen wir $\tilde{h} \simeq \tilde{\omega}_{2q+1}$, wobei $\tilde{\omega}_n : I \to \mathbb{R}$, $\tilde{\omega}_n(s) := ns$, siehe Beispiel I.4.6. Durch Komposition mit p erhalten wir $h \circ \omega_1 = p \circ \tilde{h} \simeq p \circ \tilde{\omega}_{2q+1} = \omega_{2q+1}$, also $h_*([\omega_1]) = [h \circ \omega_1] = [\omega_{2q+1}]$. Aus Satz I.4.1 folgt nun, dass $h_*([\omega_1])$ nicht das neutrale Element in $\pi_1(S^1, x_0)$ sein kann. Also ist der induzierte Homomorphismus (I.4) nicht trivial und wir erhalten einen Widerspruch. Daher kann es keine stetige Abbildung $f : S^2 \to S^1$ mit $f(-x) = -f(x)$ geben. □

I.6.11. Bemerkung. Wir werden später sehen, dass Satz I.6.10 in höheren Dimensionen richtig bleibt: ist $f : S^m \to S^n$ stetig und $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^m$, dann muss $m \leq n$ sein. Für $m \leq n$ existieren tatsächlich solche Abbildungen, etwa $f : S^m \to S^n$, $f(x) := (x, 0, \dots, 0)$.

I.6.12. Satz (Borsuk–Ulam). *Ist $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, dann existiert $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

Beweis. Indirekt angenommen es gilt $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^2$. Die stetige Abbildung

$$g : S^2 \to S^1, \qquad g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{\big|f(x) - f(-x)\big|}$$

erfüllt dann $g(-x) = -g(x)$ und wir erhalten einen Widerspruch zu Satz I.6.10. Also muss $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$ existieren. □

I.6.13. Bemerkung. Inbesondere sehen wir, dass es nicht möglich ist S^2 injektiv und stetig nach $\mathbb{R}^2$ abzubilden, dh. S^2 kann nicht homöomorph zu einem Teilraum von $\mathbb{R}^2$ sein. Auch Satz I.6.12 bleibt in höheren Dimensionen richtig: ist $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, dann existiert $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$. Dies folgt analog aus der Verallgemeinerung von Satz I.6.10. Umgekehrt lässt sich Satz I.6.10 auf elementare Weise aus Satz I.6.12 herleiten, denn eine stetige Abbildung $f : S^2 \to S^1$ mit $f(-x) = -f(x)$ können wir als stetige Abbildung $S^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen für die dann sicherlich $f(x) \neq f(-x)$ gilt.

I.7. Produkte. Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen wie die Fundamentalgruppe eines Produktraumes mit den Fundamentalgruppen der Faktoren zusammenhängt. Sind (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte Räume, dann ist auch

$$(X, x_0) \times (Y, y_0) := \big(X \times Y, (x_0, y_0)\big)$$

ein punktierter Raum, der als das *Produkt der punktierten Räume* (X, x_0) und (Y, y_0) bezeichnet wird. Die Projektionen auf die beiden Komponenten liefern zwei Abbildungen punktierter Räume $p_X : (X, x_0) \times (Y, y_0) \to (X, x_0)$ und $p_Y : (X, x_0) \times (Y, y_0) \to (Y, y_0)$, die als *kanonische Projektionen* bezeichnet werden. Das Produkt punktierter Räume hat die folgende *universelle Eigenschaft:* Ist (Z, z_0) ein weiterer punktierter Raum und sind $\varphi_X : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ sowie $\varphi_Y : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ zwei Abbildungen punktierter Räume, dann existiert eine eindeutige Abbildung punktierter Räume $\varphi : (Z, z_0) \to (X, x_0) \times (Y, y_0)$, sodass $p_X \circ \varphi = \varphi_X$ und $p_Y \circ \varphi = \varphi_Y$ gilt. Das nebenstehende kommutative Diagramm soll dies verdeutlichen. Diese Abbildung φ ist durch $\varphi(x, y) = (\varphi_X(x), \varphi_Y(x))$ gegeben und wird mit (φ_X, φ_Y) bezeichnet.

$$\begin{tikzcd}
 & (X,x_0) \\
(Z,z_0) \arrow[ur, bend left, "\varphi_X"] \arrow[dr, bend right, "\varphi_Y"'] \arrow[r, dashed, "\exists!\varphi"] & (X,x_0)\times(Y,y_0) \arrow[u, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] \\
 & (Y,y_0)
\end{tikzcd}$$

Das Produkt punktierter Räume ist durch seine universelle Eigenschaft bis auf kanonischen Homöomorphismus eindeutig bestimmt. Genauer meinen wir hier folgendes: Sei (P, p_0) ein punktierter Raum und seien $\pi_X : (P, p_0) \to (X, x_0)$ und $\pi_Y : (P, p_0) \to (Y, y_0)$ zwei Abbildungen punktierter Räume die ebenfalls die universelle Eigenschaft haben, dh. zu je zwei Abbildungen punktierter Räume $\varphi_X : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ und $\varphi_Y : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ gibt es eine eindeutige Abbildung punktierter Räume $\varphi : (Z, z_0) \to (P, p_0)$ mit $\pi_X \circ \varphi = \varphi_X$ und $\pi_Y \circ \varphi = \varphi_Y$. Dann gibt es genau einen Homöomorphismus punktierter Räume $\psi : (P, p_0) \to (X, x_0) \times (Y, y_0)$ mit $p_X \circ \psi = \pi_X$ und $p_Y \circ \psi = \pi_Y$.[5] Das Tripel $\big((P, p_0), \pi_X, \pi_Y\big)$ kann daher in kanonischer Weise mit dem Tripel $\big((X, x_0) \times (Y, y_0), p_X, p_Y\big)$ identifiziert werden.

Sind G und H zwei Gruppen, dann ist $G \times H$ bezüglich komponentenweiser Multiplikation wieder eine Gruppe. Die beiden kanonischen Projektionen $p_G : G \times H \to G$ und $p_H : G \times H \to H$ sind Gruppenhomomorphismen. Das Produkt $G \times H$ hat die folgende *universelle Eigenschaft:* Sind $\varphi_G : K \to G$ und $\varphi_H : K \to H$ zwei Gruppenhomomorphismen, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : K \to G \times H$ mit $p_G \circ \varphi = \varphi_G$ und $p_H \circ \varphi = \varphi_H$. Dieser Homomorphimus ist durch $\varphi(k) = (\varphi_G(k), \varphi_H(k))$ gegeben und wird mit (φ_G, φ_H) bezeichnet. Das Produkt von Gruppen ist bis auf kanonischen Isomorphimus durch seine universelle Eigenschaft eindeutig

$$\begin{tikzcd}
 & G \\
K \arrow[ur, bend left, "\varphi_G"] \arrow[dr, bend right, "\varphi_H"'] \arrow[r, dashed, "\exists!\varphi"] & G\times H \arrow[u, "p_G"'] \arrow[d, "p_H"] \\
 & H
\end{tikzcd}$$

[5] Wir erhalten ψ indem wir die universelle Eigenschaft von $(X, x_0) \times (Y, y_0)$ auf $\varphi_X = \pi_X$ und $\varphi_Y = \pi_Y$ anwenden. Die Umkehrabbildung von ψ erhalten wir indem wir die universelle Eigenschaft von (P, p_0) auf $\varphi_X = p_X$ und $\varphi_Y = p_Y$ anwenden. Dass dies tatsächlich die Umkehrabbildung liefert folgt dann aus der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von (P, p_0) angewandt auf $\varphi_X = \pi_X$ und $\varphi_Y = \pi_Y$, sowie der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von $(X, x_0) \times (Y, y_0)$ angewandt auf $\varphi_X = p_X$ und $\varphi_Y = p_Y$.

bestimmt. Genauer, sei P eine Gruppe und seien $\pi_G : P \to G$ sowie $\pi_H : P \to H$ zwei Homomorphismen die ebenfalls die universelle Eigenschaft besitzen, dh. zu je zwei Homomorphismen $\varphi_G : K \to G$ und $\varphi_H : K \to H$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\varphi : K \to P$ mit $\pi_G \circ \varphi = \varphi_G$ und $\pi_H \circ \varphi = \varphi_H$. Dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $\psi : P \to G \times H$ mit $p_G \circ \psi = \pi_G$ und $p_H \circ \psi = \pi_H$.[6] Das Tripel $\big(P, \pi_G, \pi_H\big)$ kann daher in kanonischer Weise mit dem Tripel $\big(G \times H, p_G, p_H\big)$ identifiziert werden.

Nun aber zur Fundamentalgruppe des Produkts $(X, x_0) \times (Y, y_0)$. Die kanonischen Projektionen induzieren zwei Gruppenhomomorphismen:

$$(p_X)_* : \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big) \to \pi_1(X, x_0), \qquad [f] \mapsto (p_X)_*([f]) = [p_X \circ f]$$
$$(p_Y)_* : \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big) \to \pi_1(Y, y_0), \qquad [f] \mapsto (p_Y)_*([f]) = [p_Y \circ f]$$

Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus

$$\big((p_X)_*, (p_Y)_*\big) : \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0), \tag{I.6}$$

der durch $[f] \mapsto \big([p_X \circ f], [p_Y \circ f]\big)$ gegeben ist.

I.7.1. Proposition. *Für punktierte Räume* (X, x_0) *und* (Y, y_0) *ist* (I.6) *ein Isomorphismus von Gruppen. Seine Inverse ist durch* $\big([f_X], [f_Y]\big) \mapsto [(f_X, f_Y)]$ *gegeben.*

Beweis. *Zur Surjektivität:* Es sei $([f_X], [f_Y]) \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Dann ist $f := (f_X, f_Y) : I \to X \times Y$ eine Schleife bei (x_0, y_0) und offensichtlich gilt $\big((p_X)_*, (p_Y)_*\big)([f]) = ([p_X \circ f], [p_Y \circ f]) = ([f_X], [f_Y])$. Also ist (I.6) surjektiv. *Zur Injektivität:* Sei also $[f] \in \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big)$, sodass $\big((p_X)_*, (p_Y)_*\big)([f]) = 1 \in \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$. Dann ist $[p_X \circ f] = 1 \in \pi_1(X, x_0)$ und $[p_Y \circ f] = 1 \in \pi_1(Y, y_0)$. Also existiert eine Homotopie relativ Endpunkten $H^X : I \times I \to X$ von $p_X \circ f$ nach c_{x_0}, und eine Homotopie relativ Endpunkten $H^Y : I \times I \to Y$ von $p_Y \circ f$ nach c_{y_0}. Es definiert dann $H := (H^X, H^Y) : I \times I \to X \times Y$ eine Homotopie relativ Endpunkten von f nach $c_{(x_0, y_0)}$. Damit ist $[f] = 1 \in \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big)$ und (I.6) also injektiv. □

I.7.2. Beispiel. Für $m, n \geq 2$ ist $S^m \times S^n$ einfach zusammenhängend. Dies folgt aus Satz I.6.7 und Proposition I.7.1.

I.7.3. Bemerkung. Ist $\pi_1(Y, y_0) = 0$, dann induzieren die Projektion p_X und die Inklusion $\iota : (X, x_0) \to (X, x_0) \times (Y, y_0)$, $\iota(x) := (x, y_0)$, zueinander inverse Gruppenisomorphismen $(p_X)_* : \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big) \to \pi_1(X, x_0)$ und $\iota_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1\big((X, x_0) \times (Y, y_0)\big)$. Dies folgt sofort aus Proposition I.7.1.

I.7.4. Beispiel. Für $P \in \mathbb{R}^n$ ist $\varphi : S^{n-1} \times (0, \infty) \to \mathbb{R}^n \setminus \{P\}$, $\varphi(x, t) := P + tx$, ein Homöomorphismus. Mit Hilfe von Satz I.6.7 und Proposition I.7.1 sehen wir, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ einfach zusammenhängend ist, falls $n \geq 3$. Ist $n = 2$

[6] Wir erhalten ψ und seine Umkehrabbildung völlig analog zu der Konstruktion für Produkte punktierter Räume.

so gilt $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}) \cong \mathbb{Z}$ nach Satz I.4.1 und Proposition I.7.1. Genauer, und für $P = 0$, sehen wir, dass die Inklusion $\iota : S^1 \to \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ einen Isomorphismus $\iota_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(\mathbb{C}^\times)$ induziert, siehe Bemerkung I.7.3 Im Fall $n = 1$ ist $\mathbb{R}^1 \setminus \{P\}$ nicht (weg)zusammenhängend, also auch nicht einfach zusammenhängend.

I.7.5. Satz. $\mathbb{R}^2$ *ist nicht homöomorph zu* $\mathbb{R}^n$, *für* $2 \neq n$.

Beweis. Für $n = 0$ ist dies trivial, denn $\mathbb{R}^0$ ist ein einpunktiger Raum während $\mathbb{R}^2$ natürlich mehr als einen Punkt besitzt. Es genügt daher den Fall $n \in \mathbb{N}$ zu betrachten. Wir gehen indirekt vor und nehmen an $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ wäre ein Homöomorphismus, $2 \neq n \in \mathbb{N}$. Wähle einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und setze $Q := \varphi(P)$. Die Einschränkung $\varphi|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{Q\}$ ist dann ebenfalls ein Homöomorphismus. Nach Beispiel I.7.4 ist aber $\mathbb{R}^n \setminus \{Q\}$ einfach zusammenhängend während $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ nicht einfach zusammenhängend ist. Wir erhalten also einen Widerspruch, siehe Proposition I.6.2. Daher kann kein Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ existieren. □

I.7.6. Bemerkung. Es gilt allgemein $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$, falls $m \neq n$. Wir werden dies später zeigen, die Fundamentalgruppe reicht hierfür nicht aus. Es ist übrigens leicht zu sehen, dass $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ nur dann *diffeomorph* sein können, wenn $m = n$ gilt. Ist nämlich $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $x_0 \in \mathbb{R}^m$ beliebig, dann folgt aus der Kettenregel, dass die Jacobimatrix $D_{x_0}\varphi$ einen linearen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ liefert, und dies ist natürlich nur für $m = n$ möglich.

I.7.7. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit

$$T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$$

den n-dimensionalen Torus. Aus Proposition I.7.1 und Satz I.4.1 folgt mittels Induktion $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$. Ein expliziter Isomorphismus ist durch $\phi : \mathbb{Z}^n \to \pi_1(T^n)$, $\phi(k) := [\omega_k]$, gegeben. Hierbei bezeichnet $\omega_k : I \to T^n$ den Weg $\omega_k(s) := \big(e^{2\pi \mathbf{i} k_1 s}, \ldots, e^{2\pi \mathbf{i} k_n s}\big)$, $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, und als Basispunkt verwenden wir $(1, \ldots, 1) \in S^1 \times \cdots \times S^1 = T^n$. Insbesondere sehen wir, dass S^2 nicht homöomorph zu T^2 sein kann, denn die Fundamentalgruppen $\pi_1(S^2) = 0$ und $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ sind nicht isomorph, siehe Satz I.6.7 und Proposition I.6.2.

I.7.8. Beispiel. Auf $\mathbb{R}^n$ betrachte die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^n : y = x + k$. Die Abbildung $p : \mathbb{R}^n \to T^n$, $p(x_1, \ldots, x_n) := \big(e^{2\pi \mathbf{i} x_1}, \ldots, e^{2\pi \mathbf{i} x_n}\big)$ induziert einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n/\!\sim\, \cong T^n$. Wir können den Torus daher auch als Quotient von $\mathbb{R}^n$ verstehen. Mit $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ bezeichnen wir die Menge aller ganzzahligen $(n \times n)$-Matrizen. Jedes $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ definiert eine stetige (lineare) Abbildung $\tilde{\mu}_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\mu}_A(x) := Ax$. Beachte, dass aus $x \sim y$ auch $\tilde{\mu}_A(x) \sim \tilde{\mu}_A(y)$ folgt. Daher faktorisiert $\tilde{\mu}_A$ zu einer stetigen Abbildung $\mu_A : T^n \to T^n$, $p \circ \tilde{\mu}_A = \mu_A \circ p$. Beachte auch, dass μ_A den Basispunkt $p(0) = (1, \ldots, 1) \in T^n$ festhält, denn $\tilde{\mu}_A(0) = 0$. Wir wollen nun die induzierten Gruppenhomomorphismen $(\mu_A)_* : \pi_1(T^n) \to \pi_1(T^n)$ bestimmen. Genauer wollen wir zeigen, dass $\big(\phi^{-1} \circ (\mu_A)_* \circ \phi\big)(k) = Ak$ gilt, $k \in \mathbb{Z}^n$, wobei $\phi : \mathbb{Z}^n \to \pi_1(T^n)$ den Isomorphismus aus Beispiel I.7.7 bezeichnet. In anderen Worten, wir wollen zeigen, dass das nebenstehende Diagramm kommutiert. Für $k \in \mathbb{Z}^n$ betrachten wir den Weg $\tilde\omega_k : I \to \mathbb{R}^n$, $\tilde\omega_k(s) := sk$. Offensichtlich gilt dann $p \circ \tilde\omega_k = \omega_k$, wobei $\omega_k : I \to T^n$ den Weg aus Beispiel I.7.7 bezeichnet. Weiteres haben wir die Relation $\tilde\mu_A \circ \tilde\omega_k = \tilde\omega_{Ak}$. Wir erhalten daraus $\mu_A \circ \omega_k = \mu_A \circ p \circ \tilde\omega_k = p \circ \tilde\mu_A \circ \tilde\omega_k = p \circ \tilde\omega_{Ak} = \omega_{Ak}$, also $[\mu_A \circ \omega_k] = [\omega_{Ak}]$. Somit ist $\big((\mu_A)_* \circ \phi\big)(k) = (\mu_A)_*([\omega_k]) = [\mu_A \circ \omega_k] = [\omega_{Ak}] = \phi(Ak)$, und die Behauptung bewiesen. Für $A, B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$ gilt $\mu_{AB} = \mu_A \circ \mu_B$, denn $\tilde\mu_{AB} = \tilde\mu_A \circ \tilde\mu_B$. Schränken wir uns auf invertierbare $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \big\{A \in \mathcal{M}_{n,n} : \det A = \pm 1\big\}$ ein, so erhalten wir einen interessanten Homomorphismus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Homeo}(T^n)$, $A \mapsto \mu_A$, wobei $\mathrm{Homeo}(X)$ die Gruppe der Homöomorphismen eines topologischen Raumes X bezeichnet.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^n \arrow[r, "\phi", "\cong"'] \arrow[d, "A"] & \pi_1(T^n) \arrow[d, "(\mu_A)_*"] \\ \mathbb{Z}^n \arrow[r, "\phi", "\cong"'] & \pi_1(T^n) \end{tikzcd}$$

I.7.9. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$\mathrm{U}_n := \big\{U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \;\big|\; U^*U = I_n\big\}$$

die Gruppe der unitären $(n \times n)$-Matrizen versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Etwa ist $\mathrm{U}_1 = S^1$. Die Abbildung

$$\varphi : S^1 \times \mathrm{SU}_n \to \mathrm{U}_n, \qquad \varphi(z, U) := \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} U$$

ist ein Homöomorphismus mit Inverser $\varphi^{-1}(U) = \big(\det U, \left(\begin{smallmatrix} \det U & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{smallmatrix}\right)^* U\big)$, siehe Beispiel I.6.9. Aus Proposition I.7.1 und Satz I.4.1 folgt $\pi_1(\mathrm{U}_n) \cong \mathbb{Z} \times \pi_1(\mathrm{SU}_n)$, wobei wir die Einheitsmatrix $I_n \in \mathrm{SU}_n \subseteq \mathrm{U}_n$ als Basispunkt verwenden. Zusammen mit Beispiel I.6.9 erhalten wir insbesondere $\pi_1(\mathrm{U}_2) \cong \mathbb{Z}$. Die Schleife $I \to \mathrm{U}_2$, $s \mapsto \left(\begin{smallmatrix} e^{2\pi i s} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(U_2)$. Allgemein gilt $\pi_1(\mathrm{U}_n) \cong \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, wie wir später zeigen werden.

I.7.10. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) := \big\{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\big\}$$

die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen mit komplexen Eintragungen, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Weiters sei

$$\Delta_n(\mathbb{C}) := \big\{D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) : D_{i,i} \in (0, \infty) \text{ für alle } i, \text{ und } D_{i,j} = 0 \text{ falls } i > j\big\}$$

die Gruppe der komplexen oberen Dreiecksmatrizen mit positiven reellen Eintragungen auf der Diagonale, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Der Raum $\Delta_n(\mathbb{C})$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{n(n-1)/2}$ und daher einfach zusammenhängend. Die Abbildung

$$\varphi : \mathrm{U}_n \times \Delta_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \qquad \varphi(U, D) := UD \tag{I.7}$$

ist sicherlich wohldefiniert und stetig. Auch ist leicht einzusehen, dass φ injektiv ist, denn aus $U_1 D_1 = U_2 D_2$, $U_i \in \mathrm{U}_n$, $D_i \in \Delta_n(\mathbb{C})$, folgt $U_2^{-1} U_1 = D_2 D_1^{-1} \in$

$\mathrm{U}_n \cap \Delta_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$, also $U_1 = U_2$ und $D_1 = D_2$. Tatsächlich ist (I.7) ein Homöomorphismus. Dies folgt aus dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren wie folgt. Sei $A = (v_1|v_2|\cdots|v_n) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit Spalten $v_i \in \mathbb{C}^n$. Definiere rekursiv

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}_1 &:= v_1 & u_1 &:= \tfrac{1}{|\tilde{u}_1|}\tilde{u}_1\\
\tilde{u}_2 &:= v_2 - \langle v_2, u_1\rangle u_1 & u_2 &:= \tfrac{1}{|\tilde{u}_2|}\tilde{u}_2\\
&\ \vdots\\
\tilde{u}_k &:= v_k - \langle v_k, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_k, u_{k-1}\rangle u_{k-1} & u_k &:= \tfrac{1}{|\tilde{u}_k|}\tilde{u}_k\\
&\ \vdots\\
\tilde{u}_n &:= v_n - \langle v_n, u_1\rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1}\rangle u_{n-1} & u_n &:= \tfrac{1}{|\tilde{u}_n|}\tilde{u}_n
\end{aligned}
$$

Nach Konstruktion bildet $(u_1, \dots, u_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$, also ist $\psi_1(A) := (u_1|u_2|\cdots|u_n) \in \mathrm{U}_n$. Dies liefert eine stetige Abbildung $\psi_1 : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{U}_n$, $A \mapsto \psi_1(A)$. Beachte weiters, dass

$$\underbrace{\big(u_1\big|u_2\big|\cdots\big|u_n\big)}_{=\psi_1(A)} = \underbrace{\big(v_1\big|v_2\big|\cdots\big|v_n\big)}_{=A} \cdot \underbrace{D_1N_1D_2N_2\cdots D_nN_n}_{\in\Delta_n(\mathbb{C})}$$

wobei $D_k, N_k \in \Delta_n(\mathbb{C})$ durch

$$D_k = \begin{pmatrix} 1 & & & -\langle v_k,u_1\rangle & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -\langle v_k,u_{k-1}\rangle & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad N_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{|\tilde{u}_k|} & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Daher ist $\psi_1(A)^{-1}A = (D_1N_1\cdots D_nN_n)^{-1} \in \Delta_n(\mathbb{C})$ und wir erhalten eine stetige Abbildung $\psi_2 : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \Delta_n(\mathbb{C})$, $\psi_2(A) := \psi_1(A)^{-1}A$. Setzten wir $\psi := (\psi_1, \psi_2) : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{U}_n \times \Delta_n(\mathbb{C})$, dann gilt offensichtlich $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})}$, also ist (I.7) surjektiv. Zusammen mit der Injektivität von (I.7) folgt, dass ψ die Umkehrabbildung von φ ist. Also ist (I.7) tatsächlich ein Homöomorphismus. Da $\Delta_n(\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist folgt nun, dass die kanonische Inklusion $\iota : \mathrm{U}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ einen Isomorphismus $\iota_* : \pi_1(\mathrm{U}_n) \to \pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$ induziert, siehe Bemerkung I.7.3. Zusammen mit Beispiel I.7.9 erhalten wir $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})) \cong \pi_1(\mathrm{U}_2) \cong \mathbb{Z}$. Allgemein gilt $\pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, wie wir später sehen werden.

I.7.11. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \big\{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\big\}$$

die Gruppe der invertierbaren reellen $(n \times n)$-Matrizen, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Weiters sei

$$\Delta_n(\mathbb{R}) := \big\{D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : D_{i,i} \in (0,\infty) \text{ für alle } i, \text{ und } D_{i,j} = 0 \text{ falls } i > j\big\}$$

die Gruppe der reellen oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Eintragungen auf der Diagonale, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Der Raum $\Delta_n(\mathbb{R})$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ und daher einfach zusammenhängend. Schränken wir den Homöomorphismus aus Beispiel I.7.9 auf reelle Matrizen ein, so erhalten wir einen Homöomorphismus

$$\varphi : \mathrm{O}_n \times \Delta_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \qquad \varphi(A, D) := AD,$$

wobei $\mathrm{O}_n := \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : A^t A = I_n\}$ die Gruppe der orthogonalen Matrizen bezeichnet, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ induzierten Teilraumtopologie. Insbesondere sehen wir, dass die kanonische Inklusion $\iota : \mathrm{O}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ einen Isomorphismus $\iota_* : \pi_1(\mathrm{O}_n) \to \pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$ induziert, egal welchen Basispunkt in O_n wir verwenden. Beachte, dass die Gruppen O_n und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ nicht (weg)zusammenhängend sind, denn $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times$ ist surjektiv und $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nicht wegzusammenhängend.

I.7.12. Beispiel. Es bezeichne $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$ die Gruppe der reellen Matrizen mit positiver Determinante, und es sei $\mathrm{SO}_n := \{A \in \mathrm{O}_n : \det(A) = 1\}$ die *spezielle orthogonale Gruppe.* Durch Einschränken des Homöomorhismus aus Beispiel I.7.11 erhalten wir einen Homöomorphismus

$$\varphi : \mathrm{SO}_n \times \Delta_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}), \qquad (A, D) \mapsto AD.$$

Insbesondere sehen wir, dass die kanonische Inklusion $\iota : \mathrm{SO}_n \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ einen Isomorphsimus $\iota_* : \pi_1(\mathrm{SO}_n) \to \pi_1(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}))$ induziert. Es ist nicht schwer einen Homöomorphismus $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ zu konstruieren, siehe Aufgabe 10. Wir erhalten daher $\pi_1(\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_2) \cong \mathbb{Z}$. Für $n \geq 3$ gilt $\pi_1(\mathrm{SO}_n) \cong \mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wie wir später sehen werden.

I.7.13. Beispiel (Triviales Knotenkomplement). Betrachte $X := S^3 \setminus S^1$, wobei $S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ und $S^1 \subseteq S^3$ via $z \mapsto (z, 0)$. Die Abbildung $\varphi : X \to \mathbb{C} \times S^1$, $\varphi(z, w) := \big(\frac{z}{w}, \frac{w}{|w|}\big)$ ist ein Homöomorphismus, es gilt daher $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$. Genauer, die Inklusion $f : S^1 \to X$, $f(w) := (0, w)$, induziert einen Isomorphismus $f_* : \pi_1(S^1) \to \pi_1(X)$. Die Schleife $I \to X$, $s \mapsto (0, e^{2\pi \mathbf{i} s})$, repräsentiert daher einen Erzeuger in $\pi_1(X)$.

I.8. Homotopieinvarianz. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ heißen *homotop* falls eine stetige Abbildung $H : X \times I \to Y$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$ existiert. Dabei bezeichnet $H_t : X \to Y$ die stetige Abbildung $H_t(x) := H(x, t)$, $t \in I$. Jede solche Abbildung H wird eine *Homotopie* von f nach g genannt. Wir schreiben $f \simeq g$ oder $f \overset{H}{\simeq} g$. Ist $f : X \to Y$ homotop zu einer konstanten Abbildung, dh. existiert $y_0 \in Y$ mit $f \simeq c_{y_0}$ wobei $c_{y_0} : X \to Y$, $c_{y_0}(x) := y_0$, dann nennen wir f *nullhomotop.*

I.8.1. Proposition. *Homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen* $X \to Y$.

Beweis. Der Beweis ist völlig analog zu dem Beweis von Proposition I.1.1. Ist $f : X \to Y$ stetig, dann gilt $f \overset{H}{\simeq} f$ mit $H : X \times I \to Y$, $H(x,t) := f(x)$, also ist die Relation reflexsiv. Ist $f \overset{H}{\simeq} g$, dann folgt $g \overset{G}{\simeq} f$ mittels $G(x,t) := H(x, 1-t)$, also ist die Relation symmetrisch. Gilt $f \overset{H'}{\simeq} g$ und $g \overset{H''}{\simeq} h$ so definiert

$$H : X \times I \to Y, \qquad H(x,t) := \begin{cases} H'(x,2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H''(x,2t-1) & \text{falls } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach h, dh. $f \overset{H}{\simeq} h$, und damit ist die Relation auch transitiv. Die Stetigkeit von H folgt wieder aus Lemma I.1.2. □

Die mit obiger Äquivalenzrelation assoziierten Äquivalenzklassen werden *Homotopieklassen* genannt. Die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen $X \to Y$ wird mit $[X, Y]$ bezeichnet. Die von $f : X \to Y$ repräsentierte Klasse werden wir mit $[f]$ bezeichnen.

I.8.2. Beispiel. Bezeichnet $\{*\}$ den einpunktigen Raum, dann können wir $[\{*\}, X]$ mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X identifizieren. Dabei entspricht $[f] \in [\{*\}, X]$ die (wohldefinierte) Wegzusammenhangskomponente von X die $f(*)$ enthält.

I.8.3. Bemerkung. Die Menge der Homotopieklassen $[S^1, X]$ hängt eng mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ zusammen, siehe Satz I.8.28 unten.

I.8.4. Lemma. *Es seien* $f_0, f_1 : X \to Y$ *und* $g_0, g_1 : Y \to Z$ *stetige Abbildungen mit* $f_0 \simeq f_1$ *und* $g_0 \simeq g_1$. *Dann gilt auch* $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.

Beweis. Es seien $F : X \times I \to Y$ und $G : Y \times I \to Z$ Homotopien mit $f_0 \overset{F}{\simeq} f_1$ und $g_0 \overset{G}{\simeq} g_1$. Dann liefert $H : X \times I \to Z$, $H(x,t) := G(F(x,t),t)$ eine Homotopie von $g_0 \circ f_0$ nach $g_1 \circ f_1$, dh. $g_0 \circ f_0 \overset{H}{\simeq} g_1 \circ f_1$. □

I.8.5. Bemerkung. Eine stetige Abbildung $\varphi : Y_1 \to Y_2$ induziert eine Abbildung $\varphi_* : [X, Y_1] \to [X, Y_2]$, $\varphi_*([f]) := [\varphi \circ f]$. Nach Lemma I.8.4 ist φ_* wohldefiniert. Ist $\psi : Y_2 \to Y_3$ eine weitere stetige Abbildung, dann gilt offensichtlich $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : [X, Y_1] \to [X, Y_3]$ und $(\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{[X,Y]}$. Sind $\varphi_0, \varphi_1 : Y_1 \to Y_2$ homotop, so gilt $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_* : [X, Y_1] \to [X, Y_2]$, siehe Lemma I.8.4. Eine stetige Abbildung $\varphi : X_2 \to X_1$ induziert eine Abbildung $\varphi^* : [X_1, Y] \to [X_2, Y]$, $\varphi^*([f]) := [f \circ \varphi]$. Wieder ist φ^* wegen Lemma I.8.4 wohldefiniert. Ist $\psi : X_3 \to X_2$ eine weitere stetige Abbildung, dann gilt $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^* : [X_1, Y] \to [X_3, Y]$ und $(\mathrm{id}_X)^* = \mathrm{id}_{[X,Y]}$. Sind $\varphi_0, \varphi_1 : X_2 \to X_1$ homotop, so gilt $(\varphi_0)^* = (\varphi_1)^* : [X_1, Y] \to [X_2, Y]$, siehe Lemma I.8.4. Sind $\varphi : Y_1 \to Y_2$ und $\psi : X_2 \to X_1$ stetig, dann gilt $\varphi_* \circ \psi^* = \psi^* \circ \varphi_* : [X_1, Y_1] \to [X_2, Y_2]$.

I.8.6. Definition (Homotopieäquivalenz). Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ wird *Homotopieäquivalenz* genannt, falls eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ existiert, sodass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ gilt. Zwei topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent,* falls eine Homotopieäquivalenz $f : X \to Y$ existiert. In diesem Fall schreiben wir $X \simeq Y$, und sagen auch X und Y haben den selben *Homotopietyp.*

Jeder Homöomorphismus $f : X \to Y$ ist eine Homotopieäquivalenz, denn $g := f^{-1} : Y \to X$ erfüllt ja sogar $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Homöomorphe Räume sind daher stets homotopieäquivalent. Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ ist eine Homotopieäquivalenz, es gilt daher stets $X \simeq X$. Ist $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und $g : Y \to X$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$, $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$, dann ist trivialerweise auch $g : Y \to X$ eine Homotopieäquivalenz. Aus $X \simeq Y$ folgt daher $Y \simeq X$. Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Homotopieäquivalenzen, dann ist auch die Komposition $g \circ f : X \to Z$ eine Homotopieäquivalenz, siehe Lemma I.8.4. Aus $X \simeq Y$ und $Y \simeq Z$ folgt daher stets $X \simeq Z$.

Ein topologischer Raum heißt *kontrahierbar* falls er den Homotopietyp des einpunktigen Raumes $\{*\}$ hat. Ein topologischer Raum X ist genau dann kontrahierbar, wenn die konstante Abbildung $X \to \{*\}$ eine Homotopieäquivalenz ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $x_0 \in X$ existiert, sodass die Inklusion $\{x_0\} \to X$ eine Homotopieäquivalenz ist. Offensichtlich ist X kontrahierbar genau dann, wenn die identische Abbildung id_X nullhomotop ist, dh. wenn $x_0 \in X$ und eine Homotopie $H : X \times I \to X$ mit $H_0 = \mathrm{id}_X$ und $H_1 = c_{x_0}$ existieren, wobei $c_{x_0} : X \to X$, $c_{x_0}(x) := x_0$, die konstante Abbildung bezeichnet.[7] Ein kontrahierbarer Raum muss wegzusammenhängend sein, denn für $x \in X$ ist $t \mapsto H(x, t)$ ein Weg von x nach x_0. Ist X kontrahierbar und $x_1 \in X$ beliebig, dann gilt $\mathrm{id}_X \simeq c_{x_1}$, dh. die Inklusion $\{x_1\} \to X$ ist eine Homotopieäquivalenz, für jedes $x_1 \in X$. Letzteres folgt aus der Tatsache, dass ein Weg von x_0 nach x_1 als Homotopie zwischen der Inklusion $\{x_0\} \to X$ und der Inklusion $\{x_1\} \to X$ aufgefasst werden kann.

I.8.7. Definition (Deformationsretrakt). Ein Teilraum A eines topologischen Raumes X heißt *Deformationsretrakt* von X falls eine Homotopie $H : X \times I \to X$ mit folgenden Eigenschaften existiert: $H_0 = \mathrm{id}_X$, $H_1(X) \subseteq A$ und $H_t|_A = \mathrm{id}_A$ für alle $t \in I$. In diesem Fall wird $r := H_1 : X \to A$ als *Deformationsretraktion* bezeichnet, und H wird manchmal eine *retrahierende Deformation* genannt. Bezeichnet $\iota : A \to X$ die kanonische Inklusion, so gilt $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$, Deformationsretraktionen sind daher Retraktionen. Schließlich ist $\iota : A \to X$ eine Homotopieäquivalenz, denn $\mathrm{id}_X \overset{H}{\simeq} \iota \circ r$.[8]

[7] Es ist nicht verlangt, dass die Homotopie den Punkt x_0 festhält, dh. wir verlangen nicht, dass $H(x_0, t) = x_0$ gilt.

[8] Wir folgen hier den Definitionen in [**15**, page 24] oder [**4**, page 2]. In [**14**, Definition 2.4.3] oder [**11**, page 30] wird dies als *strenger* Deformationsretrakt bezeichnet. Verlangen wir statt $H_t|_A = \mathrm{id}_A$ nur $H_1|_A = \mathrm{id}_A$ dann erhalten wir den Begriff des *schwachen Deformationsretrakts.*

I.8.8. Beispiel. Die Sphäre S^{n-1} ist Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, es ist nämlich $H : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $H(x,t) := (1-t)x + \frac{t}{|x|}x$ eine retrahierende Deformation. Insbesondere ist die kanonische Inklusion $S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Homotopieäquivalenz.

I.8.9. Beispiel (Möbiusband). Auf $I \times [-1,1]$ betrachte die von $(0,y) \sim (1,-y)$, $y \in [-1,1]$, erzeugte Äquivalenzrelation. Der damit assoziierten Quotientenraum $M := (I \times [-1,1])/\sim$ wird *Möbiusband* genannt. Es bezeichne $p : I \times [-1,1] \to M$ die kanonische Projektion und $S := p(I \times \{0\})$. Die retrahierende Deformation $\tilde{H} : (I \times [-1,1]) \times I \to I \times [-1,1]$, $\tilde{H}(x,y,t) := (x,(1-t)y)$, faktorisiert zu einer retrahierenden Deformation $H : M \times I \to M$, $p \circ \tilde{H}_t = H_t \circ p$, von M auf S. Daher ist S ein Deformationsretrakt von M und die Inklusion $S \to M$ eine Homotopieäquivalenz. Da S homöomorph zu S^1 ist, erhalten wir $\pi_1(M) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Die Schleife $I \to M$, $s \mapsto p(s,0)$, repräsentiert einen Erzeuger von $\pi_1(M)$.

I.8.10. Beispiel (Sternförmige Teilmengen). Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig,* falls $z \in X$ mit folgender Eigenschaft existiert: $x \in X,\ t \in [0,1] \Rightarrow tz + (1-t)x \in X$. Dies bedeutet gerade, dass die affine Strecke von x nach z zur Gänze in X liegt. Jedes solche z wird ein Zentrum von X genannt. Ist z ein Zentrum von X, dann ist $\{z\}$ ein Deformationsretrakt von X, eine retrahierende Deformation ist durch $H : X \times I \to X$, $H(x,t) := tz + (1-t)x$ gegeben. Insbesondere ist die Inklusion $\{z\} \to X$ eine Homotopieäquivalenz. Sternförmige Teilmengen sind daher stets kontrahierbar. Dasselbe gilt für konvexe Teilmengen, denn konvexe Teilmengen sind sternförmig, jeder ihrer Punkte ist Zentrum.

I.8.11. Beispiel. Ist A Deformationsretrakt von X, und ist B Deformationsretrakt von Y, dann ist $A \times B$ Deformationsretrakt von $X \times Y$. Sind nämlich $G : X \times I \to X$ und $H : Y \times I \to Y$ retrahierende Deformationen von X auf A bzw. von Y auf B, so ist $(x,y,t) \mapsto \big(G(x,t), H(x,t)\big)$ eine retrahierende Deformation von $X \times Y$ auf $A \times B$.

I.8.12. Beispiel. Die unitäre Gruppe U_n ist Deformationsretrakt von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, siehe Beispiel I.7.10 sowie die Beispiele I.8.10 und I.8.11. Insbesondere ist die kanonische Inklusion $\mathrm{U}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Homotopieäquivalenz.

I.8.13. Beispiel. Die orthogonale Gruppe O_n ist Deformationsretrakt von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, siehe Beispiel I.7.11 sowie die Beispiele I.8.10 und I.8.11. Insbesondere ist die kanonische Inklusion $\mathrm{O}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Homotopieäquivalenz.

I.8.14. Beispiel. Die spezielle orthogonale Gruppe SO_n ist Deformationsretrakt von $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, siehe Beispiel I.7.12 sowie die Beispiele I.8.10 und I.8.11. Insbesondere ist die kanonische Inklusion $\mathrm{SO}_n \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ eine Homotopieäquivalenz.

In diesem Fall ist $r : X \to A$ immer noch eine Retraktion, und auch die Inklusion $\iota : A \to X$ ist eine Homotopieäquivalenz.

Zwei Abbildungen punktierter Räume $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ heißen *homotop relativ Basispunkt* falls eine stetige Abbildung $H : I \times X \to Y$ mit $H_0 = f$, $H_1 = g$ und $H(x_0, t) = y_0$, für alle $t \in I$, existiert. Jede solche Abbildung H heißt eine *Homotopie relativ Basispunkt* von f nach g. Für jedes $t \in I$ ist $H_t : (X, x_0) \to (Y, y_0)$, $H_t(x) := H(x, t)$, eine Abbildung punktierter Räume. Wie in Proposition I.8.1 lässt sich zeigen, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen punktierter Räume liefert. Die Äquivalenzklassen werden wir mit $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ bezeichnen. Auch Lemma I.8.4 bleibt sinngemäß für Abbildungen punktierter Räume richtig. Eine Abbildung punktierter Räume $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ wird *Homotopieäquivalenz punktierter Räume* genannt, falls eine Abbildung punktierter Räume $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ existiert, sodass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ relativ Basispunkt und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ relativ Basispunkt. In diesem Fall schreiben wir $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$.

I.8.15. Beispiel. Ist A ein Deformationsretrakt von X und $x_0 \in A$, dann ist die kanonische Inklusion $(A, x_0) \to (X, x_0)$ eine Homotopieäquivalenz punktierter Räume.[9]

I.8.16. Beispiel. Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann können wir die Menge $[(S^0, 1), (X, x_0)]$ mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X identifizieren. Dabei entspricht $[f] \in [(S^0, 1), (X, x_0)]$ die (eindeutig bestimmte) Wegzusammenhangskomponente von X die $f(-1)$ enthält.

I.8.17. Beispiel. Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann kann die Menge $[(S^1, 1), (X, x_0)]$ auf kanonische Art mit $\pi_1(X, x_0)$ identifiziert werden, siehe Proposition I.8.27 unten.

I.8.18. Proposition. *(Homotopieinvarianz) Sind $\varphi, \psi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ homotop relativ Basispunkt, dann induzieren diese denselben Homomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen, dh. $\varphi_* = \psi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.*

Beweis. Sei $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0. Weiters sei $H : X \times I \to Y$ eine Homotopie relativ Basispunkt von $H_0 = \varphi$ nach $H_1 = \psi$. Dann ist $G : I \times I \to Y$, $G(s, t) := H(f(s), t)$, eine Homotopie relativ Endpunkten von $G_0 = H_0 \circ f = \varphi \circ f$ nach $G_1 = H_1 \circ f = \psi \circ f$, also $\varphi \circ f \overset{G}{\simeq} \psi \circ f$ und damit $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f] = [\psi \circ f] = \psi_*([f])$. □

I.8.19. Beispiel. Betrachte wieder die Abbildungen $\mu_A : (T^n, x_0) \to (T^n, x_0)$ aus Beispiel I.7.8, wobei $x_0 = (1, \dots, 1) \in T^n$. Aus Proposition I.8.18 und der Berechnung des induzierten Homomorphismus in Beispiel I.7.8 sehen wir, dass μ_A und μ_B nicht homotop relativ Basispunkt sind, falls $A \neq B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$.

I.8.20. Proposition. *Ist $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ eine Homotopieäquivalenz punktierter Räume, dann induziert diese einen Isomorphimus zwischen den Fundamentalgruppen, $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$.*

[9] Ist A nur ein schwacher Deformationsretrakt, dann ist die Inklusion $(A, x_0) \to (X, x_0)$ i.A. keine Homotopieäquivalenz punktierter Räume.

Beweis. Sei dazu $\psi : (Y, y_0) \to (X, x_0)$, sodass $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_X$ relativ Basispunkt und $\varphi \circ \psi \simeq \mathrm{id}_Y$ relativ Basispunkt. Aus Proposition I.8.18 folgt $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ sowie $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y,y_0)}$. Also sind φ_* und ψ_* zueinander inverse Gruppenisomorphismen. □

I.8.21. Proposition. *Es sei $H : X \times I \to Y$ eine Homotopie, $x_0 \in X$, $y_0 := H_0(x_0)$, $y_1 := H_1(x_0)$, und es bezeichne $h : I \to Y$ den Weg $h(t) := H(x_0, t)$ von y_0 nach y_1. Dann gilt $(H_0)_* = \beta_h \circ (H_1)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0)$.*

Beweis. Sei also $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0. Die Abbildung

$$G : I \times I \to Y, \qquad G(s,t) := \begin{cases} h(4s) & \text{falls } 0 \leq s \leq t/4, \\ H\big(f\big(\frac{4s-t}{4-3t}\big), t\big) & \text{falls } t/4 \leq s \leq 1 - t/2, \\ h(2-2s) & \text{falls } 1 - t/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

definiert eine Homotopie relativ Endpunkten in Y von $G_0 = H_0 \circ f$ nach $G_1 = \big(h(H_1 \circ f)\big)\bar{h}$. Also gilt $(H_0)_*([f]) = [H_0 \circ f] = [G_0] = [G_1] = [h(H_1 \circ f)\bar{h}] = \beta_h\big([H_1 \circ f]\big) = \big(\beta_h \circ (H_1)_*\big)([f])$. □

I.8.22. Satz (Homotopieinvarianz). *Ist $\varphi : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und $x_0 \in X$, dann ist $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Da φ eine Homtopieäquivalenz ist, existieren eine stetige Abbildung $\psi : Y \to X$ sowie Homotopien $H : X \times I \to X$ und $G : Y \times I \to Y$ mit $\psi \circ \varphi \overset{H}{\simeq} \mathrm{id}_X$ und $\varphi \circ \psi \overset{G}{\simeq} \mathrm{id}_Y$. Betrachte den Weg $h : I \to X$, $h(t) := H(x_0, t)$ von $\psi(\varphi(x_0))$ nach x_0, und den Weg $g : I \to Y$, $g(t) := G(\varphi(x_0), t)$ von $\varphi(\psi(\varphi(x_0)))$ nach $\varphi(x_0)$. Nach Proposition I.8.21 gilt $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (H_0)_* = \beta_h \circ (H_1)_* = \beta_h \circ (\mathrm{id}_X)_* = \beta_h$ sowie $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (G_0)_* = \beta_g \circ (G_1)_* = \beta_g \circ (\mathrm{id}_Y)_* = \beta_g$. Daher kommutiert das nebenstehende Diagramm.

$$\begin{tikzcd} \pi_1\big(X, x_0\big) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\beta_h"', "\cong"] & \pi_1\big(Y, \varphi(x_0)\big) \arrow[d, "\cong"', "\beta_g"] \arrow[dl, "\psi_*"'] \\ \pi_1\big(X, \psi\varphi(x_0)\big) \arrow[r, "\varphi_*"] & \pi_1\big(Y, \varphi\psi\varphi(x_0)\big) \end{tikzcd}$$

Nach Proposition I.3.5 ist β_h ein Isomorphismus, also muss ψ_* surjektiv sein. Da β_g ein Isomorphismus ist, muss ψ_* auch injektiv sein. Damit ist ψ_* ein Isomorphismus, woraus wir nun schließen, dass $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ ein Isomorphismus sein muss. □

I.8.23. Korollar. *Kontrahierbare Räume sind einfach zusammenhängend.*

Beweis. Ein kontrahierbarer Raum X ist wegzusammenhägend, siehe oben, und die konstante Abbildung $X \to \{*\}$ ist eine Homotopieäquivalenz. Nach Satz I.8.22 induziert diese einen Isomorphismus $\pi_1(X) \cong \pi_1(\{*\})$. Aus $\pi_1(\{*\}) = 0$ folgt daher auch $\pi_1(X) = 0$. □

I.8.24. Bemerkung. Aus Propostion I.6.2 folgt, dass wir die Fundamentalgruppe als eine *topologische Invariante* wegzusammenhängender Räume auffassen können, dh. homöomorphe wegzusammenhängende topologische Räume müssen isomorphe Fundamentalgruppen haben. Satz I.8.22 besagt nun, dass die Fundamentalgruppe sogar eine *Homotopieinvariante* wegzusammenhängender Räume liefert, dh. homotopieäquivalente wegzusammenhängende topologische Räume müssen isomorphe Fundamentalgruppen haben. In anderen Worten, sind die Fundamentalgruppen zweier wegzusammenhängender Räume nicht isomorph, dann können die Räume nicht einmal homotopieäquivalent sein.

I.8.25. Beispiel. S^n und T^n sind nicht homotopieäquivalent, $n \geq 2$, denn $\pi_1(S^n) = 0$ nach Satz I.6.7 und $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n$ nach Beispiel I.7.7, siehe auch Bemerkung I.8.24.

Ist A ein nichtleerer Teilraum eines topologischen Raumes X, dann schreiben wir X/A für den Raum der aus X entsteht wenn wir A zu einem einzigen Punkt kollabieren. Genauer bezeichnet $\sim$ die von $a \sim b$, $a, b \in A$, erzeugte Äquivalenzrelation auf X, dann definieren wir $X/A := X/\!\sim$ und versehen X/A mit der Quotiententopologie. Wir erhalten eine stetige Abbildung $p : X \to X/A$, die als *kanonische Projektion* bezeichnet wird. Sie bildet ganz A auf einen einzigen Punkt in X/A ab den wir mit $* := p(A)$ bezeichnen. Wir können den Quotienten daher auch als punktierten Raum $(X/A, *)$ auffassen.

I.8.26. Beispiel (Kegel). Ist X ein topologischer Raum, dann wird

$$CX := (X \times I)/(X \times \{0\})$$

der Kegel über X genannt. Der Basispunkt $\{*\}$ ist ein Deformationsretrakt von CX, die Abbildung $H : (X \times I) \times I \to X \times I$, $H(x, s, t) := (x, (1-t)s)$, faktorisiert zu einer retrahierenden Deformation von CX auf $\{*\}$. Nach Korollar I.8.23 ist CX daher einfach zusammenhängend.

Unter der *Einpunktvereinigung* zweier punktierter Räume (X, x_0) und (Y, y_0) verstehen wir den punktierten Raum der aus der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ durch Identifikation der beiden Punkte x_0 und y_0 ensteht. Genauer,

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := \big((X \sqcup Y)/\{x_0, y_0\}, *\big).$$

Die beiden Abbildungen punktierter Räume $\iota_X : (X, x_0) \to (X, x_0) \vee (Y, y_0)$, $\iota_X(x) := [(x, y_0)]$, und $\iota_Y : (Y, y_0) \to (X, x_0) \vee (Y, y_0)$, $\iota_Y(y) := [(x_0, y)]$, werden als *kanonische Einbettungen* bezeichnet. Beide sind Homöomorphismen auf ihr Bild, wir können daher (X, x_0), und ebenso (Y, y_0), als Teilraum von $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ auffassen. Die Einpunktvereinigung hat die folgende *universelle Eigenschaft.* Sind $\varphi_X : (X, x_0) \to (Z, z_0)$ und $\varphi_Y : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ zwei Abbildungen punktierter Räume, dann existiert eine eindeutige Abbildung punktierter Räume $\varphi : (X, x_0) \vee (Y, y_0) \to (Z, z_0)$, sodass $\varphi \circ \iota_X = \varphi_X$ und $\varphi \circ \iota_Y = \varphi_Y$,

$$\begin{tikzcd}
(X, x_0) \arrow[d, "\iota_X"'] \arrow[dr, bend left, "\varphi_X"] & \\
(X, x_0) \vee (Y, y_0) \arrow[r, dashed, "\exists!\varphi"] & (Z, z_0) \\
(Y, y_0) \arrow[u, "\iota_Y"] \arrow[ur, bend right, "\varphi_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

siehe nebenstehendes Diagramm. Diese Abbildung ist durch $\varphi(x, y_0) := \varphi_X(x)$, $x \in X$, und $\varphi(x_0, y) := \varphi_Y(y)$, $y \in Y$, gegeben und wird mit $\varphi_X \vee \varphi_Y$ bezeichnet. Beachte, dass $\varphi_X(x_0) = z_0 = \varphi_Y(y_0)$ und daher $\varphi_X \vee \varphi_Y$ wohldefiniert ist.

Betrachte nun wieder $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ mit Basispunkt $1 \in S^1$. Weiters bezeichnen $\iota_1 : (S^1, 1) \to (S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ und $\iota_2 : (S^1, 1) \to (S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ die beiden kanonischen Inklusionen. Wir erhalten eine Abbildung punktierter Räume

$$v : (S^1, 1) \to (S^1, 1) \vee (S^1, 1), \qquad v(z) := \begin{cases} \iota_1(z^2) & \text{falls } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \iota_2(z^2) & \text{falls } \operatorname{Im} z \leq 0. \end{cases} \tag{I.8}$$

Mit Hilfe dieser Abbildung können wir nun eine alternative Beschreibung der Fundamentalgruppe geben.

I.8.27. Proposition. *Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann definiert*

$$\Psi = \Psi_{(X,x_0)} : [(S^1, 1), (X, x_0)] \to \pi_1(X, x_0), \qquad \Psi([f]) := [f \circ \omega_1],$$

eine Bijektion, siehe (I.1)*. Darüberhinaus gilt $\Psi([f])\Psi([g]) = \Psi([(f \vee g) \circ v])$ und $\Psi([f])^{-1} = \Psi([f \circ \sigma])$, wobei v die Abbildung aus* (I.8) *bezeichnet und $\sigma : (S^1, 1) \to (S^1, 1)$ durch $\sigma(z) := z^{-1} = \bar{z}$ gegeben ist.*

Beweis. Zunächst ist Ψ wohldefiniert, denn sind $f, g : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ homotop relativ Basispunkt, $f \overset{H}{\simeq} g$, dann ist $(s, t) \mapsto H(\omega_1(s), t)$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $f \circ \omega_1$ nach $g \circ \omega_1$, also $[f \circ \omega_1] = [g \circ \omega_1] \in \pi_1(X, x_0)$. Beachte, dass $\omega_1 : I \to S^1$ zu einem Homöomorphismus $I/\{0, 1\} \to S^1$ faktorisiert. Daher definiert $f \mapsto f \circ \omega_1$ eine Bijektion zwischen der Menge der Abbildungen punktierter Räume $(S^1, 1) \to (X, x_0)$ und der Menge der Schleifen bei x_0. Es folgt sofort, dass ϕ surjektiv ist. Wir sehen aber auch, dass $H \mapsto H \circ (\omega_1 \times \mathrm{id}_I)$ eine Bijektion zwischen der Menge der basispunkterhaltenden Homotopien $S^1 \times I \to X$ mit $H_t(1) = x_0$ und der Menge der Homotopien $I \times I \to X$ relativ Endpunkt x_0 liefert. Daraus folgt nun auch die Injektivität von ϕ. Nun zur Beschreibung der Gruppenstruktur. Für $f : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ gilt $\Psi([f])^{-1} = [f \circ \omega_1]^{-1} = [\overline{f \circ \omega_1}] = [f \circ \bar{\omega}_1] = [f \circ \sigma \circ \omega_1] = \Psi([f \circ \sigma])$. Ist weiters $g : (S^1, 1) \to (X, x_0)$ dann gilt

$$\big((f \vee g) \circ v \circ \omega_1\big)(s) = \begin{cases} (f \vee g)(\iota_1(\omega_1(2s))) = f(\omega_1(2s)) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ (f \vee g)(\iota_2(\omega_1(2s-1))) = g(\omega_1(2s-1)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

wobei wir $\omega_1(s)^2 = \omega_1(2s) = \omega_1(2s-1)$ im ersten Gleichheitszeichen verwendet haben. Wir schließen $(f \vee g) \circ v \circ \omega_1 = (f \circ \omega_1)(g \circ \omega_1)$, also $\Psi\big([(f \vee g) \circ v]\big) = \Psi([f])\Psi([g])$. $\square$

Für einen punktierten Raum (X, x_0) sei $\Phi_{(X,x_0)}$ durch die Komposition

$$\Phi_{(X,x_0)} : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\Psi^{-1}_{(X,x_0)}} \big[(S^1, 1), (X, x_0)\big] \to [S^1, X], \tag{I.9}$$

definiert, wobei $\Psi_{(X,x_0)}$ die Abbildung aus Proposition I.8.27 bezeichnet und $\big[(S^1,1),(X,x_0)\big] \to [S^1,X]$ einer Homotopieklasse relativ Basispunkt die entsprechende sogenannte *freie Homotopieklasse* zuordnet.

I.8.28. Satz. *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$. Die Abbildung $\Phi_{(X,x_0)}$ aus* (I.9) *induziert eine Bijektion zwischen der Menge der Konjugationsklassen*[10] *von $\pi_1(X,x_0)$ und $[S^1,X]$. Für jeden Weg h von $x_0 = h(0)$ nach $x_1 = h(1)$ gilt weiters $\Phi_{(X,x_1)} = \Phi_{(X,x_0)} \circ \beta_h$, vgl. Proposition I.3.5. Schließich gilt $\varphi_* \circ \Phi_{(X,x_0)} = \Phi_{(Y,\varphi(x_0))} \circ \varphi_*$, für jede stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$, vgl. Bemerkung I.8.5.*

Beweis. Es sei $h : I \to X$ ein Weg von $x_0 := h(0)$ nach $x_1 := h(1)$. Weiters sei $f : I \to X$ eine Schleife bei x_1. Dann definiert

$$\tilde{G} : I \times I \to X, \qquad \tilde{G}(s,t) := \begin{cases} h(4s+t) & \text{falls } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{4}, \\ f\big(\frac{4s+t-1}{3t+1}\big) & \text{falls } \frac{1-t}{4} \leq s \leq \frac{1+t}{2}, \\ h(2-2s+t) & \text{falls } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie von $\tilde{G}_0 = (hf)\bar{h}$ nach $\tilde{G}_1 = f$. Dies ist i.A. keine Homotopie relativ Endpunkten, es gilt jedoch $\tilde{G}(i,t) = h(t)$, für $i = 0,1$ und alle $t \in I$. Daher faktorisiert $\tilde{G}$ zu einer Homotopie $G : S^1 \times I \to X$, $G(\omega_1(s),t) = H(s,t)$. Wir erhalten $\Phi_{(X,x_1)}([f]) = \Phi_{(X,x_0)}([hf\bar{h}]) \in [S^1,X]$, und damit $\Phi_{(X,x_1)} = \Phi_{(X,x_0)} \circ \beta_h$. Für Wege mit $h(0) = x_0 = x_1 = h(1)$ besagt dies gerade, dass konjugierte Elemente in $\pi_1(X,x_0)$ auf dasselbe Element in $[S^1,X]$ abgebildet werden. Auch die Surjektivität von $\Phi_{(X,x_0)}$ folgt aus dieser Konstruktion. Ist nämlich $\tilde{f} : S^1 \to X$ stetig dann finden wir auf Grund des Wegzusammenhangs von X einen Weg Weg h von $h(0) = x_0$ nach $h(1) = f(1)$, und G definiert eine Homotopie zwischen $G_1 = \tilde{f}$ und der Schleife G_0 die wegen $G_0(1) = x_0$ im Bild der Abbildung $\big[(S^1,1),(X,x_0)\big] \to [S^1,X]$ liegt. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\Phi_{(X,x_0)}$ auf der Menge der Konjugationsklassen injektiv ist. Seien also $f_0, f_1 : I \to X$ Schleifen bei x_0, sodass $\Phi_{(X,x_0)}([f_0]) = \Phi([f_1])$. Es ist zu zeigen, dass $[f_0]$ und $[f_1]$ in $\pi_1(X,x_0)$ konjugiert sind. Nach Voraussetzung existiert eine Homotopie $H : S^1 \times I \to X$ mit $H_0 \circ \omega_1 = f_0$ und $H_1 \circ \omega_1 = f_1$. Betrachte nun die Schleife $h : I \to X$, $h(t) := H(1,t)$, und

$$F : I \times I \to X, \qquad F(s,t) := \begin{cases} h(4s) & \text{falls } 0 \leq s \leq t/4, \\ H\big(\omega_1\big(\frac{4s-t}{4-3t}\big),t\big) & \text{falls } t/4 \leq s \leq 1-t/2, \\ h(2-2s) & \text{falls } 1-t/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Dies ist eine Homotopie relativ Endpunkten von $F_0 = H_0 \circ \omega_1 = f_0$ nach $F_1 = (h(H_1 \circ \omega_1))\bar{h} = (hf_1)\bar{h}$. Damit ist $[f_0] = [hf_1\bar{h}] = [h][f_1][h]^{-1}$, also sind $[f_0]$

[10]Zwei Elemente g_1 und g_2 einer Gruppe G heißen *konjugiert,* falls $h \in G$ mit $g_2 = hg_1h^{-1}$ existiert. Dies definiert offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf G. Die damit assoziierten Äquivalenzklassen werden *Konjugationsklassen* von G genannt.

und $[f_1]$ konjugierte Elemente in $\pi_1(X, x_0)$. Die letzte Behauptung, $f_* \circ \Phi_{(X,x_0)} = \Phi_{(Y,f(x_0))} \circ f_*$, ist offensichtlich. $\square$

I.8.29. Korollar (Einfacher Zusammenhang). *Für einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X sind äquivalent:*

(i) $\pi_1(X) = 0$, *dh. X ist einfach zusammenhängend.*
(ii) *Jede stetige Abbildung $f : S^1 \to X$ ist nullhomotop.*
(iii) *Jede stetige Abblidung $f : S^1 \to X$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $F : D^2 \to X$ fortsetzen, dh. $f = F \circ \iota$, wobei $\iota : S^1 \to D^2$ die kanonische Inklusion bezeichnet.*

Beweis. Die Äquivalenz (i)⇔(ii) folgt aus Satz I.8.28 und der Beobachtung, dass die Menge der Äquivalenzklassen einer Gruppe G genau dann einpunktig ist, wenn G nur aus dem neutralen Element besteht. Betrachte nun die stetige Abbildung $\varphi : S^1 \times I \to D^2 \subseteq \mathbb{C}$, $\varphi(z,t) := tz$. Existiert eine stetige Abbildung $F : D^2 \to X$ mit $F \circ \iota = f$, dann liefert $H := F \circ \varphi : S^1 \times I \to X$ eine Homotopie von der konstanten Abbildung $H_0 = c_{F(0)}$ nach $H_1 = F \circ \iota = f$. Damit ist die Implikation (iii)⇒(ii) gezeigt. Sei nun umgekehrt $H : S^1 \times I \to X$ eine Homotopie von einer konstanten Abbildung $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = f$. Beachte, dass φ einen Homöomorphismus $(S^1 \times I)/(S^1 \times \{0\}) \cong D^2$ induziert. Daher faktorisiert H zu einer stetigen Abbildung $F : D^2 \to X$, $F \circ \varphi = H$, für die dann $F \circ \iota = H_1 = f$ gilt. Damit ist auch die Implikation (ii)⇒(iii) gezeigt. $\square$

I.8.30. Beispiel. Betrachte wieder die Abbildungen $\mu_A : (T^n, x_0) \to (T^n, x_0)$ aus Beispiel I.7.8, wobei $x_0 = (1, \dots, 1) \in T^n$. Seien nun $A \neq B \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z})$. In Beispiel I.8.19 haben wir bereits gezeigt, dass μ_A und μ_B nicht homotop relativ Basispunkt sein können, denn die induzierten Homomorphismen $(\mu_A)_*, (\mu_B)_* : \pi_1(T^n, x_0) \to \pi_1(T^n, x_0)$ stimmen nicht überein. Mittels Satz I.8.28 sehen wir nun, dass auch die induzierten Abbildungen $(\mu_A)_*, (\mu_B)_* : [S^1, T^n] \to [S^1, T^n]$ verschieden sind, denn $\Phi_{(T^n,x_0)} : \pi_1(T^n, x_0) \to [S^1, T^n]$ ist bijektiv da $\pi_1(T^n, x_0)$ abelsch ist. Also können μ_A und μ_B nicht einmal homotop sein, siehe Bemerkung I.8.5. In anderen Worten, die Abbildung $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z}) \to [T^n, T^n]$, $A \mapsto [\mu_A]$, ist injektiv. Wir werden später sehen, dass diese Abbildung sogar bijektiv ist, $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Z}) \cong [T^n, T^n]$. Im Fall $n = 1$ folgt dies aus Satz I.8.31(i) unten.

Es sei $f : S^1 \to S^1$ stetig. Weiters sei $h : I \to S^1$ ein Weg von $h(0) = 1$ nach $h(1) = f(1)$. Betrachte die Gruppenhomomorphismen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, f(1)) \xrightarrow{\beta_h} \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbb{Z},$$

siehe Satz I.4.1 und Proposition I.3.5. Nach Bemerkung I.3.7 ist deren Komposition unabhängig von der Wahl des Weges h, denn $\pi_1(S^1)$ ist abelsch. Als Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ muss sie durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl gegeben sein. Diese Zahl wird der *Abbildungsgrad* von f genannt und mit $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ bezeichnet. Es gilt daher $\beta_h(f_*(\phi(k))) = \phi(k \deg(f))$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

I.8.31. Satz. *Für den Abbildungsgrad stetiger Funktionen $S^1 \to S^1$ gilt:*

(i) $\deg(f) = \deg(g) \Leftrightarrow f \simeq g$.
(ii) $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$.
(iii) $\deg(f) = n$, *falls* $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.
(iv) *Ist* $\deg(f) \neq 0$ *dann muss* $f : S^1 \to S^1$ *surjektiv sein.*

Beweis. Wir leiten zunächst eine etwas andere Beschreibung des Abbildungsgrades her. Wenden wir auf $\phi(\deg(f)) = \beta_h(f_*(\phi(1)))$ die Abbildung $\Phi_{(S^1,1)}$ aus Satz I.8.28 an, so erhalten wir $\big(\Phi_{(S^1,1)} \circ \phi\big)(\deg(f)) = \Phi_{(S^1,1)}(\beta_h(f_*(\phi(1)))) = \Phi_{(S^1,f(1))}(f_*(\phi(1))) = \Phi_{(S^1,f(1))}([f \circ \omega_1]) = [f] \in [S^1, S^1]$. Nach Satz I.8.28 ist die Abbildung $\Phi_{(S^1,1)} \circ \phi : \mathbb{Z} \to [S^1, S^1]$ bijektiv, denn $\pi_1(S^1)$ ist abelsch. Wir erhalten $\deg(f) = \big(\Phi_{(S^1,1)} \circ \phi\big)^{-1}([f])$ woraus nun auch die erste Behauptung folgt. Nun zu (ii). Da nach Satz I.8.28 jede stetige Abbildung $S^1 \to S^1$ homotop zu einer den Basispunkt 1 fixierenden Abbildung ist, dürfen wir nach (i) o.B.d.A. annehmen $f(1) = 1 = g(1)$. Daher gilt $f_*(\phi(k)) = \phi(k \deg(f))$ sowie $g_*(\phi(k)) = \phi(k \deg(g))$, $k \in \mathbb{Z}$. Es folgt $(f \circ g)_*(\phi(k)) = f_*(g_*(\phi(k))) = f_*(\phi(k \deg(g))) = \phi(k \deg(g) \deg(f))$, also $\deg(f \circ g) = \deg(f)\deg(g)$. Behauptung (iii) folgt aus Beispiel I.6.5. Um (iv) einzusehen nehmen wir an, dass $f : S^1 \to S^1$ nicht surjektiv ist. Dann existiert $P \in S^1$, sodass $f : S^1 \to S^1 \setminus \{P\}$, also faktorisiert $f_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1\big(S^1 \setminus \{P\}, f(1)\big) \to \pi_1(S^1, f(1))$. Nach Beispiel I.6.6 ist $\pi_1(S^1 \setminus \{P\}) = 0$, also stimmt f_* mit dem trivialen Homomorphismus überein, es muss daher $\deg(f) = 0$ gelten. □

I.8.32. Bemerkung. Für stetig differenzierbares $f : S^1 \to S^1$ gilt

$$\deg(f) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{f \circ \omega_1} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial s} f(e^{2\pi\mathbf{i}s})}{f(e^{2\pi\mathbf{i}s})} ds.$$

Um dies einzusehen sei o.B.d.A. $f(1) = 1$, siehe Satz I.8.31(i). Definiere nun $\tilde{f} : I \to \mathbb{C}$, $\tilde{f}(t) := \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial s} f(e^{2\pi\mathbf{i}s})}{f(e^{2\pi\mathbf{i}s})} ds$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir sofort $\frac{\partial}{\partial t}\big(f(e^{2\pi\mathbf{i}t}) e^{-2\pi\mathbf{i}\tilde{f}(t)}\big) = 0$ und daher $f(e^{2\pi\mathbf{i}t}) = e^{2\pi\mathbf{i}\tilde{f}(t)}$. Insbesondere ist $\tilde{f}$ reellwertig und $n := \tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$. Weiters sehen wir, dass $\tilde{f}$ ein Lift des Weges $f \circ \omega_1$ ist, dh. $p \circ \tilde{f} = f \circ \omega_1$, siehe (I.2). Da $\tilde{f}$ ein Weg von 0 nach n ist, muss $\tilde{f} \simeq \tilde{\omega}_n$ gelten, woraus wir $f \circ \omega_1 = p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$ erhalten. Damit ist $f_*([\omega_1]) = [\omega_n] \in \pi_1(S^1, 1)$, also gilt tatsächlich $\deg(f) = n = \tilde{f}(1) = \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \int_{f \circ \omega_1} \frac{dz}{z}$.

I.9. Der Satz von Seifert–van Kampen. Im Satz von Seifert–van Kampen, siehe Satz I.9.4 unten, tritt das freie Produkt von Gruppen in Erscheinunug, wir beginnen daher mit einer Diskussion desselben. Sind G und H zwei Gruppen, dann gibt es eine Gruppe $G*H$, das sogenannte *freie Produkt* von G und H, sowie zwei Gruppenhomomorphismen $\iota_G : G \to G*H$ und $\iota_H : H \to G*H$ die folgende universelle Eigenschaft haben. Sind $\varphi_G : G \to K$ und $\varphi_H : H \to K$ zwei Gruppenhomomorphismen, dann existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus

$\varphi : G * H \to K$ mit $\varphi \circ \iota_G = \varphi_G$ und $\varphi \circ \iota_H = \varphi_H$. Diesen Homomorphismus bezeichnen wir mit $\varphi_G * \varphi_H := \varphi$. Wir werden die Existenz von $G * H$ in Lemma I.9.1 unten zeigen und wollen sie für den Moment als gegeben annehmen. Die universelle Eigenschaft bestimmt das Tripel $(G * H, \iota_G, \iota_H)$ bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig. Genauer, ist F eine Gruppe und sind $j_G : G \to F$ sowie $j_H : H \to F$ zwei Gruppenhomomorphismen die auch diese universelle Eigenschaft haben,[11] dann gibt es genau einen Gruppenisomorphismus $\psi : G * H \to F$ mit $\psi \circ \iota_G = j_G$ und $\psi \circ \iota_H = j_H$.[12] Daraus folgt sofort die Existenz kanonischer Isomorphismen $G * H \cong H * G$, $(G_1 * G_2) * G_3 \cong G_1 * (G_2 * G_3)$ sowie $\{1\} * G \cong G$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d, "\iota_G"] \arrow[dr, bend left, "\varphi_G"] & \\
G * H \arrow[r, dashed, "\exists!\varphi"] & K \\
H \arrow[u, "\iota_H"'] \arrow[ur, bend right, "\varphi_H"'] &
\end{tikzcd}$$

Wenden wir die universelle Eigenschaft auf $K = G$, $\varphi = \mathrm{id}_G$ und den trivialen Homomorphismus $\varphi_H = 1$ an, so erhalten wir einen Homomorphismus $p_G : G * H \to G$ mit $p_G \circ \iota_G = \mathrm{id}_G$ und $p_G \circ \iota_H = 1$. Analog lässt sich ein Homomorphismus $p_H : G * H \to H$ mit $p_H \circ \iota_H = \mathrm{id}_H$ und $p_H \circ \iota_G = 1$ konstruieren. Insbesondere sind ι_G und ι_H beide injektiv, wir können daher G und H als Untergruppen von $G * H$ auffassen. Auch erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus $(p_G, p_H) : G * H \to G \times H$.

Die Bilder von ι_G und ι_H erzeugen die Gruppe $G * H$. Bezeichnet nämlich K die von $\iota_G(G) \cup \iota_H(H)$ erzeugte Untergruppe von $G * H$, dann erhalten wir aus der universellen Eigenschaft einen Homomorphismus $\varphi : G * H \to K$ mit $\varphi \circ \iota_G = \iota_G$ und $\varphi \circ \iota_H = \iota_H$. Durch Komposition mit der kanonischen Inklusion $\iota : K \to G * H$ erhalten wir einen Homomorphismus $\iota \circ \varphi : G * H \to G * H$ mit $(\iota \circ \varphi) \circ \iota_G = \iota_G$ und $(\iota \circ \varphi) \circ \iota_H = \iota_H$. Aus der Eindeutigkeitsaussage der universellen Eigenschaft folgt $\iota \circ \varphi = \mathrm{id}_{G*H}$. Also muss ι surjektiv sein, K daher mit $G * H$ übereinstimmen. Somit sehen wir, dass $G \cup H$ die Gruppe $G * H$ tatsächlich erzeugt. Nun aber zur Konstruktion von $G * H$.

I.9.1. Lemma. *Es seien G_α Gruppen, $\alpha \in A$. Dann existiert eine Gruppe, die wir mit $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ bezeichnen und das freie Produkt der G_α nennen, sowie Homomorphismen $\iota_\beta : G_\beta \to *_{\alpha \in A} G_\alpha$, $\beta \in A$, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *ι_β ist injektiv, wir können daher jede der Gruppen G_β als Untergruppe von $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ auffassen und werden die Inklusionen ι_β meist unterdrücken.*

(ii) *$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ erzeugt die Gruppe $*_{\alpha \in A} G_\alpha$. Jedes Element $x \neq 1 \in *_{\alpha \in A} G_\alpha$ lässt sich daher in der Form $x = g_1 \cdots g_n$ mit $g_i \in G_{\alpha_i}$ schreiben. Dabei*

[11] dh. zu jedem Paar von Homomorphismen $\varphi_G : G \to K$ und $\varphi_H : H \to K$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\varphi : F \to K$ mit $\varphi \circ j_G = \varphi_G$ und $\varphi \circ j_H = \varphi_H$.

[12] Dieser Isomorphismus ist durch $\psi := j_G * j_H$ gegeben. Seine Inverse erhalten wir aus der universellen Eigenschaft von F angewandt auf $\varphi_G = \iota_G$ und $\varphi_H = \iota_H$. Dass dies tatsächlich die Inverse liefert folgt dann aus den Eindeutigkeitsaussagen in den universellen Eigenschaften von $G * H$ und F.

können wir auch erreichen, dass $g_{\alpha_i} \neq 1 \in G_{\alpha_i}$ *und* $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ *für* $i = 1, \dots, n-1$. *Eine solche Darstellung von* x *wird* reduzierte Darstellung *genannt.*

(iii) *Die reduzierte Darstellung von* $x \neq 1 \in *_{\alpha\in A} G_\alpha$ *ist eindeutig, dh. gilt* $g_1 \cdots g_n = x = h_1 \cdots h_m$ *und sind beide Darstellungen reduziert,* $g_i \in G_{\alpha_i}$, $h_j \in G_{\beta_j}$, *dann folgt* $n = m$, $\alpha_i = \beta_i$ *und* $g_i = h_i$ *für alle* $i = 1, \dots, n$.

(iv) *Sind* $\varphi_\alpha : G_\alpha \to K$ *Gruppenhomomorphismen,* $\alpha \in A$, *dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus* $\varphi : *_{\alpha\in A} G_\alpha \to K$, *sodass* $\varphi \circ \iota_\alpha = \varphi_\alpha$, *für alle* $\alpha \in A$. *Wir werden diesen Homomorphismus mit* $*_{\alpha\in A}\varphi_\alpha := \varphi$ *bezeichnen.*

Beweis. Unter einem *Wort* verstehen wir jede endliche Folge $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ wobei jedes der g_i in einer der Gruppen G_{α_i} liegt. Auch die Folge der Länge 0 ist zugelassen und wird als das *leere Wort* bezeichnet. Ein Wort $(g_1, \dots, g_n)$ heißt *reduziert,* falls $g_i \neq 1 \in G_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, n$, und $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$. Insbesondere ist das leere Wort $()$ reduziert. Es bezeichne W die Menge aller reduzierten Worte, und $\mathfrak{S}(W)$ die Permutationsgruppe von W, dh. die Menge der Bijektionen $W \to W$. Für $\alpha \in A$ und $g \in G_\alpha$ definieren wir eine Abbildung $L_g : W \to W$ indem wir einem reduzierten Wort $(g_1, \dots, g_n)$ mit $g_i \in G_{\alpha_i}$ ein Element in W wie folgt zuordnen:

$$L_g(g_1, \dots, g_n) := \begin{cases} (g_1, \dots, g_n) & \text{falls } g = 1, \\ (g, g_1, \dots, g_n) & \text{falls } g \neq 1 \text{ und } \alpha_1 \neq \alpha, \\ (gg_1, g_2, \dots, g_n) & \text{falls } g \neq 1,\ \alpha_1 = \alpha \text{ und } gg_1 \neq 1, \\ (g_2, g_3, \dots, g_n) & \text{falls } g \neq 1,\ \alpha_1 = \alpha \text{ und } gg_1 = 1. \end{cases}$$

Eine einfache Fallunterscheidung zeigt $L_1 = \mathrm{id}_W$ und $L_h \circ L_g = L_{hg}$ für alle $g, h \in G_\alpha$. Insbesondere ist $L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}$, jedes L_g daher bijektiv. Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus $\iota_\alpha : G_\alpha \to \mathfrak{S}(W)$, $g \mapsto L_g$. Wenden wir L_g auf das leere Wort $() \in W$ an, erhalten wir $L_g\big(()\big) = (g)$, falls $g \neq 1$, also ist ι_α injektiv. Definieren wir nun $*_{\alpha\in A} G_\alpha$ als die von $\bigcup_{\alpha\in A} \iota_\alpha(G_\alpha)$ erzeugte Untergruppe in $\mathfrak{S}(W)$, dann sind die Behauptungen (i) und (ii) offensichtlich wahr. Nun zu (iii): Sei also $g_1 \cdots g_n = h_1 \cdots h_m \in *_{\alpha\in A} G_\alpha$ mit $g_i \in G_{\alpha_i}$ und $h_j \in G_{\beta_j}$, und so, dass beide Darstellungen reduziert sind. Nach Konstruktion ist $L_{g_1} \circ \cdots \circ L_{g_n} = L_{h_1} \circ \cdots \circ L_{h_m} \in \mathfrak{S}(W)$. Wenden wir diese Permuatation auf das leere Wort $() \in W$ an, dann erhalten wir wegen der Reduziertheit der Darstellungen

$$(g_1, \dots, g_n) = \big(L_{g_1} \circ \cdots \circ L_{g_n}\big)\big(()\big) = \big(L_{h_1} \circ \cdots \circ L_{h_m}\big)\big(()\big) = (h_1, \dots, h_m),$$

und damit $n = m$, $\alpha_i = \beta_i$ sowie $g_i = h_i$, $i = 1 \dots, n$. Nun zu (iv): Seien also Homomorphismen $\varphi_\alpha : G_\alpha \to K$ gegeben, $\alpha \in A$. Ist $x \neq 1 \in *_{\alpha\in A} G_\alpha$ und $x = g_1 \cdots g_n$ seine reduzierte Darstellung, $g_i \in G_{\alpha_i}$, so definieren wir $\varphi(x) := \iota_{\alpha_1}(g_1) \cdots \iota_{\alpha_n}(g_n)$. Setzen wir noch $\varphi(1) := 1$, dann liefert dies nach (iii) eine wohldefinierte Abbildung $\varphi : *_{\alpha\in A} G_\alpha \to K$ für die offensichtlich $\varphi \circ \iota_\alpha = \varphi_\alpha$ gilt,

$\alpha \in A$. Es bleibt noch zu zeigen, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir zeigen zunächst

$$\varphi(g_1 \cdots g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n), \qquad \text{für beliebige } g_i \in G_{\alpha_i}. \tag{I.10}$$

Wir beweisen (I.10) mittels Induktion nach n. Existiert ein i mit $1 \leq i \leq n$ und $g_i = 1 \in G_{\alpha_i}$, dann erhalten wir aus $\varphi_{\alpha_i}(g_i) = 1$ und der Induktionsvoraussetzung $\varphi(g_1 \cdots g_n) = \varphi(g_1 \cdots \hat{i} \cdots g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \hat{i} \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots 1 \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_i}(g_i) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$. Existiert ein i mit $1 \leq i < n$ und $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, so folgt aus $\varphi_{\alpha_i}(g_i g_{i+1}) = \varphi_{\alpha_i}(g_i)\varphi_{\alpha_{i+1}}(g_{i+1})$ und der Induktionsvoraussetzung $\varphi(g_1 \cdots g_i g_{i+1} \cdots g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_i}(g_i g_{i+1}) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_i}(g_i)\varphi_{\alpha_{i+1}}(g_{i+1}) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$. Tritt keiner der beiden Fälle ein, dann war die Darstellung $g_1 \cdots g_n$ schon reduziert, und es bleibt nichts zu zeigen. Damit ist (I.10) bewiesen, woraus wir nun sofort die Homomorphismus Eigenschaft von φ erhalten. Die Eindeutigkeit von φ folgt aus (ii), denn φ ist auf einer die Gruppe erzeugenden Teilmenge durch die φ_α vorgegeben. $\square$

I.9.2. Bemerkung. Das freie Produkt ist weit davon entfernt eine kommutative Gruppe zu sein. Ist etwa $h \neq 1 \in H$ und $g \neq 1 \in G$, dann gilt stets $gh \neq hg$ im freien Produkt $G * H$, siehe Lemma I.9.1(iii). Ebenso sehen wir sofort, dass das Zentrum von $G * H$ trivial ist, wenn nur $G \neq \{1\}$ und $H \neq \{1\}$.

I.9.3. Beispiel. Ist G eine Gruppe, dann wird die von den Kommutatoren $\{ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G\}$ erzeugte Untergruppe die *Kommutatoruntergruppe* von G genannt und mit $[G, G]$ bezeichnet. Dies ist stets eine normale Untergruppe von G. Die Quotientengruppe $G^{\mathrm{ab}} := G/[G, G]$ wird die *Abelisierung* von G genannt. Sie hat folgende universelle Eigenschaft. Ist A eine abelsche Gruppe und $\varphi : G \to A$ ein Homomorphismus, dann existiert genau ein Homomorphismus $\varphi^{\mathrm{ab}} : G^{\mathrm{ab}} \to K$ mit $\varphi^{\mathrm{ab}} \circ p = \varphi$, wobei $p : G \to G^{\mathrm{ab}}$ den kanonischen Homomorphismus der mit der Quotientengruppe assoziiert ist bezeichnet. Dies folgt aus $\varphi(ghg^{-1}h^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1} = 1$, denn A ist kommutativ. Für die Abelisierung des freien Produkts gilt, siehe Aufgabe 13,

$$\big(*_{\alpha \in A} G_\alpha\big)^{\mathrm{ab}} \cong \bigoplus\nolimits_{\alpha \in A} G_\alpha^{\mathrm{ab}}.$$

Für das n-fache freie Produkt $*^n\mathbb{Z} := \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ erhalten wir daher $(\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z})^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$. Es folgt $*^n\mathbb{Z} \not\cong *^m\mathbb{Z}$ falls $n \neq m$, denn $\mathbb{Z}^n \not\cong \mathbb{Z}^m$.

Es seien $U, V \subseteq X$ zwei offene Teilmengen mit $X = U \cup V$, und es sei $x_0 \in U \cap V$ ein Basispunkt. Betrachte die vier im kommutativen Diagramm links angedeuteten kanonischen Inklusionen, $\iota_U \circ j_U = \iota_V \circ j_V$. Gehen wir zu den Fundamentalgruppen über so erhalten wir induzierte Abbildungen wie im zweiten Diagramm. Nach Propostion I.6.1 gilt $(\iota_U)_* \circ (j_U)_* =$

$$\begin{tikzcd}
(U \cap V, x_0) \arrow[r, "j_U"] \arrow[d, "j_V"] & (U, x_0) \arrow[d, "\iota_U"] \\
(V, x_0) \arrow[r, "\iota_V"] & (X, x_0)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, x_0) \arrow[r, "(j_U)_*"] \arrow[d, "(j_V)_*"] & \pi_1(U, x_0) \arrow[d, "(\iota_U)_*"] \\
\pi_1(V, x_0) \arrow[r, "(\iota_V)_*"] & \pi_1(X, x_0)
\end{tikzcd}$$

$(\iota_U \circ j_U)_* = (\iota_V \circ j_V)_* = (\iota_V)_* \circ (j_V)_*$, also kommutiert auch dieses Diagramm. Insbesondere erhalten wir einen Homomorphismus

$$\Phi := (\iota_U)_* * (\iota_V)_* : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \to \pi_1(X, x_0), \tag{I.11}$$

und jedes der Elementen $\big((j_U)_*\sigma\big)\big((j_V)_*\sigma\big)^{-1}$, $\sigma \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, liegt im Kern von Φ, denn es ist $\Phi\big(((j_U)_*\sigma)((j_V)_*\sigma)^{-1}\big) = \big((\iota_U)_*(j_U)_*\sigma\big)\big((\iota_V)_*(j_V)_*\sigma\big)^{-1} = 1$. Damit liegt auch der von ihnen erzeugte Normalteiler

$$N := \mathcal{N}\Big(\Big\{\big((j_U)_*\sigma\big)\big((j_V)_*\sigma\big)^{-1} : \sigma \in \pi_1(U \cap V, x_0)\Big\}\Big) \tag{I.12}$$

im Kern von Φ, in Zeichen $\mathcal{N} \subseteq \ker(\Phi)$.

I.9.4. Satz (Seifert–van Kampen). *Es sei $X = U \cup V$ wobei U und V offen in X sind. Weiters seien U, V sowie $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$. Dann ist Φ surjektiv, siehe* (I.11)*, und es gilt* $\ker(\Phi) = N$*, siehe* (I.12)*. Insbesondere gilt $\pi_1(X, x_0) \cong \big(\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)\big)/N$.*

Beweis. Um die Notation zu vereinfachen setzen wir $U_1 := U$ und $U_2 := V$. Wir zeigen zunächst die Surjektivität von Φ. Sei dazu $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0. Da $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von X bildet, ist $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)\}$ eine offene Überdeckung des Intervalls I. Nach Lemma I.4.12 existieren $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{1, 2\}$, sodass $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U_{\alpha_i}$, für jedes $i = 1, \dots, n$. Durch Weglassen gewisser Unterteilungspunkte s_i können wir erreichen, dass $f(s_i) \in U_1 \cap U_2$ für alle $i = 0, \dots, n$, denn wäre etwa $f(s_i) \in U_1 \setminus U_2$ dann gilt sowohl $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U_1$ als auch $f([s_i, s_{i+1}]) \subseteq U_1$. Betrachte die reparametrisierten Einschränkungen $f_i : I \to U_{\alpha_i} \subseteq X$, $f_i(s) := f\big((1-s)s_{i-1} + ss_i\big)$, $i = 1, \dots, n$. Es gilt $f \simeq f_1 f_2 \cdots f_n$ relativ Endpunkten in X, siehe Beispiel I.1.3. Da $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend ist, finden wir Wege $h_i : I \to U_1 \cap U_2$ von $h_i(0) = x_0$ nach $h_i(1) = f_i(1) = f(s_i)$, $i = 1, \dots, n-1$. Weiters seien $h_0 := h_n := c_{x_0}$ die konstanten Wege. Wir erhalten $f \simeq (h_0 f_1 \bar{h}_1)(h_1 f_2 \bar{h}_2)(h_2 f_3 \bar{h}_3) \cdots (h_{n-1} f_n \bar{h}_n)$ relativ Endpunkten in X, denn $\bar{h}_i h_i \simeq c_{f(s_i)}$. Jeder der Faktoren $h_{i-1} f_i \bar{h}_i$ ist eine Schleife bei x_0 in U_{α_i} und definiert daher ein Element $\sigma_i \in \pi_1(U_{\alpha_i}, x_0)$, $\sigma_i := [h_{i-1} f_i \bar{h}_i]$, $i = 1, \dots, n$. Es folgt $\Phi(\sigma_1 \cdots \sigma_n) = \Phi(\sigma_1) \cdots \Phi(\sigma_n) = [(h_0 f_1 \bar{h}_1) \cdots (h_{n-1} f_n \bar{h}_n)] = [f] \in \pi_1(X, x_0)$, also ist Φ surjektiv.

Es bleibt noch zu zeigen $\ker(\Phi) \subseteq N$. Seien also $f_k : I \to U_{\beta_k}$ Schleifen bei x_0, $1 \leq k \leq m$, $\beta_1, \dots, \beta_m \in \{1, 2\}$, sodass $\Phi([f_1] \cdots [f_m]) = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Es ist zu zeigen, dass $[f_1] \cdots [f_m] = 1 \in (\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0))/N$. Betrachte die Schleife $f : I \to X$, $f := f_1 f_2 \cdots f_m$. Nach Voraussetzung ist $[f] = \Phi([f_1]) \cdots \Phi([f_m]) = \Phi([f_1] \cdots [f_m]) = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Daher existiert eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \to X$ von $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = f$. Da $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von X ist, muss auch $\{H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)\}$ eine offene Überdeckung von $I \times I$ sein. Nach Lemma I.4.12 existieren $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ und $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ sowie $\alpha_i^j \in \{1, 2\}$, sodass $H([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_{\alpha_i^j}$, für alle

$1 \leq i, j \leq n$. Betrachte die Wege

$$\begin{aligned}
u_i^j &: I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X & u_i^j(s) &:= H\big((1-s)s_{i-1} + ss_i, t_j\big) \\
b_i^j &: I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X & b_i^j(s) &:= H\big((1-s)s_{i-1} + ss_i, t_{j-1}\big) \\
l_i^j &: I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X & l_i^j(t) &:= H\big(s_{j-1}, (1-t)t_{j-1} + tt_j\big) \\
r_i^j &: I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X & r_i^j(t) &:= H\big(s_j, (1-t)t_{j-1} + tt_j\big)
\end{aligned}$$

Da $H_1 = f = f_1 \cdots f_m$ dürfen wir durch Übergang zu einer feineren Zerlegung von $I \times I$ o.B.d.A. annehmen, dass $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_m = n$ existieren mit $\alpha^n_{i_{k-1}+1} = \alpha^n_{i_{k-1}+2} = \cdots = \alpha^n_{i_k} = \beta_k$ und

$$u^n_{i_{k-1}+1} u^n_{i_{k-1}+2} \cdots u^n_{i_k} \simeq f_k \qquad \text{relativ Endpunkten in } U_{\beta_k},\ 1 \leq k \leq m. \tag{I.13}$$

Da das Rechteck $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ einfach zusammenhängend ist, und weil $H([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_{\alpha_i^j}$, folgt

$$l_i^j u_i^j \bar{r}_i^j \simeq b_i^j \qquad \text{relativ Endpunkten in } U_{\alpha_i^j},\ 1 \leq i, j \leq n. \tag{I.14}$$

Da U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend sind, existieren Wege $\beta_i^j : I \to X$, $0 \leq i, j \leq n$, mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\beta_i^j(0) = x_0$ und $\beta_i^j(1) = H(s_i, t_j)$.
(ii) $\beta_i^j : I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X$ falls $H(s_i, t_j) \in U_{\alpha_i^j}$.
(iii) $\beta_i^j : I \to U_1 \cap U_2 \subseteq X$, falls $H(s_i, t_j) \in U_1 \cap U_2$.
(iv) $\beta_i^j = c_{x_0}$, falls $H(s_i, t_j) = x_0$.

Betrachte nun die folgenden Schleifen bei x_0, siehe (i) und (ii):

$$\begin{aligned}
\hat{u}_i^j &:= \beta_{i-1}^j u_i^j \bar{\beta}_i^j : I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X, & \hat{b}_i^j &:= \beta_{i-1}^{j-1} b_i^j \bar{\beta}_i^{j-1} : I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X \\
\hat{l}_i^j &:= \beta_{i-1}^{j-1} l_i^j \bar{\beta}_{i-1}^j : I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X, & \hat{r}_i^j &:= \beta_i^{j-1} r_i^j \bar{\beta}_i^j : I \to U_{\alpha_i^j} \subseteq X
\end{aligned}$$

Aus (I.14) erhalten wir $(\beta_{i-1}^{j-1} l_i^j \bar{\beta}_{i-1}^j)(\beta_{i-1}^j u_i^j \bar{\beta}_i^j)(\overline{\beta_i^{j-1} r_i^j \bar{\beta}_i^j}) \simeq \beta_{i-1}^{j-1}(l_i^j u_i^j \bar{r}_i^j)\bar{\beta}_i^{j-1} \simeq \beta_{i-1}^{j-1} b_i^j \bar{\beta}_i^{j-1}$ relativ Endpunkten in $U_{\alpha_i^j}$, und daher

$$\big[\hat{l}_i^j\big]\big[\hat{u}_i^j\big]\big[\hat{r}_i^j\big]^{-1} = \big[\hat{b}_i^j\big] \in \pi_1\big(U_{\alpha_i^j}, x_0\big), \qquad 1 \leq i, j \leq n. \tag{I.15}$$

Da H eine Homotopie relativ Endpunkten ist und wegen (iv) gilt

$$\big[\hat{l}_1^j\big] = 1 \in \pi_1\big(U_{\alpha_1^j}, x_0\big) \quad \text{und} \quad \big[\hat{r}_n^j\big] = 1 \in \pi_1\big(U_{\alpha_n^j}, x_0\big), \qquad 1 \leq j \leq n. \tag{I.16}$$

Da $H_0 = c_{x_0}$ und wegen (iv) gilt auch

$$\big[\hat{b}_i^1\big] = 1 \in \pi\big(U_{\alpha_i^1}, x_0\big), \qquad 1 \leq i \leq n. \tag{I.17}$$

Aus (I.13) und (iv) erhalten wir

$$\big[\hat{u}^n_{i_{k-1}+1}\big]\big[\hat{u}^n_{i_{k-1}+2}\big] \cdots \big[\hat{u}^n_{i_k}\big] = [f_k] \in \pi_1(U_{\beta_k}, x_0), \qquad 1 \leq k \leq m. \tag{I.18}$$

Weiters haben wir die Relationen

$$\big[\hat r^j_{i-1}\big]=\big[\hat l^j_i\big]\in\big(\pi_1(U_1,x_0)*\pi_1(U_2,x_0)\big)/N,\qquad 1\leq j\leq n,\ 2\leq i\leq n.\tag{I.19}$$

Um dies einzusehen unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $\alpha^j_{i-1}=\alpha^j_i$, dann gilt offensichtlich $\big[\hat r^j_{i-1}\big]=\big[\hat l^j_i\big]\in\pi_1(U_{\alpha^j_i},x_0)$ und damit auch (I.19). Ist $\alpha^j_{i-1}\neq\alpha^j_i$, dann sind $\hat r^j_{i-1}$ und $\hat l^j_i$ Wege in $U_1\cap U_2$, siehe (iii), und $\big[\hat r^j_{i-1}\big]=\big[\hat l^j_i\big]\in\pi_1(U_1\cap U_2,x_0)$, woraus nun (I.19) folgt, vgl. (I.12). Analog lässt sich zeigen

$$\big[\hat u^{j-1}_i\big]=\big[\hat b^j_i\big]\in\big(\pi_1(U_1,x_0)*\pi_1(U_2,x_0)\big)/N,\qquad 2\leq j\leq n,\ 1\leq i\leq n.\tag{I.20}$$

Aus (I.15), (I.16) und (I.19) erhalten wir, in $\big(\pi_1(U_1,x_0)*\pi_1(U_2,x_0)\big)/N$,

$$\big[\hat b^j_1\big]\cdots\big[\hat b^j_n\big]=\big[\hat l^j_1\big]\big[\hat u^j_1\big]\big[\hat r^j_1\big]^{-1}\cdots\big[\hat l^j_n\big]\big[\hat u^j_n\big]\big[\hat r^j_n\big]^{-1}=\big[\hat u^j_1\big]\cdots\big[\hat u^j_n\big].$$

Zusammen mit (I.20) und (I.17) folgt, in $\big(\pi_1(U_1,x_0)*\pi_1(U_2,x_0)\big)/N$,

$$\big[\hat u^n_1\big]\cdots\big[\hat u^n_n\big]=\big[\hat b^n_1\big]\cdots\big[\hat b^n_n\big]=\big[\hat u^{n-1}_1\big]\cdots\big[\hat u^{n-1}_n\big]=\cdots=\big[\hat b^1_1\big]\cdots\big[\hat b^1_n\big]=1.$$

Verwenden wir noch (I.18) so erhalten wir schließlich die Relation $[f_1]\cdots[f_m]=1$ in $\big(\pi_1(U_1,x_0)*\pi_1(U_2,x_0)\big)/N$. Damit ist der Beweis vollständig. □

I.9.5. Beispiel. Wir wollen nun mit Hilfe von Satz I.9.4 nochmals verifizieren, dass S^n einfach zusammenhängend ist, $n\geq 2$, vgl. Satz I.6.7. Nach Beispiel I.6.6 sind $U:=S^n\setminus\{N\}$ und $V:=S^n\setminus\{S\}$ zwei einfach zusammenhängende offene Teilmengen von $S^n=U\cup V$. Da $n\geq 2$, ist $U\cap V$ wegzusammenhängend. Aus Satz I.9.4 folgt daher $\pi_1(S^n)=0$.

I.9.6. Beispiel (Suspension). Es sei X ein topologischer Raum, und es bezeichne $\sim$ die von $(x,1)\sim(y,1)$ und $(x,-1)\sim(y,-1)$ erzeugte Äquivalenzrelation auf $X\times[-1,1]$, $x,y\in X$. Der Quotientenraum

$$\Sigma X:=\big(X\times[-1,1]\big)/\!\sim$$

wird die *Suspension* oder *Einhängung* von X genannt. Die Suspension entsteht daher aus $X\times[-1,1]$ indem wir $X\times\{1\}$ zu einem und $X\times\{-1\}$ zu einem anderen Punkt kollabieren. Etwa ist $\Sigma S^n\cong S^{n+1}$, siehe Aufgabe 4. Ist X wegzusammenhängend, dann ist ΣX einfach zusammenhängend. Dies folgt aus Satz I.9.4 indem wir die offenen Teilmengen $U:=\big(X\times(-1,1]\big)/\!\sim$ und $V:=\big(X\times[-1,1)\big)/\!\sim$ von $\Sigma X=U\cup V$ betrachten. Beide sind kontrahierbar, vgl. Beispiel I.8.26, also einfach zusammenhängend, siehe Korollar I.8.23, und es ist $U\cap V\cong X\times(-1,1)$ wegzusammenhängend.

I.9.7. Beispiel. Es seien (X,x_0) und (Y,y_0) zwei zusammenhängende punktierte Räume. Weiters sollen offene Umgebungen $U_0\subseteq X$ von x_0 und $V_0\subseteq Y$ von y_0 existieren, sodass $\{x_0\}$ Deformationsretrakt von U_0 und $\{y_0\}$ Deformationsretrakt von V_0 ist. Betrachte die Einpunktvereinigung $(X\vee Y,*)=(X,x_0)\vee(Y,y_0)$, und die offenen Teilmengen $U:=(U_0,x_0)\vee(Y,y_0)$ und $V:=(X,x_0)\vee(V_0,y_0)$ von $X\vee Y=U\cup V$. Eine retrahierende Deformation von U_0 auf $\{x_0\}$ liefert eine retrahierende Deformation von U auf Y. Also ist die Einbettung $(Y, y_0) \to (U, *)$ eine Homotopieäquivalenz und induziert daher einen Isomorphismus $\pi_1(Y, y_0) \cong \pi_1(U, *)$, siehe Proposition I.8.18. Ebenso induziert die Einbettung $(X, x_0) \to (V, *)$ einen Isomorphismus $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(V, *)$. Eine retrahierende Deformation von U_0 auf $\{x_0\}$ zusammen mit einer retrahierenden Deformation von V_0 auf $\{y_0\}$ liefern eine retrahierende Deformation von $U \cap V = (U_0, x_0) \vee (V_0, y_0)$ auf $\{*\}$. Also ist $U \cap V$ kontrahierbar und damit einfach zusammenhängend, siehe Korollar I.8.23. Aus Satz I.9.4 folgt daher

$$\pi_1\big((X, x_0) \vee (Y, y_0)\big) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0).$$

Insbesondere sehen wir, dass $S^n \vee \cdots \vee S^n$ einfach zusammenhängend ist, falls $n \geq 2$, siehe Satz I.6.7. Wir erhalten aber auch $\pi_1(S^1 \vee \cdots \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$. Einpunktvereinigungen von Kreisen können also nur dann homotopieäquivalent (homöomorph) sein, wenn sie gleich viele Faktoren besitzen, siehe Beispiel I.9.3 und Satz I.8.22.

I.9.8. Beispiel. Es seien $P_1, \dots, P_k$ paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^n$. Der Raum $\mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ ist homotopieäquivalent zur Einpunktvereinigung $S^{n-1} \vee \cdots \vee S^{n-1}$ mit k Faktoren. Für $n \geq 3$ ist daher $\mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ einfach zusammenhängend, siehe Satz I.8.22 und Beispiel I.9.7. Im Fall $n = 2$ folgt

$$\pi_1\big(\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\}\big) \cong \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}.$$

Für $l \neq k$ sind daher $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_l\}$ nicht homotopieäquivalent, und daher auch nicht homöomorph.

Um die etwas komplizierteren Fundamentalgruppen einigermaßen in den Griff zu bekommen, wiederholen wir kurz die Darstellung von Gruppen durch Erzeuger und Relationen. Ist S eine Menge, dann nennen wir $F(S) := *_{s \in S}\mathbb{Z}$ die *freie Gruppe* über S. Zu jedem $s \in S$ haben wir einen kanonischen injektiven Homomorphismus $\iota_s : \mathbb{Z} \to F(S)$, siehe Lemma I.9.1. Wir bezeichnen $\iota_s(1) \in F(S)$ wieder mit s. Jedes Element in $x \neq 1 \in F(S)$ lässt sich in der Form $x = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \cdots s_n^{k_n}$ schreiben, wobei $s_i \in S$ und $k_i \in \mathbb{Z}$. Dabei können wir auch erreichen, dass alle $k_i \neq 0$ und $s_i \neq s_{i+1}$. Unter diesen Voraussetzungen ist die Darstellung dann eindeutig, siehe Lemma I.9.1(iii). Ist K eine Gruppe und für jedes $s \in S$ ein $k_s \in K$ gegeben, dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\varphi : F(S) \to K$, sodass $\varphi(s) = k_s$ für alle $s \in S$, siehe Lemma I.9.1(iv).

Eine Gruppe G heißt *frei* falls eine Menge S existiert, sodass $G \cong F(S)$. Die Kardinalzahl $\sharp S$ wird der Rang der freien Gruppe G genannt und mit $\operatorname{rank}(G)$ bezeichnet. Dies ist wohldefiniert, denn aus $F(S) \cong F(S')$ folgt $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \cong F(S)^{\mathrm{ab}} \cong F(S')^{\mathrm{ab}} \cong \bigoplus_{s' \in S'} \mathbb{Z}$ und damit $\sharp S = \sharp S'$, siehe Beispiel I.9.3.

Ist $R \subseteq F(S)$ eine Teilmenge so schreiben wir $\langle S \mid R \rangle := F(S)/\mathcal{N}(R)$, wobei $\mathcal{N}(R)$ den von R erzeugten Normalteiler in $F(S)$ bezeichnet. Ist G eine Gruppe und $G \cong \langle S \mid R \rangle$ dann nennen wir $\langle S \mid R \rangle$ eine *Präsentation* von G mit Erzeugern S und Relationen R. Sei nun K eine weitere Gruppe und für jedes $s \in S$ ein

$k_s \in K$ gegeben, sodass der durch $\tilde{\varphi}(s) = k_s$ bestimmte Homomorphismus $\tilde{\varphi} : F(S) \to K$ auf jedem Element von R verschwindet, dh. $\tilde{\varphi}(r) = 1 \in K$ für alle $r \in R$. Dann ist $\mathcal{N}(R) \subseteq \ker(\tilde{\varphi})$, also faktorisiert $\tilde{\varphi}$ zu einem Homomorphismus $\varphi : \langle R \mid S \rangle = F(S)/\mathcal{N}(R) \to K$ mit $\varphi(s) = k_s$.

Eine Gruppe G wird *endlich präsentierbar,* geannt, falls eine Präsentation $G \cong \langle S \mid R \rangle$ mit endlichen Mengen S und R existiert. Ist $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ und $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ dann schreiben wir für $\langle S \mid R \rangle$ auch $\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ oder $\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$.

Jede Gruppe G besitzt die Präsentation $G = \langle S \mid R \rangle$ mit $S := G$ und $R := \ker(\varphi)$, wobei $\varphi : F(S) \to G$ den durch $\varphi(g) = g$ gegebenen Homomorphismus bezeichnet. Es faktorisiert nämlich φ zu einem, offensichtlich bijektiven, Homomorphimus $\langle S \mid R \rangle = F(S)/\mathcal{N}(R) = F(S)/\ker(\varphi) \to G$.

Falls $r \in \mathcal{N}(R)$ dann ist $\mathcal{N}(R) = \mathcal{N}(R \cup \{r\})$ und daher

$$\langle S \mid R \rangle \cong \big\langle S \bigm| R \cup \{r\} \big\rangle. \tag{I.21}$$

Ist $t \notin S$ und $\omega \in F(S)$, dann gilt

$$\langle S \mid R \rangle \cong \big\langle S \cup \{t\} \bigm| R \cup \{t^{-1}\omega\} \big\rangle. \tag{I.22}$$

Um dies einzusehen, sei $\varphi : \langle S \mid R \rangle \to \langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{t^{-1}\omega\} \rangle$ der durch $\varphi(s) = s$, $s \in S$, eindeutig bestimmte Homomorphismus. Betrachte weiters den durch $\psi(s) = s$, $s \in S$, und $\psi(t) = \omega$ eindeutig bestimmten Homomorphismus $\psi : \langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{t^{-1}\omega\} \rangle \to \langle S \mid R \rangle$. Offensichtlich ist $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$. Es gilt aber auch $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, denn in $\langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{t^{-1}\omega\} \rangle$ haben wir $\varphi(\psi(t)) = \omega = t$.

Sind $\langle S \mid R \rangle$ und $\langle S' \mid R' \rangle$ zwei endliche Präsentationen derselben Gruppe, dh. $\langle S \mid R \rangle \cong \langle S' \mid R' \rangle$, dann ist es stets möglich durch endlich viele Übergänge der Art (I.22) und (I.21), die sogenannte *Tietze-Prozesse*, von der Präsentation $\langle S \mid R \rangle$ zu der Präsentation $\langle S' \mid R \rangle$ zu gelangen, siehe etwa [**14**, Satz 5.8.2].

Schließlich seien noch

$$\langle S \mid R \rangle * \langle S' \mid R' \rangle \cong \langle S \cup S' \mid R \cup R' \rangle \tag{I.23}$$

und

$$\langle S \mid R \rangle^{\mathrm{ab}} \cong \langle S \mid R \cup K \rangle \tag{I.24}$$

erwähnt, wobei $K = \{sts^{-1}t^{-1} : s \neq t \in S\}$. Der durch $\tilde{\varphi}(s) = s$ bestimmte Homomorphismus $\tilde{\varphi} : \langle S \mid R \rangle \to \langle S \mid R \cup K \rangle$ faktorisiert nämlich zu einem Homomorphismus $\varphi : \langle S \mid R \rangle^{\mathrm{ab}} \to \langle S \mid R \cup K \rangle$ der invers zu dem durch $\psi(s) = s$ bestimmten Homomorphismus $\langle S \mid R \cup K \rangle \to \langle S \mid R \rangle^{\mathrm{ab}}$ ist, $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$.

Nun zu einigen Beispielen. Für $n \in \mathbb{Z}$ schreiben wir $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dies eine endliche zyklische Gruppe falls $n \neq 0$.

(i) $\langle s \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$.
(ii) $\langle s, t \mid - \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
(iii) $\langle s, t \mid sts^{-1}t^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
(iv) $\langle s \mid s^n \rangle \cong \mathbb{Z}_n$, für $n \in \mathbb{Z}$.
(v) $\langle s, t \mid s^m, t^n \rangle \cong \mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n$, für $m, n \in \mathbb{Z}$.

(vi) $\langle s,t \mid s^m, t^n, sts^{-1}t^{-1}\rangle \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$, für $m,n \in \mathbb{Z}$.
(vii) $\langle s,t \mid s^2t^3, s^3t^4\rangle = 0$.

I.9.9. Beispiel (Kleinsche Flasche). Auf $S^1 \times I$ betrachte die von $(z,0) \sim (z^{-1},1)$ erzeugte Äquivalenzrelation. Der Quotientenraum $K := (S^1 \times I)/\sim$ wird als *Kleinsche Flasche* bezeichnet. Es sei $p : S^1 \times I \to K$ die Quotientenabbildung. Betrachte nun die offenen Teilmengen $U := p\big((S^1 \setminus \{-1\}) \times I\big)$ sowie $V := p\big((S^1 \setminus \{1\}) \times I\big)$ von $K = U \cup V$. Die Räume U und V sind Möbiusbänder, vgl. Beispiel I.8.9, die Schleife $a : I \to U$, $a(s) := p(1,s)$, repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(U, a(0)) \cong \mathbb{Z}$, und $b : I \to V$, $b(s) := p(-1,s)$, repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(V, b(0)) \cong \mathbb{Z}$. Für den Durchschnitt gilt $U \cap V \cong (0,\pi) \times S^1$, die Schleife $r := r_1r_2$ repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$, wobei $r_1 : I \to U \cap V$, $r_1(s) = p(\mathbf{i}, s)$, und $r_2 : I \to U \cap V$, $r_2(s) := p(-\mathbf{i}, s)$, und $x_0 := r(0) \in U \cap V$. Weiters seien $h_a : I \to U$, $h_a(s) := p(\mathbf{i}e^{-\pi \mathbf{i} s/2}, 0)$, und $h_b : I \to V$, $h_b(s) := p(\mathbf{i}e^{\pi \mathbf{i} s/2}, 0)$, also $h_a(0) = h_b(0) = x_0$, $h_a(1) = a(0) = a(1)$ und $h_b(1) = b(0) = b(1)$. Wir erhalten Erzeuger $\alpha := [h_a a \bar{h}_a] \in \pi_1(U, x_0)$, $\beta := [h_b b \bar{h}_b] \in \pi_1(V, x_0)$ und $\rho := [r] \in \pi_1(U \cap V, x_0)$. Der von der Inklusion induzierte Homomorphismus $\pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(U, x_0)$ bildet ρ auf α^2 ab, und der Homomorphismus $\pi_1(U \cap V, x_0) \to \pi_1(V, x_0)$ bildet ρ auf β^2 ab. Aus Satz I.9.4 folgt daher $\pi_1(K, x_0) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2\beta^{-2}\rangle$. Eine nützlichere Darstellung erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned}
\pi_1(K) \cong \big\langle \alpha,\beta \bigm| \alpha^2\beta^{-2}\big\rangle &\cong \big\langle \alpha,\beta,\gamma \bigm| \gamma^{-1}\alpha\beta^{-1},\ \alpha^2\beta^{-2}\big\rangle && \text{nach (I.22)}\\
&\cong \big\langle \alpha,\beta,\gamma \bigm| \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma,\ \gamma^{-1}\alpha\beta^{-1},\ \alpha^2\beta^{-2}\big\rangle && \text{nach (I.21)}\\
&\cong \big\langle \alpha,\beta,\gamma \bigm| \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma,\ \gamma^{-1}\alpha\beta^{-1}\big\rangle && \text{nach (I.21)}\\
&\cong \big\langle \alpha,\gamma \bigm| \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma\big\rangle && \text{nach (I.22)}
\end{aligned}$$

Wir wollen noch zeige, dass $\pi_1(K)$ isomorph zu $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ ist, wobei $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ die Menge $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ mit der Gruppenstruktur $(k_1,l_1)(k_2,l_2) = (k_1+(-1)^{l_1}k_2, l_1+l_2)$ bezeichnet.[13] In $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ gilt die Relation $(0,1)(1,0)(0,1)^{-1}(1,0) = (0,0)$ also bestimmt $\varphi(\alpha) = (0,1)$ und $\varphi(\gamma) = (1,0)$ einen Homomorphismus $\varphi : \big\langle \alpha,\gamma \bigm| \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma\big\rangle \to \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$. Wegen $\varphi(\gamma^k\alpha^l) = (1,0)^k(0,1)^l = (k,l)$ ist φ surjektiv. Aus der Relation $\alpha\gamma = \gamma^{-1}\alpha$ folgt, dass sich jedes Element in $x \in \langle \alpha,\gamma \mid \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma\rangle$ in der Form $x = \gamma^k\alpha^l$ schreiben lässt, $k,l \in \mathbb{Z}$. Daraus sehen wir sofort, dass $\ker(\varphi) = 0$, also ist φ auch

[13]Sind G und H zwei Gruppen, bezeichnet $\mathrm{Aut}(H)$ die Gruppe der Automorphismen von H, und ist $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ ein Homomorphismus, dann definiert die Multiplikation $(h_1,g_1)\cdot(h_2,g_2) := (h_1\varphi_{g_1}(h_2), g_1g_2)$ auf der Menge $H \times G$ eine Gruppenstruktur. Diese Gruppe wird mit $H \rtimes_\varphi G$ bezeichent und ein *semidirektes Produkt* von H und G genannt. Ihr neutrales Element ist $(1,1)$, das Inverse von (g,h) ist durch $(g,h)^{-1} = (\varphi_{g^{-1}}(h^{-1}), g^{-1})$ gegeben. Wir haben einen injektiven Homomorphismus $\iota : H \to H \rtimes_\varphi G$, $\iota(h) := (h,1)$, und einen surjektiven Homomorphismus $p : H \rtimes_\varphi G \to G$, $p(h,g) := g$. Weiters ist $\ker(p) = \mathrm{img}(\iota)$, und daher H ein Normalteiler von $H \rtimes_\varphi G$. Für den trivialen Homomorphismus $\varphi = 1$ erhalten wir $H \rtimes_\varphi G = H \times G$. Das Beispiel im Text oben kommt von $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$, $\varphi_l(k) = (-1)^l k$.

injektiv. Insgesamt folgt

$$\pi_1(K) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}.$$

Für die Abelisierung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\pi_1(K)^{\mathrm{ab}} \cong \big\langle \alpha, \gamma \mid \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma \big\rangle^{\mathrm{ab}} &\cong \big\langle \alpha, \gamma \mid \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \big\rangle && \text{nach (I.24)} \\
&\cong \big\langle \alpha, \gamma \mid \gamma^2,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \big\rangle && \text{nach (I.21)} \\
&\cong \big\langle \alpha, \gamma \mid \gamma^2,\ \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \big\rangle && \text{nach (I.21)} \\
&\cong \big\langle \alpha, \gamma \mid \gamma^2 \big\rangle^{\mathrm{ab}} && \text{nach (I.24)} \\
&\cong \big(\langle \alpha | - \rangle * \big\langle \gamma \mid \gamma^2 \big\rangle \big)^{\mathrm{ab}} && \text{nach (I.23)} \\
&\cong \big(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 \big)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2
\end{aligned}$$

Die Kleinsche Flasche ist daher weder zur Sphäre S^2 noch zum Torus T^2 homtopieäquivalent (homöomorph), denn $\pi_1(S^2) = 0$ und $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Ist $A \subseteq Y$ und $\varphi : A \to X$ stetig, dann definieren wir

$$X \cup_\varphi Y := (X \sqcup Y)/\!\sim,$$

wobei $\sim$ die von $a \sim \varphi(a)$, $a \in A$, erzeugte Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ bezeichnet. Wir sagen der Raum $X \cup_\varphi Y$ entsteht aus X durch *Ankleben* von Y längs φ. Wir erhalten zwei kanonische stetige Abbildungen $\iota_X : X \to X \cup_\varphi Y$ und $\hat{\varphi} : Y \to X \cup_\varphi Y$. Die Abbildung ι_X ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild, wir können X daher als Teilraum von $X \cup_\varphi Y$ auffassen. Weiters bezeichne $\iota_A : A \to Y$ die kanonsische Inklusion. Der verklebte Raum $X \cup_\varphi Y$ hat folgende universelle Eigenschaft. Sind $\psi_X : X \to Z$ und $\psi_Y : Y \to Z$ zwei stetige Abbildungen mit $\psi_X \circ \varphi = \psi_Y \circ \iota_A$ dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\psi : X \cup_\varphi Y \to Z$ mit $\psi_X = \psi \circ \iota_X$ und $\psi_Y = \psi \circ \hat{\varphi}$. Wir werden diese Abbildung mit $\psi_X \cup_\varphi \psi_Y := \psi$ bezeichnen.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "\iota_X"] \arrow[drr, bend left, "\psi_X"] & & \\
A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\iota_A"'] & & X \cup_\varphi Y \arrow[r, dashed, "\exists!\psi"] & Z \\
 & Y \arrow[ur, "\hat{\varphi}"] \arrow[urr, bend right, "\psi_Y"'] & &
\end{tikzcd}$$

I.9.10. Lemma. *Es sei A ein Deformationsretrakt von Y und $\varphi : A \to X$ stetig. Dann ist $\iota_X(X)$ ein Deformationsretrakt von $X \cup_\varphi Y$, und die kanonische Einbettung $\iota_X : X \to X \cup_\varphi Y$ daher eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Es sei $H : Y \times I \to Y$ eine retrahierende Deformation, dh. $H_0 = \mathrm{id}_Y$, $H_1(Y) \subseteq A$ und $H_t|_A = \mathrm{id}_A$. Betrachte die Abbildung $\tilde{G} : (X \sqcup Y) \times I \to X \cup_\varphi Y$ die durch $\tilde{G}(x,t) := \iota_X(x)$, $(x,t) \in X \times I$, und $\tilde{G}(y,t) := \hat{\varphi}(H(y,t))$, $(y,t) \in Y \times I$, definiert ist. Da $H_t|_A = \mathrm{id}_A$ faktorisiert $\tilde{G}$ zu einer stetigen Abbildung $G : (X \cup_\varphi Y) \times I \to X \cup_\varphi Y$. Wegen $H_0 = \mathrm{id}_Y$ ist $G_0 = \mathrm{id}_{X \cup_\varphi Y}$. Da $H_1(Y) \subseteq A$ gilt $G_1(X \cup_\varphi Y) \subseteq \iota_X(X)$. Schließlich ist $G_t|_{\iota_X(X)} = \mathrm{id}_{\iota_X(X)}$ für alle $t \in I$. Daher ist G eine retrahierende Deformation und $\iota_X(X)$ ein Deformationsretrakt von $X \cup_\varphi Y$. $\square$

I.9.11. Beispiel (Abbildungszylinder). Es sei $\varphi : Y \to X$ stetig, und es bezeichne $\iota_Y : Y \to Y \times I$ die Einbettung $\iota_Y(y) := (y, 1)$. Wir können φ als eine auf dem Teilraum $A := \iota_Y(Y) = Y \times \{1\}$ definiert Abbildung auffassen. Der Raum $Z_\varphi := X \cup_\varphi (Y \times I)$ wird der *Abbildungszylinder* von φ genannt. Wir erhalten eine kanonische Einbettung $\iota_X : X \to Z_\varphi$ und eine stetige Abbildung $\hat\varphi : Y \times I \to Z_\varphi$ mit $\iota_X \circ \varphi = \hat\varphi \circ \iota_Y$. Offensichtlich ist A ein Deformationsretrakt von $Y \times I$, nach Lemma I.9.10 ist daher $\iota_X(X)$ ein Deformationsretrakt von Z_φ und die Einbettung $\iota_X : X \to Z_\varphi$ eine Homotopieäquivalenz. Die Abbildung $j_Y : Y \to Z_\varphi$, $j_Y(y) := \hat\varphi(y, 0)$ liefert auch eine Einbettung von Y in Z_φ. Diese ist zu $\iota_X \circ \varphi$ homotop, $H : Y \times I \to Z_\varphi$, $H(y, t) := \hat\varphi(y, t)$, liefert eine Homotopie von $H_0 = j_Y$ nach $H_1 = \hat\varphi \circ \iota_Y = \iota_X \circ \varphi$. Bis auf Homotopie(äquivalenz) können wir daher jede stetige Abbildung als Einbettung auffassen.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] & Z_\varphi := X \cup_\varphi (Y \times I) \\ Y \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\iota_Y"] & Y \times I \arrow[u, "\hat\varphi"'] \end{tikzcd}$$

I.9.12. Beispiel (Abbildungskegel). Es sei $\varphi : Y \to X$ stetig. Weiters bezeichne $CY := (Y \times I)/(Y \times \{0\}$ den Kegel über Y, $p : Y \times I \to CY$ die Quotientenabbildung, $* := p(Y \times \{0\})$ die Spitze des Kegels und $\iota_Y : Y \to CY$ die Einbettung, $\iota_Y(y) = p(y, 1)$. Wir können φ als eine auf der Teilmenge $A := \iota_Y(Y) \subseteq CY$ definierte Abbildung betrachten. Der Raum $C_\varphi := X \cup_\varphi CY$ wird der *Abbildungskegel* von φ genannt. Wir erhalten eine kanonische Einbettung $\iota_X : X \to C_\varphi$ und eine stetige Abbildung $\hat\varphi : CY \to C_\varphi$ mit $\iota_X \circ \varphi = \hat\varphi \circ \iota_Y$. Beachte, dass die Abbildung $\iota_X \circ \varphi : Y \to C_\varphi$ nullhomotop ist, denn $H : Y \times I \to C_\varphi$, $H(y, t) := \hat\varphi(p(y, t))$ liefert eine Homotopie von der konstanten Abbildung $H_0 = c_{\hat\varphi(*)}$ nach $H_1 = \hat\varphi \circ \iota_Y = \iota_X \circ \varphi$. Schließlich ist $j_Y = H_{1/2} : Y \to C_\varphi$, $j_Y(y) := \hat\varphi(p(y, 1/2))$ eine Einbettung von Y in C_φ.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota_X"] & C_\varphi := X \cup_\varphi CY \\ Y \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\iota_Y"] & CY \arrow[u, "\hat\varphi"'] \end{tikzcd}$$

I.9.13. Satz (Fundamentalgruppe des Abbildungskegels). *Es seien X, Y zwei wegzusammenhängende topologische Räume, $\varphi : Y \to X$ stetig, $y_0 \in Y$ und $x_0 := \varphi(y_0)$. Weiters bezeichne $\iota_X : X \to C_\varphi$ die kanonische Einbettung, siehe Beispiel I.9.12. Dann ist der Homomorphismus $(\iota_X)_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(C_\varphi, \iota_X(x_0))$ surjektiv, und sein Kern stimmt mit dem von $\operatorname{img}(\varphi_*)$ erzeugten Normalteiler überein, wobei $\varphi_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Insbesondere gilt*

$$\pi_1\big(C_\varphi, \iota_X(x_0)\big) \cong \pi_1(X, x_0)\big/\mathcal{N}(\operatorname{img}(\varphi_*)).$$

Beweis. Wir verwenden die Notation aus Beispiel I.9.12. Betrachte die offene Teilmenge $U := C_\varphi \setminus \{\hat\varphi(*)\} \cong X \cup_\varphi p(Y \times (0, 1])$. Nach Lemma I.9.10 ist die kanonische Einbettung $\iota_X : X \to U$ eine Homotopieäquivalenz, denn $Y \times \{1\}$ ist Deformationsretrakt von $Y \times (0, 1] \cong p(Y \times (0, 1])$. Die Teilmenge $V := \hat\varphi(p(Y \times [0, 1)))$

ist offen in C_φ und $\hat\varphi|_{p(Y\times[0,1))}: p(Y\times[0,1))\to V$ ist ein Homöomorphismus. Daher ist V kontrahierbar und $\pi_1(V)=0$. Weiters ist $\hat\varphi\circ p|_{Y\times(0,1)}: Y\times(0,1)\to U\cap V$ ein Homöomorphimus und daher die Einbettung $j_Y: Y\to U\cap V$ eine Homotopieäquivalenz. Betrachte den Basispunkt $x_1:=j_Y(y_0)\in U\cap V$. Aus Satz I.9.4 folgt, dass die von der Inklusion induzierte Abbildung $\pi_1(U,x_1)\to\pi_1(C_\varphi,x_1)$ surjektiv ist und ihr Kern mit dem von $\operatorname{img}((j_Y)_*)$ erzeugten Normalteiler übereinstimmt, wobei $(j_Y)_*: \pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(U,x_1)$. Betrachte die Homotopie $H: Y\times I\to U$, $H(y,t):=\hat\varphi(p(y,1-t/2))$, von $H_0=\hat\varphi\circ\iota_Y=\iota_X\circ\varphi$ nach $H_1=j_Y$, und den Weg $h: I\to U$, $h(t):=H(y_0,t)$, von $h(0)=\iota_X(x_0)$ nach $h(1)=x_1$. Nach Proposition I.8.21 kommutiert das obere obere Rechteck im nebenstehenden Diagramm, das untere kommutiert trivialerweise. Es folgt, dass auch der Homomorphismus $(\iota_X)_*: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(C_\varphi,\iota_X(x_0))$ surjektiv ist, und sein Kern mit dem von $\operatorname{img}(\varphi_*)$ erzeugten Normalteiler übereinstimmt. $\square$

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(Y,y_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "(j_Y)_*"'] & \pi_1(X,x_0) \arrow[d, "\cong"', "(\iota_X)_*"] \\
\pi_1(U,x_1) \arrow[r, "\beta_h", "\cong"'] \arrow[d] & \pi_1(U,\iota_X(x_0)) \arrow[d] \\
\pi_1(C_\varphi,x_1) \arrow[r, "\beta_h", "\cong"'] & \pi_1(C_\varphi,\iota_X(x_0))
\end{tikzcd}$$

I.9.14. Korollar (Ankleben einer Zelle). *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $\varphi: S^{n-1}\to X$ stetig, $y_0\in S^{n-1}$, $x_0:=\varphi(y_0)\in X$, und es bezeichne $\iota: X\to X\cup_\varphi D^n$ die kanonische Einbettung. Dann gilt:*

(i) *Für $n\geq 3$ ist $\iota_*: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X\cup_\varphi D^n,\iota(x_0))$ ein Isomorphismus.*

(ii) *Für $n=2$ ist $\iota_*: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X\cup_\varphi D^n,\iota(x_0))$ surjektiv, und sein Kern stimmt mit dem von $\operatorname{img}(\varphi_*)$ erzeugten Normalteiler überein, wobei $\varphi_*: \pi_1(S^{n-1},y_0)\to\pi_1(X,x_0)$. Insbesondere ist $\pi_1(X\cup_\varphi D^n,\iota(x_0))\cong\pi_1(X,x_0)/\mathcal{N}\big(\operatorname{img}(\varphi_*)\big)$.*

Beweis. Beachte, dass $CS^{n-1}\cong D^n$, denn die Abbildung $S^{n-1}\times I\to D^n$, $(x,t)\mapsto tx$, faktorisiert zu einem Homöomorphismus $CS^{n-1}\to D^n$. Damit gilt $X\cup_\varphi D^n\cong C_\varphi$. Für $n\geq 2$ ist S^{n-1} wegzusammenhängend, aus Satz I.9.13 folgt daher die Surjektivität von $\iota_*: \pi_1(X,x_0)\to\pi_1(X\cup_\varphi D^n,\iota(x_0))$ und $\ker(\iota_*)=\mathcal{N}(\operatorname{img}(\varphi_*))$. Für $n\geq 3$ ist S^{n-1} einfach zusammenhängend, siehe Satz I.6.7, also $\ker(\iota_*)=0$. $\square$

I.9.15. Beispiel. Betrachte die Abbildung $\varphi: S^1\to S^1$, $\varphi(z):=z^k$, $k\in\mathbb{Z}$, und den Raum $X:=S^1\cup_\varphi D^2$. Nach Korollar I.9.14(ii) induziert die Einbettung $\iota: S^1\to X$ einen Isomorphismus $\pi_1(S^1,1)/\operatorname{img}(\varphi_*)\cong\pi_1(X,\iota(1))$ wobei $\varphi_*: \pi_1(S^1,1)\to\pi_1(S^1,1)$. Mit Hilfe von Beispiel I.6.5 sehen wir daher, dass $\pi_1(X)\cong\mathbb{Z}_k$. Die Schleife $f:=\iota\circ\omega_1: I\to X$, siehe (I.1), repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(X)$, und es gilt die Relation $[f]^k=1$.

I.9.16. Beispiel (Reeller projektiver Raum). Die Inklusion $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n+1}$ induziert eine Einbettung $\iota: \mathbb{RP}^{n-1}\to\mathbb{RP}^n$. Es bezeichne $p_n: \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{RP}^n$ die kanonische Projektion. Betrachte die stetige Abbildung $\Phi: D^n\to\mathbb{RP}^n$, $\Phi(x):=p_n\big(x,\sqrt{1-\|x\|^2}\big)$. Diese ist surjektiv und auf $B^n=\{x\in\mathbb{R}^n: \|x\|<1\}$

injektiv. Die Einschränkung $\Phi|_{S^{n-1}}$ liefert eine stetige Abbildung $\varphi : S^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$, $\varphi(x) = p_{n-1}(x)$, mit $\Phi|_{S^{n-1}} = \iota \circ \varphi$. Wir erhalten eine stetige Abbildung $\iota \cup_\varphi \Phi : \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \cup_\varphi D^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Diese ist bijektiv, also ein Homöomorphismus. Wir sehen daher, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ aus $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ durch Ankleben einer n-Zelle längs der kanonischen Projektion $\varphi : S^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ entsteht,

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \cup_\varphi D^n.$$

$\mathbb{R}\mathrm{P}^0$ ist ein einpunktiger Raum, und $\mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong D^1/\{-1,1\} \cong S^1$. Insbesondere $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^1) \cong \mathbb{Z}$. Aus Beispiel I.9.15 erhalten wir $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$. Nach Korollar I.9.14 induziert die kanonische Einbettung $\iota : \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ einen Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}) \cong \pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$, falls $n \geq 3$. Mittels Induktion erhalten wir daher $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$. Die Schleife $f : I \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $f(s) := p_n\big(\cos(\pi s), \sin(\pi s), 0 \dots, 0\big)$, repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n)$, $n \geq 1$. Für $n \geq 2$ gilt die Relation $[f]^2 = 1$.

I.9.17. Beispiel (Komplexer projektiver Raum). Die Inklusion $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n+1}$ induziert eine Einbettung $\iota : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Es bezeichne $p_n : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ die kanonische Projektion. Betrachte die stetige Abbildung $\Phi : D^{2n} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $\Phi(z) := p_n\big(z, \sqrt{1 - \|z\|^2}\big)$. Diese ist surjektiv und auf $B^{2n} = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ injektiv. Die Einschränkung $\Phi|_{S^{2n-1}}$ liefert eine stetige Abbildung $\varphi : S^{2n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$, $\varphi(z) = p_{n-1}(z)$, mit $\Phi|_{S^{2n-1}} = \iota \circ \varphi$, die die *Hopfabbildung* genannt wird. Wir erhalten eine stetige Abbildung $\iota \cup_\varphi \Phi : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \cup_\varphi D^{2n} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Diese ist bijektiv, also ein Homöomorphismus. Wir sehen daher, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ aus $\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ durch Ankleben einer $2n$-Zelle längs der Hopfabbildung $\varphi : S^{2n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}$ entsteht,

$$\mathbb{C}\mathrm{P}^n \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \cup_\varphi D^{2n}.$$

$\mathbb{C}\mathrm{P}^0$ ist ein einpunktiger Raum, und $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$ vgl. Beispiel I.6.8. Nach Korollar I.9.14 induziert die kanonische Einbettung $\iota : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ einen Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-1}) \cong \pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$, falls $n \geq 1$. Mittels Induktion folgt nun, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ einfach zusammenhängend ist, für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

I.9.18. Korollar. *Zu jeder endlich präsentierbaren Gruppe G existiert ein wegzusammenhängender kompakter Hausdorffraum X mit $\pi_1(X) \cong G$.*

Beweis. Sei $G \cong \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle = F(\{s_1, \dots, s_n\})/\mathcal{N}(\{r_1, \dots, r_m\})$ eine endliche Präsentation von G. Betrachte die Einpunktvereinigung von n Kreisen $\bigvee^n(S^1, 1)$. Nach Beispiel I.9.7 ist $\pi_1\big(\bigvee^n(S^1,1)\big) \cong F(\{s_1, \dots, s_n\})$. Jede Relation $r_j \in F(S)$ kann daher als Element in $\pi_1\big(\bigvee^n(S^1,1)\big) \cong \big[(S^1,1), \bigvee^n(S^1,1)\big]$ aufgefasst werden, siehe Proposition I.8.27. Es sei $\varphi_j : (S^1, 1) \to \bigvee^n(S^1, 1)$ eine stetige Abbildung die r_j repäsentiert, $1 \leq j \leq m$. Es bildet dann $(\varphi_j)_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1\big(\bigvee^n(S^1,1)\big)$ den Erzeuger $[\omega_1] \in \pi_1(S^1, 1)$ auf r_j ab, $1 \leq j \leq m$. Betrachte nun $\varphi := \varphi_1 \vee \dots \vee \varphi_m : \bigvee^m(S^1, 1) \to \bigvee^n(S^1, 1)$. Das Bild von $\varphi_* : \pi_1\big(\bigvee^m(S^1,1)\big) \to \pi_1\big(\bigvee^n(S^1,1)\big)$ stimmt dann mit der von $\{r_1, \dots, r_m\}$ erzeugten Untergruppe überein, also ist $\mathcal{N}(\mathrm{img}(\varphi_*)) = \mathcal{N}(\{r_1, \dots, r_m\})$. Kleben wir $\bigvee^m(D^2,1)$ längs φ an $\bigvee^n(S^1,1)$ erhalten wir einen wegzusammenhängenden kompakten Hausdorffraum $X := \big(\bigvee^n(S^1,1)\big) \cup_\varphi \big(\bigvee^m(D^2,1)\big)$. Nach Satz I.9.13 hat X Fundamentalgruppe $\pi_1(X) \cong \pi_1\big(\bigvee^n(S^1,1)\big)/\mathcal{N}\big(\varphi_*\big(\pi_1\big(\bigvee^m(S^1,1)\big)\big)\big) \cong F(\{s_1,\dots,s_n\})/\mathcal{N}(\{r_1,\dots,r_m\}) \cong G$. □

I.9.19. Bemerkung. Wir werden später sehen, dass zu jeder Gruppe G ein, i.A. nicht kompakter, wegzusammenhängender Hausdorffraum Raum X existiert, sodass $\pi_1(X) \cong G$. Die Konstruktion ist dieselbe nur muss i.A. mit einer Einpunktvereinigung unendlich vieler Kreise gestartet und unendlich viele Zellen angeklebt werden.

Unter einer *geschlossenen Fläche* verstehen wir einen kompakten, (weg)zusammenhängenden Hausdorffraum der lokal zu $\mathbb{R}^2$ homöomorph ist, dh. jeder Punkt besitzt eine zu $\mathbb{R}^2$ homöomorphe Umgebung.[14] Die Sphäre S^2, der Torus T^2, die projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ und die Kleinsche Flasche K aus Beispiel I.9.9 sind geschlossene Flächen.

Für $g \in \mathbb{N}$ betrachte die Einpunktvereinigung von $2g$ Kreisen $\bigvee^{2g}(S^1,1)$ und bezeichne mit $\iota_k : (S^1,1) \to \bigvee^{2g}(S^1,1)$ die kanonische Inklusion der k-ten Komponente, $1 \leq k \leq 2g$. Für $1 \leq j \leq g$ definiere Schleifen $a_j : I \to \bigvee^{2g}(S^1,1)$, $a_i := \iota_j \circ \omega_1$, und $b_j : I \to \bigvee^{2g}(S^1,1)$, $b_j := \iota_{g+j} \circ \omega_1$. Betrachte schließlich die Schleife $\varphi := a_1 b_1 \bar a_1 \bar b_1 \cdots a_g b_g \bar a_g \bar b_g$ und fasse sie als Abbildung $S^1 \cong I/\{0,1\} \to \bigvee^{2g}(S^1,1)$ auf. Der Raum $M_g := \big(\bigvee^{2g}(S^1,1)\big) \cup_\varphi D^2$ wird die *orientierbare Fläche vom Geschlecht* g genannt. Wir setzen noch $M_0 := S^2$. Es ist leicht einzusehen, dass jedes M_g tatsächlich eine geschlossene Fläche ist, $g \in \mathbb{N}_0$. Etwa gilt $M_1 \cong T^2$. Aus Korollar I.9.14 erhalten wir folgende Darstellung ihrer Fundamentalgruppe,

$$\pi_1(M_g) \cong \big\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \,\big|\, [\alpha_1,\beta_1]\cdots[\alpha_g,\beta_g] \big\rangle$$

wobei wir die übliche Notation $[\alpha,\beta] := \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ für den Kommutator von α und β verwenden. Mittels (I.24) und (I.21) berechnen wir die Abelisierung,

$$\begin{aligned}
\pi_1(M_g)^{\mathrm{ab}} &\cong \big\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \,\big|\, [\alpha_1,\beta_1]\cdots[\alpha_g,\beta_g],\ [\alpha_i,\alpha_j],\ [\beta_i,\beta_j],\ [\alpha_i,\beta_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \,\big|\, [\alpha_i,\alpha_j],\ [\beta_i,\beta_j],\ [\alpha_i,\beta_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \,\big|\, - \big\rangle^{\mathrm{ab}} \\
&\cong (\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z})^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}.
\end{aligned}$$

Für $g \in \mathbb{N}$ betrachte die Einpunktvereinigung von g Kreisen $\bigvee^g(S^1,1)$ und bezeichne die kanonische Inklusion der k-ten Komponente mit $\iota_k : (S^1,1) \to \bigvee^g(S^1,1)$, $1 \leq k \leq g$. Für $1 \leq k \leq g$ definiere Schleifen $a_k : I \to \bigvee^g(S^1,1)$, $a_k := \iota_k \circ \omega_1$. Fasse die Schleife $\varphi := a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g$ als Abbildung $S^1 \cong I/\{0,1\} \to \bigvee^g(S^1,1)$ auf. Der Raum $N_g := \big(\bigvee^g(S^1,1)\big) \cup_\varphi D^2$ wird als die *nicht orientierbare Fläche mit Geschlecht* g bezeichnet. Jedes N_g ist eine geschlossene Fläche, $g \in \mathbb{N}$.

[14] Die geschlossenen Flächen sind daher genau die zusammenhängenden, kompakten 2-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten ohne Rand.

Etwa gilt $N_1 \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ und $N_2 \cong K$, siehe Beispiel I.9.9. Aus Korollar I.9.14 erhalten wir für die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(N_g) \cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \,\big|\, \alpha_1^2\alpha_2^2 \cdots \alpha_g^2 \big\rangle,$$

und für ihre Abelisierung

$$\begin{aligned}
\pi_1(N_g)^{\mathrm{ab}} &\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \,\big|\, \alpha_1^2\alpha_2^2 \cdots \alpha_g^2,\ [\alpha_i, \alpha_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \,\big|\, \gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_g,\ \alpha_1^2\alpha_2^2 \cdots \alpha_g^2,\ [\alpha_i, \alpha_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \,\big|\, \gamma^2,\ \gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_g,\ \alpha_1^2\alpha_2^2 \cdots \alpha_g^2,\ [\alpha_i, \alpha_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \,\big|\, \gamma^2,\ \gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_g,\ [\alpha_i, \alpha_j] \big\rangle \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \,\big|\, \gamma^2,\ \gamma^{-1}\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_g \big\rangle^{\mathrm{ab}} \\
&\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, \gamma \,\big|\, \gamma^2 \big\rangle^{\mathrm{ab}} \\
&\cong \Big(\langle \alpha_1 | - \rangle * \cdots * \langle \alpha_{g-1} \mid - \rangle * \langle \gamma | \gamma^2 \rangle \Big)^{\mathrm{ab}} \\
&\cong \big(\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2 \big)^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2
\end{aligned}$$

Wir halten diese Resultate in folgendem Korollar fest.

I.9.20. Korollar. *Für die gechlossenen Flächen gilt:*

$$\begin{aligned}
\pi_1(M_g) &\cong \big\langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \,\big|\, [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g] \big\rangle, &\quad \pi_1(M_g)^{\mathrm{ab}} &\cong \mathbb{Z}^{2g}, \\
\pi_1(N_g) &\cong \big\langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \,\big|\, \alpha_1^2\alpha_2^2 \cdots \alpha_g^2 \big\rangle, & \pi_1(N_g)^{\mathrm{ab}} &\cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Insbesondere sind die Flächen $M_0, N_1, M_1, N_2, M_2, N_3, \dots$ paarweise nicht homotopieäquivalent (homöomorph).

I.9.21. Bemerkung. Die geschlossenen Flächen sind vollständig klassifiziert, jede geschlossene Fläche ist zu genau einer der Flächen $M_0, N_1, M_1, N_2, M_2, \dots$ homöomorph. Die Berechnung der Fundamentalgruppen oben hat gezeigt, dass eine geschlossene Fläche zu höchstens einer solchen Fläche homöomorph sein kann. Um zu zeigen, dass sie tatsächlich zu einer Fäche dieser Liste homöomorph ist sind völlig andere Methoden nötig, vgl. Morse Theorie.

II. Überlagerungen

Jeder hinreichend zusammenhängende topologische Raum besitzt eine einfach zusammenhängende, die sogenannte universelle Überlagerung. Geometrische Strukturen der Basis lassen sich oft in kanonischer Weise auf diese universelle Überlagerung liften. Die Fundamentalgruppe der Basis wirkt frei auf der universellen Überlagerung und lässt üblicherweise die gelifteten geometrischen Strukturen invariant. Die Überlagerungstheorie liefert daher ein Werkzeug mit dem das Studium geometrischer Objekte auf die einfach zusammenhängende Situation zurückgeführt werden kann. Als Beispiele seien hier nur die Theorie der Lie-Gruppen, die Riemannschen Flächen und die vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung erwähnt.

Unter schwachen Zusammenhangsvoraussetzungen ist eine vollständige Klassifikation der Überlagerungen eines Raumes mit Hilfe seiner Fundamentalgruppe möglich. Auch das Liftungsproblem lässt sich mittels der Fundamentalgruppe lösen. Schließlich können Überlagerungen dazu verwendet werden die Fundamentalgruppen mancher Räume zu bestimmen.

Einführungen in die Überlagerungstheorie finden sich etwa in [**6**, Kapitel IX], [**4**, Chapter 1.3], [**14**, Kapitel II.6], [**10**, Kapitel III.6] oder [**11**, Chapter 2]. Für eine kurze Darstellung mittels Gruppoiden siehe [**9**, Chapter 3].

II.1. Elementare Eigenschaften von Überlagerungen. Eine surjektive stetige Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ wird eine *Überlagerung* genannt, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U mit folgender Eigenschaft besitzt: Es existieren eine Indexmenge Λ und disjunkte offene Teilmengen $\tilde{U}_\lambda \subseteq \tilde{X}$, $\lambda \in \Lambda$, mit $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} \tilde{U}_\lambda$, sodass $p|_{\tilde{U}_\lambda} : \tilde{U}_\lambda \to U$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $\lambda \in \Lambda$. In diesem Fall sagen wir U wird gleichmäßig von p überlagert. In diesem Zusammenhang werden X als *Basis*, $\tilde{X}$ als *Total-* oder *Überlagerungsraum* und p als *Überlagerungsabbildung* bezeichnet. Wir sagen auch $\tilde{X}$ ist eine Überlagerung von X, wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht welche Abbildung p gemeint ist.

II.1.1. Beispiel. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to S^1$, $p(t) := e^{2\pi \mathbf{i} t}$, ist eine Überlagerung, die offenen Teilmengen $S^1 \setminus \{1\}$ und $S^1 \setminus \{-1\}$ werden von p gleichmäßig überlagert, siehe Lemma I.4.8.

Unter einem *Isomorphismus* zwischen zwei Überlagerungen $p_1 : \tilde{X}_1 \to X$ und $p_2 : \tilde{X}_2 \to X$ verstehen wir einen Homöomorphismus $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ für den $p_2 \circ \varphi = p_1$ gilt. Zwei Überlagerungen desselben Raums werden *isomorph* genannt, falls ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert. Ein Isomorphismus von Überlagerungen $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{X}$ wird *Automorphismus* oder *Decktransformation* von $\tilde{X}$ genannt. Die Menge der Decktransformationen einer Überlagerung bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe die mit $\mathrm{Deck}(p)$ oder $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ bezeichnet wird.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi", "\cong"'] \arrow[dr, "p_1"'] & & \tilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

II.1.2. Bemerkung. Jede Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus und daher insbesondere eine offene Abbildung.[15] Auch ist jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eine Quotientenabbildung, dh. eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn ihr Urbild $p^{-1}(U)$ offen in $\tilde{X}$ ist. Ein surjektiver lokaler Homöomorphismus muss i.A. keine Überlagerung sein, etwa ist $p : (0, 3\pi) \to S^1$, $p(t) := e^{2\pi \mathbf{i} t}$, keine Überlagerung. Weder $1 \in S^1$ noch $-1 \in S^1$ besitzen offene Umgebungen die von p gleichmäßig überlagert werden.

II.1.3. Beispiel. Ist F ein nicht leerer diskreter topologischer Raum, dann ist die kanonische Projektion $p_X : X \times F \to X$ eine Überlagerung. Jede Bijektion $\pi : F \to F$ liefert eine Decktransformation $X \times F \to X \times F$, $(x, f) \mapsto (x, \pi(f))$. Wir erhalten einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathfrak{S}(F) \to \operatorname{Deck}(p_X)$.

II.1.4. Beispiel. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $A \subseteq X$ ein Teilraum, dann ist die Einschränkung $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \to A$ eine Überlagerung. Für diese eingeschränkte Überlagerung wird auch die Notation $\tilde{X}|_A$ verwendet.

Eine Überlagerung wird *trivial* genannt, wenn sie zu einer Überlagerung $p_X : X \times F \to X$ isomorph ist, siehe Beispiel II.1.3. Die nächste Proposition zeigt, dass Überlagerungen stets lokal trivial sind.

II.1.5. Proposition. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge die von p gleichmäßig überlagert wird. Dann existiert ein diskreter Raum F und ein Homöomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$, sodass $p_U \circ \varphi = p|_{p^{-1}(U)}$, wobei $p_U : U \times F \to U$ die kanonische Projektion bezeichnet. Die eingeschränkte Überlagerung $\tilde{X}|_U$ ist daher trivial.*

Beweis. Da U von p gleichmäßig überlagert wird existieren eine Indexmenge Λ und disjunkte offene Teilmengen $\tilde{U}_\lambda \subseteq \tilde{X}$, $\lambda \in \Lambda$, mit $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{U}_\lambda$ und so, dass $p|_{\tilde{U}_\lambda} : \tilde{U}_\lambda \to U$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $\lambda \in \Lambda$. Wir versehen Λ mit der diskreten Topologie und betrachten die Abbildung $\psi : U \times \Lambda \to p^{-1}(U)$, $\psi(x, \lambda) := (p|_{\tilde{U}_\lambda})^{-1}(x)$. Offensichtlich ist ψ bijektiv, und es gilt $p \circ \psi = p_U$. Da ψ die offenen Mengen $U \times \{\lambda\}$ homöomorph auf die offenen Mengen $\tilde{U}_\lambda$ abbildet, ist ψ ein Homöomorphismus. Setzen wir $F := \Lambda$ und $\varphi := \psi^{-1}$, dann haben diese die in der Proposition formulierten Eigenschaften. □

$$\begin{tikzcd} U \times \Lambda \arrow[rr, "\psi", "\cong"'] \arrow[dr, "p_U"'] & & p^{-1}(U) \arrow[dl, "p"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

II.1.6. Bemerkung. Offensichtlich gilt auch die folgende Umkehrung von Proposition II.1.5. Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine stetige Abbildung und existieren zu jedem

[15]Eine Abbildung $f : Y \to Z$ wird *lokaler Homöomorphismus* genannt, falls jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung U besitzt die durch f homöomorph auf eine offene Umgebung von $f(y)$ abgebildet wird. Diese Eigenschaft bleibt dann für jede in U enthaltene offene Teilmenge richtig. Lokale Homöomorphismen sind stetig und offen. Dabei heißt eine Abbildung $f : Y \to Z$ *offen,* falls sie offene Teilmengen von Y auf offene Teilmengen in Z abbildet.

Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U von x, ein diskreter Raum F und ein Homöomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ mit $p_U \circ \varphi = p|_{p^{-1}(U)}$, dann muss p schon eine Überlagerung sein.

Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $x \in X$, dann wird $F_x := p^{-1}(x)$ die *Faser* über x genannt. Aus der Definition einer Überlagerung folgt sofort, dass ihre Fasern diskrete topologische Räume sind. Die Kardinalität der Faser über x wird die *Blätterzahl* der Überlagerung an der Stelle x genannt. Die Blätterzahl einer Überlagerung definiert eine lokal konstante Funktion auf X. Für zusammenhängendes X muss daher die Blätterzahl konstant sein. Wir sprechen von einer *n-blättrigen* oder *n-fachen* Überlagerung, falls jede Faser aus genau n Punkten besteht.

II.1.7. Beispiel. Jeder Homöomorphismus $p : \tilde{X} \to X$ ist eine ein-blättrige Überlagerung. Umgekehrt muss jede ein-blättrige Überlagerung ein Homöomorphismus sein, siehe Bemerkung II.1.2.

II.1.8. Beispiel. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \to S^1$ aus Beispiel II.1.1 ist eine unendlich-blättrige Überlagerung. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist die Translation $\tau_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tau_n(t) := t + n$, eine Decktransformation. Wir erhalten einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{Deck}(p)$, $n \mapsto \tau_n$.

II.1.9. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $p_n : S^1 \to S^1$, $p_n(z) := z^n$, eine n-blättrige Überlagerung. Dabei ist $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Es bezeichne $G_n := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta^n = 1\} \subseteq S^1 \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der n-ten Einheitswurzeln. Diese bilden bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine zu $\mathbb{Z}_n$ isomorphe Gruppe, ein Isomorphismus ist durch $\mathbb{Z}_n \xrightarrow{\cong} G_n$, $[k] \mapsto e^{2\pi \mathbf{i} k/n}$, gegeben. Jedes $\zeta \in G_n$ definiert eine Decktransformation $\rho_\zeta : S^1 \to S^1$, $\rho_\zeta(z) := \zeta z$. Wegen $p_{\zeta_1\zeta_2} = p_{\zeta_1} \circ p_{\zeta_2}$, $\zeta_1, \zeta_2 \in G_n$, erhalten wir einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}_n \cong G_n \to \mathrm{Deck}(p_n)$, $\zeta \mapsto \rho_\zeta$.

II.1.10. Beispiel. Die Abbildung $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, $p(z) := e^{2\pi \mathbf{i} z}$, liefert eine unendlich-blättrige Überlagerung. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\tau_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\tau_n(z) := z + n$, eine Decktransformation. Wir erhalten einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathrm{Deck}(p)$, $n \mapsto \tau_n$. Schränken wir diese Überlagerung auf den Teilraum $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein, so erhalten wir die Überlagerung aus Beispiel II.1.8.

II.1.11. Beispiel. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $p_n : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $p_n(z) := z^n$, eine n-blättrige Überlagerung. Jede n-te Einheitswurzel $\zeta \in G_n$, siehe Beispiel II.1.9, definiert eine Decktransformation $\rho_\zeta : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$, $\rho_\zeta(z) := \zeta z$. Wieder haben wir einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}_n \cong G_n \to \mathrm{Deck}(p_n)$. Schränken wir diese Überlagerung auf den Teilraum $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein, so erhalten wir die Überlagerung aus Beispiel II.1.9.

II.1.12. Beispiel. Die Quotientenabbildung $p : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ist eine zweiblättrige Überlagerung. Die sogenannte *Antipodalabbildung* $A : S^n \to S^n$, $A(x) := -x$, ist eine Decktransformation. Wegen $A^2 = \mathrm{id}_{S^n}$ erhalten wir einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Deck}(p)$, $[0] \mapsto \mathrm{id}_{S^n}$, $[1] \mapsto A$.

II.1.13. Beispiel. Sind $p : \tilde{X} \to X$ und $q : \tilde{Y} \to Y$ zwei Überlagerungen, dann ist auch $p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to X \times Y$ eine Überlagerung. Mittels Induktion folgt, dass endliche Produkte von Überlagerungen wieder Überlagerungen sind. Für unendlich viele Faktoren bleibt dies jedoch nicht richtig, siehe etwa [**11**, Example 2.2.9].

II.1.14. Beispiel. Sind $p_j : \tilde{X}_j \to X$ Überlagerungen, $j \in J$, dann ist auch $\bigsqcup_{j\in J} p_j : \bigsqcup_{j\in} \tilde{X}_j \to X$ eine Überlagerung.

II.1.15. Bemerkung. Die Komposition zweier Überlagerungen ist i.A. keine Überlagerung, siehe etwa [**11**, Example 2.2.8].

Der Totalraum einer Überlagerung erbt viele topologische Eigenschaften der Basis. Auch lassen sich geometrische Strukturen der Basis oft in kanonischer Weise auf die Überlagerung liften. Der Rest dieses Abschnitts sei einigen einfachen Beispielen dazu gewidmet. Ein weniger triviales Beispiel werden wir in Abschnitt II.8 diskutieren.

II.1.16. Beispiel. Ist X ein Hausdorffraum und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann ist auch $\tilde{X}$ Hausdorffsch. Liegen zwei Punkte von $\tilde{X}$ nicht in der selben Faser so können sie auf Grund der Hausdorff Eigenschaft von X durch disjunkte offene Umgebungen der Form $p^{-1}(U)$ und $p^{-1}(V)$ getrennt werden. Liegen sie in der gleichen Faser, dann folgt direkt aus der Überlagerungseigenschaft von p, dass sie durch disjunkte offene Mengen der Form $\tilde{U}_{\lambda_1}$ und $\tilde{U}_{\lambda_2}$ getrennt werden können.

II.1.17. Beispiel. Ist X ein parakompakter Hausdorffraum und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann ist auch $\tilde{X}$ ein parakompakter Hausdorffraum.[16] Um dies einzusehen sei $\tilde{\mathcal{U}}$ eine offene Überdeckung von $\tilde{X}$. Da die Basis X parakompakt ist finden wir eine lokal endliche offene Überdeckung $\{U_j\}_{\in J}$ von X, sodass jedes U_j gleichmäßig von p überlagert wird. Es gibt daher diskrete Räume F_j mit $p^{-1}(U_j) \cong U_j \times F_j$, siehe Proposition II.1.5. Es existiert dann auch eine offene Überdeckung $\{V_j\}_{j\in J}$ von X mit $\bar{V}_j \subseteq U_j$ für jedes $j \in J$. Ist nämlich $f_j : X \to [0,1]$, $j \in J$, eine Zerlegung der Eins mit $\mathrm{supp}(f_j) \subseteq U_j$, dann können wir $V_j := \{x \in X : f_j(x) \neq 0\}$ verwenden. Beachte, dass $\bar{V}_j$ als abgeschlossene

[16]Wir erinnern uns, dass ein topologischer Raum X parakompakt heißt, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche offene Verfeinerung besitzt. Genauer, ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, dann existiert eine offene Überdeckung $\mathcal{V}$ von X die $\mathcal{U}$ verfeinert (dh. zu jedem $V \in \mathcal{V}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$) und lokal endlich ist (dh. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung die nur endlich viele der offenen Mengen $V \in \mathcal{V}$ schneidet.) Ein Hausdorffraum ist genau dann parakompakt, wenn jede offene Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der Eins besitzt, siehe etwa [**6**, Kapitel VIII§5] oder [**10**, Kapitel I.8.6]. Nach einem Satz von Stone ist jeder metrisierbare Raum parakompakt, siehe [**10**, Kapitel I.8.7].

Teilmenge eines parakompakten Raums selbst parakompakt ist. Damit sind auch $p^{-1}(\bar{V}_j) \cong \bar{V}_j \times F_j$ parakomapakt. Für jedes $j \in J$ existiert daher eine lokal endliche offene Überdeckung $\tilde{\mathcal{V}}_j$ von $p^{-1}(\bar{V}_j)$, die die Überdeckung $\{\tilde{U} \cap p^{-1}(\bar{V}_j) : \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}\}$ verfeinert. Für jedes $j \in J$ ist dann $\tilde{\mathcal{W}}_j := \{\tilde{V} \cap p^{-1}(V_j) : \tilde{V} \in \tilde{\mathcal{V}}_j\}$ eine offene Überdeckung von $p^{-1}(V_j)$ die die Überdeckung $\{\tilde{U} \cap p^{-1}(V_j) : \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}\}$ verfeinert. Da $\bigcup_{j \in J} V_j = X$ bildet $\tilde{\mathcal{W}} := \bigcup_{j \in J} \tilde{\mathcal{W}}_j$ eine offene Überdeckung von $\tilde{X}$ die $\tilde{\mathcal{U}}$ verfeinert. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\tilde{\mathcal{W}}$ lokal endlich ist. Mit $\{U_j\}_{j \in J}$ ist auch $\{p^{-1}(\bar{V}_j)\}_{j \in J}$ eine lokal endliche Überdeckung. Es genügt daher zu zeigen, dass zu fixem $j \in J$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ eine Umgebung von $\tilde{x}$ existiert die nur endlich viele der Überdeckungsmengen in $\tilde{\mathcal{V}}_j$ trifft. Liegt $\tilde{x}$ nicht in $p^{-1}(\bar{V}_j)$ ist dies offensichtlich, denn $p^{-1}(\bar{V}_j)$ ist abgeschlossen in $\tilde{X}$. Im Fall $\tilde{x} \in p^{-1}(\bar{V}_j)$ folgt dies aus der lokalen Endlichkeit von $\tilde{\mathcal{V}}_j$. Damit ist $\tilde{\mathcal{W}}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung von $\tilde{\mathcal{U}}$, und $\tilde{X}$ daher parakompakt.

II.1.18. Beispiel. Ist X eine topologische Mannigfaltigkeit[17] und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann ist auch $\tilde{X}$ eine topologische Mannigfaltigkeit. Dies folgt aus Beispiel II.1.17 und der Tatsache, dass p ein lokaler Homöomorphismus ist.

II.1.19. Beispiel. Ist X eine glatte Mannigfaltigkeit und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf $\tilde{X}$ genau eine glatte Struktur die p zu einem lokalen Diffeomorphismus macht. Jede Decktransformation ist dann ein Diffeomorphismus von $\tilde{X}$.

II.1.20. Beispiel. Ist X eine Riemannmannigfaltigkeit und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf $\tilde{X}$ genau eine Riemannmetrik die p zu einer lokalen Isometrie macht. Jede Decktransformation ist dann eine Isometrie von $\tilde{X}$.

II.1.21. Beispiel. Ist X eine symplektische Mannigfaltigkeit und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf $\tilde{X}$ genau eine symplektische Struktur die p zu einem lokalen Symplektomorphismus macht. Jede Decktransformation ist dann ein Symplektomorphismus von $\tilde{X}$.

II.1.22. Beispiel. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf $\tilde{X}$ genau eine komplexe Struktur die p zu einem lokalen Biholomorphismus macht. Jede Decktransformation ist dann ein Biholomorphismus von $\tilde{X}$.

[17]Unter einer *topologischen Mannigfaltigkeit* verstehen wir einen lokal euklidischen parakompakten Hausdorffraum. Dabei wird ein topologischer Raum *lokal euklidisch* genannt, falls jeder Punkt eine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe offene Umgebung besitzt. Mit Hilfe eines Satzes von Stone lässt sich zeigen, dass ein lokal euklidischer Hausdorffraum genau dann parakompakt ist, wenn er metrisierbar ist. Wir können topologische Mannigfaltigkeiten daher äquivalent als metrisierbare lokal euklidische Räume definieren.

II.2. Strikt diskontinuierliche Gruppenwirkungen. Unter einer *Linkswirkung* einer Gruppe G auf einer Menge X verstehen wir eine Abbildung (die Wirkung) $\lambda : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto gx := g \cdot x := \lambda_g(x) := \lambda^x(g) := \lambda(g, x)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

(i) Für $g, h \in G$ und $x \in X$ gilt $g(hx) = (gh)x$, dh. $\lambda(g, \lambda(h, x)) = \lambda(gh, x)$.
(ii) Für das neutrale Element $1 \in G$ und $x \in X$ gilt $1x = x$, dh. $\lambda(1, x) = x$.

In dieser Situation sagen wir auch die Gruppe G wirkt von links auf der Menge X. Aus (i) und (ii) folgt $x = 1x = (g^{-1}g)x = g^{-1}(gx)$, also $\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g = \mathrm{id}_X$, oder $\lambda_{g^{-1}} = (\lambda_g)^{-1}$. Daher ist jedes λ_g bijektiv, also eine Permutation von X. Wegen (i) ist die Abbildung

$$G \to \mathfrak{S}(X), \qquad g \mapsto \lambda_g \tag{II.1}$$

ein Gruppenhomomorphismus, wobei $\mathfrak{S}(X)$ die Gruppe der Permutationen von X bezeichnet. Umgekehrt definiert jeder Homomorphismus $G \to \mathfrak{S}(X)$ in offensichtlicher Weise eine Linkswirkung von G auf X.

Eine Gruppenwirkung λ heißt *treu* wenn der Homomoprhismus (II.1) injektiv ist, wenn also nur das neutrale Element von G trivial, dh. durch die Identität, wirkt. I.A. ist der Kern von (II.1) ein Normalteiler N in G und die Wirkung (II.1) faktorisiert zu einer treuen Wirkung $G/N \to \mathfrak{S}(X)$ der Gruppe G/N auf X.

Eine Gruppenwirkung heißt *transitiv* falls zu je zwei Punkten $x, y \in X$ ein $g \in G$ mit $gx = y$ existiert. Ist $x \in X$, dann nennt man $Gx := \{gx : g \in G\}$ den *Orbit* von x. Die Wirkung ist daher transitiv genau dann wenn für einen (und dann jeden) Punkt $x \in X$ gilt $Gx = X$. Für $g \in G$ ist $\lambda_g(Gx) = Gx$, also erhalten wir eine Gruppenwirkung $G \to \mathfrak{S}(Gx)$ der Gruppe G auf dem Orbit Gx. Die Wirkung von G auf Gx ist stets transitiv. Unter der *Isotropiegruppe* eines Punktes $x \in X$ verstehen wir die Untergruppe $G^x := \{g \in G : gx = x\}$ von G. Diese besteht daher aus allen Gruppenelementen die den Punkt x stabilisieren und wird auch *Stabilisatoruntergruppe* genannt. Wir erhalten eine Bijektion $G/G^x \cong Gx$, $gG^x \mapsto gx$, zwischen den Linksnebenklassen[18] von G^x und dem Orbit Gx.

Eine Gruppenwirkung heißt *frei* wenn folgendes gilt: Ist $g \in G$ und $x \in X$ mit $gx = x$, dann folgt schon $g = 1$. In anderen Worten, für $g \neq 1$ hat $\lambda_g \in \mathfrak{S}(X)$ keinen Fixpunkt. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Isotropiegruppen trivial sind, dh. $G^x = \{1\}$ für alle $x \in X$. In diesem Fall erhalten wir für jedes $x \in X$ eine Bijektion $G \cong Gx$, $g \mapsto gx$, zwischen G und dem Orbit durch x.

Unter einer *Rechtswirkung* von G auf X verstehen wir eine Abbildung $\rho : X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto xg := x \cdot g := \rho^g(x) := \rho_x(g) := \rho(x, g)$, mit $x1 = x$ und $(xg)h = x(gh)$ für alle $g, h \in G$. Ist $\rho : X \times G \to X$ eine Rechtswirkung, dann definiert $\lambda : G \times X \to X$, $\lambda(g, x) := \rho(x, g^{-1})$, eine Linkswirkung von G auf X. Alle mit einer Linkswirkung assozierten Begriffe besitzen daher ein offensichtliches

[18] Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, dann definiert $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in H$ eine Äquivalenzrelation auf G. Ihre Äquivalenzklassen sind von der Form $gH = \{gh : h \in H\}$ und werden Linksnebenklassen von H genannt. Für die Menge der Linksnebenklassen schreiben wir G/H.

Analogon für Rechtswirkungen. Etwa ist eine Rechtswirkung nichts anderes als ein Anti-Homomorphismus $G \to \mathfrak{S}(X)$.

Unter einer *stetigen Linkswirkung* einer diskreten Gruppe G auf einem topologischen Raum X verstehen wir eine Linkswirkung $\lambda : G \times X \to X$ die stetig ist, wobei G mit der diskreten Topologie versehen ist. Jedes $\lambda_g : X \to X$ ist dann stetig, und wegen $(\lambda_g)^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$ ein Homöomorphismus. Eine stetige Linkswirkung liefert daher einen Gruppenhomomorphismus $G \to \mathrm{Homeo}(X)$, $g \mapsto \lambda_g$, wobei $\mathrm{Homeo}(X)$ die Gruppe der Homöomorphismen von X bezeichnet. Umgekehrt definiert jeder solche Gruppenhomomorphismus eine stetige Linkswirkung der diskreten Gruppe G auf X. Analog sprechen wir von einer stetigen Rechtswirkung, falls die Wirkung $\rho : X \times G \to X$ stetig ist.

Eine stetige Wirkung einer diskreten Gruppe G auf einem topologischen Raum X wird *strikt diskontinuierlich* genannt, wenn jeder Punkt in $x \in X$ eine Umgebung U besitzt für die gilt $gU \cap U = \emptyset$, für alle $g \neq 1 \in G$. Offensichtlich muss eine strikt diskontinuierliche Gruppenwirkung frei sein, die Umkehrung gilt i.A. jedoch nicht. Aus $gU \cap U = \emptyset$ folgt $gU \cap hU = \emptyset$ für alle $g \neq h \in G$. Insbesondere ist die von X auf dem Orbit Gx induzierte Topologie diskret, die Bijektion $G \cong Gx$ also ein Homöomorphismus diskreter Räume. Für Wirkungen endlicher Gruppen ist folgende Beobachtung oft hilfreich.

II.2.1. Proposition. *Jede stetige freie Wirkung einer endlichen diskreten Gruppe auf einem Hausdorffraum ist strikt diskontinuierlich.*

Beweis. Sei also G eine endliche Gruppe die frei und stetig auf einem Hausdorffraum X wirkt. Sei nun $x \in X$. Da die Wirkung frei ist, sind die Punkte gx, $g \in G$, alle verschieden. Wegen der Hausdorffeigenschaft von X finden wir zu jedem $g \neq 1 \in G$ eine Umgebung V_g^1 von x und eine Umgebung V_g^2 von gx mit $V_g^1 \cap V_g^2 = \emptyset$. Auf Grund der Stetigkeit der Wirkung ist dann $V_g := V_g^1 \cap g^{-1} V_g^2$ eine Umgebung von x für die $gV_g \cap V_g = \emptyset$ gilt. Wegen der Endlichkeit von G ist auch $U := \bigcap_{g \neq 1} V_g$ eine Umgebung von x. Nach Konstruktion gilt $gU \cap U = \emptyset$, für alle $g \neq 1 \in G$. Also ist die Wirkung strikt diskontinuierlich. $\square$

Eine Linkswirkung von G auf X definiert eine Äquivalenzrelation auf X durch $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : gx = y$. Ihre Äquivalenzklassen stimmen mit den Orbits überein, es ist also $x \sim y$ genau dann wenn $Gx = Gy$. Die Menge der Äquivalenzklassen wird als *Orbitraum* der Wirkung bezeichnet und mit $X/G := X/{\sim}$ bezeichnet. Wir versehen X/G mit der Quotiententopologie, dh. mit der feinsten Topologie, sodass die kanonische Projektion $p : X \to X/G$ stetig ist. Eine Teilmenge V von X/G ist genau dann offen, wenn $p^{-1}(V)$ offen in X ist.

II.2.2. Beispiel. Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, dann definiert $G \times H \to G$, $(g, h) \mapsto gh$, eine Rechtswirkung von H auf G. Ihre Orbits stimmen mit den Linksnebenklassen von H überein, siehe oben.

II.2.3. Proposition. *Wirkt die Gruppe G strikt diskontinuierlich auf dem topologischen Raum X, dann ist die kanonische Projektion $p : X \to X/G$ eine*

Überlagerung. Ihre Blätterzahl stimmt mit der Ordnung von G überein. Jedes Element von G liefert eine Decktransformation, und wir erhalten einen injektiven Homomorphismus von Gruppen $G \to \mathrm{Deck}(p)$.

Beweis. Offensichtlich ist p stetig und surjektiv. Weiters ist p eine offene Abbildung, denn für offenes $U \subseteq X$ ist auf Grund der Stetigkeit der Wirkung auch $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g\in G} gU$ offen in X, also $p(U)$ offen in X/G. Sei nun $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x, sodass $gU \cap hU = \emptyset$ für alle $g \neq h \in G$. Dann sind $\{gU\}_{g\in G}$, disjunkte offene Teilmengen in X, und für die offene Menge $V := p(U) \subseteq X/G$ gilt $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{g\in G} gU$. Schließlich ist für jedes $g \in G$ die Einschränkung $p|_{gU} : gU \to V$ eine stetige Bijektion, und wegen der Offenheit von p daher ein Homöomorphismus. Also ist $p : X \to X/G$ eine Überlagerung. Für $g \in G$ liefert $\lambda_g : X \to X$, $\lambda_g(x) := gx$, einen Homöomorphismus, und da offensichtlich auch $p \circ \lambda_g = p$ gilt, ist λ_g eine Decktransformation. Die Relation $\lambda_{gh} = \lambda_g \circ \lambda_h$ besagt gerade, dass $G \to \mathrm{Deck}(X)$, $g \mapsto \lambda_g$, ein Homomorphismus ist. Dieser Homomorphismus ist injektiv, denn strikt diskontinuierliche Wirkungen sind stets treu. □

II.2.4. Beispiel. Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(n, t) \mapsto n + t$, definiert eine stetige Linkswirkung der diskreten Gruppe $\mathbb{Z}$ auf dem topologischen Raum $\mathbb{R}$. Diese Wirkung ist strikt diskontinuierlich, denn für $t \in \mathbb{R}$ und $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ gilt $(n + U) \cap U = \emptyset$, wobei $U = (t - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2})$. Daher ist die Orbitprojektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ eine Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Bis auf den Homöomorphismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ ist dies die Überlagerung aus Beispiel II.1.8 oben.

II.2.5. Beispiel. Die Abbildung $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(k, x) \mapsto k + x$, ist eine strikt diskontinuierliche Linkswirkung von $\mathbb{Z}^n$ auf $\mathbb{R}^n$. Nach Proposition II.2.3 ist die Orbitprojektion $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine unendlich-blättrige Überlagerung. Beachte, dass $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong S^1 \times \cdots \times S^1 = T^n$, vgl. Beispiel I.7.8.

II.2.6. Beispiel. Es bezeichne wieder G_n die Gruppe der n-ten Einheitswurzeln, $n \in \mathbb{N}$, siehe Beispiel II.1.9 oben. Die Abbildung $G_n \times S^1 \to S^1$, $(\zeta, z) \mapsto \zeta z$, ist eine freie und daher strikt diskontinuierliche Linkswirkung, siehe Proposition II.2.1. Nach Proposition II.2.3 ist die Orbitprojektion $p_n : S^1 \to S^1/G_n$ eine n-blättrige Überlagerung. Für den Quotientenraum gilt $S^1/G_n \cong S^1$, wir erhalten daher wieder die Überlagerung aus Beispiel II.1.9.

II.2.7. Beispiel. Die Gruppe $\{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$ wirkt auf der Sphäre S^n durch $(\pm 1)x := \pm x$ in strikt diskontinuierlicher Weise, siehe Proposition II.2.1. Nach Proposition II.2.3 ist die Orbitprojektion $S^n \to S^n/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ eine zwei-blättrige Überlagerung, vgl. Beispiel II.1.12 oben.

II.2.8. Beispiel (Linsenräume). Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Sphäre $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$. Weiters seien $p \in \mathbb{N}$ und $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Z}$, sodass p teilerfremd zu q_j ist, für jedes $1 \leq j \leq n$. Es bezeichne $G_p \cong \mathbb{Z}_p$ die Gruppe der p-ten Einheitswurzeln.

Eine elementare Rechnung zeigt, dass $G_p \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$, $\zeta \cdot (z_1, \dots, z_n) := (\zeta^{q_1} z_1, \dots, \zeta^{q_n} z_n)$, eine stetige Linkswirkung von G_p auf S^{2n-1} definiert. Diese Wirkung ist frei. Um dies einzusehen sei $k \in \mathbb{Z}$, $\zeta = e^{2\pi \mathbf{i} k/p} \in G_p$ und $(z_1, \dots, z_n) \in S^{2n-1}$ mit $\zeta \cdot (z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n)$. Wähle j, sodass $z_j \neq 0$. Aus $\zeta^{q_j} z_j = z_j$ erhalten wir dann $e^{2\pi \mathbf{i} k q_j/p} = 1$, also muss p die Zahl kq_j teilen. Da p und q_j teilerfremd sind, ist p ein Teiler von k, also $\zeta = 1$ und die Wirkung tatsächlich frei. Nach Proposition II.2.1 ist sie daher strikt diskontinuierlich. Ihr Orbitraum wird als *Linsenraum* $L(p; q_1, \dots, q_n) := S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$ bezeichnet. Etwa gilt $L(2; 1, \dots, 1) \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^{2n-1}$. Die Orbitprojektion $S^{2n-1} \to L(p; q_1, \dots, q_n)$ ist eine p-blättrige Überlagerung, siehe Proposition II.2.3.

II.2.9. Beispiel (Kleinsche Flasche). Betrachte die Gruppe $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ mit Multiplikation $(k_1, l_1)(k_2, l_2) = \bigl(k_1 + (-1)^{l_1} k_2, l_1 + l_2\bigr)$, vgl. Beispiel I.9.9. Eine einfache Rechnung zeigt, dass $(k, l) \cdot (x, y) := \bigl(k + (-1)^l x, l + y\bigr)$ eine Linkswirkung von $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2$ definiert. Diese Wirkung ist strikt diskontinuierlich, die Quotientenabbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ daher eine unendlich-blättrige Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ ist zur Kleinschen Flasche aus Beispiel I.9.9 homöomorph.

II.2.10. Beispiel. Die Abbildung $A : T^2 \to T^2$, $A(z, w) := (-z, \bar{w})$, erfüllt $A^2 = \mathrm{id}_{T^2}$ und definiert eine freie Wirkung der Gruppe $\mathbb{Z}_2$ auf $T^2 = S^1 \times S^1$. Nach Proposition II.2.1 ist dies eine strikt diskontinuierliche Wirkung, die Quotientenabbildung $T^2 \to T^2/\mathbb{Z}_2$ daher eine zwei-blättrige Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Der Quotientenraum $T^2/\mathbb{Z}_2$ ist zur Kleinschen Flasche homöomorph, siehe Beispiel I.9.9.

II.3. Homotopieliftungseigenschaft. Sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f : Y \to X$ eine stetige Abbildung. Jede stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ wird ein *Lift* oder eine *Hochhebung* von f über p genannt. Es stellt sich nun die Frage unter welchen Umständen so ein Lift von f existiert. Dieses Problem lässt sich elegant mit Hilfe des induzierten Homomorphismus $f_* : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ lösen, siehe Satz II.4.5 unten. Wir beginnen zunächst damit die Eindeutigkeit eines solchen Lifts zu besprechen. Die nächste Proposition besagt, dass für zusammenhängendes Y ein Lift von f schon durch den Wert bei einem einzigen Punkt vollständig festgelegt ist.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

II.3.1. Proposition. *Es seien $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, Y zusammenhängend und $\tilde{f}, \tilde{g} : Y \to \tilde{X}$ stetig mit $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$. Existiert ein Punkt $y_0 \in Y$ mit $\tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)$, dann gilt schon $\tilde{f} = \tilde{g}$.*

Beweis. Betrachte die Teilmenge $A := \bigl\{y \in Y : \tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)\bigr\}$. Da $y_0 \in A$ ist $A \neq \emptyset$. Wir zeigen zunächst, dass A offen ist. Sei dazu $y \in A$. Wegen der Überlagerungseigenschaft von p, existiert eine Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)$, sodass $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to X$ injektiv ist. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ ist $W :=$

$\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{g}^{-1}(\tilde{U})$ eine Umgebung von y in Y. Aus $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$ und der Injektivität von $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to X$ folgt $\tilde{f}|_W = \tilde{g}|_W$. Daher ist $W \subseteq A$ und A also offen. Schließlich zeigen wir, dass A auch abgeschlossen ist. Sei dazu $y \notin A$, also $\tilde{f}(y) \neq \tilde{g}(y)$. Da $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$ gilt jedenfalls $p(\tilde{f}(y)) = p(\tilde{g}(y))$. Aus der Überlagerungseigenschaft von p erhalten wir disjunkte Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{f}(y)$ und $\tilde{V}$ von $\tilde{g}(y)$. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ ist $W := \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{g}^{-1}(\tilde{V})$ eine Umgebung von y in Y. Aus $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ erhalten wir $W \subseteq Y \setminus A$, also ist A abgeschlossen. Aus dem Zusammenhang von Y folgt nun $A = Y$ und daher $\tilde{f} = \tilde{g}$. □

II.3.2. Proposition. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $\tilde{X}$ zusammenhängend. Dann wirkt die Gruppe der Decktransformationen strikt diskontinuierlich auf $\tilde{X}$. Insbesondere ist diese Wirkung frei.*

Beweis. Es sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Wegen der Überlagerungseigenschaft von p existiert eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von $\tilde{x}$, sodass $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to X$ injektiv ist. Sei nun φ eine Decktransformation mit $\varphi(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Wir finden daher $\tilde{y} \in \tilde{U}$ mit $\varphi(\tilde{y}) \in \tilde{U}$. Da $p \circ \varphi = p$ folgt aus der Injektivität von $p|_{\tilde{U}}$, dass $\varphi(\tilde{y}) = \tilde{y}$. Aus Proposition II.3.1 erhalten wir daher $\varphi = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$. Also ist die Wirkung von $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ strikt diskontinuierlich. □

Jede Überlagerung hat die Homotopieliftungseigenschaft, siehe Satz II.3.3 unten. Der Beweis ist völlig analog zu dem Beweis von Proposition I.4.2.

II.3.3. Satz (Homotopieliftungseigenschaft). *Es seien $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $H : Y \times I \to X$ eine Homotopie und $\tilde{h} : Y \to \tilde{X}$ stetig, sodass $p \circ \tilde{h} = H_0$. Dann existiert genau eine Homotopie $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit von $\tilde{H}$ folgt aus Proposition II.3.1 und dem Zusammenhang von I, denn für fixes $y \in Y$ ist $I \to \tilde{X}$, $t \mapsto \tilde{H}_t(y)$ ein stetiger Lift des Weges $I \to X$, $t \mapsto H_t(y)$, mit Anfangspunkt $\tilde{H}_0(y) = \tilde{h}(y)$. Nun zur Konstruktion von $\tilde{H}$. Aus der Überlagerungseigenschaft von p erhalten wir eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von X, sodass jedes U_α von p gleichmäßig überlagert wird. Die Beweise von Lemma I.4.9 und I.4.10 lassen sich mühelos auf die vorliegende Situation verallgemeinern.

II.3.4. Lemma. *Zu jedem Punkt $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung N von y, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, sodass für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt $H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq U_{\alpha_i}$.*

Beweis. Da $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von X bildet, existiert zu jedem $s \in I$ ein $\alpha_s \in A$ mit $H(y, s) \in U_{\alpha_s}$. Da H stetig ist, finden wir zu jedem $s \in I$ eine offene Umgebung N_s von y und eine offene Umgebung J_s von s mit $H(N_s \times J_s) \subseteq U_{\alpha_s}$. Klarerweise bildet $\{J_s\}_{s \in I}$ eine offene Überdeckung von I. Da I kompakt ist, existieren $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und $s_1, \ldots, s_n \in I$ mit $[t_{i-1}, t_i] \subseteq J_{s_i}$, $1 \leq i \leq n$, siehe Lemma I.4.12. Betrachte nun die offene

Umgebung $N := \bigcap_{i=1}^n N_{s_i}$ von y. Für $1 \leq i \leq n$ gilt dann $H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq H\big(N_{s_i} \times J_{s_i}\big) \subseteq U_{\alpha_{s_i}}$. Mit $\alpha_i := \alpha_{s_i}$ folgt daher die Behauptung. □

II.3.5. Lemma. *Zu jedem $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung V von y und eine stetige Abbildung $\tilde{G} : V \times I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{G} = H|_{V\times I}$ und $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_V$.*

Beweis. Nach Lemma II.3.4 existieren eine offene Umgebung N von y, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$, sodass

$$H\big(N \times [t_{i-1}, t_i]\big) \subseteq U_{\alpha_i}, \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{II.2}$$

Da U_α von p gleichmäßig überlagert wird, existiert eine Indexmenge Λ_α, disjunkte offene Teilmengen $\tilde{U}_\alpha^\lambda$, $\lambda \in \Lambda_\alpha$, mit $p^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{\lambda\in\Lambda_\alpha} \tilde{U}_\alpha^\lambda$ und so, dass $p|_{\tilde{U}_\alpha^\lambda} : \tilde{U}_\alpha^\lambda \to U_\alpha$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $\lambda \in \Lambda_\alpha$. Wegen (II.2) und $p \circ \tilde{h} = H_0$ ist $p(\tilde{h}(y)) = H_{t_0}(y) \in U_{\alpha_1}$, also existiert $\lambda_1 \in \Lambda_{\alpha_1}$ mit $\tilde{h}(y) \in \tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1}$. Betrachte die offene Umgebung $V^1 := N \cap \tilde{h}^{-1}(\tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1})$ von y und die stetige Abbildung

$$\tilde{G}^1 : V^1 \times [t_0, t_1] \to \tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1} \subseteq \tilde{X}, \qquad \tilde{G}^1 := \big(p|_{\tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1}}\big)^{-1} \circ H|_{V^1\times[t_0,t_1]}.$$

Offensichtlich gilt $p \circ \tilde{G}^1 = H|_{V^1\times[t_0,t_1]}$. Aus $H_0 = p \circ \tilde{h}$ erhalten wir $p \circ \tilde{G}^1_{t_0} = H_{t_0}|_{V^1} = p \circ \tilde{h}|_{V^1}$, und da p auf $\tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1}$ injektiv ist folgt $\tilde{G}^1_{t_0} = \tilde{h}|_{V^1}$.

Induktiv fortfahrend erhalten wir offene Umgebungen $V^1 \supseteq V^2 \supseteq \cdots \supseteq V^n$ von y, und $\lambda_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, sowie stetige Abbildungen $\tilde{G}^i : V^i \times [t_{i-1}, t_i] \to\subseteq \tilde{U}_{\alpha_i}^{\lambda_i} \subseteq \tilde{X}$, $1 \leq i \leq n$, sodass

$$p \circ \tilde{G}^i = H|_{V^i\times[t_{i-1},t_i]}, \quad \tilde{G}^1_{t_0} = \tilde{h}|_{V^1} \quad \text{und} \quad \tilde{G}^i_{t_{i-1}} = \tilde{G}^{i-1}_{t_{i-1}}|_{V^i} \quad \text{für } i = 2, \ldots, n.$$

Betrachte nun die offene Umgebung $V := V^n$ von y und definiere eine Abbildung $\tilde{G} : V \times I \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{G}|_{V\times[t_{i-1},t_i]} := \tilde{G}^i|_{V\times[t_{i-1},t_i]}$. Da $\tilde{G}^i_{t_{i-1}}|_V = \tilde{G}^{i-1}_{t_{i-1}}|_V$ ist dies wohldefiniert. Aus der Stetigkeit von $\tilde{G}^i|_{V\times[t_{i-1},t_i]}$ und Lemma I.1.2 folgt, dass $\tilde{G}$ stetig ist. Aus $p \circ \tilde{G}^i = H|_{V^i\times[t_{i-1},t_i]}$ erhalten wir $p \circ \tilde{G} = H|_{V\times I}$. Schließlich folgt aus $\tilde{G}^1_{t_0} = \tilde{h}|_{V^1}$ auch $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_V$. Also hat $\tilde{G}$ alle gewünschten Eigenschaften. □

Nach Lemma II.3.5 existiert zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung V^y von y und eine stetige Abbildung $\tilde{G}^y : V^y \times I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{G}^y = H|_{V^y\times I}$ und $\tilde{G}^y_0 = \tilde{h}|_{V^y}$. Wie im Beweis der Eindeutigkeit von $\tilde{H}$, erhalten wir aus Proposition II.3.1 und dem Zusammenhang von I, dass die Abbildungen $\tilde{G}^{y_1}$ und $\tilde{G}^{y_2}$ auf $(V^{y_1} \cap V^{y_2}) \times I$ übereinstimmen müssen, $y_1, y_2 \in Y$. Es existiert daher eine Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \to \tilde{X}$, sodass $\tilde{H}|_{V^y\times I} = \tilde{G}^y$, für jedes $y \in Y$. Aus den entsprechenden Eigenschaften von $\tilde{G}^y$ folgt sofort $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$. Auch die Stetigkeit von $\tilde{H}$ ist offensichtlich, denn die Einschränkungen von $\tilde{H}$ auf die offenen Teilmengen $V^y \times I$ sind stetig. Damit ist der Beweis von Satz II.3.3 vollständig. □

II.3.6. Korollar (Liften von Wegen). *Es seien $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $f : I \to X$ ein Weg in X und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = f(0)$. Dann existiert genau ein Weg $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$.*

Beweis. Die folgt aus Satz II.3.3 mit $Y = \{*\}$, vgl. Proposition I.4.5. □

II.3.7. Korollar. *Es seien $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, und $f, g : I \to X$ zwei Wege die homotop relativ Endpunkten sind. Weiters seien $\tilde{f}, \tilde{g} : I \to \tilde{X}$ Lifts von f und g mit gleichem Anfangspunkt $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$. Dann sind auch $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ homotop relative Endpunkten in $\tilde{X}$. Insbesondere haben $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ denselben Endpunkt, $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.*

Beweis. Es bezeichne $H : I \times I \to X$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$. Nach Satz II.3.3 existiert eine Homotopie $\tilde{H} : I \times I \to \tilde{X}$ mit $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ und $p \circ \tilde{H} = H$. Da für $i = 0, 1$ der Weg $t \mapsto p(\tilde{H}(i,t)) = H(i,t)$ konstant ist, muss nach der Eindeutigkeitsaussage in Korollar II.3.6 auch $t \mapsto \tilde{H}(i,t)$ konstant in t sein. Also ist $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ Endpunkten. Insbesondere gilt $\tilde{H}_1(0) = \tilde{H}_0(0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$. Also ist $s \mapsto \tilde{H}_1(s)$ ein Lift von g mit Anfangspunkt $\tilde{H}_1(0) = \tilde{g}(0)$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Korollar II.3.6 schließen wir $\tilde{H}_1 = \tilde{g}$. Also ist $\tilde{H}$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ nach $\tilde{H}_1 = \tilde{g}$. □

Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und es bezeichne $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$ die Faser über x_0. Wir erhalten eine Abbildung

$$F_{x_0} \times \pi_1(X, x_0) \to F_{x_0}, \qquad (\tilde{x}, [f]) \mapsto \tilde{x} \cdot [f] := \tilde{f}_{\tilde{x}}(1) \tag{II.3}$$

wobei $\tilde{f}_{\tilde{x}} : I \to \tilde{X}$ den eindeutigen Lift von f mit Anfangspunkt $\tilde{f}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$ bezeichnet, vgl. Korollar II.3.6. Beachte, dass dies nach Korollar II.3.7 tatsächlich wohldefiniert ist, denn der Endpunkt $\tilde{f}_{\tilde{x}}(1)$ hängt nur von der Homotopieklasse von f ab.

II.3.8. Proposition. *Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $x_0 \in X$, dann definiert die Abbildung* (II.3) *eine Rechtswirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$. Diese Wirkung kommutiert mit der Linkswirkung der Gruppe der Decktransformationen* $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$*, dh. $\varphi(\tilde{x} \cdot \sigma) = \varphi(\tilde{x}) \cdot \sigma$ für alle $\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{X})$, $\tilde{x} \in F_{x_0}$ und $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Für wegzusammenhängendes $\tilde{X}$ ist die Rechtswirkung* (II.3) *transitiv.*

Beweis. Da das neutrale Element $1 \in \pi_1(X, x_0)$ durch die konstante Schleife c_{x_0} repräsentiert wird, gilt offensichtlich $\tilde{x} \cdot 1 = \tilde{x}$ für jedes $\tilde{x} \in F_{x_0}$. Sind f und g zwei Schleifen bei x_0 und $\tilde{x} \in F_{x_0}$, so folgt $(\widetilde{fg})_{\tilde{x}} = \tilde{f}_{\tilde{x}} \tilde{g}_{\tilde{f}_{\tilde{x}}(1)} = \tilde{f}_{\tilde{x}} \tilde{g}_{\tilde{x} \cdot [f]}$, und daher $\tilde{x} \cdot ([f][g]) = \tilde{x} \cdot [fg] = (\widetilde{fg})_{\tilde{x}}(1) = \big(\tilde{f}_{\tilde{x}} \tilde{g}_{\tilde{x} \cdot [f]}\big)(1) = \tilde{g}_{\tilde{x} \cdot [f]}(1) = (\tilde{x} \cdot [f]) \cdot [g]$. Dies zeigt, dass (II.3) tatsächlich eine Rechtswirkung auf F_{x_0} definiert. Ist $\varphi \in \mathrm{Deck}(\tilde{X})$ eine Decktransformation so gilt $\varphi \circ \tilde{f}_{\tilde{x}} = \tilde{f}_{\varphi(\tilde{x})}$ und wir erhalten $\varphi(\tilde{x} \cdot [f]) = \varphi(\tilde{f}_{\tilde{x}}(1)) = (\varphi \circ \tilde{f}_{\tilde{x}})(1) = \tilde{f}_{\varphi(\tilde{x})}(1) = \varphi(\tilde{x}) \cdot [f]$, also kommutiert die Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ mit der Linkswirkung der Decktransformationen. *Zur Transitivität:* Ist $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, so finden wir zu zwei gegebenen Punkten $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0}$ einen Weg $\tilde{f}$ mit $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$. Da $p(\tilde{x}_0) = x_0 = p(\tilde{x}_1)$ ist

$f := p \circ \tilde{f}$ eine Schleife bei x_0 und definiert daher ein Element $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Nach Konstruktion ist $\tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{x}_1$, die Wirkung also transitiv. $\square$

Unter einer *punktierte Überlagerung* verstehen wir eine Abbildung punktierter Räume $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ deren zugrundeliegende Abbildung $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung ist. Punktierte Überlagerungen werden auch *Überlagerung mit Basispunkt* genannt. Unter einem Isomorphismus zwischen zwei punktierten Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ verstehen wir einen Homöomorphismus punktierter Räume $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit $q \circ \varphi = p$. Existiert so ein Isomorphismus, dann nennen wir die beiden punktierten Überlagerungen isomorph.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \arrow[dl, "q"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

II.3.9. Definition (Charakteristische Untergruppe). Unter der *charakteristische Untergruppe* einer punktierten Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ verstehen wir die Untergruppe $\operatorname{img}(p_*) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ von $\pi_1(X, x_0)$.

II.3.10. Bemerkung. Sind $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ und $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ zwei isomorphe punktierte Überlagerungen, dann stimmen ihre charakteristischen Untergruppen überein, denn ist $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ ein Isomorphimus punktierter Überlagerungen, dann folgt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = (q \circ \varphi)_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = q_*\big(\varphi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big) = q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$, siehe Proposition I.6.2.

II.3.11. Proposition. *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung und es bezeichne $F_{x_0} := p^{-1}(x_0)$ die Faser über x_0. Dann gilt:*

(i) *Der Homomorphismus $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv, die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ daher zu $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ isomorph.*

(ii) *Für eine Schleife f bei x_0 gilt $[f] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ genau dann, wenn sie sich zu einer Schleife bei $\tilde{x}_0$ liften lässt, dh. $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$.*

(iii) *Die Isotropiegruppe von $\tilde{x}_0$ bezüglich der Rechtswirkung* (II.3) *stimmt mit der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ überein. Wir erhalten daher eine injektive Abbildung*

$$\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \to F_{x_0}, \qquad \sigma \mapsto \tilde{x}_0 \cdot \sigma, \tag{II.4}$$

wobei $\pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ die Menge der Rechtsnebenklassen bezeichnet.

(iv) *Für $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ gilt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0 \cdot \sigma)) = \sigma^{-1}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)\sigma$.*

Ist darüberhinaus $\tilde{X}$ wegzusammenhängend, dann gilt weiters:

(v) *Die Abbildung* (II.4) *ist eine Bijektion. Die Blätterzahl von p stimmt daher mit dem Index*[19] *der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ in $\pi_1(X,x_0)$ überein.*

(vi) *Für $\tilde{x}_0,\tilde{x}_1\in F_{x_0}$ sind die charakteristischen Untergruppen $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ und $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1))$ konjugiert*[20] *in $\pi_1(X,x_0)$.*

(vii) *Jede zu $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ konjugierte Untergruppe in $\pi_1(X,x_0)$ ist von der Form $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_1))$ für einen geeigneten Punkt $\tilde{x}_1\in F_{x_0}$.*

(viii) *Die Gleichung $\varphi(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_0\cdot\Phi(\varphi)$, $\varphi\in\mathrm{Deck}(\tilde{X})$, definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus*[21]

$$\Phi:\mathrm{Deck}(\tilde{X})\to\mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))\big)/p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)).\tag{II.5}$$

Beweis. Die Aussagen (i) und (ii) folgen sofort aus Korollar II.3.7. Ad (iii): Aus (ii) sehen wir, dass die Isotropiegruppe von $\tilde{x}_0$ mit der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ übereinstimmt. Es folgt daher $\tilde{x}_0\cdot\sigma_1=\tilde{x}_0\cdot\sigma_2\Leftrightarrow\tilde{x}_0\cdot(\sigma_1\sigma_2^{-1})=\tilde{x}_0\Leftrightarrow\sigma_1\sigma_2^{-1}\in p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))\Leftrightarrow p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))\sigma_1=p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))\sigma_2$. Dies zeigt, dass (II.4) wohldefiniert und injektiv ist. Ad (iv): Sei f eine Schleife bei x_0 die σ repräsentiert, und $\tilde{f}:I\to\tilde{X}$ ihr Lift mit Anfangspunk $\tilde{f}(0)=\tilde{x}_0$. Nach Definition ist dann $\tilde{x}_0\cdot\sigma=\tilde{f}(1)$. Nach Proposition I.3.5 gilt $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)=\beta_{\tilde{f}}(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0\cdot\sigma))$. Es folgt $p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))=p_*\big(\beta_{\tilde{f}}(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0\cdot\sigma))\big)=\sigma\big(p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0\cdot\sigma))\big)\sigma^{-1}$ und damit die Behauptung. Sei nun $\tilde{X}$ wegzusammenhängend. Nach Proposition II.3.8 ist dann die Rechtswirkung von $\pi_1(X,x_0)$ auf F_{x_0} transitiv, daher (II.4) surjektiv, woraus nun (v) folgt. Aus der Transitivität der Wirkung von $\pi_1(X,x_0)$ auf F_{x_0} zusammen mit (iv) folgt (vi). Auch (vii) folgt sofort aus (iv). Wenden wir uns schließlich (viii) zu. Sei $\varphi\in\mathrm{Deck}(\tilde{X})$. Wegen der Transitivität der Wirkung von $\pi_1(X,x_0)$ auf F_{x_0} existiert $\sigma\in\pi_1(X,x_0)$ mit $\varphi(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_0\cdot\sigma$. Aus (iv) erhalten wir $p_*(\pi_1(\tilde{X},\varphi(\tilde{x}_0)))=\sigma^{-1}p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))\sigma$, nach Bemerkung II.3.10 gilt aber auch $p_*(\pi_1(\tilde{X},\varphi(\tilde{x}_0)))=p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$. Es folgt $\sigma^{-1}p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))\sigma=p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$, also $\sigma\in\mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))\big)$. Zusammen mit (v) sehen wir daher, dass $\varphi(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_0\cdot\Phi(\varphi)$ tatsächlich eine Abbildung $\Phi:\mathrm{Deck}(\tilde{X})\to\mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(X,\tilde{x}_0))\big)/p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ definiert. Diese ist injektiv, denn die Wirkung von $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ auf F_{x_0} ist frei, siehe Proposition II.3.2. Nach Proposition II.3.8 kommutieren die Wirkungen von $\mathrm{Deck}(\tilde{X})$ und $\pi_1(X,x_0)$ auf der Faser F_{x_0}. Daher ist $\tilde{x}_0\cdot\Phi(\varphi\circ\psi)=(\varphi\circ\psi)(\tilde{x}_0)=\varphi\big(\tilde{x}_0\cdot\Phi(\psi)\big)=\varphi(\tilde{x}_0)\cdot\Phi(\psi)=$

[19]Ist G eine Gruppe und $H\subseteq G$ eine Untergruppe, dann wird die Kardinalzahl $\sharp(G/H)$ der *Index* von H in G genannt. Der Index einer Untergruppe ist daher die Anzahl der Linksnebenklassen von H, und dies stimmt mit der Anzahl ihrer Rechtsnebenklassen überein.

[20]Zwei Untergruppen H_1 und H_2 einer Gruppe G werden *konjugiert* genannt, falls $g\in G$ mit $gH_1g^{-1}=H_2$ existiert. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Untergruppen von G.

[21]Ist G eine Gruppe und $H\subseteq G$ eine Untergruppe, dann heißt $\mathcal{N}_G(H):=\{g\in G: gHg^{-1}=H\}$ der *Normalisator* von H in G. Dies ist die größte Untergruppe von G, die H als Normalteiler enthält.

$(\tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi)) \cdot \Phi(\psi) = \tilde{x}_0 \cdot (\Phi(\varphi)\Phi(\psi))$, also $\Phi(\varphi \circ \psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$. Damit ist auch die Homomorphismuseigenschaft von Φ gezeigt. □

II.4. Liften von Abbildungen. Unter schwachen Zusammenhangsvoraussetzungen erlaubt die charakteristische Untergruppe eine vollständige Lösung des Liftungsproblems. Wir benötigen hierfür den folgenden Zusammenhangsbegriff. Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend,* falls zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung U von x, eine wegzusammenhängende Umgebung V von x mit $V \subseteq U$ existiert. In anderen Worten, jeder Punkt in $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Umgebungen. Ist X lokal wegzusammenhängend und U eine offene Umgebung von $x \in X$, dann bilden die Punkte in U die sich durch einen Weg in U mit x verbinden lassen eine *offene* wegzusammenhängende Umgebung von x. In einem lokal wegzusammenhängenden Raum besitzt daher jeder Punkt sogar eine Umgebungsbasis aus offenen wegzusammenhängenden Umgebungen.

II.4.1. Bemerkung. Ein lokal wegzusammenhägender Raum ist genau dann wegzusammenhängend wenn er zusammenhängend ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass in einem lokal wegzusammenhängenden Raum die Wegzusammenhangskomponenten offen und daher auch abgeschlossen sind.

II.4.2. Bemerkung. Für eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ gilt: X ist genau dann lokal wegzusammenhängend wenn $\tilde{X}$ lokal wegzusammenhängend ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass p ein lokaler Homöomorphismus ist.

II.4.3. Beispiel. Jeder lokal kontrahierbare Raum ist lokal wegzusammenhängend. Dabei heißt ein topologischer Raum *lokal kontrahierbar,* wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis kontrahierbarer Umgebungen besitzt, dh. zu jedem Punkt x und jeder Umgebung U von x existiert eine kontrahierbare Umgebung V von x mit $V \subseteq U$. Etwa sind topologische Mannigfaltigkeiten offensichtlich lokal kontrahierbar und damit auch lokal wegzusammenhängend.

II.4.4. Beispiel. Bezeichne $Z := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ und betrachte $X := \big(I \times \{0\}\big) \cup \big(Z \times I\big)$. Der Raum X ist wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend. Keiner der Punkte $(0, y) \in X$, $y \in (0, 1]$, besitzt eine Basis aus wegzusammenhängenden Umgebungen.

II.4.5. Satz (Liftungskriterium). *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung und (Y, y_0) ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender punktierter Raum. Eine Abbildung punktierter Räume $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$ lässt sich genau dann zu einer Abbildung punktierter Räume $\tilde{f} : (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ liften, wenn $f_*(\pi_1(Y, y_0))$ in der charakteristischen Untergruppe von p enthalten ist, dh. wenn gilt $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. In diesem Fall ist der Lift $\tilde{f}$ eindeutig.*

Beweis. Die Bedingung ist offensichtlich notwendig, denn ist $\tilde{f}:(Y,y_0)\to(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ ein Lift von f, dann erhalten wir $f_*(\pi_1(Y,y_0))=(p\circ\tilde{f})_*(\pi_1(Y,y_0))=p_*(f_*(\pi_1(Y,y_0))\subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$. Die Eindeutigkeit des Lifts folgt aus Proposition II.3.1. Nun zur Konstruktion von $\tilde{f}$. Da Y wegzusammenhängend ist, siehe Bemerkung II.4.1, existiert zu jedem Punkt $y\in Y$ ein Weg $\sigma:I\to Y$ von $\sigma(0)=y_0$ nach $\sigma(1)=y$. Es ist dann $f\circ\sigma$ ein Weg in X mit Anfangspunkt $(f\circ\sigma)(0)=x_0$. Nach Korollar II.3.6 lässt sich dieser Weg über p zu einem Weg $\widetilde{f\circ\sigma}$ mit Anfangspunkt $(\widetilde{f\circ\sigma})(0)=\tilde{x}_0$ liften. Wir setzen $\tilde{f}(y):=(\widetilde{f\circ\sigma})(1)$ und überzeugen uns zunächst davon, dass dies wohldefiniert, dh. unabhängig von der Wahl von σ ist. Ist τ ein weiterer Weg von y_0 nach y, dann ist $f\circ(\sigma\bar{\tau})=(f\circ\sigma)(\overline{f\circ\tau})$ eine Schleife bei x_0, die sich wegen $f_*(\pi_1(Y,y_0))\subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0))$ und Proposition II.3.11(ii) zu einer Schleife bei $\tilde{x}_0$ liften lässt. Es müssen daher die Endpunkte von $\widetilde{f\circ\sigma}$ und $\widetilde{f\circ\tau}$ übereinstimmen, $(\widetilde{f\circ\sigma})(1)=(\widetilde{f\circ\tau})(1)$, und damit ist $\tilde{f}$ wohldefiniert. Offensichtlich gilt $p\circ\tilde{f}=f$ und $\tilde{f}(y_0)=\tilde{x}_0$. Es bleibt noch die Stetigkeit von $\tilde{f}$ zu verifizieren. Sei dazu $y\in Y$ und $\tilde{U}$ eine offene Umgebung von $\tilde{f}(y)$, sodass $U:=\pi(\tilde{U})$ offen und $p|_{\tilde{U}}:\tilde{U}\to U$ ein Homöomorphismus ist. Da f stetig und Y lokal wegzusammenhängend ist, existiert eine wegzusammenhängende Umgebung V von y mit $f(V)\subseteq U$. Es genügt zu zeigen $\tilde{f}(V)\subseteq\tilde{U}$. Sei dazu $v\in V$ und α ein Weg in V von y nach v. Dann ist $\sigma\alpha$ ein Weg von y_0 nach v, und $(\widetilde{f\circ\sigma})((p|_{\tilde{U}})^{-1}\circ f\circ\alpha)$ der Lift des Weges $f\circ(\sigma\alpha)$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$. Nach Definition von $\tilde{f}$ gilt daher $\tilde{f}(v)=\big((\widetilde{f\circ\sigma})((p|_{\tilde{U}})^{-1}\circ f\circ\alpha)\big)(1)=(p|_{\tilde{U}})^{-1}(f(v))\in\tilde{U}$. Dies zeigt $\tilde{f}(V)\subseteq\tilde{U}$, also ist $\tilde{f}$ stetig. $\square$

II.4.6. Bemerkung. Da $p_*:\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi_1(X,x_0)$ injektiv ist, siehe Proposition II.3.11(i), ist die Bedingung in Satz II.4.5 äquivalent zu der Forderung, dass sich der Homomorphismus $f_*:\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(X,x_0)$ über p_* zu einem Homomorphismus $\lambda:\pi_1(Y,y_0)\to\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ liften lässt, dh. $p_*\circ\lambda=f_*$. Das geometrische Liftungsproblem lässt sich daher genau dann lösen, wenn das entsprechende algebraische Problem lösebar ist:

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X},\tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, dashed, "\exists\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X,x_0) \end{tikzcd} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{tikzcd} & \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) \arrow[d, "p_*"] \\ \pi_1(Y,y_0) \arrow[ur, dashed, "\exists\lambda"] \arrow[r, "f_*"'] & \pi_1(X,x_0) \end{tikzcd}$$

II.4.7. Beispiel. Für $n\geq 2$ und $k\in\mathbb{N}$ gilt $[S^n,T^k]=0$, dh. je zwei stetige Abbildung $S^n\to T^k$ sind homotop. Seien dazu $f,g:S^n\to T^k$ stetig. Betrachte die Überlagerung $p:\mathbb{R}^k\to T^k$ aus Beispiel II.2.5. Da S^n einfach zusammenhängend ist, folgt aus Satz II.4.5 die Existenz stetiger Abbildungen $\tilde{f},\tilde{g}:S^n\to\mathbb{R}^k$ mit $p\circ\tilde{f}=f$ und $p\circ\tilde{g}=g$. Da $\mathbb{R}^k$ kontrahierbar ist, sind $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ homotop. Damit müssen auch f und g homotop sein.

II.4.8. Beispiel. Für $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $[\mathbb{R}\mathrm{P}^n, T^k] = 0$, dh. je zwei stetige Abbildungen $\mathbb{R}\mathrm{P}^n \to T^k$ sind homotop. Wir betrachten wieder die Überlagerung $p : \mathbb{R}^k \to T^k$. Da $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$, siehe Beispiel I.9.16, und $\pi_1(T^k) \cong \mathbb{Z}^k$, siehe Beispiel I.7.7, ist jeder Homomorphismus $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \to \pi_1(T^k)$ trivial. Sind also $f, g : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to T^k$ stetig, dann existieren $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}^k$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $p \circ \tilde{g} = g$, siehe Satz II.4.5. Da $\mathbb{R}^k$ kontrahierbar ist, sind $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ homotop, also müssen auch f und g homotop sein.

Wir nennen eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ (weg)zusammenhängend, falls $\tilde{X}$ (weg)zusammenhängend ist. Als stetiges Bild von $\tilde{X}$ muss dann auch X (weg)zusammenhängend sein. Wenn wir im Folgenden von einer zusammenhängenden Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X sprechen dann impliziert dies, dass X und $\tilde{X}$ beide wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend sind, siehe die Bemerkungen II.4.1 und II.4.2.

II.4.9. Korollar. *Zwei zusammenhängende punktierte Überlagerungen eines lokal wegzusammenhängenden punktierten Raums sind genau dann isomorph, wenn ihre charakteristischen Untergruppen übereinstimmen. In diesem Fall gibt es genau einen Isomorphismus punktierter Überlagerungen zwischen ihnen.*

Beweis. Seien $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ und $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ zwei zusammenhängende Überlagerungen von X. Existiert ein Isomorphismus punktierter Überlagerungen $\varphi : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, dann müssen die charakteristischen Untergruppen übereinstimmen, siehe Bemerkung II.3.10. Da der Isomorphismus φ als Lift der Abbildung q über p interpretiert werden kann, folgt die Eindeutigkeit des Isomorphismus aus Proposition II.3.1. Ist andererseits $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$ dann folgt aus Satz II.4.5, dass p und q zu Abbildungen punktierter Räume $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ und $\tilde{q} : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ gelifted werden können: Es ist dann $\tilde{q}^{-1} \circ \tilde{p}$ ein Automorphismus der punktierten Überlagerung p, und wegen der Eindeutigkeit solcher Automorphismen, siehe Proposition II.3.1, muss $\tilde{q}^{-1} \circ \tilde{p} = \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ gelten. Ebenso folgt $\tilde{p}^{-1} \circ \tilde{q} = \mathrm{id}_{\tilde{Y}}$. Also ist $\tilde{p}$ ein Homöomorphismus und damit der gesuchte Isomorphismus punktierter Überlagerungen. □

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[rr, bend left, "\tilde{p}"] \arrow[dr, "p"'] & & (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \arrow[ll, bend left, "\tilde{q}"] \arrow[dl, "q"] \\
& (X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

II.4.10. Korollar. *Es sei X ein einfach zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum. Dann ist jede zusammenhängende Überlagerung von X zu der trivialen ein-blättrigen Überlagerung $\mathrm{id}_X : X \to X$ isomorph. Weiters ist jede Überlagerung von X trivial.*

Beweis. Die erste Aussage folgt sofort aus Korollar II.4.9. Sei nun $p : \tilde{X} \to X$ eine nicht notwendigerweise zusammenhängende Überlagerung. Es bezeichnen $\tilde{X}_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, die Wegzusammenhangskomponenten von $\tilde{X}$ und $p_\lambda := p|_{\tilde{X}_\lambda} : \tilde{X}_\lambda \to X$. Aus dem Wegzusammenhang von X und Korollar II.3.6 folgt, dass jedes

$p_\lambda : \tilde{X}_\lambda \to X$ surjektiv ist. Ist U eine wegzusammenhängende offene Teilmenge die von p gleichmäßig überlagert wird, dann wird diese auch von p_λ gleichmäßig überlagert. Also ist jedes $p_\lambda : \tilde{X}_\lambda \to X$ eine zusammenhängende Überlagerung, und daher ein Homöomorphismus. Es folgt $\tilde{X} \cong X \times \Lambda$, also ist $p : \tilde{X} \to X$ eine triviale Überlagerung. □

II.4.11. Korollar. *Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine zusammenhängende Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X. Weiters seien $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es existiert eine Decktransformation $\varphi \in \operatorname{Deck}(\tilde{X})$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.*
(ii) *Die Untergruppen $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ und $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ stimmen überein.*
(iii) *Für ein (und dann jedes) $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 \cdot \sigma = \tilde{x}_1$ gilt $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)$.*
(iv) *Für einen (und dann jeden) Weg $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $\tilde{x}_1$ liegt $[p \circ \tilde{f}]$ im Normalisator $\mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)$.*
(v) *Zu jeder Schleife $\tilde{f}$ bei $\tilde{x}_0$ existiert eine Schleife $\tilde{g}$ bei $\tilde{x}_1$ mit $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$.*

Beweis. Die Äquivalenz (i)⇔(ii) folgt aus Korollar II.4.9, denn eine Decktransformation mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ ist ein Isomorphismus punktierter Überlagerungen $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Die Äquivalenz (ii)⇔(iii) folgt aus Proposition II.3.11(iv). Die Äquivalenz (iii)⇔(iv) ist offensichtlich. Die Äquivalenz (ii)⇔(v) folgt aus Proposition II.3.11(ii). □

II.4.12. Korollar. *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine zusammenhängende punktierte Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X. Dann ist* (II.5) *ein Isomorphismus von Gruppen,*

$$\operatorname{Deck}(\tilde{X}) \cong \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)\big/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Beweis. Nach Proposition II.3.11(viii) bleibt nur die Surjektivität des Homomorphsimus $\Phi : \operatorname{Deck}(\tilde{X}) \to \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)\big/p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ zu zeigen. Sei also $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\big)$. Nach Korollar II.4.11 existiert eine Decktransformation φ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \sigma$. Es folgt $\Phi(\varphi) = \sigma$, also ist Φ surjektiv. □

II.5. Normale Überlagerungen. Normale Überlagerungen sind Überlagerungen mit maximaler Symmetrie. Genauer haben wir folgende Definition. Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ heißt *normal,* wenn für je zwei Punkte $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ eine Decktransformation $\varphi \in \operatorname{Deck}(\tilde{X})$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ existiert. Eine Überlagerung ist also genau dann normal, wenn die Gruppe der Decktransformationen auf jeder Faser transitiv wirkt. Normale Überlagerungen werden manchmal auch als *reguläre* Überlagerungen bezeichnet.

II.5.1. Proposition. *Für eine zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X sind äquivalent:*

(i) *$p : \tilde{X} \to X$ ist eine normale Überlagerung.*

(ii) *Für einen (und dann jeden) Punkt $x_0 \in X$ wirkt die Gruppe der Decktransformationen* $\operatorname{Deck}(\tilde X)$ *transitiv auf der Faser $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$.*
(iii) *Für einen (und dann jeden) Punkt $\tilde x_0 \in \tilde X$ ist die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, p(\tilde x_0))$.*
(iv) *Zu jeder Schleife $\tilde f$ in $\tilde X$ und jedem Punkt $\tilde x_1 \in \tilde X$ mit $p(\tilde x_1) = p(\tilde f(0))$ existiert eine Schleife $\tilde g$ bei $\tilde x_1$ mit $p \circ \tilde g = p \circ \tilde f$.*

In diesem Fall gilt weiters $\operatorname{Deck}(\tilde X) \cong \pi_1(X, p(\tilde x_0))/p_*\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)$*, für jedes $\tilde x_0 \in \tilde X$, und die Blätterzahl von p stimmt mit der Ordnung von* $\operatorname{Deck}(\tilde X)$ *überein.*

Beweis. In der Äquivalenz (i)$\Leftrightarrow$(ii) ist nur zu zeigen, dass wenn $\operatorname{Deck}(\tilde X)$ auf der Faser F_{x_0} transitiv wirkt dies dann auch für jede andere Faser gilt. Seien dazu $\tilde y_0$ und $\tilde y_1$ mit $p(\tilde y_0) = p(\tilde y_1)$ und $\tilde x_0 \in F_{x_0}$ beliebig. Wähle einen Weg $\tilde f_0 : I \to \tilde X$ von $\tilde f_0(0) = \tilde y_0$ nach $\tilde f_0(1) = \tilde x_0$. Weiters bezeichne $\tilde f_1 : I \to \tilde X$ den eindeutigen Weg mit $p \circ \tilde f_1 = p \circ \tilde f_0$ und $\tilde f_1(0) = \tilde y_1$, siehe Korollar II.3.6. Es ist dann auch $\tilde x_1 := \tilde f_1(1) \in F_{x_0}$, nach Voraussetzung existiert daher eine Decktransformation φ mit $\varphi(\tilde x_0) = \tilde x_1$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition II.3.1 folgt $\varphi \circ \tilde f_0 = \tilde f_1$, denn beide Wege liften den Weg $p \circ \tilde f_0$ und sie haben denselben Endpunkt $(\varphi \circ \tilde f_0)(1) = \tilde x_1 = \tilde f_1(1)$. Dann gilt aber auch $\varphi(\tilde y_0) = (\varphi \circ \tilde f_0)(0) = \tilde f_1(0) = \tilde y_1$. Nun zur Implikation (ii)$\Rightarrow$(iii): Sei $\tilde x_0 \in \tilde X$, $x_0 := p(\tilde x_0)$ und $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Da die Wirkung der Decktransformationen auf F_{x_0} transitiv ist, existiert $\varphi \in \operatorname{Deck}(\tilde X)$ mit $\varphi(\tilde x_0) = \tilde x_0 \cdot \sigma$. Nach Korollar II.4.11 ist daher $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))\big)$. Da dies für alle $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ gilt muss $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ sein. Ad (iii)$\Rightarrow$(ii): Seien also $\tilde x_0, \tilde x_1 \in F_{x_0}$. Nach Proposition II.3.8 existiert $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ mit $\tilde x_0 \cdot \sigma = \tilde x_1$. Da $p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ ist, gilt insbesondere $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X,x_0)}\big(p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))\big)$. Nach Korollar II.4.11 existiert daher $\varphi \in \operatorname{Deck}(\tilde X)$ mit $\varphi(\tilde x_0) = \tilde x_1$. Also wirkt $\operatorname{Deck}(\tilde X)$ transitiv auf F_{x_0}. Schließlich folgt die Äquivalenz (iv)$\Leftrightarrow$(ii) aus Korollar II.4.11. Ist nun p normal und $\tilde x_0 \in \tilde X$, dann folgt aus Korollar II.4.12 $\operatorname{Deck}(\tilde X) \cong \pi_1(X, p(\tilde x_0))/p_*\pi_1(\tilde X, \tilde x_0)$, denn $\mathcal{N}_{\pi_1(X,p(\tilde x_0))}\big(p_*(\pi_1(\tilde X, \tilde x_0))\big) = \pi_1(X, p(\tilde x_0))$ da die charakteristische Untergruppe ein Normalteiler ist. Schließlich ist $\operatorname{Deck}(\tilde X) \to F_{p(\tilde x_0)}$, $\varphi \mapsto \varphi(\tilde x_0)$, bijektiv, denn $\operatorname{Deck}(\tilde X)$ wirkt frei und transitiv auf $F_{p(\tilde x_0)}$. Also stimmt die Blätterzahl mit der Ordnung von $\operatorname{Deck}(\tilde X)$ überein. □

II.5.2. Beispiel. Jede zusammenhängende Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raums mit abelscher Fundamentalgruppe ist eine normale Überlagerung, siehe Proposition II.5.1, denn Untergruppen abelscher Gruppen sind stets Normalteiler.

II.5.3. Beispiel. Betrachte die normale Überlagerung $p : S^1 \to S^1$, $p(z) := z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ihre charakteristische Untergruppe ist $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$. Aus Proposition II.5.1 folgt daher $\operatorname{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$.

II.5.4. Beispiel. Jede einfach zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eines lokal wegzusammenhängenden Raums X ist normal, denn die triviale Untergruppe ist stets ein Normalteiler. In diesem Fall gilt weiters $\mathrm{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$, siehe Proposition II.5.1.

II.5.5. Beispiel. Wirkt eine diskrete Gruppe G strikt diskontinuierlich von links auf einem topologischen Raum X, dann ist die Orbitprojektion $p : X \to X/G$ eine normale Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Ist X zusammenhängend, dann ist der Homomorphismus $G \to \mathrm{Deck}(p)$, $g \mapsto \lambda_g$, ein Isomorphismus. Ist nämlich φ eine Decktransformation, $x \in X$ beliebig und $g \in G$ mit $\varphi(x) = gx$, dann folgt aus Proposition II.3.2 schon $\varphi = \lambda_g$. Ist darüberhinaus X lokal wegzusammenhämgend, dann gilt $G \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \pi_1(X/G, p(x_0))/p_*(\pi_1(X, x_0))$ für jedes $x_0 \in X$, siehe Proposition II.5.1. Ist schließlich X einfach zusammenhängend, dann folgt $G \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \pi_1(X/G)$.

II.5.6. Beispiel. Betrachten wir die Überlagerung $p : S^n \to S^n/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $n \geq 2$, aus Beispiel II.2.7, so erhalten wir $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}_2$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.7. Beispiel. Betrachte wir die Überlagerung $p : S^{2n-1} \to S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p = L(p; q_1, \dots, q_n)$, $n \geq 2$, aus Beispiel II.2.8, dann erhalten wir $\pi_1\big(L(p; q_1, \dots, q_n)\big) \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}_p$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.8. Beispiel. Betrachte wir die Überlagerung $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong T^n$ aus siehe Beispiel II.2.5, so erhalten wir $\pi_1(T^n) \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}^n$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.9. Beispiel. Betrachten wir die Überlagerung $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \cong K$ aus Beispiel II.2.9, so erhalten wir $\pi_1(K) \cong \mathrm{Deck}(p) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.10. Beispiel. Es bezeichne $A : S^3 \to S^3$ die Antipodalabbildung, $A(x) := -x$. Die Abbildung $A \times A : S^3 \times S^3 \to S^3 \times S^3$ definiert eine freie $\mathbb{Z}_2$-Wirkung auf $S^3 \times S^3$. Aus Aufgabe 23 folgt $(S^3 \times S^3)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}_4$. Mit Hilfe von Beispiel II.5.5 erhalten wir daher $\pi_1(\mathrm{SO}_4) \cong \mathbb{Z}_2$.

II.6. Konstruktion von Überlagerungen. Sei (X, x_0) ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender punktierter Raum. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass zusammenhängende punktierte Überlagerungen von (X, x_0), bis auf Isomorphie, durch ihre charakteristische Untergruppe bestimmt sind, siehe Korollar II.4.9. Es stellt sich nun die Frage, ob jede Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ als charakteristische Untergruppe einer punktierten Überlagerung von (X, x_0) auftritt. Beispielsweise ist $\pi_1(X, x_0)$ die charakteristische Untergruppe der trivialen Überlagerung $\mathrm{id}_X : (X, x_0) \to (X, x_0)$. Das andere Extrem wäre eine Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit trivialer charakteristischer Untergruppe. Da $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ stets injektiv ist, siehe Proposition II.3.11(i), ist dies genau dann der Fall wenn $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist. Eine solche Überlagerung wird *universell* genannt.

II.6.1. Definition (Universelle Überlagerung). Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eines zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Raums X wird *universell* genannt, falls $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

II.6.2. Bemerkung. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum besitzt, bis auf Isomorphie, höchstens eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \to X$, siehe Korollar II.4.9. Wir sprechen daher von *der* universellen Überlagerung. Eine weitere schwache Zusammenhangseigenschaft der Basis stellt die Existenz einer universellen Überlagerungen sicher, siehe Satz II.6.9 unten. Universelle Überlagerungen sind stets normal, und es gilt $\mathrm{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$, siehe Beispiel II.5.4.

II.6.3. Beispiel. Die Abbildung $\mathbb{R} \to S^1$ aus Beispiel II.2.4 ist die universelle Überlagerung des Kreises. Ebenso ist $\mathbb{R}^n \to T^n$, siehe Beispiel II.2.5, die universelle Überlagerung des Torus. Die Quotientenabbildung $S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ aus Beispiel II.2.7, ist die universelle Überlagerung des projektiven Raums, $n \geq 2$. Ebenso ist die Quotientenabbildung $S^{2n-1} \to L(p; q_1, \dots, q_n)$, siehe Beispiel II.2.8, die universelle Überlagerung des Linsenraums, $n \geq 2$. Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \cong K$ aus Beispiel II.2.9 ist die universelle Überlagerung der Kleinschen Flasche. Die Abbildung $S^3 \to \mathrm{SO}_3$ aus Aufgabe 18 ist die universelle Überlagerung von SO_3. Die Abbildung $S^3 \times S^3 \to \mathrm{SO}_4$ aus Beispiel II.5.10 ist die universelle Überlagerung von SO_4.

II.6.4. Bemerkung. Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte universelle Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raums X. Weiters sei $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Es bezeichne $\Phi : \mathrm{Deck}(\tilde{X}) \to \pi_1(X, x_0)$ den durch $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi)$ gegebenen Isomorphismus. Dann definiert $h \cdot \tilde{x} := \Phi^{-1}(h)(\tilde{x})$ eine strikt diskontinuierlich Linkswirkung von H auf $\tilde{X}$, siehe Proposition II.3.2. Also ist die Orbitprojektion $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{X}/H, \tilde{y}_0)$ eine (universelle) Überlagerung, wobei $\tilde{y}_0 := \tilde{p}(\tilde{x}_0)$, siehe Proposition II.2.3. Die Abbildung p faktorisiert zu einer surjektiven stetigen Abbildung $q : (\tilde{X}/H, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$, dh. $q \circ \tilde{p} = p$. Dieses q ist eine Überlagerung, denn jede wegzusammenhängende offene Teilmenge $U \subseteq X$ die von p gleichmäßig überlagert wird, wird auch von q gleichmäßig überlagert. Für die charakteristische Untergruppe von q gilt $q_*(\pi_1(\tilde{X}/H, \tilde{y}_0)) = H$. Betrachte dazu eine Schleife $f : I \to X$ bei x_0 und ihren Lift $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ mit $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Dann ist $\tilde{p} \circ \tilde{f} : I \to \tilde{X}/H$ der Lift von f über q mit Anfangspunkt $(\tilde{p} \circ \tilde{f})(0) = \tilde{y}_0$. Dieser Lift ist genau dann geschlossen, wenn $\tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{f}(1) \in \tilde{p}^{-1}(\tilde{y}_0) = H \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \cdot H$ liegt, und dies ist genau dann der Fall wenn $[f] \in H$, denn die Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf F_{x_0} ist frei wegen des einfachen Zusammenhangs von $\tilde{X}$. Aus Proposition II.3.11(ii) folgt daher die Behauptung über die charakteristische Untergruppe von q.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "\tilde{p}"] & \\
& (\tilde{X}/H, \tilde{y}_0) \arrow[dl, "q"] \\
(X, x_0) &
\end{tikzcd}$$

II.6.5. Proposition (Universalität der universellen Überlagerung). *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte universelle Überlagerung des lokal wegzusammenhängenden Raumes X, und es sei $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ eine weitere zusammenhängende Überlagerung. Dann existiert genau eine Abbildung punktierter Räume $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit $q \circ \tilde{p} = p$, und diese ist eine Überlagerung.*

Beweis. Es beizeichne $H := q_*(\pi_1(\tilde{y}, \tilde{y}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ die charakteristische Untergruppe von q. Nach Korollar II.4.9 ist q zu der punktierten Überlagerung $(\tilde{X}/H, \tilde{y}_0) \to (X, x_0)$ aus Bemerkung II.6.4 isomorph. O.B.d.A. dürfen wir daher $Y = \tilde{X}/H$ annehmen. Die Orbitprojektion $\tilde{p} : \tilde{X} \to \tilde{X}/H$ ist dann die gesuchte Überlagerung. $\square$

Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine universelle Überlagerung und $x_0 \in X$. Dann existieren $\tilde{x}_0 \in F_{x_0}$, offene Umgebungen $\tilde{U}$ von $\tilde{x}_0$ und U von x_0, sodass $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ ein Homöomorphismus ist. Die kanonische Inklusion $\iota : U \to X$ lässt sich dann als Komposition $\iota = p \circ (p|_{\tilde{U}})^{-1}$ schreiben. Aus $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$ folgt nun, dass $\iota_* = p_* \circ ((p|_{\tilde{U}})^{-1})_*$ der triviale Homomorphismus sein muss. Ein Raum kann daher nur dann eine universelle Überlagerung besitzen wenn er folgende Eigenschaft hat:

II.6.6. Definition (Semilokal einfach zusammenhängend). Ein topologischer Raum X heißt *semilokal einfach zusammenhängend,* falls jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung U besitzt, sodass jede Schleife in U bei x_0, in X nullhomotop ist. In anderen Worten, die kanonische Inklusion $U \to X$ induziert den trivialen Homomorphismus $\pi_1(U, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

II.6.7. Bemerkung. Jeder lokal kontrahierbare Raum ist semilokal einfach zusammenhängend, vgl. Bemerkung II.4.3. Insbesondere sind topologische Mannigfaltigkeiten semilokal einfach zusammenhängend. Allgemeiner ist jeder lokal einfach zusammenhängende Raum auch semilokal einfach zusammenhängend. Dabei heißt ein Raum lokal einfach zusammenhängend falls jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus einfach zusammenhängenden Umgebungen besitzt. Natürlich ist auch jeder einfach zusammenhängende Raum semilokal einfach zusammenhängend.

II.6.8. Beispiel. Der Teilraum $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - \frac{1}{n}\| = \frac{1}{n}\}$ von $\mathbb{R}^2$ ist nicht semilokal einfach zusammenhängend, der Punkt $0 \in X$ besitzt keine Umgebung U deren induzierter Homomorphismus $\pi_1(U) \to \pi_1(X)$ trivial ist. Der Kegel CX is kontrahierbar, also einfach zusammenhängend und damit auch semilokal einfach zusammenhängend, er ist aber nicht lokal einfach zusammenhängend.

II.6.9. Satz (Universelle Überlagerung). *Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum. Dann existiert eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$.*

Beweis. Wir fixieren einen Basispunkt $x_0 \in X$, und definieren $\tilde{X}$ als die Menge der Homotopieklassen relativ Endpunkten von Wegen in X mit Anfangspunkt x_0,

$$\tilde{X} := \big\{\text{Wege } \sigma : I \to X \text{ mit Anfangspunkt } \sigma(0) = x_0\big\}/\simeq .$$

Ist σ ein Weg mit $\sigma(0) = x_0$, dann schreiben wir $[\sigma] \in \tilde{X}$ für die von ihm repräsentierte Äquivalenzklasse. Offensichtlich ist

$$p : \tilde{X} \to X, \qquad p([\sigma]) := \sigma(1) \tag{II.6}$$

eine wohldefinierte Abbildung, die wegen des Wegzusammenhangs von X auch surjektiv ist. Als Basispunkt in $\tilde{X}$ wählen wir die Homotopieklasse des konstanten Weges, $\tilde{x}_0 := [c_{x_0}]$. Dann gilt $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Ist $[\sigma] \in \tilde{X}$ und $U \subseteq X$ offen, dann definieren wir eine Teilmenge $\tilde{U}_{[\sigma]} \subseteq \tilde{X}$ durch

$$\tilde{U}_{[\sigma]} := \big\{[\sigma\tau] \in \tilde{X} : \tau \text{ ein Weg in } U \text{ mit } \sigma(1) = \tau(0)\big\}.$$

Wir versehen $\tilde{X}$ mit der gröbsten Topologie, sodass alle diese Mengen $\tilde{U}_{[\sigma]}$ offen sind. Eine Abbildung $f : Z \to \tilde{X}$ ist also genau dann stetig, wenn für jede der Mengen $\tilde{U}_{[\sigma]}$ das Urbild $f^{-1}(\tilde{U}_{[\sigma]})$ offen in Z ist. Für $[\sigma] \in \tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{V}_{[\sigma_2]}$ gilt $[\sigma] \in \tilde{W}_{[\sigma]} \subseteq \tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{V}_{[\sigma_2]}$, wobei $W := U \cap V$, daher bilden die Mengen $\tilde{U}_{[\sigma]}$ sogar eine Basis der Topologie auf $\tilde{X}$.

Ist γ ein Weg in X mit Anfangspunkt $\gamma(0) = x_0$, dann definiert

$$\tilde{\gamma} : I \to \tilde{X}, \qquad \tilde{\gamma}(t) := [s \mapsto \gamma(ts)], \tag{II.7}$$

einen Weg in $\tilde{X}$ mit Anfangspunkt $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ und Endpunkt $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]$. Die Stetigkeit von $\tilde{\gamma}$ lässt sich leicht mit Hilfe der obigen Beschreibung stetiger Abbildungen nach $\tilde{X}$ verifizieren. Weiters gilt offensichtlich $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, also ist $\tilde{\gamma}$ ein Lift von γ. Daraus folgt nun insbesondere, dass der Raum $\tilde{X}$ wegzusammenhängend ist, denn $\tilde{\gamma}$ verbindet den Basispunkt $\tilde{x}_0$ mit $[\gamma]$.

Die Abbildung (II.6) ist stetig, denn ist $[\sigma] \in \tilde{X}$ und $U \subseteq X$ offen mit $p([\sigma]) \in U$, dann ist $[\sigma] \in \tilde{U}_{[\sigma]}$ und $\tilde{U}_{[\sigma]} \subseteq p^{-1}(U)$.

Wir zeigen als nächstes, dass $p : \tilde{X} \to X$ tatsächlich eine Überlagerung ist. Sei dazu $x \in X$. Da X lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend ist, existiert eine wegzusammenhängende offene Umgebung U von x mit der Eigenschaft, dass die Inklusion $U \to X$ den trivialen Homomorphismus $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ induziert. Es bezeichne $F_x = p^{-1}(x) \subseteq \tilde{X}$, die Menge der Homotopieklassen von Wegen von x_0 nach x. Dann gilt zunächst

$$\tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{U}_{[\sigma_2]} = \emptyset \qquad \text{falls } [\sigma_1] \neq [\sigma_2] \in F_x. \tag{II.8}$$

Um dies einzusehen nehmen wir an es gilt $\tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{U}_{[\sigma_2]} \neq \emptyset$. Dann existieren zwei Wege τ_1 und τ_2 in U mit Anfangspunkt $\tau_1(0) = x = \tau_2(0)$, sodass $\sigma_1\tau_1 \simeq \sigma_2\tau_2$ relative Endpunkten in X. Da $\pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$ trivial ist, gilt $\tau_1\bar{\tau}_2 \simeq c_x$ relativ Endpunkten in X. Es folgt $\sigma_1 \simeq \sigma_1\tau_1\bar{\tau}_2 \simeq \sigma_2$ relative Endpunkten in X, also $[\sigma_1] = [\sigma_2] \in \tilde{X}$. Dies zeigt (II.8). Da U wegzusammenhängend ist, folgt sofort $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\sigma]\in F_x} \tilde{U}_{[\sigma]}$. Es bleibt noch zu zeigen, dass für jedes $[\sigma] \in F_x$

$$p|_{\tilde{U}_{[\sigma]}} : \tilde{U}_{[\sigma]} \to U \tag{II.9}$$

ein Homöomorphismus ist. Wegen des Wegzusammenhangs von U ist (II.9) surjektiv. Aus der Trivialität von $\pi_1(U,x) \to \pi_1(X,x)$, folgt die Injektivität von (II.9). Da p stetig ist, bleibt bloß noch zu zeigen, dass (II.9) eine offene Abbildung ist. Sei dazu $[\gamma] \in \tilde{U}_{[\sigma]}$ und $\tilde{W} \subseteq \tilde{U}_{[\sigma]}$ offen mit $[\gamma] \in \tilde{W}$. Dann existiert eine wegzusammenhängende offene Umgebung V von $\gamma(1)$ mit $\tilde{V}_{[\gamma]} \subseteq \tilde{W}$. Für diese gilt $p(\tilde{V}_{[\gamma]}) = V$, also ist $p(\tilde{W}) \supseteq V$ eine Umgebung von $p([\gamma])$. Dies zeigt, dass (II.9) eine offene Abbildung, und damit ein Homöomorphismus ist. Daher ist (II.6) tatsächlich eine zusammenhängende Überlagerung.

Schließlich ist noch $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$ zu verifizieren. Nach Proposition II.3.11(i) genügt es $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = 0$ zu überprüfen. Sei also γ eine Schleife bei x_0 mit $[\gamma] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Nach Proposition II.3.11(ii) ist der Lift $\tilde{\gamma}$, siehe (II.7), ein geschlossener Weg, dh. $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$. Da $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]$, bedeutet dies aber gerade, dass $[\gamma] = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Also ist jedes Element in $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ trivial und daher $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = 0$. Damit ist der Beweis des Satzes vollständig. □

II.6.10. Korollar. *Es sei (X, x_0) ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender punktierter Raum, und $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Dann existiert eine zusammenhängende punktierte Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ mit charakteristischer Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz II.6.9 und Bemerkung II.6.4. □

Aus Korollar II.4.9 und Korollar II.6.10 erhalten wir nun folgende vollständige Klassifikation der zusammenhängenden punktierten Überlagerungen eines hinreichend zusammenhängenden punktierten Raums.

II.6.11. Korollar (Klassifikation punktierter Überlagerungen). *Sei (X, x_0) ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender punktierter Raum. Die Korrespondenz die jeder zusammenhängenden punktierten Überlagerung von (X, x_0) ihre charakteristische Untergruppe zuordnet, definiert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen zusammenhängender punktierter Überlagerungen von (X, x_0) und den Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.*

Ist $p : \tilde{X} \to X$ eine wegzusammenhängende Überlagerung und $x_0 \in X$, dann sind die charakteristischen Untergruppen $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, $\tilde{x}_0 \in F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$, alle konjugiert in $\pi_1(X, x_0)$, siehe Proposition II.3.11(vi). Die *Konjugationsklasse der charakteristischen Untergruppe* ist daher auch ohne Basispunkt in $\tilde{X}$ wohldefiniert. Aus Korollar II.6.11 und Proposition II.3.11(vii) erhalten wir folgende vollständige Klassifikation der zusammenhängenden Überlagerungen eines hinreichend zusammenhängenden Raums.

II.6.12. Korollar (Klassifikation von Überlagerungen). *Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender Raum, und $x_0 \in X$. Die Korrespondenz die jeder zusammenhängenden Überlagerung von X die Konjugationsklasse ihrer charakteristische Untergruppe zuordnet, definiert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen zusammenhängender Überlagerungen von X und den Konjugationsklassen von Untergruppen in $\pi_1(X, x_0)$.*

II.7. Darstellungen der Fundamentalgruppe. Wir wollen in diesem Abschnitt eine etwas andere Klassifikation der Überlagerungen diskutieren. Diese liefert eine genaue Beschreibung aller, nicht notwendigerweise zusammenhängenden, Überlagerungen eines hinreichend zusammenhängenden Raums.

Wir erinnern uns, siehe Proposition II.3.8, dass jede Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ eine Rechtswirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser $p^{-1}(x_0)$ definiert, wobei $x_0 \in X$ ein beliebiger Basispunkt ist. Ist $\varphi : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ ein Isomorphismus von Überlagerungen, $q : \tilde{Y} \to X$, dann liefert die Einschränkung von φ eine äquivariante Bijektion $\varphi_0 := \varphi|_{p^{-1}(x_0)} : p^{-1}(x_0) \to q^{-1}(x_0)$, dh. $\varphi_0(\tilde{x}_0 \cdot \sigma) = \varphi_0(\tilde{x}_0) \cdot \sigma$, für alle $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ und alle $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Ist nämlich $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0 und $\tilde{f} : I \to \tilde{X}$ der Lift über p mit Anfangspunkt $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$, dann ist $\varphi \circ \tilde{f} : I \to \tilde{Y}$ der Lift von f über q mit Anfangspunkt $(\varphi \circ \tilde{f})(0) = \varphi_0(\tilde{x}_0)$ woraus sofort die Äquivarianz von φ_0 folgt, denn $\varphi_0(\tilde{x}_0) \cdot [f] = (\varphi \circ \tilde{f})(1) = \varphi_0(\tilde{f}(1)) = \varphi_0(\tilde{x}_0 \cdot [f])$.

Wir nennen zwei Rechtswirkungen $\rho_i : S_i \times G \to S_i$, $i = 1, 2$, einer Gruppe G äquivalent falls eine äquivariante Bijektion $\varphi : S_1 \to S_2$ exstiert, dh. $\varphi(s \cdot g) = \varphi(s) \cdot g$, für alle $s \in S_1$ und alle $g \in G$. Isomorphe Überlagerungen liefern daher äquivalenten Rechtswirkungen der Fundamentalgruppe.

II.7.1. Satz. *Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum und $x_0 \in X$. Ordnen wir einer Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ die Rechtswirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser $p^{-1}(x_0)$ zu, so erhalten wir eine bijektive Korrespondenz zwischen der Menge der Isomorphieklassen von Überlagerungen von X und den Äquivalenzklassen von Rechtswirkungen von $\pi_1(X, x_0)$.*

Beweis. Zu einer gegebenen Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf einer Menge S konstruieren wir zunächst eine Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$, sodass die auf $p^{-1}(x_0)$ induzierte Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ äquivalent zu der gegebenen Wirkung auf S ist. Es bezeichne dazu $q : \tilde{Y} \to X$ die universelle Überlagerung von X, siehe Satz II.6.9. Wähle $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ mit $q(\tilde{y}_0) = x_0$, und bezeichne mit $\Phi : \mathrm{Deck}(\tilde{Y}) \to \pi_1(X, x_0)$ den duch $\varphi(\tilde{y}_0) = \tilde{y}_0 \cdot \Phi(\varphi)$ gegebenen Isomorphismus. Auf $\tilde{Y} \times S$ betrachten wir die Linkswirkung $\sigma \cdot (\tilde{y}, s) := \big(\Phi^{-1}(\sigma)(\tilde{y}), s \cdot (\sigma^{-1})\big)$,

$(\tilde{y}, s) \in \tilde{Y} \times S$, $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Es bezeichne $\tilde{X} := (\tilde{Y} \times S)/\pi_1(X, x_0)$ den Orbitraum, und $p : \tilde{X} \to X$ die durch $p([\tilde{y}, s]) := q(\tilde{y})$ definierte Abbildung. Beachte, dass p wohldefiniert, stetig und surjektiv ist. Tatsächlich ist p eine Überlagerung, denn jede wegzusammenhängende offene Teilmenge in X die von q gleichmäßig überlagert wird, wird auch von p gleichmäßig überlagert, siehe Proposition II.1.5. Die Abbildung $\varphi : S \to p^{-1}(x_0)$, $\varphi(s) := [\tilde{y}_0, s]$ ist eine Bijektion, denn die Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf $q^{-1}(x_0)$ ist frei und transitiv. Sei nun $f : I \to X$ eine Schleife bei x_0, und $\tilde{f} : I \to \tilde{Y}$ der Lift mit Anfangspunkt $\tilde{f}(0) = \tilde{y}_0$. Zu gegebenem $s \in S$ ist dann $I \to \tilde{X}$, $t \mapsto [\tilde{f}(t), s]$, ein Lift von f über p mit Anfangspunkt $\varphi(s)$. Es folgt $\varphi(s) \cdot [f] = [\tilde{f}(1), s] = \big[\tilde{y}_0 \cdot [f], s\big] = \big[\Phi^{-1}([f])(\tilde{y}_0), s\big] = \big[\tilde{y}_0, s \cdot [f]\big] = \varphi(s \cdot [f])$. Also ist $\varphi : S \to p^{-1}(x_0)$ eine äquivariante Bijektion. Bis auf Äquivalenz erhalten wir also jede Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ aus einer Überlagerung von X, dh. die Korrespondenz ist surjektiv.

Nun zur Injektivität der Korrespondenz: Es sei $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und es bezeichnen $F := p^{-1}(x_0)$ die Faser über x_0 versehen mit der üblichen Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$. Es genügt zu zeigen, dass die oben konstruierte Überlagerung $(\tilde{Y} \times F)/\pi_1(X, x_0) \to X$ isomorph zu der Überlagerung $p : \tilde{X} \to X$ ist. Wir definieren eine Abbildung $\tilde{\varphi} : \tilde{Y} \times F \to \tilde{X}$ wie folgt. Sind $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, und $\tilde{x}_0 \in F$, dann wählen wir einen Weg $f : I \to \tilde{Y}$ von $f(0) = \tilde{y}_0$ nach $f(1) = \tilde{y}$ und bezeichnen mit $\widetilde{(q \circ f)}_{\tilde{x}_0}$ den eindeutigen Lift des Weges $q \circ f : I \to X$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$. Auf Grund des einfachen Zusammenhangs von $\tilde{Y}$ ist der Endpunkt $\tilde{\varphi}(\tilde{y}, \tilde{x}_0) := \widetilde{(q \circ f)}_{\tilde{x}_0}(1)$ unabhängig von der Wahl von f. Ist $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ dann gilt $\tilde{\varphi}\big(\Phi^{-1}(\sigma)\tilde{y}, \tilde{x}_0 \cdot (\sigma^{-1})\big) = \tilde{\varphi}(\tilde{y}, \tilde{x}_0)$, also faktorisiert $\tilde{\varphi}$ zu einer Abbildung $\varphi : (\tilde{Y} \times F)/\pi_1(X, x_0) \to \tilde{X}$. Es lässt sich nun leicht verifizieren, dass φ ein Isomorphismus von Überlagerungen ist. $\square$

II.7.2. Bemerkung. Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum, $x_0 \in X$, ρ eine Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf einer Menge S und $p : \tilde{X} \to X$ die entsprechende Überlagerung, siehe Satz II.7.1. Es ist dann $\tilde{X}$ zusammenhängend genau dann, wenn ρ transitiv ist. In diesem Fall stimmt die Konjugationsklasse der Charakteristischen Untergruppe von p mit der Konjugationsklasse der Isotropiegruppe $\{\sigma \in \pi_1(X, x_0) : s \cdot \sigma = s\}$ überein, wobei $s \in S$ beliebig ist.[22] Insbesondere ist p genau dann universell, wenn die Wirkung ρ transitiv und frei ist. Im transitiven (zusammenhängenden) Fall ist p genau dann eine normale Überlagerung, wenn eine (und dann jede) Isotropiegruppe $\{\sigma \in \pi_1(X, x_0) : s \cdot \sigma = s\}$ einen Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$ bildet.

II.7.3. Bemerkung. Es sei G eine Gruppe und S eine Menge. Jeder Rechtswirkung ρ von G auf S können wir eine Linkswirkung λ von G auf S zuordnen,

[22] In diesem Fall sind die Isotropiegruppen von $s \in S$ alle konjugiert.

$\lambda(g,s) := \rho(s,g^{-1})$. Offensichtlich liefert dies eine Bijektion zwischen den Linkswirkungen von G auf S und den Rechtswirkungen von G auf S. Eine Linkswirkung von G auf S ist aber nichts anderes als ein Homomorphismus $G \to \mathfrak{S}(S)$. Aus Satz II.7.1 erhalten wir daher eine bijektive Korrespondenz zwischen Isomorphieklassen von Überlagerungen eines Raums (X, x_0) und Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(X, x_0) \to \mathfrak{S}(S)$. Dabei sind zwei Homomorphismen $\lambda_i : \pi_1(X, x_0) \to \mathfrak{S}(S_i)$, $i = 1, 2$, äquivalent, wenn eine Bijektion $\varphi : S_1 \to S_2$ existiert, sodass $\varphi \circ \lambda_1(\sigma) \circ \varphi^{-1} = \lambda_2(\sigma)$, für alle $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Wollen wir alle Überlagerungen von (X, x_0) mit vorgegebener Blätterzahl bestimmen, genügt es daher eine Menge S gegebener Kardinalität zu wählen und alle Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(X, x_0) \to \mathfrak{S}(S)$ zu bestimmen. Dabei sind zwei Homomorphismen $\lambda_1, \lambda_2 : \pi_1(X, x_0) \to \mathfrak{S}(S)$ äquivalent, falls $\tau \in \mathfrak{S}(S)$ existiert, sodass $\tau \circ \lambda_1(\sigma) \circ \tau^{-1} = \lambda_2(\sigma)$, für alle $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$.

II.7.4. Beispiel. Wir wollen alle zwei-fachen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ bestimmen. Diese stehen in bijektiver Korrespondenz mit Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(S^1 \vee S^1) \to \mathfrak{S}_2 := \mathfrak{S}(\{1, 2\})$, siehe Bemerkung II.7.3. Da $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}_2$ abelsch ist, sind zwei solche Homomorphismen nur dann äquivalent wenn sie übereinstimmen. Da $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \langle a, b \mid - \rangle$ stehen diese Homomorphismen in bijektiver Korrespondenz mit $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$, dabei entspricht einem Homomorphismus $\varphi : \langle a, b \mid - \rangle \to \mathfrak{S}_2$ das Paar $\big(\varphi(a), \varphi(b)\big) \in \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$.[23] Es gibt daher genau vier (Äquivalenzklassen von) Homomorphismen $\pi_1(S^1 \vee S^1) \to \mathfrak{S}_2$, und damit genau vier Isomorphieklassen zwei-blättriger Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$. Bis auf eine sind sie alle zusammenhängend.

II.7.5. Beispiel. Wir wollen alle drei-fachen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ bestimmen. Diese stehen in bijektiver Korrespondenz mit Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(S^1 \vee S^1) \to \mathfrak{S}_3 := \mathfrak{S}(\{1, 2, 3\})$. Da $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \langle a, b \mid - \rangle$, stehen diese Homomorphismen in bijektiver Korrespondenz mit $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$, einem Homomorphismus φ entspricht dabei das Paar $(\varphi(a), \varphi(b))$. Mit wenig Aufwand lässt sich folgende Liste verifizieren, sie enthält aus jeder Äquivalenzklasse von Homomorphismen (Paaren) genau einen Repräsentanten.[24]

$\varphi(a)$	()	()	()	(12)	(12)	(12)	(12)	(123)	(123)	(123)	(123)
$\varphi(b)$	()	(12)	(123)	()	(12)	(13)	(123)	()	(12)	(123)	(132)
zush.	nein	nein	ja	nein	nein	ja	ja	ja	ja	ja	ja

Es gibt daher genau 11 drei-fache Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$, und 7 davon sind zusammenhängend.

[23] Dies folgt aus der Tatsache, dass wir einen Homomorphimus $\langle a, b \mid - \rangle$ auf den Erzeugern a und b beliebig vorgeben können und er dadurch schon vollständig festgelegt ist.

[24] Wir verwenden hier die übliche Zyklenschreibweise für Elemente in $\mathfrak{S}_3$. Etwa bezeichnet (12) die Transposition von 1 und 2, (123) bezeichnet eine zyklische Permutation, und () bezeichnet die identische Permutation.

II.7.6. Beispiel. Wir wollen alle drei-fachen Überlagerungen der Kleinschen Flasche K bestimmen. Wir erinnern uns, dass $\pi_1(K) \cong \langle a, b \mid a^2b^{-2}\rangle$, siehe Beispiel I.9.9. Wieder genügt es die Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\langle ab \mid a^2b^{-2}\rangle \to \mathfrak{S}_3$ zu bestimmen. Die Zuordnung $\varphi \mapsto (\varphi(a), \varphi(b))$ liefert eine Bijektion von der Menge der Homomorphismen $\langle ab \mid a^2b^{-2}\rangle \to \mathfrak{S}_3$ auf die Menge der Paare $(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ mit $\sigma^2 = \tau^2$. Folgende Liste enthält aus jeder Äquivalenzklasse von Homomorphismen (Paaren) genau einen Repräsentanten.

$\varphi(a)$	()	()	(12)	(12)	(12)	(123)
$\varphi(b)$	()	(12)	()	(12)	(13)	(123)
zush.	nein	nein	nein	nein	ja	ja

Es gibt daher, bis auf Isomorphie, genau sechs drei-blättrige Überlagerungen der Kleinschen Flasche, und zwei davon sind zusammenhängend.

II.8. Überlagerungen topologischer Gruppen. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G die mit einer Topologie versehen ist, sodass *Multiplikation* $\mu : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto \mu(g, h) := gh$ und *Inversion* $\nu : G \to G$, $g \mapsto \nu(g) := g^{-1}$ stetig sind.

II.8.1. Beispiel. Jede Untergruppe einer topologischen Gruppe ist bezüglich der Teilraumtopologie eine topologische Gruppe. Produkte topologischer Gruppen sind wieder topologische Gruppen.

II.8.2. Beispiel. Jede Gruppe, versehen mit der diskreten Topologie, ist eine topologische Gruppe.

II.8.3. Beispiel. $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$, versehen mit der üblichen Topologie, bilden bezüglich der Addition abelsche topologische Gruppen. Allgemeiner kann jeder topologische Vektorraum bezüglich der Addition als abelsche topologische Gruppe aufgefaßt werden.

II.8.4. Beispiel. $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, versehen mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Topologie, bildet bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine abelsche topologische Gruppen. Als Untergruppen con $\mathbb{C}^\times$ sind auch S^1, $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ abelsche topologische Gruppen. Der Torus $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ ist eine abelsche kompakte topologische Gruppe.

II.8.5. Beispiel. Die Matrizengruppen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, versehen mit der von $\mathbb{R}^{n^2}$ bzw. $\mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Topologie, bilden bezüglich der Multiplikation von Matrizen topologische Gruppen. Daher bilden auch die Untergruppe O_n, U_n, SO_n, SU_n, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ topologische Gruppen.

Unter einem *H-Raum*[25] verstehen wir einen punktierten Raum (X, e) zusammen mit einer Abbildung punktierter Räume $\mu : (X, e) \times (X, e) \to (X, e)$, sodass

[25] H-Raum, nach Heinz Hopf.

$\mu \circ (\mathrm{id}_X, c_e)$ und $\mu \circ (c_e, \mathrm{id}_X)$ beide homotop relativ Basispunkt zu id_X sind. Dabei bezeichnet $c_e : (X, e) \to (X, e)$ die konstante Abbildung, $c_e(x) := e$. Die Abbildung μ wird auch als *Multiplikation* bezeichnet.

II.8.6. Beispiel. Jede topologische Gruppe ist ein H-Raum. In diesem Fall gilt sogar $\mu \circ (\mathrm{id}_X \times c_e) = \mathrm{id}_X$ und $\mu \circ (c_e \circ \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X$, wobei μ die Gruppenmultiplikation und e das neutrale Element bezeichnen.

II.8.7. Proposition (Fundamentalgruppe von H-Räumen). *Es sei (X, e) ein H-Raum mit Multiplikation $\mu : (X, e) \times (X, e) \to (X, e)$. Dann stimmt der induzierte Homomorphismus*

$$\mu_* : \pi_1(X, e) \times \pi_1(X, e) = \pi_1\big((X, e) \times (X, e)\big) \to \pi_1(X, e)$$

mit der Multiplikation in $\pi_1(X, e)$ überein, dh. für $\sigma, \tau \in \pi_1(X, e)$ gilt $\mu_*(\sigma, \tau) = \sigma\tau$. Insbesondere ist $\pi_1(X, e)$ abelsch.

Beweis. Es seien $f, g : I \to X$ zwei Schleifen bei e. Betrachte die stetige Abbildung $H := \mu \circ (f \times g) : I \times I \to X$, $H(s, t) = \mu(f(s), g(t))$. Beachte, dass H die vier Eckpunkte von $I \times I$ auf e abbildet. Weiters seien $\iota_1 : I \to I \times I$, $\iota_1(s) := (s, 0)$, $\iota_2 : I \to I \times I$, $\iota_2(t) := (1, t)$, und $\iota_3 : I \to I \times I$, $\iota_3(t) := (t, t)$. Da $I \times I$ einfach zusammenhängend ist, gilt $\iota_1\iota_2 \simeq \iota_3$ relativ Endpunkte, also auch $(H \circ \iota_1)(H \circ \iota_2) \simeq H \circ \iota_3$ relativ Endpunkte, und damit $[H \circ \iota_1][H \circ \iota_2] = [H \circ \iota_3] \in \pi_1(X, e)$. Wegen $(H \circ \iota_3)(t) = \mu(f(t), g(t))$ ist $[H \circ \iota_3] = \mu_*([f], [g]) \in \pi_1(X, e)$. Da $(H \circ \iota_1)(s) = \mu(f(s), g(0)) = \mu(f(s), e) = (\mu \circ (\mathrm{id}_X, c_e) \circ f)(s)$ ist $H \circ \iota_1 = \mu \circ (\mathrm{id}_X, c_e) \circ f \simeq \mathrm{id}_X \circ f = f$ relativ Enpunkte, denn $\mu \circ (\mathrm{id}_X, c_e) \simeq \mathrm{id}_X$ relativ Basispunkt. Daher gilt $[H \circ \iota_1] = [f] \in \pi_1(X, e)$. Analog folgt aus $\mu \circ (c_e, \mathrm{id}_X) \simeq \mathrm{id}_X$, dass $[H \circ \iota_2] = [g] \in \pi_1(X, e)$. Insgesamt erhalten wir $[f][g] = [H \circ \iota_1][H \circ \iota_2] = [H \circ \iota_3] = \mu_*([f], [g])$, womit die erste Behauptung bewiesen ist. Seien nun $\iota_4 : I \to I \times I$, $\iota_4(t) := (0, t)$, und $\iota_5 : I \to I \times I$, $\iota_5(s) := (s, 1)$. Wie oben folgt $\iota_4\iota_5 \simeq \iota_3$ relativ Endpunkte, $[H \circ \iota_4][H \circ \iota_5] = [H \circ \iota_3] = \mu_*([f], [g]) \in \pi_1(X, e)$, $[H \circ \iota_4] = [g]$, $[H \circ \iota_5] = [f]$ und damit $[g][f] = \mu_*([f], [g])$, also ist $\pi_1(X, e)$ abelsch. Der Beweis der Kommutativität von $\pi_1(X, e)$ kann durch ein etwas algebraischeres Argument ersetzt werden, denn da die Multiplikation in $\pi_1(X, e)$ von einer stetigen Abbildung induziert wird muss sie ein Homomorphismus sein, und dies ist nur für abelsche Gruppen möglich, siehe Bemerkung II.8.8 unten. □

II.8.8. Bemerkung. Für eine Gruppe Γ ist die Multiplikation $\mu : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma$ genau dann ein Homomorphismus, wenn Γ abelsch ist, denn $\mu\big((g_1, h_1)(g_2, h_2)\big) = \mu(g_1g_2, h_1h_2) = g_1g_2h_1h_2$ und $\mu(g_1, h_1)\mu(g_2, h_2) = g_1h_1g_2h_2$.

II.8.9. Beispiel. Es sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e und Multiplikation $\mu : G \times G \to G$. Da (G, e) durch μ zu einem H-Raum wird, siehe Beispiel II.8.6, ist die Fundamentalgruppe $\pi_1(G, e)$ abelsch, siehe Proposition II.8.7. Für zwei Schleifen $f, g : I \to G$ bei e repräsentiert die Schleife

$\mu\circ(f,g): I \to G, t \mapsto f(t)g(t) = \mu(f(t),g(t))$, das Produkt $[f][g] \in \pi_1(G,e)$. Weiters stimmt die von der Inversion $\nu : G \to G$ induzierte Abbildung $\nu_* : \pi_1(G,e) \to \pi_1(G,e)$ mit der Inversion in $\pi_1(G,e)$ überein, dh. für eine Schleife $g : I \to G$ bei e repräsentiert die Schleife $t \mapsto (\nu \circ g)(t) = g(t)^{-1}$ das inverse Element $[g]^{-1} \in \pi_1(G,e)$. Dies folgt aus der Relation $c_e = \mu \circ (\nu, \mathrm{id}_G)$, denn mittels Proposition II.8.7 erhalten wir $1 = (c_e)_*\sigma = (\mu \circ (\nu, \mathrm{id}_G))_*\sigma = \mu_*(\nu_*\sigma, \sigma) = (\nu_*\sigma)\sigma$, also $\nu_*\sigma = \sigma^{-1}$ für alle $\sigma \in \pi_1(G,e)$.

Wir wollen diesen Abschnitt mit zwei Anwendungen des Liftungskriteriums abschließen, siehe Proposition II.8.10 und Proposition II.8.11. In beiden Fällen werden topologische bzw. geometrische Strukturen von der Basis auf den Totalraum geliftet.

II.8.10. Proposition (Überlagerungen von H-Räumen). *Es sei $p : (\tilde X, \tilde e) \to (X,e)$ eine zusammenhängende punktierte Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden H-Raums mit Multiplikation $\mu : (X,e)\times(X,e) \to (X,e)$. Dann existiert genau eine Abbildung punktierter Räume $\tilde\mu : (\tilde X,\tilde e)\times(\tilde X,\tilde e) \to (\tilde X,\tilde e)$ mit $p\circ\tilde\mu = \mu\circ(p\times p)$, und diese macht $(\tilde X,\tilde e)$ zu einem H-Raum.*

Beweis. Für den von $\mu\circ(p\times p) : (\tilde X,\tilde e)\times(\tilde X,\tilde e) \to (X,e)$ induzierten Homomorphismus gilt $(\mu\circ(p\times p))_*\big(\pi_1\big((\tilde X,\tilde e)\times(\tilde X,\tilde e)\big)\big) = \mu_*\big(p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde e)) \times p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde e))\big) = p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde e))$, denn μ_* ist die Multiplikation in $\pi_1(X,e)$, siehe Proposition II.8.7, und $p_*(\pi_1(\tilde X,\tilde e))$ ist eine Untergruppe. Nach Satz II.4.5 existiert daher eine eindeutige Abbildung punktierter Räume $\tilde\mu : (\tilde X,\tilde e)\times(\tilde X,\tilde e) \to (\tilde X,\tilde e)$ mit $p\circ\tilde\mu = \mu\circ(p\times p)$. Sei nun $H : X\times I \to X$ eine Homotopie relativ Basispunkt e von $H_0 = \mathrm{id}_X$ nach $H_1 = \mu\circ(\mathrm{id}_X, c_e)$.

$$\begin{tikzcd}
(\tilde X,\tilde e)\times(\tilde X,\tilde e) \arrow[r, dashed, "\exists!\tilde\mu"] \arrow[d, "p\times p"] & (\tilde X,\tilde e) \arrow[d, "p"] \\
(X,e)\times(X,e) \arrow[r, "\mu"] & (X,e)
\end{tikzcd}$$

Dann ist $G := H\circ(p\times\mathrm{id}_I) : \tilde X\times I \to X$ eine Homotopie relativ Basispunkt $\tilde e$ von $G_0 = p$ nach $G_1 = \mu\circ(\mathrm{id}_X, c_e)\circ p$. Nach Satz II.3.3 existiert eine Homotopie $\tilde G : \tilde X\times I \to \tilde X$ mit $p\circ\tilde G = G$ und $\tilde G_0 = \mathrm{id}_{\tilde X}$. Da $t\mapsto p(\tilde G(\tilde e,t)) = G(\tilde e,t) = \tilde e$ muss auch $t\mapsto \tilde G(\tilde e,t)$ konstant in t sein, also ist $\tilde G$ eine Homotopie relativ Basispunkt $\tilde e$. Da $p\circ\tilde\mu\circ(\mathrm{id}_{\tilde X}, c_{\tilde e}) = \mu\circ(p\times p)\circ(\mathrm{id}_{\tilde X}, c_{\tilde e}) = \mu\circ(p, p\circ c_{\tilde e}) = \mu\circ(\mathrm{id}_X, c_e)\circ p = p\circ\tilde G_1$ folgt $\tilde\mu\circ(\mathrm{id}_{\tilde X}, c_{\tilde e}) = \tilde G_1$, denn die beiden Abbildungen stimmen bei $\tilde e$ überein, siehe Proposition II.3.1. Damit ist $\tilde G$ eine Homotopie relativ Basisunkt von $\mathrm{id}_{\tilde X}$ nach $\tilde\mu\circ(\mathrm{id}_{\tilde X}, c_{\tilde e})$. Ebenso lässt sich $\mathrm{id}_{\tilde X} \simeq \tilde\mu\circ(c_{\tilde e}, \mathrm{id}_{\tilde X})$ zeigen. Also ist $(\tilde X,\tilde e)$ ein H-Raum. □

II.8.11. Proposition (Überlagerungen topologischer Gruppen). *Es sei $p : \tilde G \to G$ eine zusammenhängende Überlagerung einer lokal wegzusammenhängenden topologischen Gruppe G mit neutralem Element e. Weiters sei $\tilde e \in \tilde G$ mit $p(\tilde e) = e$. Dann gibt es auf $\tilde G$ genau eine Gruppenstruktur mit neutralem Element $\tilde e$, die $\tilde G$ zu einer topologischen Gruppe und $p : \tilde G \to G$ zu einem Homomorphismus macht. Ist G abelsch, dann auch $\tilde G$.*

Beweis. Nach Proposition II.8.10 gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{\mu} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G}$ mit $p \circ \tilde{\mu} = \mu \circ (p \times p)$ und $\tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$, wobei $\mu : G \times G \to G$ die Multiplikation in G bezeichnet. Insbesondere ist damit die Eindeutigkeitsaussage gezeigt.

Da die Multiplikation μ assotiativ ist, dh. $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_G) = \mu \circ (\mathrm{id}_G \times \mu)$, folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ (\tilde{\mu} \times \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \times p) \circ (\tilde{\mu} \times \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ \big((p \circ \tilde{\mu}) \times p\big) = \mu \circ \big((\mu \circ (p \times p)) \times p\big) = \mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_G) \circ (p \times p \times p) = \mu \circ (\mathrm{id}_G \times \mu) \circ (p \times p \times p) = \mu \circ \big(p \times (\mu \circ (p \times p))\big) = \mu \circ \big(p \times (p \circ \tilde{\mu})\big) = \mu \circ (p \times p) \circ (\mathrm{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu}) = p \circ \tilde{\mu} \circ (\mathrm{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu})$ also liften $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\mu} \times \mathrm{id}_{\tilde{G}})$ und $\tilde{\mu} \circ (\mathrm{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu})$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \to G$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\mu} \times \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \tilde{\mu} \circ (\mathrm{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu})$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e})$ überein, siehe Proposition II.3.1. Damit ist $\tilde{\mu}$ eine assotiative Multiplikation.

Da e neutrales Element von G, dh. $\mu \circ (c_e, \mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_G$, folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \times p) \circ (c_{\tilde{e}}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \circ c_{\tilde{e}}, p) = \mu \circ (c_e, \mathrm{id}_G) \circ p = \mathrm{id}_G \circ p = p \circ \mathrm{id}_{\tilde{G}}$, also liften $\tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}}, \mathrm{id}_{\tilde{G}})$ und $\mathrm{id}_{\tilde{G}}$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \to G$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mathrm{id}_{\tilde{G}}$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt $\tilde{e}$ überein. Damit ist $\tilde{e}$ linksneutrales Element der Multiplikation $\tilde{\mu}$. Analog lässt sich zeigen, dass $\tilde{e}$ auch rechts-neutrales Element von $\tilde{\mu}$ ist.

Es bezeichne $\kappa : G \times G \to G \times G$, $\kappa(g, h) := (h, g)$, und $\tilde{\kappa} : \tilde{G} \times \tilde{G} \to \tilde{G} \times \tilde{G}$, $\tilde{\kappa}(\tilde{g}, \tilde{h}) = (\tilde{h}, \tilde{g})$. Ist G kommutativ, dann gilt $\mu \circ \kappa = \mu$ und es folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ \tilde{\kappa} = \mu \circ (p \times p) \circ \tilde{\kappa} = \mu \circ \kappa \circ (p \times p) = \mu \circ (p \times p) = p \circ \tilde{\mu}$, also liften $\tilde{\mu} \circ \tilde{\kappa}$ und $\tilde{\mu}$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \times \tilde{G} \to G$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ \tilde{\kappa} = \tilde{\mu}$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt $(\tilde{e}, \tilde{e})$ überein. Damit ist auch $\tilde{G}$ kommutativ.

Es bezeichne nun $\nu : G \to G$ die Inversion, $\nu(g) = g^{-1}$. Für den von $\nu \circ p : (\tilde{G}, \tilde{e}) \to (G, e)$ induzierten Homomorphismus gilt $(\nu \circ p)_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})) = \nu_*(p_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))) = p_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))$, denn $p_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))$ ist eine Untergruppe und ν_* ist die Inversion in $\pi_1(G, e)$, siehe Beispiel II.8.9. Nach Satz II.4.5 existiert daher eine stetige Abbildung $\tilde{\nu} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ mit $p \circ \tilde{\nu} = \nu \circ p$ und $\tilde{\nu}(\tilde{e}) = \tilde{e}$. Aus $\mu \circ (\nu, \mathrm{id}_G) = c_e$ folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ (\tilde{\nu}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \times p) \circ (\tilde{\nu}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \circ \tilde{\nu}, p) = \mu \circ (\nu, \mathrm{id}_G) \circ p = c_e \circ p = p \circ c_{\tilde{e}}$, also liften $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\nu}, \mathrm{id}_{\tilde{G}})$ und $c_{\tilde{e}}$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \to G$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\nu}, \mathrm{id}_{\tilde{G}}) = c_{\tilde{e}}$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt $\tilde{e}$ überein. Damit ist $\tilde{\nu}(\tilde{g})$ das Linksinverse von $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Ebenso folgt $\tilde{\mu} \circ (\mathrm{id}_{\tilde{G}}, \tilde{\nu}) = c_{\tilde{e}}$, also ist $\tilde{\nu}(\tilde{g})$ auch Rechtsinverses von $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Damit ist $\tilde{G}$ eine topologische Gruppe. □

II.8.12. Bemerkung. Es seien G und $\tilde{G}$ zwei zusammenhängende topologische Gruppen und $p : \tilde{G} \to G$ ein Homomorphismus der eine Überlagerung ist. Es bezeichnen $e \in G$ und $\tilde{e} \in \tilde{G}$ die neutralen Elemente. Jedes $\tilde{g} \in \ker(p) = F_e$ definiert Decktransformationen $\lambda_{\tilde{g}} \in \mathrm{Deck}(\tilde{G})$, $\lambda_{\tilde{g}}(\tilde{h}) := \tilde{g}\tilde{h}$, und $\rho^{\tilde{g}} \in \mathrm{Deck}(\tilde{G})$, $\rho^{\tilde{g}}(\tilde{h}) := \tilde{h}\tilde{g}$. Wegen $\lambda_{\tilde{g}}(\tilde{e}) = \tilde{g} = \rho^{\tilde{g}}(\tilde{e})$ muss $\lambda_{\tilde{g}} = \rho^{\tilde{g}}$ gelten, siehe Proposition II.3.2. Es folgt $\tilde{g}\tilde{h} = \tilde{h}\tilde{g}$ für alle $\tilde{g} \in \ker(p)$ und $\tilde{h} \in \tilde{G}$. Also liegt $\ker(p)$ im Zentrum $C(\tilde{G})$ von $\tilde{G}$. Auch folgt, dass die Decktransformationen transitiv auf den Fasern von p wirken, also ist p eine normale Überlagerung. Schließlich ist $\ker(p) \to \mathrm{Deck}(\tilde{G})$, $\tilde{g} \mapsto \lambda_{\tilde{g}}$, ein Isomorphismus von Gruppen mit Inversem $\mathrm{Deck}(\tilde{G}) \to \ker(p)$, $\varphi \mapsto \varphi(\tilde{e})$. Für einfach zusammenhängendes $\tilde{G}$ erhalten wir insbesondere $\pi_1(G) \cong \mathrm{Deck}(\tilde{G}) \cong \ker(p)$.

III. Homotopietheorie

III.1. Kategorien und Funktoren. Die Kategorientheorie [**7**] bietet eine Sprache die sich gut eignet Gemeinsamkeiten in unterschiedlichen Disziplinen der Mathematik herauszuarbeiten und zu formalisieren. Sie liefert auch eine Möglichkeit verschiedene Gebiete in transparenter Weise miteinander in Beziehung zu setzen. Gerade in der algebraischen Topologie wo wir topologischen Räumen algebraische Gebilde zuordnen ist dies die Sprache der Wahl, und dort wurden die grundlegenden Begriffe der Kategorientheorie auch erfunden.

Eine *Kategorie* $\mathcal{C}$ besteht aus:

(i) Einer Klasse von Objekten.
(ii) Zu je zwei Objekten X und Y von $\mathcal{C}$, eine Menge $\mathcal{C}(X,Y)$. Die Elemente von $\mathcal{C}(X,Y)$ werden *Morphismen* von X nach Y genannt. Ist $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ so deuten wir dies auch durch $f : X \to Y$ an.
(iii) Zu je drei Objekten X, Y und Z von $\mathcal{C}$ eine Abbildung, die sogenannte *Komposition* auch *Verknüpfung,* $\mathcal{C}(X,Y) \times \mathcal{C}(Y,Z) \to \mathcal{C}(X,Z)$. Sind $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ und $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ dann schreiben wir $g \circ f$ oder gf für den entsprechenden Morphismus in $\mathcal{C}(X,Z)$.

Diese Daten müssen den folgenden beiden Axiomen genügen:

(A1) Zu jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ existiert ein Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathcal{C}(X,X)$, sodass für alle Objekte Y, Z von $\mathcal{C}$ und alle Morphismen $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}(Z,X)$ stets $f \circ \mathrm{id}_X = f$ und $\mathrm{id}_X \circ g = g$ gilt. (neutrale Elemente, identische Morphismen)
(A2) Für Objekte X, Y, Z und W von $\mathcal{C}$ und Morphismen $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$, $h \in (Z,W)$ gilt stets $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. (Assotiativität der Verknüpfung)

III.1.1. Bemerkung. Ist $\mathcal{C}$ eine Kategorie, dann sind die neutralen Elemente id_X durch die Eigenschaft $f \circ \mathrm{id}_X = f$ und $\mathrm{id}_X \circ g = g$ eindeutig bestimmt. Ist nämlich $1_X \in \mathcal{C}(X,X)$ ein weiterer Morphismus, sodass für alle Objekte Y, Z von $\mathcal{C}$ und alle $f \in \mathcal{C}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}(Z,X)$ die Relationen $f \circ 1_X = f$ und $1_X \circ g = g$ gelten, dann folgt $1_X = 1_X \circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_X$.

Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ einer Kategorie $\mathcal{C}$ wird ein *Isomorphismus* genannt, falls ein Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y,X)$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ existiert. Im Existenzfall ist so ein Morphismus g eindeutig bestimmt. Ist nämlich $h \in \mathcal{C}(Y,X)$ ein weiterer Morphismus mit $f \circ h = \mathrm{id}_Y$ und $h \circ f = \mathrm{id}_X$, dann folgt $g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h$. Wir bezeichnen den Morphismus g daher mit $f^{-1} \in \mathcal{C}(Y,X)$. Mit f ist natürlich auch f^{-1} ein Isomorphismus, und es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$. Sind $f_1 \in \mathcal{C}(X,Y)$ und $f_2 \in \mathcal{C}(Y,Z)$ zwei Isomorphismen, dann ist auch $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{C}(X,Z)$ ein Isomorpshimus mit $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$.

III.1.2. Bemerkung. Es sei $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ ein Morphismus einer Kategorie $\mathcal{C}$. Weiters seien $g \in \mathcal{C}(Y,X)$ ein Linksinverses von f, dh. $g \circ f = \mathrm{id}_X$, und

$h \in \mathcal{C}(Y, X)$ sei ein Rechtsinverses von f, dh. $f \circ h = \mathrm{id}_Y$. Dann stimmen g und h überein und f ist ein Isomorphismus mit $f^{-1} = g = h$. Dies folgt wieder aus $g = g \circ \mathrm{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \mathrm{id}_X \circ h = h$.

III.1.3. Beispiel (Kategorie der Mengen). Wir definieren eine Kategorie Set wie folgt. Als Objekte nehmen wir alle Mengen. Für zwei Objekte, dh. Mengen, X und Y bestehe die Menge der Morphismen $\mathrm{Set}(X, Y)$ aus allen Abbildungen von X nach Y. Schließlich ist die Verknüpfung von Morphismen durch die übliche Komposition von Abbildungen gegeben. Offensichtlich bildet Set eine Kategorie, die *Kategorie der Mengen und Abbildungen.* Die Isomorphismen in Set sind genau die Bijektionen.

III.1.4. Beispiel (Kategorie der punktierten Mengen). Ist X eine Menge und $x_0 \in X$ so bezeichnen wir das Paar (X, x_0) als punktierte Menge. Unter einer Abbildung punktierter Mengen $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ verstehen wir eine Abbildung $f : X \to Y$ für die $f(x_0) = y_0$ gilt. Die Klasse der Objekte der Kategorie Set_0 besteht aus allen punktierten Mengen. Die Menge der Morphismen $\mathrm{Set}_0((X, x_0), (Y, y_0))$ zwischen zwei Objekten, dh. punktierten Mengen, (X, x_0) und (Y, y_0) besteht aus allen Abbildungen punktierter Mengen von (X, x_0) nach (Y, y_0). Bezüglich der üblichen Komposition bildet Set_0 eine Kategorie, die *Kategorie der punktierten Mengen.* Die Isomorphismen in Set_0 sind genau die Basispunkt bewahrenden Bijektionen.

III.1.5. Beispiel (Kategorie der Gruppen). Die Klasse der Objekte der Kategorie Grp besteht aus allen Gruppen. Für zwei Objekte, dh. Gruppen, G und H besteht die Menge der Morphismen $\mathrm{Grp}(G, H)$ aus allen Gruppenhomomorphismen von G nach H. Die Verknüpfung von Morphismen ist durch die übliche Komposition von Homomorphismen gegeben. Beachte, dass die Komposition von Homomorphismen wieder ein Homomorphismen ist. Offensichtlich bildet Grp eine Kategorie, die *Kategorie der Gruppen und Homomorphismen.* Die Isomorphismen in Grp sind genau die Gruppenisomorphismen.

III.1.6. Beispiel (Kategorie der abelschen Gruppen). Die Klasse der Objekte der Kategorie aGrp besteht aus allen abelschen Gruppen. Die Menge der Morphismen $\mathrm{aGrp}(A, B)$ zwischen zwei Objekten, dh. abelschen Gruppen, A und B besteht aus allen Gruppenhomomorphismen von A nach B. Bezüglich der üblichen Komposition von Homomorphismen bildet aGrp eine Kategorie, die *Kategorie der abelschen Gruppen und Homomorphismen.* Die Isomorphismen in aGrp sind genau die Isomorphismen zwischen abelschen Gruppen.

III.1.7. Beispiel (Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume). Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Die Klasse der Objekte der Kategorie $\mathbb{K}$-Vsp besteht aus allen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Die Menge der Morphismen $\mathbb{K}\text{-Vsp}(V, W)$ zwischen zwei Objekten, dh. $\mathbb{K}$-Vektorräumen, V und W besteht aus allen $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen von V nach W.

Bezüglich der üblichen Komposition linearer Abbildungen bildet $\mathbb{K}$-Vsp eine Kategorie, die *Kategorie der $\mathbb{K}$-Vektorräume und linearen Abbildungen.* Die Isomorpshimen in $\mathbb{K}$-Vsp sind genau die Isomorphismen von $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

III.1.8. Beispiel (Kategorie der topologischen Räume). Die Klasse der Objekte der Kategorie Top besteht aus allen topologischen Räumen. Die Menge der Morphismen $\mathrm{Top}(X, Y)$ zwischen zwei Objekten, dh. topologischen Räumen, X und Y besteht aus allen stetigen Abbildungen von X nach Y. Bezüglich der üblichen Komposition von Abbildungen bildet Top eine Kategorie, die *Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen.* Beachte hier, dass die Komposition stetiger Abbildungen wieder stetig ist. Die Isomorphismen in Top sind genau die Homöomorphismen. Ebenso können wir die Kategorie der Hausdorffräume, die Kategorie der kompakten Räume usw. betrachten.

III.1.9. Beispiel (Kategorie der punktierten Räume). Die Klasse der Objekte der Kategorie Top_0 besteht aus allen punktierten Räumen. Die Menge der Morphismen zwischen zwei Objekten, dh. punktierten Räumen, (X, x_0) und (Y, y_0) besteht aus allen Abbildungen punktierter Räume $(X, x_0) \to (Y, y_0)$. Bezüglich der üblichen Komposition von Abbildungen bildet Top_0 eine Kategorie, die *Kategorie der punktierten Räume.* Die Isomorphismen in Top_0 sind genau die Homöomorphismen punktierter Räume.

In allen bisher besprochenen Kategorien waren die Objekte Mengen mit gewissen Strukturen (Basispunkt, Gruppenstruktur, Vektorraumstruktur, Topologie, ...) und die Morphismen waren Abbildungen die diese Struktur bewahren (Basispunkt erhaltend, mit Gruppenmultiplikation verträglich, linear, stetig, ...) In den folgenden Beispielen sind die Morphismen keine Abbildungen.

III.1.10. Beispiel. Die Klasse der Objekte der Kategorie hTop besteht aus allen topologischen Räumen. Für zwei Objekte, dh. topolgische Räume, X und Y besteht die Menge der Morphismen von X nach Y aus allen Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X anch Y, dh. $\mathrm{hTop}(X, Y) = [X, Y]$, siehe Abschnitt I.8. Die Verknüpfung von Morphismen ist durch Komposition von Repräsentanten definiert, dh. $[f] \circ [g] := [f \circ g]$. Beachte, dass dies nach Lemma I.8.4 tatsächlich wohldefiniert ist. Mit dieser Komposition bildet hTop eine Kategorie, die *Kategorie der topologischen Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen.* Die Isomorphismen in hTop sind genau die Homotopieäquivalenzen.

III.1.11. Beispiel. Die Klasse der Objekte der Kategorie hTop_0 besteht aus allen punktierten Räumen. Für zwei Objekte, dh. punktierte Räume, (X, x_0) und (Y, y_0) besteht die Menge der Morphismen von (X, x_0) nach (Y, y_0) aus allen Homotopieklassen (relativ Basispunkt) punktierter Abbildungen von (X, x_0) anch (Y, y_0), dh. $\mathrm{hTop}((X, x_0), (Y, y_0)) = [(X, x_0), (Y, y_0)]$, siehe Abschnitt I.8. Die Verknüpfung von Morphismen ist durch Komposition von Repräsentanten definiert, dh. $[f] \circ [g] := [f \circ g]$. Mit dieser Komposition bildet hTop_0 eine Kategorie, die *Kategorie der punktierten Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen.*

Die Isomorphismen in hTop_0 sind genau die Homotopieäquivalenzen punktierter Räume.

III.1.12. Beispiel. Wir können eine Gruppe G auch als Kategorie auffassen. Diese besitzt nur ein einziges Objekt $*$ und die Menge der Morphismen ist durch $\mathcal{C}(*,*) := G$ festgelegt. Definieren wir die Verknüpfung von Morphismen durch die Gruppenmultiplikation in G so bildet dies eine Kategorie. Jeder Morphismus ist ein Isomorphismus, denn jedes Element in G besitzt ein Inverses.

III.1.13. Beispiel (Duale Kategorie). Zu jeder Kategorie $\mathcal{C}$ kann eine *dual Kategorie* $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ wie folgt definiert werden. Die Klasse der Objekte von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ stimmt mit der Klasse der Objekte von $\mathcal{C}$ überein. Sind X und Y Objekte von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ dann ist die Menge der Morphismen durch $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(X,Y) := \mathcal{C}(Y,X)$ definiert. Die Verknüpfung von $f \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(X,Y)$ mit $g \in \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(Y,Z)$ ist durch $g \circ_{\mathcal{C}^{\mathrm{op}}} f := f \circ_{\mathcal{C}} g$ definiert, wobei $\circ_{\mathcal{C}}$ die Verknüpfung in $\mathcal{C}$ bezeichnet. Offensichtlich bildet $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ wieder eine Kategorie. Sie wird die zu $\mathcal{C}$ *duale Kategorie* genannt.

Unter einem *(kovarianten) Funktor* F von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine Kategorie $\mathcal{D}$ verstehen wir eine Zuordnung die jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(X)$ aus $\mathcal{D}$ und jedem Morphismus $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ einen Morphismus $F(f) \in \mathcal{D}(F(X),F(Y))$ zuordnet, sodass

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)} \qquad \text{und} \qquad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

für beliebige Objekte X, Y, Z von $\mathcal{C}$ und beliebige Morphismen $g \in \mathcal{C}(X,Y)$, $f \in \mathcal{C}(Y,Z)$ gilt. In diesem Fall schreiben wir auch $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

III.1.14. Bemerkung. Ist $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor und $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ ein Isomorphsimus, dann ist auch $F(f) \in \mathcal{D}(F(X),F(Y))$ ein Isomorphismus mit $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$, denn $F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$ und $F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(\mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_{F(Y)}$.

III.1.15. Bemerkung. Sind $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ zwei Funktoren, dann ist offensichtlich auch $GF : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$, $(GF)(X) := G(F(X))$, $(GF)(f) := G(F(f))$ ein Funktor. Auch haben wir stets einen identischen Funktor $\mathrm{id} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, $\mathrm{id}(X) := X$, $\mathrm{id}(f) := f$.

Unter einem *kontravarianten Funktor* F von einer Kategorie $\mathcal{C}$ in eine Kategorie $\mathcal{D}$ verstehen wir eine Zuordnung die jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(X)$ aus $\mathcal{D}$ und jedem Morphismus $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ einen Morphismus $F(f) \in \mathcal{D}(F(Y),F(X))$ zuordnet, sodass

$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)} \qquad \text{und} \qquad F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$$

für beliebige Objekte X, Y, Z von $\mathcal{C}$ und beliebige Morphismen $g \in \mathcal{C}(X,Y)$, $f \in \mathcal{C}(Y,Z)$ gilt. Ein kontravarianter Funktor von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{D}$ ist dasselbe wie ein kovarianter Funktor von $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ nach $\mathcal{D}$, siehe Beispiel III.1.13. Mit Hilfe der duale Kategorie lassen sich daher kontravariante Funktoren als kovariante auffassen.

III.1.16. Beispiel (Vergissfunktoren). Eine Reihe kovarianter Funktoren erhalten wir indem wir gewisse Strukturen vergessen. Ordnen wir etwa einem topologischen Raum die zugrundeliegende Menge zu so erhalten wir einen Funktor $\mathrm{Top} \to \mathrm{Set}$. Vergessen wir den Basispunkt eines punktierten Raums so erhalten wir einen Funktor $\mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Top}$. Ordnen wir einem Vektorraum die zugrundeliegende abelsche Gruppe zu so liefert dies einen Funktor $\mathrm{Vsp} \to \mathrm{aGrp}$. Ebenso erhalten wir einen Funktor $\mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}_0$ indem wir einer Gruppe die zugrundeliegende Menge mit dem neutralen Element als Basispunkt zuordnen. Schließlich sei noch der Funktor $\mathrm{hTop}_0 \to \mathrm{hTop}$ erwähnt, der einer Homotopieklasse relative Basispunkt die entsprechende freie Homotopieklasse zuordnet.

III.1.17. Beispiel. Ordnen wir einer stetigen Abbildung die von ihr repräsentierte Homotopieklasse zu so erhalten wir kovariante Funktoren $\mathrm{Top} \to \mathrm{hTop}$ und $\mathrm{Top}_0 \to \mathrm{hTop}_0$.

III.1.18. Beispiel (Suspension). Wir können die Suspension als kovarianten Funktor $\Sigma : \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$ auffassen. Einem topologischen Raum X wird dabei die Einhängung $\Sigma X := (X \times [-1, 1])/\sim$ zugeordnet, siehe Beispiel I.9.6. Ist $f : X \to Y$ stetig dann faktorisiert $f \times \mathrm{id}_{[-1,1]} : X \times [-1, 1] \to Y \times [-1, 1]$ zu einer stetigen Abbildung $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$. Eine einfache Rechnung zeigt $\Sigma(f \circ g) = (\Sigma f) \circ (\Sigma g)$ und $\Sigma(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\Sigma X}$, also ist Σ tatsächlich ein Funktor. Sind $f, g : X \to Y$ homotop, dann gilt auch $\Sigma f \simeq \Sigma g$, die Suspension liefert daher auch einen Funktor $\mathrm{hTop} \to \mathrm{hTop}$. Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, so können wir ΣX mit dem Basispunkt $[(x_0, 0)]$ ausstatten und erhalten Suspensionsfunktoren $\mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Top}_0$ sowie $\mathrm{hTop}_0 \to \mathrm{hTop}_0$.

III.1.19. Beispiel (Fundamentalgruppe). Die Fundamentalgruppe definiert einen kovarianten Funktor $\pi_1 : \mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Grp}$. Einem punktierten topologischen Raum (X, x_0) wir dabei die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$, und einer Abbildung punktierter Räume $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ der Gruppenhomomorphismus $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ zugeordnet, siehe Proposition I.6.1. Die Relationen $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ und $(\mathrm{id}_{(X,x_0)})_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x_0)}$ besagen gerade, dass dies ein kovarianter Funktor ist. Auf Grund der Homotopieinvarianz, siehe Proposition I.8.18, können wir die Fundamentalgruppe auch als kovarianten Funktor $\pi_1 : \mathrm{hTop}_0 \to \mathrm{Grp}$ auffassen. Die Isomorphismen in der Kategorie hTop_0 sind genau die Homotopieäquivalenzen punktierter Räume und diese müssen durch den Funktor π_1 auf Isomorphismen in der Kategorie Grp, dh. Gruppenisomorphismen, abgebildet werden, siehe Bemerkung III.1.14. Wir erhalten so genau die Aussage von Proposition I.8.20.

III.1.20. Beispiel. Ordnen wir einem topologischer Raum X, die Algebra der stetigen Funktionen $C(X, \mathbb{C})$ und einer stetigen Abbildung $\varphi : X \to Y$ den Algebrahomomorphismus $\varphi^* : C(Y, \mathbb{C}) \to C(X, \mathbb{C})$, $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$, zu so erhalten wir einen kontravarianten Funktor $\mathrm{Top} \to \mathrm{Alg}$, denn offensichtlich gilt $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$. Dabei bezeichnet Alg die Kategorie der $\mathbb{C}$-Algebren und Algebrahomomorphismen.

III.1.21. Beispiel. Ordnen wir einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V seinen Dualraum $V^* = L(V, \mathbb{K})$ und einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ die lineare Abbildung $\varphi^* : W^* \to V^*$ zu, $\varphi^*(\lambda) := \lambda \circ \varphi$, so erhalten wir einen kontravarianten Funktor $\mathbb{K}$-Vsp $\to$ $\mathbb{K}$-Vsp, denn $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

III.1.22. Beispiel. Für eine Gruppe G bezeichne $C(G)$ die Menge der Konjugationsklassen in G. Da jeder Homomorphismus $\varphi : G \to H$ Konjugationsklassen von G in Konjugationsklassen von H abbildet, induziert er eine Abbildung $C(\varphi) : C(G) \to C(H)$. Offensichtlich gilt $C(\psi \circ \varphi) = C(\psi) \circ C(\varphi)$, also liefert dies einen kovarianten Funktor $C : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$. In jeder Gruppe gibt es eine ausgezeichnete Konjugationsklasse die nur aus dem neutralen Element besteht. Wir können diese Konjugationsklasse als Basispunkt in $C(G)$ verwenden. Offensichtlich bildet $C(\varphi)$ das ausgezeichnete Element in $C(G)$ auf das ausgezeichnete Element in $C(H)$ ab. Also erhalten wir auch einen Funktor $C : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}_0$, vgl. Beispiel III.1.4.

III.1.23. Beispiel. Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X ein Objekt von $\mathcal{C}$. Wir defnieren einen Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ indem wir einem Objekt Y von $\mathcal{C}$ die Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ und einem Morphismus $f \in \mathcal{C}(Y_1, Y_2)$ die Abbildung $f_* : \mathcal{C}(X, Y_1) \to \mathcal{C}(X, Y_2)$, $f_*(\varphi) := f \circ \varphi$, zuordnen. Wegen $(f \circ g)_*(\varphi) = (f \circ g) \circ \varphi = f \circ (g \circ \varphi) = f_*(g_*(\varphi)) = (f_* \circ g_*)(\varphi)$ gilt $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, also ist dies ein kovarianter Funktor. Wenden wir dies etwa auf $\mathcal{C} = \mathrm{hTop}$ und $X = S^1$ an, so erhalten wir einen Funktor $\mathrm{hTop} \to \mathrm{Set}$ der einem topologischen Raum Y die Menge der freien Homotopieklassen $[S^1, Y]$ und einem stetigen $f : Y_1 \to Y_2$ die Abbildung $f_* : [S^1, Y_1] \to [S^1, Y_2]$ zuordnet. Wenden wir die Konstruktion auf $\mathcal{C} = \mathrm{hTop}_0$ und $X = (S^1, *)$ an so erhalten wir einen Funktor $\mathrm{hTop}_0 \to \mathrm{Set}$ der einem punktierten Raum (Y, y_0) die der Fundamentalgruppe zugrundeliegende Menge $[(S^1, *), (Y, y_0)]$ zuordnet, vgl. Proposition I.8.27.

III.1.24. Beispiel. Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und Y ein Objekt von $\mathcal{C}$. Wir definieren einen kontravarianten Funktor $\mathcal{C} \to \mathrm{Set}$ indem wir einem Objekt X von $\mathcal{C}$ die Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ und einem Morphismus $f \in \mathcal{C}(X_1, X_2)$ die Abbildung $f^* : \mathcal{C}(X_2, Y) \to \mathcal{C}(X_1, Y)$ zuordnen, $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$. Wegen $(f \circ g)^*(\varphi) = \varphi \circ (f \circ g) = (\varphi \circ f) \circ g = g^*(f^*(\varphi)) = (g^* \circ f^*)(\varphi)$ gilt $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, also ist dies ein kontravarianter Funktor.

Es seien $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine *natürliche Transformation* φ von F nach G besteht aus einem Morphismus $\varphi_X \in \mathcal{D}(F(X), G(X))$ für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$, sodass für jeden Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ nebenstehendes Diagramm kommutiert, dh. es gilt $G(f) \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ F(f)$.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Ist $\varphi_X \in \mathcal{D}(F(X), G(X))$ für jedes Objekt X von $\mathcal{C}$ ein Isomorphismus, dann wird φ ein *natürlicher Isomorphismus* zwischen F und G genannt. In diesem Fall definiert $\psi_X := (\varphi_X)^{-1}$ eine natürliche Transformation von G nach F.

III.1.25. Beispiel. Betrachte den Funktor $G : \mathbb{K}\text{-Vsp} \to \mathbb{K}\text{-Vsp}$ der einem Vektorraum V seinen Bidual $G(V) := (V^*)^*$ und einer linearen Abbildung $\varphi : V \to W$ ihre Biduale $G(\lambda) := (\lambda^*)^*$ zuordnet. Dies stimmt mit dem Quadrat des kontravarianten Funktors in Beispiel III.1.21 überein. Weiters bezeichne $F := \mathrm{id}$ den identischen Funktor $\mathbb{K}\text{-Vsp} \to \mathbb{K}\text{-Vsp}$. Zu einem Vektorraum V betrachte nun die lineare Abbildung $\varphi_V : V \to (V^*)^*$, $\varphi_V(v)(\lambda) := \lambda(v)$, $v \in V$, $\lambda \in V^*$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass φ eine natürliche Transformation von F nach G liefert. In der Kategorie der endlich dimensionalen Vektorräume ist φ ein natürlicher Isomorphismus zwischen F und G.

III.1.26. Beispiel. Betrachte den Fundamentalgruppenfunktor $\pi_1 : \mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Grp}$, siehe Beispiel III.1.19 sowie den Funktor $F : \mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Grp}$, der einem punktierten Raum (X, x_0) die in Proposition I.8.27 besprochene Gruppe $F(X, x_0) := [(S^1, 1), (X, x_0)]$, und einer Abbildung punktierter Räume $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ den Homomorphismus $F(f) := f_*$ zuordnet. Die in Proposition I.8.27 beschriebene Abbildung $\Psi_{(X,x_0)} : \pi_1(X, x_0) \to [(S^1, 1), (X, x_0)]$ definiert einen natürlichen Isomorphismus zwischen π_1 und F.

III.1.27. Beispiel. Wir betrachten den Funktor $G : \mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Set}$, $G(X, x_0) := [S^1, X]$, $G(f) := f_*$. Weiters sei $\pi_1 : \mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Grp}$ der Fundamentalgruppen Funktor und $C : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$ der Funktor aus Beispiel III.1.22. Ihre Komposition liefert einen Funktor $F := C \circ \pi_1 : \mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Set}$. Die in Satz I.8.28 besprochene Abbildung definiert eine natürliche Transformation von F anch G. Auf der Kategorie der wegzusammenhängenden punktierten Räume ist dies ein natürlicher Isomorphismus zwischen F und G, siehe Satz I.8.28.

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X_α, $\alpha \in A$, eine Menge von Objekten in $\mathcal{C}$. Unter einem *Produkt* der X_α verstehen wir ein Objekt X von $\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $p_\alpha : X \to X_\alpha$ die folgende universelle Eigenschaft besitzen. Sind $f_\alpha : Y \to X_\alpha$, $\alpha \in A$, Morphismen von $\mathcal{C}$, dann existiert ein eindeutiger Morphismus $f : Y \to X$ mit $p_\alpha \circ f = f_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Im Existenzfall ist das Objekt X und die sogenannten Projektionen p_α bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt, dh. ist $\tilde{X}$ ein Objekt von $\mathcal{C}$ und sind $\tilde{p}_\alpha : \tilde{X} \to X_\alpha$ Morphismen die ebenfalls obige universelle Eigencshaft besitzen, dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $f : X \to \tilde{X}$, sodass $\tilde{p}_\alpha \circ f = p_\alpha$, für alle $\alpha \in A$.

III.1.28. Beispiel (Produkte in Set). Sind X_α Mengen, dh. Objekte von Set, so bildet $\prod_\beta X_\beta$ zusammen mit den kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_\beta X_\beta \to X_\alpha$ ein Produkt in der Kategorie Set.

III.1.29. Beispiel (Produkte in Top). Sind X_α topologische Räume, dh. Objekte von Top, so bildet $\prod_\beta X_\beta$, versehen mit der Produkttopologie, zusammen mit den kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_\beta X_\beta \to X_\alpha$ ein Produkt in der Kategorie Top.

III.1.30. Beispiel (Produkte in Top_0). Sind (X_α, x_α) punktierte Räume, dh. Objekte von Top_0, so bildet $\prod_\beta (X_\beta, x_\beta)$, versehen mit der Produkttopologie, zusammen mit den kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_\beta (X_\beta, x_\beta) \to (X_\alpha, x_\alpha)$ ein Produkt in der Kategorie Top_0.

III.1.31. Beispiel (Produkte in $\mathbb{K}$-Vsp). Sind V_α $\mathbb{K}$-Vektorräume, dh. Objekte von $\mathbb{K}$-Vsp, so bildet $\prod_\beta V_\beta$ zusammen mit den kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_\beta V_\beta \to V_\alpha$ ein Produkt in der Kategorie $\mathbb{K}$-Vsp.

III.1.32. Beispiel (Produkte in Grp). Sind G_α Gruppen, dh. Objekte von Grp, so bildet $\prod_\beta G_\beta$, versehen mit der üblichen komponentenweisen Multiplikation, zusammen mit den kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_\beta G_\beta \to G_\alpha$ ein Produkt in der Kategorie Grp.

III.1.33. Beispiel. Der Fundamentalgruppenfunktor $\pi_1 : \mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Grp}$ erhält Produkte, dh. er bildet Produkte in Top_0 auf Produkte in Grp ab. Für endliche Produkte folgt dies aus Proposition I.7.1. Der Beweis bleibt für Produkte beliebig vieler punktierter Räume gültig.

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X_α, $\alpha \in A$, eine Menge von Objekten in $\mathcal{C}$. Unter einem *Koprodukt* der X_α verstehen wir ein Objekt X von $\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $\iota_\alpha : X_\alpha \to X$ die folgende universelle Eigenschaft haben: Sind $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, $\alpha \in A$, Morphismen von $\mathcal{C}$, dann existiert ein eindeutiger Morphismus $f : X \to Y$ mit $f \circ \iota_\alpha = f_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Im Existenzfall ist das Objekt X und die Morphismen ι_α bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt, dh. ist $\tilde{X}$ ein Objekt von $\mathcal{C}$ und sind $\iota_\alpha : X_\alpha \to \tilde{X}$ Morphismen die ebenfalls obige universelle Eigenschaft besitzen, dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $f : X \to \tilde{X}$, sodass $f \circ \tilde{\iota}_\alpha = \iota_\alpha$, für alle $\alpha \in A$.

III.1.34. Beispiel (Koprodukte in Set). Sind X_α Mengen, dh. Objekte von Set, dann bildet die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_\beta X_\beta$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_\alpha : X_\alpha \to \bigsqcup_\beta X_\beta$ ein Koprodukt in der Kategorie Set.

III.1.35. Beispiel (Koprodukte in Top). Sind X_α topologische Räume, dh. Objekte von Top, so bildet die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_\beta X_\beta$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_\alpha : X_\alpha \to \bigsqcup_\beta X_\beta$ ein Koprodukt in der Kategorie Top.

III.1.36. Beispiel (Koprodukte in Top_0). Sind (X_α, x_α) punktierte Räume, dh. Objekte von Top_0, so bildet die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_\beta (X_\beta, x_\beta)$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_\alpha : (X_\alpha, x_\alpha) \to \bigsqcup_\beta (X_\beta, x_\beta)$ ein Koprodukt in der Kategorie Top_0.

III.1.37. Beispiel (Koprodukte in $\mathbb{K}$-Vsp). Sind V_α $\mathbb{K}$-Vektorräume, dh. Objekte von $\mathbb{K}$-Vsp, dann bildet $\bigoplus_\beta V_\beta$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_\alpha : V_\alpha \to \bigoplus_\beta V_\beta$ ein Koprodukt in der Kategorie $\mathbb{K}$-Vsp.

III.1.38. BEISPIEL (Koprodukte in aGrp). Sind A_α abelsche Gruppen, dh. Objekte von aGrp, dann bildet $\bigoplus_\beta A_\beta$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_\alpha : A_\alpha \to \bigoplus_\beta A_\beta$ ein Koprodukt in der Kategorie aGrp.

III.1.39. BEISPIEL (Koprodukte in Grp). Sind G_α Gruppen, dh. Objekte von Grp, so bildet $*_\beta G_\beta$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_\alpha : G_\alpha \to *_\beta G_\beta$ ein Koprodukt in der Kategorie Grp.

III.2. Paare von Räumen und Homotopie. Unter einem *Paar von Räumen* verstehen wir (X, A) wobei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum ist. Eine *Abbildung* von Paaren von Räumen $f : (X, A) \to (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Offensichtlich ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, A) \to (X, A)$ eine Abbildung von Paaren. Sind $f : (X, A) \to (Y, B)$ und $g : (Y, B) \to (Z, C)$ zwei Abbildungen von Paaren, dann ist auch ihre Komposition $g \circ f : (X, A) \to (Z, C)$ eine Abbildung von Paaren. Paare von Räumen und Abbildungen von Paaren bilden daher eine Kategorie, die Verknüpfung von Morphismen ist die übliche Komposition von Abbildungen. Wir werden diese Kategorie mit Top^2 bezeichnen.

III.2.1. BEMERKUNG. Wir können einem topologischen Raum X das Paar $(X, \emptyset)$ zuordnen. Jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ liefert dann eine Abbildung von Paaren $f : (X, \emptyset) \to (Y, \emptyset)$. Diese Zuordnung kann als Funktor $\mathrm{Top} \to \mathrm{Top}^2$ verstanden werden.

III.2.2. BEMERKUNG. Jedem punktierten Raum (X, x_0) können wir das Paar $(X, \{x_0\})$ zuordnen. Jede Abbildung punktierter Räume $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ liefert eine Abbildung von Paaren $f : (X, \{x_0\}) \to (Y, \{y_0\})$. Diese Zuordnung kann als Funktor $\mathrm{Top}_0 \to \mathrm{Top}^2$ verstanden werden.

Zwei Abbildungen von Paaren $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ werden homotop genannt, wenn eine Abbildung $H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$ existiert, mit anderen Worten $H(x, 0) = f(x)$, $H(x, 1) = g(x)$ und $H(a, t) \in B$ für alle $x \in X$, $a \in A$ und $t \in I$. Jede solche Abbildung H wird eine *Homotopie von Paaren* von f nach g genannt. In diesem Fall schreiben wir $f \simeq g$.

III.2.3. LEMMA. *Homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von Paaren $(X, A) \to (Y, B)$.*

BEWEIS. Ist $f : (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren, dann liefert die konstante Homotopie $H : (X \times I, A \times I) \to (X, A)$, $H(x, t) := f(x)$, eine Homotopie von f nach f, also ist die Relation reflexsiv. Sind $f : (X, A) \to (Y, B)$ und $g : (X, A) \to (Y, B)$ homotop und ist $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ eine Homotopie mit $F_0 = f$ nach $F_1 = g$, dann liefert $G : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$, $G(x, t) := F(x, 1 - t)$, eine Homotopie von $G_0 = F_1 = g$ nach $G_1 = F_0 = f$, also ist die Relation symmetrisch. Sind schließlich $f, g, h : (X, A) \to (Y, B)$, $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ und $G : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ mit $F_0 = f$, $F_1 = g$,

$G_0 = g$ und $G_1 = h$, so liefert

$$H : (X \times I, A \times I) \to (Y, B), \qquad H(x,t) := \begin{cases} F(x, 2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/2, \\ G(x, 2t-1) & \text{falls } 1/2 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie mit $H_0 = F_0 = f$ und $H_1 = G_1 = h$. Dies zeigt, dass die Relation auch transitiv ist. $\square$

Die Äquivalenzklassen der Relation in Lemma III.2.3 werden *Homotopieklassen von Abbildungen von Paaren genannt.* Wir schreiben $[(X, A), (Y, B)]$ für die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $(X, A) \to (Y, B)$, und $[f] \in [(X, A), (Y, B)]$ für die von $f : (X, A) \to (Y, B)$ repräsentierte Klasse.

III.2.4. Lemma. *Es seien $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$, $g_0, g_1 : (Y, B) \to (Z, C)$ und $f_0 \simeq f_1$ sowie $g_0 \simeq g_1$. Dann gilt auch $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existieren Homotopien $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ und $G : (Y \times I, B \times I) \to (Z, C)$ mit $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$, $G_0 = g_0$ und $G_1 = g_1$. Für die Homotopie $H : (X \times I, A \times I) \to (Z, C)$, $H(x, t) := G(F(x, t), t)$, gilt dann $H_0 = G_0 \circ F_0 = g_0 \circ f_0$ und $H_1 = G_1 \circ F_1 = g_1 \circ f_1$. $\square$

Nach Lemma III.2.4 erhalten wir eine wohldefinierte Verknüpfung von Homotopieklassen durch Komposition von Repräsentanten,

$$[(X, A), (Y, B)] \times [(Y, B), (Z, C)] \to [(X, A), (Z, C)], \quad ([f], [g]) \mapsto [g \circ f]. \quad \text{(III.1)}$$

Mit hTop^2 bezeichnen wir die Kategorie der Paare von Räumen und Homotopieklassen von Abbildungen von Paaren. Die Objekte in hTop^2 sind alle Paare von Räumen, die Menge der Morphismen von (X, A) nach (Y, B) ist $[(X, A), (Y, B)]$. Die Verknüpfung von Morphismen ist durch (III.1) erklärt. Ist $g : (Y, B) \to (Z, C)$ eine Abbildung von Paaren, so schreiben wir

$$g_* : [(X, A), (Y, B)] \to [(X, A), (Z, C)], \qquad g_*([f]) := [g \circ f].$$

Ebenso führen wir die Notation

$$f^* : [(Y, B), (Z, C)] \to [(X, A), (Z, C)], \qquad f^*([g]) := [g \circ f]$$

für eine Abbildung von Paaren $f : (X, A) \to (Y, B)$ ein.

III.2.5. Bemerkung. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ sind genau dann homotop, wenn die Abbildungen von Paaren $f, g : (X, \emptyset) \to (Y, \emptyset)$ homotop sind, dh. $[X, Y] = [(X, \emptyset), (Y, \emptyset)]$.

III.2.6. Bemerkung. Zwei Abbildungen punktierter Räume $f, g : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ sind genau dann homotop relativ Basispunkt, wenn sie als Abbildungen von Paaren $f, g : (X, \{x_0\}) \to (Y, \{y_0\})$ homotop sind, dh. $[(X, x_0), (Y, y_0)] = [(X, \{x_0\}), (Y, \{y_0\})]$.

III.3. Höhere Homotopiegruppen. Es bezeichne $I^n := I \times \cdots \times I$ den n-dimensionalen Würfel und ∂I^n seinen Rand, dh.

$$\partial I^n = \big\{(s_1, \dots, s_n) \in I^n \bigm| \exists i : s_i \in \{0,1\}\big\}. \tag{III.2}$$

Für $n = 0$ setzen wir $I^0 := \{*\}$ und $\partial I^0 = \emptyset$. Beachte auch $(I^1, \partial I^1) = (I, \partial I) = (I, \{0,1\})$. Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann definieren wir

$$\pi_n(X, x_0) := \big[(I^n, \partial I^n), (X, x_0)\big].$$

Die Elemente in $\pi_n(X, x_0)$ werden durch Abbildungen $f : I^n \to X$ mit $f(\partial I^n) \subseteq \{x_0\}$ repräsentiert. Zwei solche Abbildungen $f, g : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ repräsenetieren das selbe Element in $\pi_n(X, x_0)$, falls eine Homotopie $H : I^n \times I \to X$ mit $H_0 = f$, $H_1 = g$ und $H(\partial I^n \times I) \subseteq \{x_0\}$ existiert. Wir schreiben $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ für das von $f(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ repäsentierte Element.

III.3.1. Bemerkung. Ordnen wir $[f] \in \pi_0(X, x_0)$ die Wegzusammenhangskomponente die $f(*)$ enthält zu, erhalten wir eine Bijektion zwischen $\pi_0(X, x_0)$ und der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X.

III.3.2. Bemerkung. Für $n = 1$ besteht $[(I^1, \partial I^1), (X, x_0)]$ gerade aus den Homotopieklassen von Schleifen bei x_0. Dh. $\pi_n(X, x_0)$ verallgemeinert die der Fundamentalgruppe zugrundeliegende Menge.

Ist $n \geq 1$ und sind $f, g : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ so wird ihre *Konkatenation* $fg : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ durch

$$(fg)(s_1, \dots, s_n) := \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 0 \leq s_1 \leq 1/2, \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 1/2 \leq s_1 \leq 1, \end{cases}$$

definiert. Beachte, dass für $s_1 = 1/2$ die beiden Definition übereinstimmen, $f(1, s_2, \dots, s_n) = x_0 = g(0, s_2, \dots, s_n)$, denn f und g bilden ∂I^n nach x_0 ab. Die Stetigkeit der Konkatenation folgt aus Lemma I.1.2. Aus der Beschreibung des Randes in (III.2) sehen wir, dass fg den Rand ∂I^n tatsächlich nach x_0 abbildet. Im Fall $n = 1$ liefert diese Konstruktion gerade die Konkatenation von Wegen aus Abschnitt I.2.

III.3.3. Lemma. *Seien $n \geq 1$ und $f_0, f_1, g_0, g_1 : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ mit $f_0 \simeq f_1$ und $g_0 \simeq g_1$. Dann gilt auch für die Konkatenationen $f_0 g_0 \simeq f_1 g_1$.*

Beweis. Nach Voraussetzung exsistieren Homotopien $F : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0)$ und $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0)$ mit $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$, $G_0 = g_0$ und $G_1 = g_1$. Es ist dann $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0)$,

$$H(s_1, s_2, \dots, s_n, t) := \begin{cases} F(2s_1, s_2, \dots, s_n, t) & \text{falls } 0 \leq s_1 \leq 1/2, \\ G(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 1/2 \leq s_1 \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie von $H_0 = F_0 G_0 = f_0 g_0$ nach $H_1 = F_1 G_1 = f_1 g_1$. $\square$

Nach Lemma III.3.3 hängt die Homotopieklasse $[fg] \in \pi_n(X, x_0)$ nur von den Homotopieklassen $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$ ab, wir erhalten daher eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0), \qquad ([f], [g]) \mapsto [f][g] := [fg]. \tag{III.3}$$

Im Fall $n = 1$ ist dies die Multiplikation der Fundamentalgruppe. Wir werden nun zeigen, dass (III.3) für jedes $n \geq 1$ eine Gruppenstruktur auf $\pi_n(X, x_0)$ liefert.

III.3.4. Lemma. *Es sei $n \geq 1$ und $\varphi : I \to I$ stetig mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$. Für jedes $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ gilt dann $f \circ (\varphi \times \mathrm{id}_{I^{n-1}}) \simeq f$, dh. $[f] = [f \circ (\varphi \times \mathrm{id}_{I^{n-1}})] \in \pi_n(X, x_0)$.*

Beweis. Die Abbildung $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (I^n, \partial I^n)$,

$$H(s_1, \dots, s_n, t) := \big((1-t)s_1 + t\varphi(s_1), s_2, \dots, s_n\big)$$

ist eine Homotopie von $H_0 = \mathrm{id}_{I^n}$ nach $H_1 = \varphi \times \mathrm{id}_{I^{n-1}}$. Daher ist $G := f \circ H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0)$ eine Homotopie von $G_0 = f \circ H_0 = f$ nach $G_1 = f \circ H_1 = f \circ (\varphi \times \mathrm{id}_{I^{n-1}})$. $\square$

III.3.5. Lemma. *Es sei (X, x_0) ein punktierter Raum, $n \geq 1$ und es bezeichne $c_{x_0} : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ die konstante Abbildung, $c_{x_0}(s) := x_0$. Für jedes $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ gilt dann $fc_{x_0} \simeq f \simeq c_{x_0}f$, dh. $[c_{x_0}] \in \pi_n(X, x_0)$ ist neutrales Element für die Multiplikation* (III.3).

Beweis. Wir betrachten $\varphi : I \to I$, $\varphi(s) = 2s$ falls $0 \leq s \leq 1/2$ und $\varphi(s) = 1$ falls $1/2 \leq s \leq 1$. Offensichtlich gilt dann $fc_{x_0} = f \circ (\varphi \times \mathrm{id}_{I^{n-1}})$ und daher $fc_{x_0} \simeq f$ nach Lemma III.3.4. Analog lässt sich $c_{x_0}f \simeq f$ zeigen. $\square$

III.3.6. Lemma. *Es sei (X, x_0) ein punktierter Raum und $n \geq 1$. Für $f, g, h : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ gilt dann $(fg)h \simeq f(gh)$, dh. die Multiplikation* (III.3) *ist assoziativ.*

Beweis. Betrachte

$$\varphi : I \to I, \qquad \varphi(s) := \begin{cases} 2s & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/4, \\ s + 1/4 & \text{falls } 1/4 \leq s \leq 1/2, \\ s/2 + 1/2 & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Eine einfache Rechnung zeigt $(fg)h = (f(gh)) \circ (\varphi \times \mathrm{id}_{I^{n-1}})$, also $(fg)h \simeq f(gh)$ nach Lemma III.3.4. $\square$

III.3.7. Lemma. *Es sei (X, x_0) ein punktierter Raum und $n \geq 1$. Für eine Abbildung $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ sei $\bar{f} : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ durch $\bar{f}(s_1, \dots, s_n) := f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$ definiert. Dann gilt $\bar{f}f \simeq c_{x_0} \simeq f\bar{f}$, dh. $[\bar{f}] \in \pi_n(X, x_0)$ ist inverses Element von $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ bezüglich der Multiplikation* (III.3).

Beweis. Die Abbildung $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0)$,

$$H(s_1, \dots, s_n, t) := \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 0 \leq s_1 \leq t/2, \\ f(t, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } t/2 \leq s_1 \leq 1 - t/2, \\ f(2 - 2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 1 - t/2 \leq s_1 \leq 1, \end{cases}$$

ist eine Homotoie von $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = f\bar{f}$, also $c_{x_0} \simeq f\bar{f}$. Analog lässt sich $c_{x_0} \simeq \bar{f}f$ zeigen. □

Zusammenfassend erhalten wir

III.3.8. Proposition. *Es sei (X, x_0) ein punktierter Raum und $n \geq 1$. Dann definiert* (III.3) *eine Gruppenstruktur auf $\pi_n(X, x_0)$. Das neutrale Element wird durch die konstante Abbildung c_{x_0} repräsentiert, das zu $[f]$ inverse Element wird durch $\bar{f}$ repräsentiert.*

III.3.9. Definition (Höhere Homotopiegruppen). Für $n \geq 1$ heißt $\pi_n(X, x_0)$ die *n-te Homotopiegruppe* des punktierten Raums (X, x_0). Dies verallgemeinert die Fundamentalgruppe $(n = 1)$.

III.3.10. Proposition. *Es sei (X, x_0) ein punktierter Raum und $n \geq 2$. Dann ist $\pi_n(X, x_0)$ abelsch.*

Beweis. Wir betrachten zunächst die Abbildung $\varphi : (I^n, \partial I^n) \to (I^n, \partial I^n)$, $\varphi(s_1, s_2, \dots, s_n) := (1 - s_1, 1 - s_2, s_3, \dots, s_n)$. Eine einfache Rechnung zeigt sofort $(f \circ \varphi)(g \circ \varphi) = (gf) \circ \varphi$, für alle $f, g : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. Sei nun $\rho : (I^2, \partial I^2) \to (D^2, \partial D^2)$ ein Homöomorphismus mit $\rho(1 - s_1, 1 - s_2) = -\rho(s_1, s_2)$. Etwa können wir

$$\rho(s_1, s_2) := \frac{2 \max\{|s_1 - 1/2|, |s_2 - 1/2|\}}{\sqrt{(s_1 - 1/2)^2 + (s_2 - 1/2)^2}} \big((s_1 - 1/2) + \mathbf{i}(s_2 - 1/2)\big)$$

verwenden. Es ist dann $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (I^n, \partial I^n)$,

$$H(s_1, \dots, s_n, t) := \big(\rho^{-1}(e^{\mathbf{i}\pi t}\rho(s_1, s_2)), s_3, \dots, s_n\big)$$

eine Homotopie von $H_0 = \mathrm{id}_{I^n}$ nach $H_1 = \varphi$. Aus Lemma III.2.4 folgt $f \simeq f \circ \varphi$, dh. $[f] = [f \circ \varphi] \in \pi_n(X, x_0)$. Es gilt daher $[f][g] = [f \circ \varphi][g \circ \varphi] = [(f \circ \varphi)(g \circ \varphi)] = [(gf) \circ \varphi] = [gf] = [g][f]$, also ist $\pi_n(X, x_0)$ abelsch. □

III.3.11. Bemerkung. Auf Grund von Proposition III.3.10 notieren wir die Gruppenstruktur in $\pi_n(X, x_0)$, $n \geq 2$, von nun an additiv, dh. $[f] + [g] = [fg]$, $0 = [c_{x_0}]$ und $-[f] = [\bar{f}]$.

III.3.12. Bemerkung. I.A. ist es nicht möglich auf $\pi_0(X, x_0)$ in natürlicher Weise eine Gruppenstruktur zu definieren. Jedoch repräsentiert die konstante Abbildung $c_{x_0} : (I^0, \partial I^0) \to (X, x_0)$ ein ausgezeichnetes Element in $\pi_0(X, x_0)$. Dieses enspricht der den Basispunkt x_0 enthaltenden Wegzusammenhangskomponente von X vgl. Bemerkung III.3.1. Wir können $\pi_0(X, x_0)$ daher als punktierte Menge auffassen, siehe Beispiel III.1.4. Wir schreiben $\pi_0(X, x_0) = 0$ falls $\pi_0(X, x_0)$ nur dieses eine Element besitzt. Dies ist genau dann der Fall wenn X wegzusammenhängend ist.

III.3.13. Lemma. *Ist* $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *eine Abbildung punktierter Räume so definiert* $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$, $\varphi_*([f]) := [\varphi \circ f]$, *einen Gruppenhomomorphismus falls* $n \geq 1$, *bzw. eine Abbildung punktierter Mengen im Fall* $n = 0$. *Sind* $\varphi_0, \varphi_1 : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *homotop relativ Basispunkt, dann gilt* $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_*$. *Ist* $\psi : (Y, y_0) \to (Z, z_0)$ *eine weitere Abbildung punktierter Räume, dann gilt* $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$, *sowie* $(\mathrm{id}_{(X,x_0)})_* = \mathrm{id}_{\pi_n(X,x_0)}$.

Beweis. Dies ist trivial, siehe Lemma III.2.4. □

III.3.14. Bemerkung. Die Homotopiegruppen liefern daher Funktoren $\pi_0 : \mathrm{hTop}_0 \to \mathrm{Set}_0$, $\pi_1 : \mathrm{hTop}_0 \to \mathrm{Grp}$ und $\pi_n : \mathrm{hTop}_0 \to \mathrm{aGrp}$ falls $n \geq 2$.

III.3.15. Proposition. *Ist* $\varphi : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *eine Homotopieäquivalenz punktierter Räume, dann ist* $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ *ein Isomorphismus.*[26]

Beweis. Als Homotopieäquivalenz ist φ ein Isomorphismus in der Kategorie hTop_0, vgl. Beispiel III.1.11. Da jeder Funktor Isomorphismen auf Isomorphismen abbildet, siehe Bemerkung III.1.14, muss φ_* ein Isomorphismus sein. □

III.3.16. Beispiel. Ist X eine sternförmige Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ und $x_0 \in X$ ein Zentrum, dann gilt $\pi_n(X, x_0) = 0$, für alle $n \geq 0$. Dies folgt aus Proposition III.3.15 denn (X, x_0) ist homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum, dh. $(X, x_0) \simeq (\{x_0\}, x_0)$.

III.3.17. Bemerkung. Es sei $\omega : (I^n, \partial I^n) \to (D^n, S^{n-1})$ ein Homöomorphismus von Paaren. Wir erhalten eine Bijektion

$$\big[(D^n, S^{n-1}), (X, x_0)\big] \cong \pi_n(X, x_0), \qquad [f] \mapsto [f \circ \omega].$$

Elemente der Homotopiegruppe $\pi_n(X, x_0)$ können daher auch als Homotopieklassen von Abbildungen $(D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$ aufgefasst werden.

III.3.18. Bemerkung. Es sei $\omega : (I^n, \partial I^n) \to (S^n, s_0)$ eine stetige Abbildung die einen Homöomorphismus punktierter Räume $(I^n/\partial I^n, \partial I^n/\partial I^n) \to (S^n, s_0)$ induziert. Dann erhalten wir eine Bijektion

$$\big[(S^n, s_0), (X, x_0)\big] \cong \pi_n(X, x_0), \qquad [f] \mapsto [f \circ \omega].$$

Wir können die Elemente der Homotopiegruppe $\pi_n(X, x_0)$ daher auch als Homotopieklassen von Abbildungen $(S^n, s_0) \to (X, x_0)$ interpretieren.

III.3.19. Satz. *Es sei* $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ *eine punktierte Überlagerung und* $n \geq 2$. *Dann ist der induzierte Homomorphismus* $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0)$ *ein Isomorphismus.*

[26] Im Fall $n = 0$ ist ein Isomorphismus punktierter Mengen gemeint, dh. eine Basispunkt erhaltende Bijektion, vgl. Beispiel III.1.4. Für $n \geq 1$ ist natürlich ein Isomorphismus von Gruppen gemeint.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $p_* : \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ surjektiv ist. Sei dazu $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. Aus der Homotopieliftungseigenschaft von Überlagerungen, siehe Satz II.3.3, erhalten wir eine stetige Abbildung $\tilde{f} : I^n \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) = \tilde{x}_0$, für alle $(s_1, \dots, s_{n-1}) \in I^{n-1}$. Wegen $p \circ \tilde{f} = f$ ist die Einschränkung $\tilde{f}|_{\partial I^n} : \partial I^n \to \tilde{X}$ ein Lift der konstanten Abbildung $c_{x_0} : \partial I^n \to X$. Da $n \geq 2$ ist ∂I^n zusammenhängend. Aus Proposition II.3.1 folgt daher $\tilde{f}(\partial I^n) = \{\tilde{x}_0\}$. Also definiert $\tilde{f}$ ein Element $[\tilde{f}] \in \pi_n(\tilde{X}_0, \tilde{x}_0)$ für das offensichtlich $p_*([\tilde{f}]) = [f]$ gilt. Nun zur Injektivität von p_*. Sei also $\tilde{f} : (I^n, \partial I^n) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $p_*([\tilde{f}]) = 0$. Dann existiert eine Homotopie $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0)$ mit $H_0 = p \circ \tilde{f}$ und $H_1 = c_{x_0}$. Aus Satz II.3.3 erhalten wir eine Homotopie $\tilde{H} : I^n \times I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$. Die Einschränkung $\tilde{H}|_{\partial I^n \times I} : \partial I^n \times I \to \tilde{X}$ ist ein Lift der konstanten Abbildung $c_{x_0} : \partial I^n \times I \to X$. Da $n \geq 2$ ist $\partial I^n \times I$ zusammenhängend, aus Proposition II.3.1 folgt daher $\tilde{H}(\partial I^n \times I) = \{\tilde{x}_0\}$, denn $\tilde{H}_0(\partial I^n) = \tilde{f}(\partial I^n) = \{\tilde{x}_0\}$. Also definiert $\tilde{H}$ eine Homotopie $\tilde{H} : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Wegen $p \circ \tilde{H} = H$ ist $\tilde{H}_1$ ein Lift der konstanten Abbildung $H_1 = c_{x_0} : I^n \to X$. Da $\tilde{H}_1|_{\partial I^n} = c_{\tilde{x}_0} : \partial I^n \to \tilde{X}$ muss $\tilde{H}_1 = c_{\tilde{x}_0}$ gelten, siehe Proposition II.3.1. Also ist $\tilde{H}$ eine Homotopie von $\tilde{f}$ nach $c_{\tilde{x}_0}$, und es gilt daher $[\tilde{f}] = 0 \in \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Damit ist auch die Injektivität von p_* gezeigt. □

III.3.20. Beispiel. Betrachte die Überlagerung $p : (\mathbb{R}, 0) \to (S^1, 1)$, $p(t) := e^{2\pi \mathbf{i} t}$. Nach Beispiel III.3.16 gilt $\pi_n(\mathbb{R}, 0) = 0$, für alle $n \geq 0$. Aus Satz III.3.19 erhalten wir $\pi_n(S^1, 1) = 0$, für $n \geq 2$.

III.3.21. Beispiel. Betrachte die Überlagerung $p : (S^k, s_0) \to (\mathbb{R}\mathrm{P}^k, x_0)$. Nach Satz III.3.19 induziert p Isomorphismen $\pi_n(S^k, s_0) \cong \pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^k, x_0)$, für $n \geq 2$.

III.3.22. Beispiel. Es bezeichne L eine Linsenraum und $p : (S^{2k-1}, s_0) \to (L, x_0)$ die entsprechende Überlagerung, siehe Beispiel II.2.8. Nach Satz III.3.19 induziert p Isomorphismen $\pi_n(S^{2k-1}, s_0) \cong \pi_n(L, x_0)$, für $n \geq 2$.

III.3.23. Beispiel. Betrachte die universelle Überlagerung der Kleinschen Flasche $p : (\mathbb{R}^2, \tilde{x}_0) \to (K, x_0)$ aus Beispiel II.6.3. Nach Beispiel III.3.16 gilt $\pi_n(\mathbb{R}^2, x_0) = 0$, $n \geq 0$. Aus Satz III.3.19 folgt daher $\pi_n(K, x_0) = 0$, für $n \geq 2$.

III.3.24. Beispiel. Betrachte die universelle Überlagerng der orthogonalen Gruppe $p : (S^3, s_0) \to (\mathrm{SO}_3, x_0)$ aus Beispiel II.6.3. Nach Satz III.3.19 induziert p Isomorphismen $\pi_n(S^3, s_0) \cong \pi_n(\mathrm{SO}_3, x_0)$, für $n \geq 2$.

Wir wenden uns nun den Homotopiegruppen von Produkträumen zu. Seien also (X_α, x_α) punktierte Räume, $\alpha \in A$. Verwenden wir die von den kanonische Projektionen $p_\alpha : \prod_{\beta \in A}(X_\beta, x_\beta) \to (X_\alpha, x_\alpha)$ induzieren Homomorphismen $(p_\alpha)_* : \pi_n\big(\prod_{\beta \in A}(X_\beta, x_\beta)\big) \to \pi_n(X_\alpha, x_\alpha)$ als Komponenten erhalten wir einen eine Abbildung

$$\big((p_\alpha)_*\big)_{\alpha\in A} : \pi_n\Big(\prod_{\beta\in A}(X_\beta,x_\beta)\Big) \to \prod_{\alpha\in A}\pi_n(X_\alpha,x_\alpha). \tag{III.4}$$

III.3.25. Proposition. *Die Abbildung* (III.4) *ist ein Isomorphismus.*[27]

Beweis. Wir zeigen zunächst die Surjektivität der Abbildung (III.4). Sei dazu $([f_\alpha])_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A}\pi_n(X_\alpha,x_\alpha)$, wobei $f_\alpha : (I^n,\partial I^n) \to (X_\alpha,x_\alpha)$. Verwenden wir die f_β als Komponenten erhalten wir $(f_\beta)_{\beta\in A} : (I^n,\partial I^n) \to \prod_{\beta\in A}(X_\beta,x_\beta)$ und damit ein Element $f := \big[(f_\beta)_{\beta\in A}\big] \in \pi_n\big(\prod_{\beta\in A}(X_\beta,x_\beta)\big)$. Offensichtlich gilt $(p_\alpha)_*(f) = [f_\alpha]$, also wird g durch (III.4) auf $([f_\alpha])_{\alpha\in A}$ abgebildet. Nun zur Injektivität. Seien dazu $[f],[g] \in \pi_n\big(\prod_{\beta\in A}(X_\beta,x_\beta)\big)$, wobei $f,g : (I^n,\partial I^n) \to \prod_{\beta\in A}(X_\beta,x_\beta)$. Wir bezeichnen die Komponenten mit $f_\alpha := p_\alpha\circ f : (I^n,\partial I^n) \to (X_\alpha,x_\alpha)$ und $g_\alpha := p_\alpha\circ g : (I^n,\partial I^n) \to (X_\alpha,x_\alpha)$, $\alpha\in A$. Werden $[f]$ und $[g]$ durch (III.4) auf das selbe Element abgebildet, dann gilt $[f_\alpha] = [g_\alpha] \in \pi_n(X_\alpha,x_\alpha)$ für alle $\alpha\in A$. Es existieren daher Homotopien $H^\alpha : (I^n\times I,\partial I^n\times I) \to (X_\alpha,x_\alpha)$ mit $H^\alpha_0 = f_\alpha$ und $H^\alpha_1 = g_\alpha$. Verwenden wir die H^α als Komponenten erhalten wir eine Homotopie $H : (I^n\times I,\partial I^n\times I) \to \prod_{\beta\in A}(X_\beta,x_\beta)$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$. Also ist $[f] = [g] \in \pi_n\big(\prod_{\beta\in A}(X_\beta,x_\beta)\big)$ und (III.4) daher injektiv. □

III.3.26. Bemerkung. Die letzte Proposition besagt, dass der Funktor π_n Produkte erhält. Das Produkt $p_\alpha : \prod_{\beta\in A}(X_\beta,x_\beta) \to (X_\alpha,x_\alpha)$ in Top_0 wird unter π_n auf $(p_\alpha)_* : \pi_n\big(\prod_{\beta\in A}(X_\beta,x_\beta)\big) \to \pi_n(X_\alpha,x_\alpha)$ abgebildet, und dies ist nach Proposition III.3.25 ein Produkt in der Kategorie Set_0 $(n=0)$, Grp $(n=1)$ bzw. aGrp $(n\geq 2)$.

III.3.27. Beispiel. Für den Torus $T^k = S^1\times\cdots\times S^1$ gilt $\pi_n(T^k,x_0) = 0$, falls $n\geq 2$. Dies folgt aus Proposition III.3.25 und Beispiel III.3.20.

III.3.28. Beispiel. Betrachten wir die Überlagerung $p : (S^3\times S^3,(s_0,s_1)) \to (\mathrm{SO}_4,x_0)$ aus Beispiel II.6.3 dann liefert Satz III.3.19 $\pi_n(S^3\times S^3,(s_0,s_1)) \cong \pi_n(\mathrm{SO}_4,x_0)$, falls $n\geq 2$. Mittels Proposition III.3.25 folgt nun $\pi_n(\mathrm{SO}_4,x_0) \cong \pi_n(S^3,s_0)\times\pi_n(S^3,s_1)$, für $n\geq 2$.

III.4. Basispunkte. Wir wollen nun untersuchen inwiefern die höheren Homotopiegruppen vom Basispunkt abhängen. Wir betrachten dazu den Homöomorphismus $\rho : (I^n,\partial I^n) \to \big([\tfrac14,\tfrac34]^n,\partial[\tfrac14,\tfrac34]^n\big)$, $\rho(s) := \frac12(s-M)+M$, wobei $M := \big(\frac12,\dots,\frac12\big)$ den Mittelpunkt von I^n bezeichnet. Weiters sei $p : I^n\setminus\{M\} \to \partial I^n$ die radiale Projektion, dh. der Strahl von M durch $x\in I^n\setminus\{M\}$ schneidet ∂I^n im Punkt $p(x)$. Eine explizite Formel dafür ist $p(s) = \frac{1}{2\|s-M\|_\infty}(s-M)+M$, wobei $\|(s_1,\dots,s_n)\|_\infty := \max\{|s_1|,\dots,|s_n|\}$ die Maximumsnorm bezeichnet. Schließlich sei $q : I^n\setminus\{M\} \to \partial[\frac14,\frac34]^n$ die radiale Projektion, dh. $q(s) := \frac{1}{4\|s-M\|_\infty}(s-M)+M$.

[27] Ein Isomorphismus von Gruppen für $n\geq 1$, bzw. ein Isomorphismus punktierter Mengen im Fall $n=0$.

Ist nun $\gamma : I \to X$ ein Weg von $\gamma(0) = x_0$ nach $\gamma(1) = x_1$ und $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_1)$ dann definieren wir $b_\gamma(f) : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ durch

$$b_\gamma(f)(s) := \begin{cases} f(\rho^{-1}(s)) & \text{falls } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n, \\ \gamma\big(2 - 4\|s - M\|_\infty\big) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n. \end{cases}$$

III.4.1. Lemma. *Es seien $x_0, x_1 \in X$, $\gamma, \gamma_0, \gamma_1 : I \to X$ Wege von x_0 nach x_1 und $f, f_0, f_1, g : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_1)$. Dann gilt:*

(i) *Gilt $f_0 \simeq f_1$ dann auch $b_\gamma(f_0) \simeq b_\gamma(f_1)$.*
(ii) *Gilt $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ (relativ Endpunkten) dann auch $b_{\gamma_0}(f) \simeq b_{\gamma_1}(f)$.*
(iii) *Ist $x_0 = x_1$ und $\gamma = c_{x_0}$ dann gilt $b_{c_{x_1}}(f) \simeq f$.*
(iv) *Ist $\tau : I \to X$ ein Weg von x_1 nach x_2 dann gilt $b_\gamma(b_\tau(f)) \simeq b_{\gamma\tau}(f)$.*
(v) *$b_\gamma(fg) \simeq b_\gamma(f) b_\gamma(g)$.*

Beweis. Ad (i): Sei also $F : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_1)$ eine Homotopie von $F_0 = f_0$ nach $F_1 = f_1$. Dann definiert $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0)$,

$$H(s,t) := \begin{cases} F(\rho^{-1}(s), t) & \text{falls } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n, \\ \gamma\big(2 - 4\|s - M\|_\infty\big) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n \end{cases}$$

eine Homotopie von $H_0 = b_\gamma(f_0)$ nach $H_1 = b_\gamma(f_1)$. Ad (ii): Sei also $H : I \times I \to X$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = \gamma_0$ nach $H_1 = \gamma_1$. Dann definiert $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0)$,

$$G(s,t) := \begin{cases} f(\rho^{-1}(s)) & \text{falls } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n, \\ H\big(2 - 4\|s - M\|_\infty, t\big) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n. \end{cases}$$

eine Homotopie von $G_0 = b_{\gamma_0}(f)$ nach $G_1 = b_{\gamma_1}(f)$. Ad (iii): Betrachte die Homotopie $R : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (I^n, \partial I^n)$,

$$R(s,t) := \begin{cases} M + \frac{2}{2-t}(s - M) & \text{falls } s \in [\frac{t}{4}, 1 - \frac{t}{4}]^n, \\ p(s) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{t}{4}, 1 - \frac{t}{4}]^n, \end{cases}$$

von $R_0 = \mathrm{id}_{I^n}$ nach

$$R_1 : (I^n, \partial I^n) \to (I^n, \partial I^n), \qquad R_1(s) = \begin{cases} \rho^{-1}(s) & \text{falls } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n, \\ p(s) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n. \end{cases}$$

Die Komposition $f \circ R$ liefert dann eine Homotopie von $f \circ R_0 = f$ nach $f \circ R_1 = b_{c_{x_0}}(f)$. Ad (iv): Betrachte die Abbildung $\varphi : I \to I$,

$$\varphi(s) := \begin{cases} 2s & \text{falls } 0 \le s \le 1/4, \\ s + \frac{1}{4} & \text{falls } 1/4 \le s \le 1/2, \\ s/2 + 1/2 & \text{falls } 1/2 \le s \le 1, \end{cases}$$

und definiere eine Homotopie $Q : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (I^n, \partial I^n)$,

$$Q(s,t) := \Big(t\varphi\big(2\|s-M\|_\infty\big) + (1-t)\Big)(s-M) + M,$$

von $Q_0 = \mathrm{id}_{I^n}$ nach $Q_1 : (I^n, \partial I^n) \to (I^n, \partial I^n)$,

$$Q_1(s) = \begin{cases} 4\|s-M\|_\infty(s-M)+M & \text{falls } \|s-M\|_\infty \le 1/8, \\ \big(2\|s-M\|_\infty + \frac{1}{4}\big)(s-M)+M & \text{falls } 1/8 \le \|s-M\|_\infty \le 1/4, \\ \big(\|s-M\|_\infty + \frac{1}{2}\big)(s-M)+M & \text{falls } 1/4 \le \|s-M\|_\infty \le 1/2. \end{cases}$$

Es ist nun $b_{\gamma\tau}(f) \circ Q$ eine Homotopie von $b_{\gamma\tau}(f) \circ Q_0 = b_{\gamma\tau}(f)$ nach $b_{\gamma\tau}(f) \circ Q_1 = b_\gamma(b_\tau(f))$. Ad (v): Betrachte die Homotopie $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0)$,

$$H(s_1,\dots,s_n,t) := \begin{cases} \big(b_\gamma(fc_{x_1})\big)\big((2-t)s_1, s_2, \dots, s_n\big) & \text{für } 0 \le s_1 \le 1/2, \\ \big(b_\gamma(c_{x_1}g)\big)\big((2-t)s_1+t-1, s_2, \dots, s_n\big) & \text{für } 1/2 \le s_1 \le 1. \end{cases}$$

Dies ist eine Homotopie von $H_0 = (b_\gamma(fc_{x_1}))(b_\gamma(c_{x_1}g))$ nach $H_1 = b_\gamma(fg)$. Zusammen mit (i) folgt $b_\gamma(fg) = H_1 \simeq H_0 = (b_\gamma(fc_{x_1}))(b_\gamma(c_{x_1}g)) \simeq b_\gamma(f)b_\gamma(g)$. $\square$

III.4.2. Proposition. *Es sei $\gamma : I \to X$ ein Weg von $\gamma(0) = x_0$ nach $\gamma(1) = x_1$ und $n \ge 1$. Dann ist*

$$\beta_\gamma : \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0), \qquad \beta_\gamma([f]) := [b_\gamma(f)]$$

ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus, der nur von der Homotopieklasse relativ Endpunkten des Weges γ abhängt. Seine Inverse ist durch $(\beta_\gamma)^{-1} = \beta_{\bar\gamma}$ gegeben, wobei $\bar\gamma(s) := \gamma(1-s)$. Ist $\tau : I \to X$ ein weiterer Weg von $\tau(0) = x_1$ nach $\tau(1) = x_2$ dann gilt $\beta_\gamma \circ \beta_\tau = \beta_{\gamma\tau}$.

Beweis. β_γ ist wohldefiniert nach Lemma III.4.1(i) und hängt wegen Lemma III.4.1(ii) nur von der Homotopieklasse $[\gamma]$ ab. Nach Lemma III.4.1(v) liegt tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus vor. Aus Lemma III.4.1(iv) erhalten wir sofort $\beta_\gamma \circ \beta_\tau = \beta_{\gamma\tau}$. Da $\gamma\bar\gamma \simeq c_{x_0}$ folgt nun $\beta_\gamma \circ \beta_{\bar\gamma} = \beta_{\gamma\bar\gamma} = \beta_{c_{x_0}} = \mathrm{id}_{\pi_n(X,x_0)}$, wobei wir im letzten Gleichheitszeichen Lemma III.4.1(iii) verwendet haben. Analog lässt sich $\beta_{\bar\gamma} \circ \beta_\gamma = \mathrm{id}_{\pi_n(X,x_1)}$ zeigen. Also ist β_γ tatsächlich ein Isomorphismus mit Inverser $\beta_{\bar\gamma}$. $\square$

III.4.3. Bemerkung. Ist X ein wegzusammenhängender Raum und $x_0, x_1 \in X$, dann sind die Gruppen $\pi_n(X, x_0)$ und $\pi_n(X, x_1)$ isomorph, wir schreiben in diesem Fall oft nur $\pi_n(X)$. Beachte jedoch, dass der in Proposition III.4.2 konstruierte Isomorphismus $\beta_\gamma : \pi_n(X, x_1) \cong \pi_n(X, x_0)$ von der Wahl einer Homotopieklasse $[\gamma]$ von Wegen von x_0 nach x_1 abhängt, und daher nicht natürlich ist.

III.4.4. Definition (n-facher Zusammenhang). Es sei $n \ge 0$. Ein topologischer Raum X heißt *n-zusammenhängend* falls $\pi_k(X, x_0) = 0$, für alle $0 \le k \le n$ und alle Basispunkte $x_0 \in X$.

III.4.5. Bemerkung. Ist X wegzusammenhängend und gilt $\pi_k(X, x_0) = 0$ für alle $0 \leq k \leq n$ und *einen* Basispunkt $x_0 \in X$, dann ist X schon n-zusammenhängend. Dies folgt aus Proposition III.4.2.

III.4.6. Bemerkung. Ein Raum ist genau dann 0-zusammenhängend, wenn er wegzusammenhängend ist. Ein Raum ist genau dann 1-zusammenhängend, wenn er einfach zusammenhängend ist.

III.4.7. Proposition. *Es sei $H : X \times I \to Y$ eine Homotopie und $x_0 \in X$. Setze $\varphi := H_0 : X \to Y$, $\psi := H_1 : X \to Y$ und $\gamma : I \to Y$, $\gamma(t) := H(x_0, t)$. Für $n \geq 1$ gilt dann $\beta_\gamma \circ \psi_* = \varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, \varphi(x_0))$.*

Beweis. Es sei also $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ und betrachte die Homotopie $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, \varphi(x_0))$,

$$G(s,t) := \begin{cases} H\big(f(\rho^{-1}(s)), t\big) & \text{falls } s \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n, \\ H\big((x_0, t(2 - 4\|s - M\|_\infty)\big) & \text{falls } s \in I^n \setminus [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]^n. \end{cases}$$

Dies ist eine Homotopie von $G_0 = b_{c_{\varphi(x_0)}}(\varphi \circ f)$ nach $G_1 = b_\gamma(\psi \circ f)$. Es folgt $\beta_\gamma(\psi_*([f])) = [b_\gamma(\psi \circ f)] = [G_1] = [G_0] = [b_{c_{\varphi(x_0)}}(\varphi \circ f)] = [\varphi \circ f] = \varphi_*([f])$. $\square$

III.4.8. Proposition. *Es sei $\varphi : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und $x_0 \in X$. Dann ist $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, \varphi(x_0))$ ein Isomorphismus, $n \geq 0$.*

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine stetige Abbildung $\psi : Y \to X$, sowie Homotopien $H : X \times I \to X$ und $G : Y \times I \to Y$, sodass $H_0 = \psi \circ \varphi$, $H_1 = \mathrm{id}_X$, $G_0 = \varphi \circ \psi$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_Y$. Nach Proposition III.4.7 haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X, x_0) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_X)_*"'] \arrow[dr, "(\psi\circ\varphi)_*"] & \pi_n\big(Y, \varphi(x_0)\big) \arrow[r, "(\mathrm{id}_Y)_*"] \arrow[d, "\psi_*"] \arrow[dr, "(\varphi\circ\psi)_*"] & \pi_n\big(Y, \varphi(x_0)\big) \arrow[d, "\beta_\sigma"] \\ \pi_n(X, x_0) \arrow[r, "\beta_\gamma"] & \pi_n\big(X, \psi(\varphi(x_0))\big) \arrow[r, "\varphi_*"] & \pi_n\big(Y, \varphi(\psi(\varphi(x_0)))\big) \end{tikzcd}$$

wobei $\gamma : I \to X$, $\gamma(t) := H(x_0, t)$, und $\sigma : I \to Y$, $\sigma(t) := G(\varphi(x_0), t)$. Nach Proposition III.4.2 sind β_γ und β_σ Isomorphismen, also sind auch $(\varphi \circ \psi)_*$ und $(\psi \circ \varphi)_*$ Isomorphismen. Mit $(\varphi \circ \psi)_*$ muss auch ψ_* injektiv sein, und da $(\psi \circ \varphi)_*$ surjektiv ist gilt dies auch für ψ_*. Wir sehen daher, dass ψ_* ein Isomorphismus ist. Also muss auch $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, \varphi(x_0))$ ein Isomorphsimus sein. $\square$

III.4.9. Bemerkung. Homotopieäquivalente wegzusammenhängende Räume haben isomorphe Homotopiegruppen. Genauer, ist $X \simeq Y$, $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ und $n \geq 0$, dann gilt $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$. Dies folgt aus Proposition III.4.8 und Proposition III.4.2.

III.4.10. Proposition. *Ist X ein kontrahierbarer Raum und $x_0 \in X$, dann gilt $\pi_n(X, x_0) = 0$, $n \geq 0$.*

Beweis. Dies folgt aus Proposition III.4.8, denn die kanonische Inklusion $\{x_0\} \to X$ ist eine Homotopieäquivalenz. $\square$

III.4.11. Proposition. *Ist* (X, x_0) *ein punktierter Raum und* $n \geq 1$*, dann definiert* $\pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(\pi_n(X, x_0))$*,* $[\gamma] \mapsto \beta_\gamma$*, einen Gruppenhomomorphimus.*[28]

Beweis. Dies folgt aus Proposition III.4.2. $\square$

Es sei R ein Ring mit Eins. Unter einem R-Modul verstehen wir eine abelsche Gruppe M zusammen mit einer Skalarmultiplikation $R \times M \to M$, $(r, m) \mapsto rm$, die folgende Eigenschaften hat:

(i) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$, $r \in R$, $m_1, m_2 \in M$.
(ii) $(r_1 + r_2)m = r_1 m + r_2 m$, $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$.
(iii) $(r_1 r_2)m = r_1(r_2 m)$, $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$.
(iv) $1m = m$, $m \in M$.

Beachte, dass ein R-Modul nichts anderes als eine abelsche Gruppe M zusammen mit einem Ringhomomorphismus $R \to \mathrm{End}(M)$ ist.[29] Unter einem R-Modulhomomorphismus von einem R-Modul M_1 in einen R-Modul M_2 verstehen wir einen Homomorphismus von Gruppen $\varphi : M_1 \to M_2$ für den $\varphi(rm) = r\varphi(m)$ gilt, $r \in R$, $m \in M_1$. Die R-Moduln und R-Modulhomomorphismen bilden offensichtlich eine Kategorie die wir mit R-Mod bezeichnen. Ist R ein Ring mit Eins, dann bezeichnen wir mit $R^\times := \{r \in R \mid \exists s \in R : rs = sr = 1\}$ die Gruppe der Einheiten von R. Die Gruppenstruktur ist dabei durch die Einschränkung der Multipikation in R gegeben. Ist M ein R-Modul, dann liefert die Einschränkung der Skalarmultiplikation einen Homomorphismus $R^\times \to \mathrm{Aut}(M)$.[30] Sei nun Γ eine Gruppe. Betrachte die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}[\Gamma] := \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{Z}$. Elemente in $\mathbb{Z}[\Gamma]$ können wir als endliche formale Linearkombinationen $n_1\gamma_1 + \cdots + n_k\gamma_k$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i \in \Gamma$, darstellen, oder als Funktionen $\Gamma \to \mathbb{Z}$ auffassen, die nur bei endlich vielen Elementen von Γ ungleich 0 sind. Die Multiplikation $(\sum_i n_i\gamma_i)(\sum_j m_j\sigma_j) := \sum_{i,j} n_i m_j(\gamma_i\sigma_j)$ macht $\mathbb{Z}[\Gamma]$ zu einem Ring, dem sogenannten *Gruppenring* von Γ. Beachte, dass $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}[\Gamma]^\times$. Die Gruppe Γ ist genau dann abelsch, wenn der Ring $\mathbb{Z}[\Gamma]$ kommutativ ist. Der Gruppenring hat folgende universelle Eigenschaft. Ist R ein weiterer Ring und $\varphi : \Gamma \to R^\times$ ein Gruppenhomomorphismus, dann existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\tilde\varphi : \mathbb{Z}[\Gamma] \to R$, sodass $\tilde\varphi(\gamma) = \varphi(\gamma)$, für alle $\gamma \in \Gamma$. Dieser Ringhomomorphismus ist durch $\tilde\varphi(\sum_i n_i\gamma_i) = \sum_i n_i\varphi(\gamma_i)$ gegeben. Wir erhalten aus diesen Betrachtungen nun folgenden nützliche Tatsache. Ist Γ eine Gruppe, M eine abelsche Gruppe und $\varphi : \Gamma \to \mathrm{Aut}(M)$ ein Gruppenhomomorphismus, dann existiert eine eindeutige $\mathbb{Z}[\Gamma]$-Modulstruktur auf M,

[28]Für eine Gruppe G bezeichnet $\mathrm{Aut}(G)$ die Gruppe der Gruppenautomorphismen.

[29]Ist M eine abelsche Gruppe, dann bezeichnet $\mathrm{End}(M)$ die Menge der Gruppenhomomorphismen $M \to M$. Dies ist ein Ring bezüglich punktweiser Addition und Komposition von Homomorphismen.

[30]Ist M eine abelsche Gruppe dann bezeichnet $\mathrm{Aut}(M)$ die Gruppe der Gruppenautomorphismen von M. Beachte $\mathrm{Aut}(M) = \mathrm{End}(M)^\times$.

sodass $\gamma m = \varphi(\gamma)(m)$, $\gamma \in \Gamma$, $m \in M$. Nach Obigem existiert nämlich genau ein Ringhomomorphismus $\tilde{\varphi} : \mathbb{Z}[\Gamma] \to \mathrm{End}(M)$ mit $\tilde{\varphi}(\gamma) = \varphi(\gamma)$, und dieser macht M zu einem $\mathbb{Z}[\Gamma]$-Modul. Eine explizitere Formel für die Skalarmultiplikation ist $(\sum_i n_i\gamma_i)m = \sum_i n_i(\varphi(\gamma_i)(m))$. Aus Proposition III.4.11 erhalten wir daher folgende

III.4.12. PROPOSITION. *Es sei (X, x_0) ein punktierter Raum und $n \geq 2$. Dann ist $\pi_n(X, x_0)$ in natürlicher Weise ein $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x_0)]$-Modul.*

III.4.13. PROPOSITION. *Es sei X ein topologischer Raum und $n \geq 0$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\pi_n(X, x_0) = 0$ für alle $x_0 \in X$.*
(ii) *Jede stetige Abbildung $S^n \to X$ ist nullhomotop.*
(iii) *Jede stetige Abbildung $f : S^n \to X$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : D^{n+1} \to X$ fortsetzen, dh. $\tilde{f} \circ \iota = f$ wobei $\iota : S^n \to D^{n+1}$ die kanonische Inklusion bezeichnet.*

BEWEIS. Ad (iii)⇒(ii): Sei also $f : S^n \to X$, und $\tilde{f} : D^{n+1} \to X$ mit $\tilde{f} \circ \iota = f$. Dann liefert $H : S^n \times I \to X$, $H(x,t) := \tilde{f}(tx)$, eine Homotopie von der konstanten Abbildung $H_0 = c_{\tilde{f}(0)}$ nach $H_1 = \tilde{f} \circ \iota = f$. Ad (ii)⇒(iii): Sei nun $f : S^n \to X$ und $H : S^n \times I \to X$ eine Homotopie von einer konstanten Abbildung $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = f$. Die Abbildung $\varphi : S^n \times I \to D^{n+1}$, $\varphi(x,t) := tx$, induziert einen Homöomorphismus $(S^n \times I)/(S^n \times \{0\}) \to D^{n+1}$, also existiert eine stetige Abbildung $\tilde{f} : D^{n+1} \to X$ mit $\tilde{f} \circ \varphi = H$. Es folgt $(\tilde{f} \circ \iota)(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{f}(\varphi(x,1)) = H(x,1) = f(x)$, also ist $\tilde{f}$ die gesuchte stetige Fortsetzung. Ad (i)⇒(ii): Dies folgt aus $\pi_n(X, x_0) \cong [(S^n, s_0), (X, x_0)]$, siehe Bemerkung III.3.18. Ad (ii)⇒(i): Sei $f : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$. Nach Voraussetzung existiert $x_1 \in X$ und eine Homotopie $H : S^n \times I \to X$ von $H_0 = f$ nach $H_1 = c_{x_1}$. Betrachte den Weg $\gamma : I \to X$, $\gamma(t) := H(s_0, t)$. Nach Proposition III.4.7 gilt $f_* = \beta_\gamma \circ (c_{x_1})_* : \pi_n(S^n, s_0) \to \pi_n(X, x_0)$, wobei $c_{x_1} : (S^n, s_0) \to (X, x_1)$ die konstante Abbildung bezeichnet. Da $(c_{x_1})_* = 0$ und weil β_γ ein Isomorphismus ist, folgt $0 = f_* : \pi_n(S^n, s_0) \to \pi_n(X, x_0)$. Nach Bemerkung III.3.18 gilt daher auch $0 = f_* : [(S^n, s_0), (S^n, s_0)] \to [(S^n, s_0), (X, x_0)]$. Wenden wir diese Gleichung auf $[\mathrm{id}_{S^n}] \in [(S^n, s_0), (S^n, s_0)]$ an, so erhalten wir $0 = [f] = f_*([\mathrm{id}_{S^n}]) \in [(S^n, s_0), (X, x_0)]$. Es folgt daher $0 = [(S^n, s_0), (X, x_0)] \cong \pi_n(X, x_0)$. □

III.5. Relative Homotopiegruppen. Unter einem *Tripel von Räumen* verstehen wir (X, A, B) wobei X ein topologischer Raum ist und $B \subseteq A \subseteq X$. Eine Abbildung zwischen Tripel von Räumen $f : (X_1, A_1, B_1) \to (X_2, A_2, B_2)$ ist eine stetige Abbildung $f : X_1 \to X_2$, sodass $f(A_1) \subseteq A_2$ und $f(B_1) \subseteq B_2$. Offensichtlich ist die Komposition von Abbildungen zwischen Tripel wieder eine Abbildung von Tripel. Tripel von Räumen und Abbildungen zwischen solchen Tripel bilden daher eine Kategorie die wir mit Top^3 bezeichnen.

Zwei Abbildungen von Tripel $f, g : (X_1, A_1, B_1) \to (X_2, A_2, B_2)$ werden *homotop* genannt, falls eine Homotopie $H : (X_1 \times I, A_1 \times I, B_1 \times I) \to (X_2, A_2, B_2)$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$ existiert. Wir schreiben in diesem Fall $f \simeq g$. Beachte, dass $H_t : (X_1, A_1, B_1) \to (X_2, A_2, B_2)$ eine Abbildungen zwischen Tripel ist, für jedes $t \in I$. Dies liefert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von Tripel $(X_1, A_1, B_2) \to (X_2, A_2, B_2)$, vgl. Lemma III.2.3. Die Äquivalenzklassen werden *Homotopieklassen von Abbildungen zwischen Tripel* genannt. Wir bezeichnen die Menge dieser Homotopieklassen mit $[(X_1, A_1, B_1), (X_2, A_2, B_2)]$, und schreiben $[f]$ für die von $f(X_1, A_1, B_1) \to (X_2, A_2, B_2)$ repräsentierte Klasse.

Sind $f_0 \simeq f_1 : (X_1, A_1, B_1) \to (X_2, A_2, B_2)$ und $g_0 \simeq g_1 : (X_2, A_2, B_2) \to (X_3, A_3, B_3)$ dann sind auch ihre Kompositionen homotop, $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1 : (X_1, A_1, B_1) \to (X_3, A_3, B_3)$, vgl. Lemma III.2.4. Wir erhalten daher eine wohldefinierte Verknüpfung von Homotopieklassen

$$\begin{aligned}\big[(X_1, A_1, B_1), (X_2, A_2, B_2)\big] \times \big[(X_2, A_2, B_2), (X_3, A_3, B_3)\big]&\\ \to \big[(X_1, A_1, B_1), (X_3, A_3, B_3)\big],&\qquad \text{(III.5)}\end{aligned}$$

$([f], [g]) \mapsto [g \circ f]$. Wir bezeichnen mit hTop^3 die Kategorie der Tripel von Räumen und Homotopieklassen von Abbildungen zwischen Tripel. Die Verknüpfung von Morphismen ist durch (III.5) gegeben.

Unter einem punktierten Paar von Räumen verstehen wir (X, A, x_0) wobei X ein topologischer Raum ist und $x_0 \in A \subseteq X$. Eine Abbildung punktierter Paare $f : (X_1, A_1, x_1) \to (X_2, A_2, x_2)$ ist eine stetige Abbildung $f : X_1 \to X_2$ mit $f(A_1) \subseteq A_2$ und $f(x_1) = x_2$. Da die Komposition von Abbildungen punktierter Paare wieder eine Abbildung punktierter Paare ist erhalten wir eine Kategorie der punktierten Paare und Abbildungen zwischen punktierten Paaren. Wir werden diese Kategorie mit Top_0^2 bezeichnen. Ebenso erhalten wir eine Kategorie hTop_0^2 von punktieren Paaren und Homotopieklassen von Abbildungen zwischen punktierten Paaren. Beachte, dass jedes punktierte Paar von Räumen (X, A, x_0) auch als Tripel von Räumen $(X, A, \{x_0\})$ aufgefasst werden kann. Die Abbildungen von punktierten Paaren $(X_1, A_1, x_1) \to (X_2, A_2, x_2)$ entsprechen genau den Abbildungen von Tripel $(X_1, A_1, \{x_1\}) \to (X_2, A_2, \{x_2\})$. Auch sind zwei Abbildungen zwischen punktierten Paaren genau dann homotop wenn sie es aufgefasst als Abbildungen zwischen Tripel von Räumen sind, dh. $\big[(X_1, A_1, x_1), (X_2, A_2, x_2)\big] = \big[(X_1, A_1, \{x_1\}), (X_2, A_2, x_2)\big]$.

Für $n \geq 1$ betrachten wir nun das Tripel $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$ wobei $J^{n-1} := \overline{\partial I^n \setminus (I^{n-1} \times \{0\})}$. Ist (X, A, x_0) ein punktiertes Paar von Räumen und $n \geq 1$ so definieren wir

$$\pi_n(X, A, x_0) := \big[(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, x_0)\big].$$

Elemente von $\pi_n(X, A, x_0)$ werden von Abbildungen $f : I^n \to X$ mit $f(\partial I^n) \subseteq A$ und $f(J^{n-1}) = \{x_0\}$ repräsentiert. Zwei solche Abbidungen f und g definieren das gleiche Element in $\pi_n(X, A, x_0)$ genau dann wenn eine Homotopie $H : I^n \times I \to X$

existiert, sodass $H_0 = f$, $H_1 = g$, $H_t(\partial I^n) \subseteq A$ und $H_t(J^{n-1}) = \{x_0\}$ für alle $t \in I$.

Ist $n \geq 2$ und sind $f, g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ so definieren wir ihre *Konkatenation* $fg : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ durch

$$(fg)(s_1, s_2, \dots, s_n) := \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 0 \leq s_1 \leq 1/2, \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \text{falls } 1/2 \leq s_1 \leq 1. \end{cases}$$

Beachte, dass dies nur für $n \geq 2$ wohldefiniert ist. Sind $f_0 \simeq f_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ und $g_0 \simeq g_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ dann gilt auch für die Konkatenationen $f_0 g_0 \simeq f_1 g_1$, vgl. Lemma III.3.3. Für $n \geq 2$ erhalten wir daher eine Multiplikation

$$\pi_n(X, A, x_0) \times \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0), \qquad ([f], [g]) \mapsto [fg]. \tag{III.6}$$

III.5.1. Proposition. *Ist (X, A, x_0) ein punktiertes Paar von Räumen und $n \geq 2$, dann liefert* (III.6) *eine Gruppenstruktur auf $\pi_n(X, A, x_0)$. Das neutrale Element wird durch die konstante Abbildung $c_{x_0} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ repräsentiert, und das Inverse von $[f]$ wird durch $\bar{f} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$, $\bar{f}(s_1, s_2, \dots, s_n) := f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n)$ repräsentiert.*

Beweis. Dies lässt sich genau wie Proposition III.3.8 zeigen. □

III.5.2. Definition (Relative Homotopiegruppen). Die Gruppe $\pi_n(X, A, x_0)$ aus Proposition III.5.1 wird als n-te *relative Homotopiegruppe* von (X, A, x_0) bezeichnet, $n \geq 2$. In diesem Zusammenhang werden die Homotopiegruppen $\pi_n(X, x_0)$ auch *absolute Homotopiegruppen* genannt.

III.5.3. Proposition. *Es sei (X, A, x_0) ein punktiertes Paar von Räumen und $n \geq 3$. Dann ist $\pi_n(X, A, x_0)$ abelsch.*

Beweis. Der Beweis ist völlig analog zu dem von Proposition III.3.10. Wegen der Voraussetzung $n \geq 3$ kann die dort konstruierte Homotopie H als Homotopie von Tripeln $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \to (I^n, \partial I^n, J^{n-1})$ aufgefasst werden. □

III.5.4. Bemerkung. I.A. ist es nicht möglich auf $\pi_1(X, A, x_0)$ in natürlicher Weise eine Gruppenstruktur zu definieren. Jedoch repräsentiert die konstante Abbildung $c_{x_0} : (I^1, \partial I^1, J^0) \to (X, A, x_0)$ ein ausgezeichnetes Element in $\pi_1(X, A, x_0)$. Wir können $\pi_1(X, A, x_0)$ daher als punktierte Menge auffassen. Besteht $\pi_1(X, A, x_0)$ nur aus diesem einen Element so schreiben wir $\pi_1(X, A, x_0) = 0$.

III.5.5. Bemerkung. Beachte $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(X, x_0)$, die absoluten Homotopiegruppen treten daher als Spezialfälle der relativen auf.

Ist $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ eine Abbildung punktierter Paare so erhalten wir eine induzirte Abbildung $\varphi_* : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0)$, $\varphi_*([f]) := [\varphi \circ f]$. Ist $\psi : (Y, B, y_0) \to (Z, C, z_0)$ eine weitere Abbildung punktierter Paare dann gilt offensichtlich $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Z, C, z_0)$

sowie $(\mathrm{id}_X)_* = \mathrm{id}_{\pi_n(X,A,x_0)}$. Homotope Abbildungen punktierter Paare $\psi_0 \simeq \psi_1 : (X,A,x_0) \to (Y,B,y_0)$ induzieren die gleiche Abbildung $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_* : \pi_n(X,A,x_0) \to \pi_n(Y,B,y_0)$. All dies funktioniert falls $n \geq 1$. Für $n \geq 2$ ist $\varphi_* : \pi_n(X,A,x_0) \to (Y,B,y_0)$ ein Homomorphismus von Gruppen. Zusammenfassend erhalten wir

III.5.6. Proposition. *Die relativen Homotopiegruppen definieren Funktoren* $\pi_1 : \mathrm{hTop}_0^2 \to \mathrm{Set}_0$, $\pi_2 : \mathrm{hTop}_0^2 \to \mathrm{Grp}$, *und* $\pi_n : \mathrm{hTop}_0^2 \to \mathrm{aGrp}$, $n \geq 3$.

III.5.7. Bemerkung. Es sei $\omega : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (D^n, S^{n-1}, s_0)$ eine stetige Abbildung die einen Homöomorphismus punktierter Paare

$$\big(I^n/J^{n-1}, \partial I^n/J^{n-1}, J^{n-1}/J^{n-1}\big) \cong (D^n, S^{n-1}, s_0)$$

induziert. Wir erhalten eine Bijektion

$$\big[(D^n, S^{n-1}, s_0), (X,A,x_0)\big] \cong \pi_n(X,A,x_0), \qquad [f] \mapsto [f \circ \omega].$$

Elemente von $\pi_n(X,A,x_0)$ können daher als Homotopieklassen von Abbildungen $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X,A,x_0)$ aufgefasst werden.

III.5.8. Bemerkung. Es sei (X,A) ein Paar von Räumen und $\gamma : I \to A$ ein Weg von $\gamma(0) = x_0$ nach $\gamma(1) = x_1$. Ähnlich wie in Abschnitt III.4 lässt sich ein Isomorphismus $\beta_\gamma : \pi_n(X,A,x_1) \to \pi_n(X,A,x_0)$ konstruieren. Für wegzusammenhängendes A sind die Homotopiegruppen daher unabhängig vom Basispunkt, bis auf Isomorphie. Beachte jedoch, dass dieser Isomorphismus nicht natürlich ist, da er von der Wahl einer Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 abhängt. Trotzdem werden wir in diesem Fall oft nur $\pi_n(X,A)$ für die höheren Homotopiegruppen schreiben.

Ist $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X,A,x_0)$ so liefert die Einschränkung eine Abbildung $f|_{I^{n-1}\times\{0\}} : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A,x_0)$, $(s_1,\dots,s_{n-1}) \mapsto f(s_1,\dots,s_{n-1},0)$. Sind $f_0 \simeq f_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X,A,x_0)$, so liefert die Einschräkung einer Homotopie von f_0 nach f_1 eine Homotopie $f_0|_{I^{n-1}\times\{0\}} \simeq f_1|_{I^{n-1}\times\{0\}} : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A,x_0)$. Für $n \geq 1$ erhalten wir daher eine Abbildung, den sogenannten *Randoperator*,

$$\partial : \pi_n(X,A,x_0) \to \pi_{n-1}(A,x_0), \qquad \partial([f]) := \big[f|_{I^{n-1}\times\{0\}}\big].$$

Für $n \geq 2$ ist der Randoperator offensichtlich ein Gruppenhomomorphismus, im Fall $n = 1$ liefert er eine Abbildung punktierter Mengen.

III.5.9. Bemerkung. Ist $[f] \in [(D^n, S^{n-1}, s_0), (X,A,x_0)] \cong \pi_n(X,A,x_0)$, wobei $f : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X,A,x_0)$, dann repräsentiert die Einschränkung $f|_{S^{n-1}} : (S^{n-1}, s_0) \to (A,x_0)$ das Element $[f|_{S^{n-1}}] = \partial([f]) \in \pi_{n-1}(A,x_0) \cong [(S^{n-1}, s_0), (X,x_0)]$, vgl. Bemerkung III.5.7 und Bemerkung III.3.18.

III.5.10. Definition (Exakte Sequenz). Eine Sequenz von Gruppenhomomorphismen

$$\cdots \to G_k \xrightarrow{\varphi_k} G_{k+1} \xrightarrow{\varphi_{k+1}} G_{k+2} \to \cdots$$

wird *exakt* genannt, falls $\operatorname{img}(\varphi_k) = \ker(\varphi_{k+1})$, für jedes k. Insbesondere muss also $\varphi_{k+1} \circ \varphi_k = 0$ gelten, denn dies bedeutet gerade $\operatorname{img}(\varphi_k) \subseteq \ker(\varphi_{k+1})$.

III.5.11. Beispiel. Eine Sequenz der Form $0 \xrightarrow{0} G \xrightarrow{\varphi} H$ ist genau dann exakt, wenn φ injektiv ist.

III.5.12. Beispiel. Eine Sequenz der Form $G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{0} 0$ ist genau dann exakt, wenn φ surjektiv ist.

III.5.13. Beispiel. Eine Sequenz der Form $0 \xrightarrow{0} G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{0} 0$ ist genau dann exakt, wenn φ ein Isomorphismus ist.

III.5.14. Bemerkung. In Definition III.5.10 werden nur die neutralen Element der Gruppen, nicht aber ihre Gruppenstruktur verwendet. Daher macht der Begriff der Exaktheit auch für Sequenzen punktierter Mengen Sinn. Eine Sequenz von Abbildungen punktierter Mengen

$$\cdots \to (S_k, x_k) \xrightarrow{\varphi_k} (S_{k+1}, x_{k+1}) \xrightarrow{\varphi_{k+1}} (S_{k+2}, x_{k+2}) \to \cdots$$

wird exakt genannt, falls $\operatorname{img}(\varphi_k) = (\varphi_{k+1})^{-1}(x_{k+1})$, für jedes k. Fassen wir eine Gruppe G mit neutralem Element e als punktierte Menge (G, e) auf, so reproduziert dies den Exaktheitsbegriff aus Definition III.5.10.

III.5.15. Satz (Lange exakte Sequenz eines Paares). *Es sei (X, A, x_0) ein punktiertes Paar von Räumen. Dann ist die folgende Sequenz exakt:*[31]

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_1(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X, x_0)$$

Dabei sind $i_* : \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ und $j_* : \pi_n(X, x_0) = \pi_n(X, \{x_0\}, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$ die von den kanonischen Inklusionen $i : (A, x_0) \to (X, x_0)$ und $j : (X, \{x_0\}, x_0) \to (X, A, x_0)$ induzierten Abbildungen.

Beweis. *Zur Exaktheit bei $\pi_n(A, x_0)$.* Wir zeigen zunächst $i_* \circ \partial = 0$, dh. $\operatorname{img}(\partial) \subseteq \ker(i_*)$. Sei also $[f] \in \pi_{n+1}(X, A, x_0)$, wobei $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0)$. Betrachte die Abbildung $g : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, $g(s_1, \ldots, s_n) := f(s_1, \ldots, s_n, 0)$. Offensichtlich gilt dann $i_*(\partial([f])) = [g] \in \pi_n(X, x_0)$. Weiters ist $H(I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0)$, $H(s_1, \ldots, s_n, t) := f(s_1, \ldots, s_n, t)$ eine Homotopie von $H_0 = g$ nach $H_1 = c_{x_0}$. Es folgt $i_*(\partial([f])) = [g] = [c_{x_0}] = 0 \in \pi_n(X, x_0)$. Nun zu der anderen Inklusion $\ker(i_*) \subseteq \operatorname{img}(\partial)$. Sei dazu $[f] \in \pi_n(A, x_0)$, wobei $f : (I^n, \partial I^n) \to (A, x_0)$, mit $i_*([f]) = 0 \in \pi_n(X, x_0)$. Dann ist $f \simeq c_{x_0} : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, es existiert daher eine Homotopie $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0)$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = c_{x_0}$. Diese Homotopie definiert eine Abbildung $g : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, x_0)$, $g(s_1, \ldots, s_n, s_{n+1}) := H(s_1, \ldots, s_n, s_{n+1})$.

[31] Bis auf die letzten drei Abbildungen sind dies alles Gruppenhomomorphismen. Bei $\pi_1(X, x_0)$, $\pi_1(X, A, x_0)$ und $\pi_0(A, x_0)$ ist die Exaktheit wie in Bemerkung III.5.14 aufzufassen.

Für das durch g repräsentierte Element $[g] \in \pi_n(X, A, x_0)$ gilt offensichtlich $\partial([g]) = [H_0] = [f]$.

Zur Exaktheit bei $\pi_n(X, A, x_0)$*:* Wir zeigen zunächst $\partial \circ j_* = 0$, dh. $\operatorname{img}(j_*) \subseteq \ker(\partial)$. Sei dazu $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, wobei $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$. Das Element $\partial(j_*([f])) \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ wird dann durch die Abbildung $(I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A, x_0)$, $(s_1, \ldots, s_{n-1}) \mapsto f(s_1, \ldots, s_{n-1}, 0) = x_0$ repräsentiert. Es gilt daher $\partial(j_*([f])) = [c_{x_0}] = 0 \in \pi_{n-1}(A, x_0)$. Nun zu der anderen Inklusion $\ker(\partial) \subseteq \operatorname{img}(j_*)$. Sei also $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ mit $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$, sodass $\partial([f]) = 0 \in \pi_{n-1}(A, x_0)$. Betrachte die Abbildung $g : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A, x_0)$, $g(s_1, \ldots, s_{n-1}) := f(s_1, \ldots, s_{n-1}, 0)$. Es gilt dann $\partial([f]) = [g] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$. Also existiert eine Homotopie $H : (I^{n-1} \times I, \partial I^{n-1} \times I) \to (A, x_0)$ von $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = g$. Es definiert dann $G : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \to (X, A, x_0)$

$$G(s_1, \ldots, s_n, t) := \begin{cases} H(s_1, \ldots, s_{n-1}, 1 - t + 2s_n) & \text{falls } 0 \leq s_n \leq t/2, \\ f\big(s_1, \ldots, s_{n-1}, \frac{2s_n - t}{2-t}\big) & \text{falls } t/2 \leq s_n \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie mit $G_0 = f$ und $G_1(\partial I^n) = \{x_0\}$. Daher repräsentiert $h : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, $h(s_1, \ldots, s_n) := G_1(s_1, \ldots, s_n)$ ein Element $[h] \in \pi_n(X, x_0)$ mit $j_*([h]) = [G_1]$. Es folgt $[f] = [G_0] = [G_1] = j_*([h]) \in \pi_n(X, A, x_0)$.

Zur Exaktheit bei $\pi_n(X, x_0)$*:* Um die hier notwendigen Homotopien leichter hinschreiben zu können, verwenden wir die Identifizierungen $\pi_n(A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}), (A, x_0)]$, $\pi_n(X, x_0) = [(D^n, S^{n-1}), (X, x_0)]$ als auch $\pi_n(X, A, x_0) = [(D^n, S^{n-1}, s_0), (X, A, x_0)]$, vgl. die Bemerkungen III.3.17 und III.5.7. Wir zeigen zunächst $j_* \circ i_* = 0$, dh. $\operatorname{img}(i_*) \subseteq \ker(j_*)$. Sei dazu $[f] \in \pi_n(A, x_0)$ wobei $f : (D^n, S^{n-1}) \to (A, x_0)$. Wir können f als Abbildung $g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ auffassen, es gilt dann $j_*(i_*([f])) = [g] \in \pi_n(X, A, x_0)$. Die Abbildung $H : (D^n \times I, S^{n-1} \times I, s_0 \times I) \to (X, A, x_0)$, $H(x, t) := f((1-t)s_0 + tx)$, ist eine Homotopie von $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = g$. Es folgt $j_*(i_*([f])) = [g] = [c_{x_0}] = 0 \in \pi_n(X, A, x_0)$. Nun zu der anderen Inklusion $\ker(j_*) \subseteq \operatorname{img}(i_*)$. Sei dazu $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, wobei $f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, x_0)$. Wir können f als Abbildung $g : (D^n, S^{n-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$ auffassen, es gilt dann $j_*([f]) = [g] \in \pi_n(X, A, x_0)$. Ist nun $j_*([f]) = 0$, dann existiert eine Homotopie $H : (D^n \times I, S^{n-1} \times I, s_0 \times I) \to (X, A, x_0)$ mit $H_0 = g$ und $H_1 = c_{x_0}$. Die Homotopie $G : (D^n \times I, S^{n-1} \times I) \to (X, x_0)$,

$$G(x, t) := \begin{cases} H\big(\frac{2}{2-t} x, t\big) & \text{falls } 0 \leq |x| \leq 1 - t/2, \\ H\big(\frac{1}{|x|} x, 2 - 2|x|\big) & \text{falls } 1 - t/2 \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

erfüllt dann $G_0 = f$ und $G_1(D^n) = \{x_0\}$. Daher können wir G_1 als Abbildung $h : (D^n, S^{n-1}) \to (A, x_0)$ auffassen, es gilt dann $i_*([h]) = [G_1] = [G_0] = [f] \in \pi_n(X, x_0)$. $\square$

III.5.16. Bemerkung. Die lange exakte Sequenz aus Satz III.5.15 ist natülich in folgendem Sinn. Ist $\varphi : (X, A, x_0) \to (Y, B, y_0)$ eine Abbildung zwischen punktierten Paaren, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial"] & \pi_n(A,x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \pi_n(X,x_0) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \pi_n(X,A,x_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \pi_{n-1}(A,x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\partial"] & \pi_n(B,y_0) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n(Y,y_0) \arrow[r, "j_*"] & \pi_n(Y,B,y_0) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{n-1}(B,y_0) \arrow[r, "i_*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Der Beweis dieser Tatsache ist trivial.

III.5.17. Beispiel. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $s_0 \in S^{n-1}$. Wenden wir Satz III.5.15 auf das Paar (D^n, S^{n-1}, s_0) an, so erhalten wir eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \to \pi_k(D^n, s_0) \to \pi_k(D^n, S^{n-1}, s_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(S^{n-1}, s_0) \to \pi_{k-1}(D^n, s_0) \to \cdots$$

Nach Beispiel III.3.16 gilt $\pi_k(D^n, s_0) = 0$, für alle $k \geq 0$. Zusammen mit Beispiel III.5.13 sehen wir, dass der Randoperator Isomorphismen

$$\partial : \pi_k(D^n, S^{n-1}, s_0) \cong \pi_{k-1}(S^{n-1}, s_0)$$

liefert, falls $k \geq 2$. Auch für $k = 1$ ist ∂ eine Bijektion $\pi_1(D^n, S^{n-1}, s_0) \cong \pi_0(S^{n-1}, s_0)$, wir können dies jedoch nicht aus Beispiel III.5.13 folgern, denn in diesem Fall steht keine Gruppenstruktur zur Verfügung. Im Fall $n \geq 2$ folgt dies aus dem Wegzusammenhang von S^{n-1}, denn dann gilt $\pi_0(S^{n-1}, s_0) = 0$, wir erhalten somit eine exakte Sequenz $0 \to \pi_1(D^n, S^{n-1}, s_0) \to 0$ und dies impliziert sofort $\pi_1(D^n, S^{n-1}, s_0) = 0$. Im Fall $n = 1$ besteht $\pi_0(S^0, s_0)$ aus zwei Elementen die den beiden Zusammenhangskomponenten von S^0 entsprechen. Auch $\pi_1(D^1, S^0, s_0)$ hat zwei Elemente, eines wird von der konstanten Abbildung das andere von der identischen Abbildung repräsentiert. Die Berechnung der relativen Homotopiegruppen $\pi_k(D^n, S^{n-1}, s_0)$ ist damit vollständig auf die Berechnung der absoluten Homotopiegruppen der Sphären zurückgeführt.

III.5.18. Beispiel. Beispiel III.5.17 lässt sich wie folgt verallgemeinern. Es sei X ein wegzusammenhängender Raum und $CX = (X \times I)/(X \times \{0\})$ der Kegel über X. Wir fassen X als Teilraum von CX auf, $x \mapsto [(x, 1)]$. Nach Beispiel I.8.26 ist CX kontrahierbar, und daher $\pi_k(CX, x_0) = 0$, für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und für jeden Basispunkt x_0, siehe Proposition III.4.10. Wenden wir Satz III.5.15 auf das Paar (CX, X, x_0) an so erhalten wir eine lange exakte Sequenz:

$$\cdots \to \pi_k(CX, x_0) \to \pi_k(CX, X, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(X, x_0) \to \pi_{k-1}(CX, x_0) \to \cdots$$

Zusammen mit Beispiel III.5.13 folgt, dass der Randoperator ∂ einen Isomorphismus $\pi_k(CX, X, x_0) \cong \pi_{k-1}(X, x_0)$ liefert, $k \geq 2$. Auch im Fall $k = 1$ ist ∂ eine Bijektion, denn nach Voraussetzung ist X wegzusammenhängend, also $\pi_0(X, x_0) = 0$, und aus der Exaktheit der langen Sequenz erhalten wir daher auch $\pi_1(CX, X, x_0) = 0$.

III.5.19. Lemma (Fünfer-Lemma). *Es sei*

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & G_2 \arrow[r, "\lambda_2"] \arrow[d, "\varphi_2"] & G_3 \arrow[r, "\lambda_3"] \arrow[d, "\varphi_3"] & G_4 \arrow[r, "\lambda_4"] \arrow[d, "\varphi_4"] & G_5 \arrow[d, "\varphi_5"] \\ H_1 \arrow[r, "\mu_1"] & H_2 \arrow[r, "\mu_2"] & H_3 \arrow[r, "\mu_3"] & H_4 \arrow[r, "\mu_4"] & H_5 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppenhomomorphismen mit exakten Zeilen. Weiters seien φ_1, φ_2, φ_4 und φ_5 Isomorphismen. Dann ist auch φ_3 ein Isomorphismus.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Injektivität von φ_3. Sei also $g_3 \in G_3$ mit $\varphi_3(g_3) = 1$. Dann gilt $\varphi_4(\lambda_3(g_3)) = \mu_3(\varphi_3(g_3)) = \mu_3(1) = 1$ und wegen der Injektivität von φ_4 somit $\lambda_3(g_3) = 1$. Da die obere Zeile bei G_3 exakt ist, existiert $g_2 \in G_2$ mit $\lambda_2(g_2) = g_3$. Es folgt $\mu_2(\varphi_2(g_2)) = \varphi_3(\lambda_2(g_2)) = \varphi_3(g_3) = 1$. Da die zweite Zeile bei H_2 exakt ist, existiert $h_1 \in H_1$ mit $\mu_1(h_1) = \varphi_2(g_2)$. Auf Grund der Surjektivität von φ_1 finden wir $g_1 \in G_1$ mit $\varphi_1(g_1) = h_1$. Es gilt dann $\varphi_2(\lambda_1(g_1)) = \mu_1(\varphi_1(g_1)) = \mu_1(h_1) = \varphi_2(g_2)$, also $\lambda_1(g_1) = g_2$, denn φ_2 ist injektiv. Schließlich erhalten wir $g_3 = \lambda_2(g_2) = \lambda_2(\lambda_1(g_1)) = 0$, denn wegen der Exaktheit der oberen Zeile bei G_2 gilt $\lambda_2 \circ \lambda_1 = 0$. Also ist φ_3 injektiv. Nun zur Surjektivität von φ_3. sei dazu $h_3 \in H_3$. Da φ_4 surjektiv ist existiert $g_4 \in G_4$ mit $\varphi_4(g_4) = \mu_3(h_3)$. Es folgt $\varphi_5(\lambda_4(g_4)) = \mu_4(\varphi_4(g_4)) = \mu_4(\mu_3(h_3)) = 1$, denn $\mu_4 \circ \mu_3 = 0$ wegen der Exaktheit der unteren Zeile bei H_4. Da φ_5 injektiv ist, schließen wir $\lambda_4(g_4) = 1$. Auf Grund der Exaktheit der oberen Zeile bei G_4 existiert $g_3 \in G_3$ mit $\lambda_3(g_3) = g_4$. Es folgt $\mu_3\big(\varphi_3(g_3^{-1})h_3\big) = \mu_3(\varphi_3(g_3^{-1}))\mu_3(h_3) = \varphi_4(\lambda_3(g_3^{-1}))\mu_3(h_3) = \varphi_4(g_4^{-1})\mu_3(h_3) = \mu_3(h_3^{-1})\mu_3(h_3) = 1$. Da die untere Zeile bei H_3 exakt ist, existiert $h_2 \in H_2$ mit $\mu_2(h_2) = \varphi_3(g_3^{-1})h_3$. Weiters finden wir $g_2 \in G_2$ mit $\varphi_2(g_2) = h_2$, denn φ_2 ist surjektiv. Wir erhalten somit $\varphi_3\big(g_3\lambda_2(g_2)\big) = \varphi_3(g_3)\varphi_3(\lambda_2(g_2)) = \varphi_3(g_3)\mu_2(\varphi_2(g_2)) = \varphi_3(g_3)\mu_2(h_2) = \varphi_3(g_3)\varphi_3(g_3^{-1})h_3 = h_3$. Also ist φ_3 surjektiv. □

III.5.20. Korollar. *Es sei $\varphi : (X, A) \to (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren, sodass $\varphi : X \to Y$ und $\varphi|_A : A \to B$ beides Homotopieäquivalenzen sind. Dann ist $\varphi_* : \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_k(Y, B, \varphi(x_0))$ ein Isomorphismus, für alle $k \geq 1$ und jeden Basispunkt $x_0 \in A$.*

Beweis. Nach Bemerkung III.5.16 haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_k(A, x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \pi_k(X, x_0) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \pi_k(X, A, x_0) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \pi_{k-1}(A, x_0) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\varphi_*"] & \pi_{k-1}(X, x_0) \arrow[d, "\varphi_*"] \\ \pi_k(B, y_0) \arrow[r, "i_*"] & \pi_k(Y, y_0) \arrow[r, "j_*"] & \pi_k(Y, B, y_0) \arrow[r, "\partial"] & \pi_{k-1}(B, y_0) \arrow[r, "i_*"] & \pi_{k-1}(Y, y_0) \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen, siehe Satz III.5.15. Dabei ist $y_0 = \varphi(x_0) \in B$. Da $\varphi : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz ist, muss $\varphi_* : \pi_i(X, x_0) \to \pi_i(Y, y_0)$ eine Isomorphismus sein, $i \geq 0$, siehe Proposition III.4.8. Ebenso ist $\varphi_* : \pi_i(A, x_0) \to \pi_i(B, y_0)$ ein

Isomorphismus, $i \geq 0$. Nach Lemma III.5.19 ist daher auch $\varphi_* : \pi_k(X, A, x_0) \to \pi_k(Y, B, y_0)$ ein Isomorphismus, $k \geq 2$. Wie sich leicht zeigen lässt, bleibt dies auch für $k = 1$ richtig. □

III.5.21. Lemma. *Es sei (X, A) ein Paar von Räumen und $k \geq 0$. Dann sind äquivalent:*

(i) *Zu jeder Abbildung $f : (D^k, S^{k-1}) \to (X, A)$ existiert eine Homotopie $H : D^k \times I \to X$ mit $H_0 = f$, $H_1(D^k) \subseteq A$ und $H(x, t) = f(x)$, für alle $x \in S^{k-1}$ und $t \in I$.*

(ii) *Zu jeder Abbildung $f : (D^k, S^{k-1}) \to (X, A)$ existiert eine Homotopie $H : (D^k \times I, S^{k-1} \times I) \to (X, A)$ mit $H_0 = f$ und $H_1(D^k) \subseteq A$.*

(iii) *Zu jeder Abbildung $f : (D^k, S^{k-1}) \to (X, A)$ existiert eine Homotopie $H : (D^k \times I, S^{k-1} \times I) \to (X, A)$ mit $H_0 = f$ und so, dass H_1 eine konstante Abbildung ist.*

(iv) *Es gilt $\pi_k(X, A, x_0) = 0$ für jeden Basispunkt $x_0 \in A$ falls $k \geq 1$, bzw. im Fall $k = 0$, jede Wegzusammenhangskomponente von X enthält Punkte aus A.*[32]

Beweis. Im Fall $k = 0$ ist die Äquivalenz dieser Aussagen trivial. Sei also o.B.d.A. $k \geq 1$. Die Implikation (i)⇒(ii) ist trivial. Ad (ii)⇒(iii): Sei dazu $f : (D^k, S^{k-1}) \to (X, A)$. Nach Voraussetzung dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $f(D^k) \subseteq A$ gilt. Es ist dann $H(x, t) := f((1-t)x)$ eine Homotopie mit den gewünschten Eigenschaften. Ad (iii)⇒(i): Sei also $H : (D^k \times I, S^{k-1} \times I) \to (X, A)$ eine Homotopie mit $H_0 = f$ und $H_1(x) = x_0$, für alle $x \in D^k$. Die Homotopie $G : D^k \times I \to X$,

$$G(x, t) := \begin{cases} H\big(\frac{2}{2-t}x, t\big) & \text{falls } 0 \leq |x| \leq 1 - t/2, \\ H\big(\frac{1}{|x|}x, 2 - 2|x|\big) & \text{falls } 1 - t/2 \leq |x| \leq 1, \end{cases}$$

erfüllt dann $G_0 = f$, $G_1(D^k) \subseteq A$ und $G(x, t) = f(x)$ für alle $x \in S^{k-1}$ und $t \in I$. Die Implikation (iv)⇒(iii) ist trivial, vgl. Bemerkung III.5.7. Nun zur Implikation (iii)⇒(iv): Sei dazu $f : (D^k, S^{k-1}, s_0) \to (X, A, x_0)$. Wegen Bemerkung III.5.7 genügt es eine Homotopie $H : (D^k \times I, S^{k-1} \times I) \to (X, A)$ mit $H_0 = f$, $H_1 = c_{x_0}$ und $H(s_0, t) = x_0$ für alle $t \in I$ zu konstruieren. Nach Voraussetzung dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass $f(D^k) \subseteq A$ gilt. Es ist dann $H(x, t) := f((1-t)x + ts_0)$ eine Homotopie mit den gewünschten Eigenschaften. □

III.5.22. Definition (n-facher Zusammenhang von Paaren). Ein Paar von Räumen (X, A) heißt *n-zusammenhängend*, $n \geq 0$, falls die vier äquivalenten Bedingungen aus Lemma III.5.21 für jedes $0 \leq k \leq n$ erfüllt sind.

[32] Wir haben $\pi_0(X, A, x_0)$ nicht definiert. Dieses Lemma legt jedoch nahe, dass die Aussage $\pi_0(X, A, x_0) = 0$ gerade bedeuten sollte, dass jede Wegzusammenhangskomponente von X Punkte aus A enthält.

III.5.23. Bemerkung. Ein Paar (X,A) ist daher 0-zusammenhängend genau dann, wenn jede Wegzusammenhangskomponente von X Punkte aus A enthält. Das Paar (X,A) ist n-zusammenhängend wenn jede Wegzusammenhangskomponente von X Punkte aus A enthält und für jeden Basispunkt $x_0 \in A$ und jedes $1 \leq k \leq n$ gilt $\pi_k(X,A,x_0)=0$. Nach Bemerkung III.5.8 genügt es, dass dies für *einen* Basispunkt aus jeder Wegzusammenhangskomponente von A erfüllt ist.

III.5.24. Proposition. *Für ein Paar (X,A) und $n \geq 0$ sind äquivalent:*
(i) *(X,A) ist n-zusammenhängend.*
(ii) *Für jeden Basispunkt $x_0 \in A$ induziert die Inklusion Isomorphismen $\pi_k(A,x_0) \cong \pi_k(X,x_0)$ für $0 \leq k < n$, und eine Surjektion $\pi_n(A,x_0) \to \pi_n(X,x_0)$.*

Beweis. Dies folgt aus der langen exakten Sequenz des Paares (X,A), siehe Satz III.5.15. □

Der Rest dieses Abschnitts ist dem Beweis von folgendem Resultat gewidmet.

III.5.25. Satz. *Es gilt*
(i) *$\pi_k(S^n)=0$, für alle $0 \leq k < n$, sowie*
(ii) *$\pi_k(D^n,S^{n-1})=0$, für alle $1 \leq k < n$.*

Dh. S^n und das Paar (D^n,S^{n-1}) sind beide $(n-1)$-zusammenhängend.

III.5.26. Lemma (Approximation durch glatte Abbildungen). *Es sei $f: D^k \to \mathbb{R}^n$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine C^∞-Abbildung $\tilde f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, sodass $\|\tilde f(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$, für alle $x \in D^k$.*

Beweis. Wir setzen zunächst f zu einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ fort, etwa durch $f(x) := f(x/\|x\|)$, $\|x\| \geq 1$. Da stetige Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig sind finden wir $\delta > 0$, sodass

$$\|f(x) - f(x-y)\| \leq \varepsilon, \qquad \text{für alle } x \in D^k \text{ und } y \in D^k_\delta. \tag{III.7}$$

Hier bezeichnet $D^k_\delta = \{y \in \mathbb{R}^k : \|y\| \leq \delta\}$ den abgeschlossenen Ball mit Radius δ und Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^k$. Wähle eine glatte Funktion $\mu: \mathbb{R}^k \to [0,\infty)$ mit $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq D^k_\delta$, dh. $\mu(y)=0$ falls $\|y\| \geq \delta$, und $\int_{\mathbb{R}^k} \mu(y)dy = 1$. Betrachte nun die Funktion $\tilde f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $\tilde f := f * \mu$,

$$\tilde f(x) := \int_{\mathbb{R}^k} f(x-y)\mu(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^k} f(y)\mu(x-y)\,dy. \tag{III.8}$$

Dies sind gewöhnliche Riemannintegrale stetiger Funktionen die wegen des kompakten Trägers von μ konvergieren. Die Gleichheit der beiden Integrale folgt aus der Transformationsformel angewandt auf die Substitution $y \leftrightarrow x-y$. Alle partiellen Ableitungen von $\tilde f$ existieren, $\partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_l}\tilde f = f * (\partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_l}\mu)$, dh.

$$(\partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_l}\tilde f)(x) = \int_{\mathbb{R}^k} f(y)\big((\partial_{i_1}\partial_{i_2}\cdots\partial_{i_l}\mu)(x-y)\big)dy$$

gegeben. Dies folgt aus der zweiten Integraldarstellung von $\tilde{f}$ in (III.8) durch Vertauschen von Integration und Differentiation, was auf Grund des kompakten Trägers von μ gerechtfertigt ist. Insbesondere ist $\tilde{f}$ eine glatte Abbildung. Aus der ersten Integraldarstellung von $\tilde{f}$ in (III.8) und $\int_{\mathbb{R}^k} \mu(y)dy = 1$ erhalten wir

$$f(x) - \tilde{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^k} \big(f(x) - f(x-y)\big)\mu(y)\,dy = \int_{D^k_\delta} \big(f(x) - f(x-y)\big)\mu(y)\,dy$$

wobei die zweite Gleichheit aus $\operatorname{supp}(\mu) \subseteq D^k_\delta$ folgt. Zusammen mit (III.7) erhalten wir

$$\|f(x) - \tilde{f}(x)\| \leq \int_{D^k_\delta} \|f(x) - f(x-y)\|\mu(y)\,dy \leq \varepsilon \int_{D^k_\delta} \mu(y)\,dy = \varepsilon,$$

für alle $x \in D^k$. □

III.5.27. Lemma. *Es sei $k < n$ und $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Dann ist $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{f}(D^k)$ dicht in $\mathbb{R}^n$.*

Beweis. Es genügt offensichtlich zu zeigen, dass $\mathbb{R}^n \setminus \tilde{f}(I^k)$ dicht in $\mathbb{R}^n$ ist. Sei $y \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ und W der Würfel mit Mittelpunkt y und Seitenlänge ε. Es ist $W \setminus \tilde{f}(I^k) \neq \emptyset$ zu verifizieren. Da glatte Funktionen auf kompakten Mengen gleichmäßig Lipschitzstetig sind existiert eine Konstante $C > 0$, sodass

$$\|f(x_2) - f(x_1)\| \leq C\|x_2 - x_1\|, \qquad \text{für alle } x_1, x_2 \in I^k. \tag{III.9}$$

Da $k < n$ finden wir $N \in \mathbb{N}$ mit $N^k\big(\frac{C\sqrt{k}}{N}\big)^n < \varepsilon^n$. Wir unterteilen I^k in N^k viele Würfel der Seitenlänge $1/N$. Ist Q einer dieser Würfel, und bezeichnet x_0 seinen Mittelpunkt, dann erhalten wir aus (III.9) die Abschätzung $\|f(x) - f(x_0)\| \leq \frac{C\sqrt{k}}{2N}$, für alle $x \in Q$. Insbesondere ist $f(Q)$ in einem n-dimensionalen Würfel mit Mittelpunkt $f(x_0)$ und Seitenlänge $\frac{C\sqrt{k}}{N}$ enthalten. Wir finden daher N^k viele Würfel $W_i \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Seitenlänge $\frac{C\sqrt{k}}{N}$ und so, dass $f(I^k) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N^k} W_i$. Für das Volumen erhalten wir $\operatorname{vol}\big(\bigcup_{i=1}^{N^k} W_i\big) \leq N^k\big(\frac{C\sqrt{k}}{N}\big)^n < \varepsilon^n = \operatorname{vol}(W)$. Es folgt daher $W \setminus \bigcup_{i=1}^{N^k} W_i \neq \emptyset$ und weil $\tilde{f}(I^k) \subseteq \bigcup_{i=1}^{N^k} W_i$ auch $W \setminus \tilde{f}(I^k) \neq \emptyset$. □

III.5.28. Lemma. *Es sei $k < n$ und $f : (D^k, \partial D^k) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2})$. Dann existiert eine Homotopie $H : (D^k \times I, \partial D^k \times I) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2})$ mit $H_0 = f$ und $H_1(D^k) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2}$.*

Beweis. Da $f(\partial D^k)$ kompakt und $\mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2}$ offen ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$\big\{f(x) + y \bigm| x \in \partial D^k,\ \|y\| \leq \varepsilon\big\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2}. \tag{III.10}$$

Nach Lemma III.5.26 existiert eine glatte Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\|\tilde{f}(x) - f(x)\| \leq \varepsilon, \qquad \text{für } x \in D^k. \tag{III.11}$$

Definiere $G : (D^k \times I, \partial D^k \times I) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2})$, $G(x,t) := f(x) + t\big(\tilde f(x) - f(x)\big)$. Beachte, dass wegen (III.10) und (III.11) tatsächlich $G_t(\partial D^k) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2}$ gilt, $t \in I$. Offensichtlich ist $G_0 = f$ und $G_1 = \tilde f$. Nach Lemma III.5.27 ist $\mathbb{R}^n \setminus \tilde f(D^k)$ dicht in $\mathbb{R}^n$, also existiert $y_0 \in B^n_{1/2}$ mit $y_0 \notin \tilde f(D^k)$. Betrachte nun $r : \mathbb{R}^n \setminus \{y_0\} \to S^{n-1}$, $r(y) := y_0 + \lambda(y)\frac{y - y_0}{\|y - y_0\|}$, wobei

$$\lambda(y) := -\frac{\langle y_0, y - y_0\rangle}{\|y - y_0\|} + \sqrt{\frac{\langle y_0, y - y_0\rangle^2}{\|y - y_0\|^2} - \|y_0\|^2 + 1},$$

dh. $r(y)$ ist der Schnittpunkt des Strahls von y_0 durch y mit S^{n-1}. Beachte, dass für $y \in \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2}$ und $t \in I$ stets $(1-t)y + t\,r(y) \in \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2}$ gilt. Wir erhalten daher eine Homotopie $\tilde G : (D^k \times I, \partial D^k \times I) \to (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2})$, $\tilde G(x,t) := (1-t)\tilde f(x) + t\,r(\tilde f(x))$. Offensichtlich gilt $\tilde G_0 = \tilde f$ und $\tilde G_1(\partial D^k) \subseteq S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2}$. Setzen wir G und $\tilde G$ zusammen, so erhalten wir die gewünschte Homotopie H. □

Beweis von Satz III.5.25. Aus Lemma III.5.28 und Proposition III.5.24 folgt $\pi_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2}) = 0$ für $1 \le k < n$. Da die Inklusionen $D^n \to \mathbb{R}^n$ und $S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus D^n_{1/2}$ Homotopieäquivalenzen sind, erhalten wir $\pi_k(D^n, S^{n-1}) = 0$, für $1 \le k < n$, siehe Korollar III.5.20. Damit ist (ii) gezeigt. Mit Hilfe der langen exakten Sequenz des Paares (D^n, S^{n-1}) haben wir in Beispiel III.5.17 $\pi_k(D^n, S^{n-1}) \cong \pi_{k-1}(S^{n-1})$ hergeleitet, $k \ge 1$ und $n \ge 0$. Aus (ii) folgt daher nun auch (i). □

III.6. Faserungen. Eine stetige Abbildung $p : E \to B$ wird *Faserung* oder *Hurewicz-Faserung* genannt wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich allen topologischen Räumen hat, dh. ist $H : X \times I \to B$ eine Homotopie und $\tilde h : X \to E$ stetig mit $p \circ \tilde h = H_0$, dann existiert eine Homotopie $\tilde H : X \times I \to E$ mit $p \circ \tilde H = H$ und $\tilde H_0 = \tilde h$. Es wird hier nicht verlangt, dass die Homotopie $\tilde H$ eindeutig ist, und sie wird es i.A. auch nicht sein.

III.6.1. Beispiel. Sind B und F topologische Räume, dann ist die kanonische Projektion $p : B \times F \to B$ ist eine sogenannte *triviale* Hurewicz-Faserung. Sei dazu $H : X \times I \to B$ eine Homotopie und $h : X \to B \times F$ mit $p \circ h = H_0$. Bezeichne die Komponenten von h mit $h = (h_B, h_F)$. Es gilt dann $h_B = H_0$. Setzen wir $\tilde H : X \times I \to B \times F$, $\tilde H(x,t) := (H(x,t), h_F(x))$ dann gilt $p \circ \tilde H = H$ und $\tilde H_0 = (h_B, h_F) = h$.

III.6.2. Beispiel. Jede Überlagerung ist auch eine Hurewicz-Faserung, siehe Satz II.3.3.

Eine stetige Abbildung $p : E \to B$ wird *Serre-Faserung* genannt wenn sie die Homotopieliftungseigenschaft bezüglich aller Würfel I^n hat, dh. ist $H : I^n \times I \to B$ eine Homotopie und $\tilde h : I^n \to E$ stetig mit $p \circ \tilde h = H_0$, dann existiert eine Homotopie $\tilde H : I^n \times I \to E$ mit $p \circ \tilde H = H$ und $\tilde H_1 = \tilde h$.

III.6.3. Beispiel. Jede Hurewicz-Faserung ist auch eine Serre-Faserung.

Eine stetige Abbildung $p : E \to B$ wird *(lokal triviales) Faserbündle* genannt, wenn zu jedem Punkt $x \in B$ eine Umgebung U von x, ein topologischer Raum F und ein Homöomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$ mit $p_U \circ \varphi = p$ existieren. Dabei bezeichnet $p_U : U \times F \to U$ die kanonische Projektion. Jeder solche Homöomorphsimus φ wird als *Trivialisierung* von p über U bezeichnet. Ist $x \in B$ so wird $p^{-1}(x)$ die *Faser* über x genannt.

III.6.4. Beispiel. Sind B und F zwei topologische Räume, dann ist die kanonische Projektion $p : B \times F \to B$ ein Faserbündel.

III.6.5. Bemerkung. Ist B ein parakompakter Hausdorffraum und $p : E \to B$ ein Faserbündel, dann ist p auch eine Hurewicz-Faserung, siehe [**11**, Corollary 14 in Section 2.7].

III.6.6. Bemerkung. Wirkt eine kompakte Lie Gruppe G frei auf einer glatten Mannigfaltigkeit M, dann ist die Orbitprojektion $M \to M/G$ ein Faserbündle, siehe die Vorlesung über Differentialgeometrie. Dies liefert eine Menge interessanter Faserbündel, wir werden von diesem Resultat aber nicht Gebrauch machen.

III.6.7. Proposition. *Jedes Faserbündel ist eine Serre-Faserung.*

Beweis. Es sei $p : E \to B$ ein Faserbündle. Es ist die Homotopieliftunseigenschaft für Würfel I^n zu verifizieren. Sei dazu $H : I^n \times I \to B$ eine Homotopie und $\tilde{h} : I^n \to E$ mit $p \circ \tilde{h} = H_0$. Es ist eine Abbildung $\tilde{H} : I^n \times I \to E$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$ zu konstruieren. Wir nehmen zunächst an, es gibt eine offene Teilmenge $U \subseteq B$ und eine Trivialisierung $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times F$, $p_U \circ \varphi = p|_{p^{-1}(U)}$ mit $H(I^n \times I) \subseteq U$. Dann lässt sich die gesuchte Abbildung $\tilde{H}$ sofort angeben,

$$\tilde{H}(s_1, \dots, s_n, t) := \varphi^{-1}\big(H(s_1, \dots, s_n, t), p_F(\varphi(\tilde{h}(s_1, \dots, s_n)))\big),$$

wobei $p_F : U \times F \to F$ die kanonische Projektion bezeichnet. Etwas allgemeiner lässt sich damit folgendes Problem lösen. Ist $H : X \to U$ stetig, $A \subseteq X$ ein Retrakt und $\tilde{h} : A \to E$ mit $p \circ \tilde{h} = H|_A$, dann existiert eine Abbildung $\tilde{H} : X \to E$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}|_A = \tilde{h}$. Um eine solche Abbildung $\tilde{H}$ angeben zu können wählen wir eine Retraktion $r : X \to A$ und setzen $\tilde{H} := \varphi^{-1} \circ (H, p_F \circ \varphi \circ \tilde{h} \circ r)$. Diese hat dann die gewünschten Eigenschaften.

Nun zum allgemeinen Fall. Ist $k \geq 1$ dann können wir $I^n \times I$ in k^{n+1}-viele Würfel zerlegen,

$$Q_{i_1,\dots,i_n,j} := \left[\tfrac{i_1-1}{k}, \tfrac{i_1}{k}\right] \times \cdots \times \left[\tfrac{i_1-1}{k}, \tfrac{i_1}{k}\right] \times \left[\tfrac{j-1}{k}, \tfrac{j}{k}\right], \quad i_1, \dots, i_n, j \in \{1, \dots, k\}.$$

Auf Grund der Kompaktheit von $I^n \times I$ kann k so gewählt werden, dass das Bild $H(Q_{i_1,\dots,i_n,j})$ jedes solchen Würfels in einer offenen Teilmenge $U_{i_1,\dots,i_k,j}$ von B enthalten ist über der das Faserbündel p trivial ist. Nach obigen Bemerkungen lässt sich die Einschränkung $H|_{Q_{i_1,\dots,i_n,j}}$ zu einer stetigen Abbildung $Q_{i_1,\dots,i_n,j} \to E$ liften, wobei dieser Lift auf einem Retrakt von $Q_{i_1,\dots,i_n,j}$ beliebig vorgegeben werden kann. Damit lässt sich nun der gesuchte Lift $\tilde{H}$ induktiv auf den Würfeln $Q_{1,\dots,1,1}$, $Q_{1,\dots,1,2}$, $\dots$, $Q_{1,\dots,1,k}$, $Q_{1,\dots,1,2,1}$, $Q_{1,\dots,1,2,2}$, $\dots$, $Q_{1,\dots,1,2,k}$, $\dots$, $Q_{1,\dots,1,k,1}$, $Q_{1,\dots,1,k,2}$, $\dots$, $Q_{1,\dots,1,k,k}$, $\dots$, $Q_{1,\dots,2,1,1}$, $\dots$, $Q_{k,\dots,k,k}$ konstruieren. Ist $Q_{i_1,\dots,i_n,j}$ einer dieser Würfel und bezeichnet B die Vereinigung von $I^n \times \{0\}$ mit all den Vorgängern von $Q_{i_1,\dots,i_n,j}$ in dieser Liste, dann ist $A := B \cap Q_{i_1,\dots,i_n,j}$ ein Retrakt von $Q_{i_1,\dots,i_n,j}$. Der auf B bereits konstruierte, bzw. durch $\tilde{h}$ vorgegebene, Lift lässt sich daher stetig zu einem Lift auf $B \cup Q_{i_1,\dots,i_n,j}$ fortsetzen. □

III.6.8. Lemma. *Es sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung. Weiters seien $H : I^n \to B$ und $\tilde{h} : J^{n-1} \to E$ stetig, sodass $p \circ \tilde{h} = H|_{J^{n-1}}$. Dann existiert eine stetige Abbildung $\tilde{H} : I^n \to E$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}|_{J^{n-1}} = \tilde{h}$.*

Beweis. Dies folgt aus der Tatsache, dass das Paar (I^n, J^{n-1}) homöomorph zum Paar $(I^n, I^{n-1} \times \{0\})$ ist. □

III.6.9. Proposition. *Es sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung, $x_0 \in E$, $b_0 := p(x_0)$ und $F := p^{-1}(b_0)$. Dann induziert p einen Isomorphismus $\pi_n(E, F, x_0) \cong \pi_n(B, b_0)$, für alle $n \geq 1$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$ surjektiv ist. Sei dazu $[f] \in \pi_n(B, b_0)$, wobei $f : (I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$. Nach Lemma III.6.8 existiert eine stetige Abbildung $\tilde{f} : I^n \to E$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}|_{J^{n-1}} = c_{x_0}$. Es folgt $\tilde{f}(\partial I^n) \subseteq p^{-1}(b_0) = F$, also definiert $\tilde{f} : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (E, F, x_0)$ ein Element $[\tilde{f}] \in \pi_n(E, F, x_0)$, für das offensichtlich $p_*([\tilde{f}]) = [p \circ \tilde{f}] = [f]$ gilt. Nun zur Injektivität von p_*. Seien dazu $[f], [g] \in \pi_n(E, F, x_0)$ mit $f, g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (E, F, x_0)$. Ist $p_*([f]) = p_*([g]) \in \pi_n(B, b_0)$, dann existiert eine Homotopie $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (B, b_0)$ von $H_0 = p \circ f$ nach $H_1 = p \circ g$. Nach Lemma III.6.8 existiert eine stetige Abbildung $\tilde{H} : I^n \times I \to E$ mit $p \circ \tilde{H} = H$, $\tilde{H}_0 = f$, $\tilde{H}_1 = g$ und $\tilde{H}|_{J^{n-1} \times I} = c_{x_0}$. Es folgt $\tilde{H}(\partial I^n \times I) \subseteq p^{-1}(b_0) = F$. Also ist $\tilde{H} : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \to (E, F, x_0)$ eine Homotopie von f nach g und damit $[f] = [g] \in \pi_n(E, F, x_0)$. □

III.6.10. Satz (Lange exakte Sequenz einer Faserung). *Es sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung, $x_0 \in E$, $b_0 := p(x_0)$ und $F := p^{-1}(b_0)$. Dann ist die folgende Sequenz exakt:*[33]

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b_0)$$

Dabei sind $i_* : \pi_n(F, x_0) \to \pi_n(E, x_0)$ und $p_* : \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$ die von der Inklusion $i : (F, x_0) \to (E, x_0)$ und der Projektion $p : (E, x_0) \to (B, b_0)$

[33]Bis auf die letzten drei Abbildungen sind dies alles Gruppenhomomorphismen. Bei $\pi_1(B, b_0)$, $\pi_0(F, x_0)$ und $\pi_0(E, x_0)$ ist die Exaktheit wie in Bemerkung III.5.14 aufzufassen.

induzierten Abbildungen. Der Randoperator $\partial : \pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0)$ ist durch die Komposition $\pi_n(B, b_0) \xrightarrow{(p_*)^{-1}} \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{\partial^{pair}} \pi_{n-1}(F, x_0)$ gegeben, wobei $p_* : \pi_n(E, F, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$ den Isomorphismus aus Proposition III.6.9 ist und $\partial^{pair} : \pi_n(E, F, x_0) \to \pi_{n-1}(F, x_0)$ der Randoperator in der langen exakten Sequenz des Paares (E, F) bezeichnet, siehe Satz III.5.15.

Beweis. Von der Exaktheit bei $\pi_0(E, x_0)$ abgesehen folgt dies sofort aus Satz III.5.15 und der offensichtlichen Tatsache, dass die Komposition $\pi_n(E, x_0) \to \pi_n(E, F, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b_0)$ mit $p_* : \pi_n(E, x_0) \to \pi_n(B, b_0)$ übereinstimmt. Die Exaktheit bei $\pi_0(E, x_0)$ lässt sich ohne Probleme direkt aus der Homotopieliftungseigenschaft herleiten. □

III.6.11. Bemerkung. Wenden wir Satz III.6.10 auf eine punktierte Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ an, vgl. Beispiel III.6.2, so erhalten wir eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \to 0 \to \pi_n(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_n(X, x_0) \to 0 \to \pi_{n-1}(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi_{n-1}(X, x_0) \to 0 \to \cdots$$

denn aus der Diskretheit der Faser $F := p^{-1}(x_0)$ folgt $\pi_n(F, x_0) = 0$ für alle $n \geq 1$. Für Überlagerungen reduziert sich Satz III.6.10 daher auf die Aussage von Satz III.3.19.

III.6.12. Beispiel (Hopffaserung). Wir betrachten $\mathbb{C}\mathrm{P}^n = S^{2n+1}/\sim$, vgl. Beispiel I.6.8, und die Hopffaserung $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $p(z_0, \dots, z_n) = [(z_0, \dots, z_n)]$. Dies ist ein Faserbündel mit Fasern homöomorph zu S^1. Um dies einzusehen betrachte wir die offene Menge $U_i := \big\{[(z_0, \dots, z_n)] : z_i \neq 0\big\} \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Wegen $\bigcup_{i=0}^n U_i = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ genügt es Trivialisierungen von p über U_i zu konstruieren. Es gilt $p^{-1}(U_i) = \{(z_0, \dots, z_n) \in S^{2n+1} : z_i \neq 0\}$. Die Abbildung $\varphi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times S^1$, $\varphi_i(z_0, \dots, z_n) := \big(p(z_0, \dots, z_n), \frac{z_i}{|z_i|}\big)$ ist ein Homöomorphismus mit Inverser $\varphi_i^{-1} : U_i \times S^1 \to p^{-1}(U_i)$, $\varphi_i^{-1}\big([(z_0, \dots, z_n)], \lambda\big) = \frac{\lambda |z_i|}{z_i}(z_0, \dots, z_n)$. Also ist φ_i eine Trivialisierung von p über U_i, und p daher ein Faserbündel. Nach Proposition III.6.7 ist p daher eine Serre-Faserung. Aus Satz III.6.10 erhalten wir eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen

$$\cdots \to \pi_k(S^1) \to \pi_k(S^{2n+1}) \xrightarrow{p_*} \pi_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(S^1) \to \cdots \tag{III.12}$$

Für $k \geq 3$ ist $\pi_k(S^1) = 0 = \pi_{k-1}(S^1)$, aus der Exaktheit von (III.12) folgt daher, dass die Projektion $p : S^{2n+1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ Isomorphismen

$$\pi_k(S^{2n+1}) \cong \pi_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n), \qquad k \geq 3,\ n \geq 0, \tag{III.13}$$

induziert, vgl. Beispiel III.5.13. Ist $n \geq 1$ dann gilt $\pi_1(S^{2n+1}) = 0 = \pi_0(S^1)$ und die Exaktheit von (III.12) impliziert $\pi_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) = 0$. Daher sind alle $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $n \geq 0$, einfach zusammenhängend, vgl. Beispiel I.9.17. Ist $n \geq 1$ so gilt auch $\pi_2(S^{2n+1}) = 0 = \pi_1(S^{2n+1})$, siehe Satz III.5.25, und aus der Exaktheit von (III.12) erhalten wir $\pi_2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, $n \geq 1$. Im Fall $n = 1$ haben wir einen Homöomorphismus $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$, es folgt daher $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ sowie

$$\pi_k(S^3) \cong \pi_k(S^2), \qquad k \geq 3. \tag{III.14}$$

III.6.13. Bemerkung. Die Berechnung von $\pi_2(S^2)$ in Beispiel III.6.12 ermöglicht es einen Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes, vgl. Satz I.5.3, für stetige Abbildungen $f : D^3 \to D^3$ zu geben. Hätte f nämlich keinen Fixpunkt dann können wir wie im Beweis von Satz I.5.3 eine Reraktion $r : D^3 \to S^2$ definieren, dh. $r \circ \iota = \mathrm{id}_{S^2}$ wobei $\iota : S^2 \to D^3$ die kanonische Inklusion bezeichnet. Für die induzierten Homomorphismen zwischen den zweiten Homotopiegruppen folgt $r_* \circ \iota_* = \mathrm{id}_{\pi_2(S^2)}$ aber auch $r_* \circ \iota_* = 0$, denn $\pi_2(D^3) = 0$. Also ist $\mathrm{id}_{\pi_2(S^2)} = 0$ und damit auch $\pi_2(S^2) = 0$, ein Widerspruch zu $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

III.6.14. Bemerkung. Die Tatsache, dass $\pi_2(S^2) \neq 0$, vgl. Beispiel III.6.12, erlaubt es auch zu zeigen, dass $\mathbb{R}^3$ nicht zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph sein kann, $n \neq 3$. Für $n < 3$ haben wir dies bereits gezeigt, siehe Satz I.7.5. Sei daher $n > 3$. Wäre $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ ein Homöomorphismus und $P \in \mathbb{R}^n$, dann liefert die Einschränkung von f auch einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{Q\}$, $Q := f(P)$. Es folgt $\pi_2(S^{n-1}) \cong \pi_2(\mathbb{R}^n \setminus \{P\}) \cong \pi_2(\mathbb{R}^3 \setminus \{Q\}) \cong \pi_2(S^2)$. Nach Satz III.5.25 gilt $\pi_2(S^{n-1}) = 0$ und dies liefert nun einen Widerspruch zu $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. Also kann es keinen Homöomorphismus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$, $n \geq 3$, geben.

III.6.15. Beispiel. Auf $S^{4n+3} \subseteq \mathbb{H}^{n+1}$ betrachte die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{H} : \lambda x = y$ und die Projektion auf den Quotientenraum $p : S^{4n+3} \to \mathbb{H}\mathrm{P}^n = S^{4n+3}/{\sim}$, vgl. Aufgabe 17. Die Abbildung p ist ein Faserbündel mit Fasern homöomorph zu S^3, siehe Aufgabe 29. Aus der damit assozierten langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen folgt, siehe Aufgabe 30,

$$\pi_k(\mathbb{H}\mathrm{P}^n) \cong \pi_{k-1}(S^3) \times \pi_k(S^{4n+3}), \qquad k \geq 1,\ n \geq 1. \tag{III.15}$$

Insbesondere gilt $\pi_k(\mathbb{H}\mathrm{P}^n) \cong \pi_{k-1}(S^3)$, $1 \leq k \leq 4n+2$ und $\pi_0(\mathbb{H}\mathrm{P}^n) \cong \pi_1(\mathbb{H}\mathrm{P}^n) \cong \pi_2(\mathbb{H}\mathrm{P}^n) \cong \pi_3(\mathbb{H}\mathrm{P}^n) = 0$, dh. $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ 3-zusammenhängend, $n \geq 0$. Im Fall $n = 1$ haben wir einen Homöomorphismus $\mathbb{H}\mathrm{P}^1 \cong S^4$ und daher ein Faserbündel $S^7 \to S^4$ mit Fasern homöomorph zu S^3. Aus (III.15) erhalten wir in diesem Fall

$$\pi_k(S^4) \cong \pi_{k-1}(S^3) \times \pi_k(S^7), \qquad k \geq 1. \tag{III.16}$$

III.6.16. Beispiel. In Aufgabe 31 wird ein Faserbündel $S^{15} \to S^8$ mit Fasern homöomorph zu S^7 konsturiert. Aus der ensprechenden langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen erhalten wir

$$\pi_k(S^8) \cong \pi_{k-1}(S^7) \times \pi_k(S^{15}), \qquad k \geq 1. \tag{III.17}$$

III.6.17. Bemerkung. Um einen Eindruck der Komplexität der höheren Homotopiegruppen zu bekommen seien hier einige Resultate über die Homotopiegruppen der Sphären zusammengefasst. Die folgende Tabelle zeigt die Gruppe

$\pi_k(S^n)$ in der k-ten Zeile und n-Spalte.

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0
5	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0
6	0	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0
7	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
8	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0	0
9	0	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	0
10	0	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0
11	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$

Die erste Spalte haben wir in Satz I.4.1 und Beispiel III.3.20 verifiziert. In Beispiel III.6.12 haben $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ gezeigt. Die Tatsache, dass ab $k = 3$ die zweite und dritte Spalte dieser Tabelle übereinstimmen haben wir in selbigen Beispiel aus der Hopffaserung $S^3 \to S^2$ hergeleitet, siehe (III.14). Dass in der rechten oberen Hälfte dieser Tabelle nur triviale Gruppen anzutreffen sind folgt aus Satz III.5.25. Auch die Isomorphismen (III.16) und (III.17) sind für kleine k in dieser Tabelle ersichtlich. Auch sei hier auf ein Phänomen hingewiesen, dass wir in Abschnitt III.9 beweisen werden. Ist $k \geq 0$ fix und betrachten wir die Gruppen $\pi_{k+n}(S^n)$ dann verleitet die Tabelle oben zu der Vermutung, dass diese Gruppen für grosse n alle isomorph sind. Dies ist tatsächlich der Fall, siehe Bemerkung III.9.20. Die Einträge in der Diagonale der Tabelle, $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, werden wir in Satz III.9.11 verifizieren. Die meisten Gruppen in obiger Tabelle sind endlich. Tatsächlich gilt auf Grund eines Resultats von Serre, dass $\pi_k(S^n)$ mit Ausnahme von $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_{4n-1}(S^{2n})$ stets endlich sind.

III.6.18. Beispiel (Homotopiegruppen der orthogonale Gruppen). Betrachte die Abbildung $p : \mathrm{SO}_{n+1} \to S^n$, $p(A) := Ae_1$, wobei $e_1 \in S^n$ den ersten Einheitsvektor bezeichnet. Wir wollen zunächst verifizieren, dass p ein Faserbündel mit Fasern homöomorph zu SO_n ist. Wir werden im folgenden SO_n als Untergruppe von SO_{n+1} auffassen, $\mathrm{SO}_n = \{A \in \mathrm{SO}_{n+1} : Ae_1 = e_1\} = p^{-1}(e_1)$. Für $A, B \in \mathrm{SO}_{n+1}$ gilt offensichtlich $p(A) = p(B)$ genau dann wenn $B^{-1}A \in \mathrm{SO}_n$. Sei nun $b_0 \in S^n$ und wähle $b_1, \dots, b_n \in S^n$, sodass $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathrm{SO}_{n+1}$. Dann ist $U := \{x \in S^n : \det(x, b_1, \dots, b_n) > 0\}$ eine offene Umgebung von b_0. Wir werden nun eine Trivialisierung von p über U konstruieren. Wir erinnern uns dazu, dass $\mathrm{SO}_{n+1} \times \Delta_{n+1}(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}^+_{n+1}(\mathbb{R})$, $(A, D) \mapsto AD$, einen Homöomorphismus definiert, siehe Beispiel I.7.12. Wir bezeichnen den inversen Homöomorphismus mit $(\psi_1, \psi_2) : \mathrm{GL}^+_{n+1}(\mathbb{R}) \to \mathrm{SO}_{n+1} \times \Delta_{n+1}(\mathbb{R})$. Es ist dann $\sigma : U \to \mathrm{SO}_{n+1}$, $\sigma(x) := \psi_1(x, b_1, \dots, b_n)$, eine stetige Abbildung mit $p(\sigma(x)) = x$, für $x \in U$, denn aus $\psi_1(x, b_1, \dots, b_n)\psi_2(x, b_1, \dots, b_n) = (x, b_1, \dots, b_n)$ und $|x| = 1$

folgt, dass die erste Spalte von $\psi_2(x, b_1, \dots, b_n)$ mit dem ersten Einheitvektor e_1 übeeinstimmen muss. Für $A \in p^{-1}(U)$ erhalten wir $p(\sigma(p(A))) = p(A)$, also $\sigma(p(A))^{-1}p(A) \in \mathrm{SO}_n \subseteq \mathrm{SO}_{n+1}$. Wir definieren nun die gesuchte Trivialisierung durch $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times \mathrm{SO}_n$, $\varphi(A) := \big(p(A), \sigma(p(A))^{-1}A\big)$. Dies ist tatsächlich ein Homöomorphismus mit Inverser $U \times \mathrm{SO}_n \to p^{-1}(U)$, $\big(x, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)\big) \mapsto \sigma(x)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $p : \mathrm{SO}_{n+1} \to S^n$ ein Faserbündel und daher auch eine Serre Faserung, siehe Proposition III.6.7. Aus Satz III.6.10 erhalten wir eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen

$$\cdots \to \pi_{k+1}(S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_k(\mathrm{SO}_n) \xrightarrow{i_*} \pi_k(\mathrm{SO}_{n+1}) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^n) \to \cdots \tag{III.18}$$

wobei $i : \mathrm{SO}_n \to \mathrm{SO}_{n+1}$ die Inklusion bezeichnet. Für $k = 0$ und $n \geq 1$ ist $\pi_0(S^n) = 0$ und wegen der Exaktheit von (III.18) daher $i_* : \pi_0(\mathrm{SO}_n) \to \pi_0(\mathrm{SO}_{n+1})$ surjektiv. Induktiv folgt $\pi_0(\mathrm{SO}_n) = 0$, denn offensichtlich ist $\pi_0(\mathrm{SO}_1) = 0$. Wir sehen daher, dass SO_n für jedes $n \geq 1$ wegzusammenhängend ist. Für $k + 2 \leq n$ ist $\pi_{k+1}(S^n) = 0 = \pi_k(S^n)$, siehe Satz III.5.25, wegen der Exaktheit von (III.18) induziert die Inklusion $i : \mathrm{SO}_n \to \mathrm{SO}_{n+1}$ daher Isomorphismen $\pi_k(\mathrm{SO}_n) \cong \pi_k(\mathrm{SO}_{n+1})$, $k + 2 \leq n$. Mittels Induktion folgt

$$\pi_k(\mathrm{SO}_{k+2}) \cong \pi_k(\mathrm{SO}_n), \qquad k + 2 \leq n. \tag{III.19}$$

Für hinreichend große n ist daher $\pi_k(\mathrm{SO}_n)$ unabhängig von n, dies wird als *Stabilität* bezeichnet. Etwa erhalten wir

$$\mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(\mathrm{SO}_3) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_4) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_5) \cong \cdots,$$

denn $S^3 \to S^3/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}_3$ ist die universelle Überlagerung von SO_3 und daher $\pi_1(\mathrm{SO}_3) \cong \mathbb{Z}_2$, vgl. die Beispiele II.5.5 und II.6.3. Da $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ ist $\pi_1(\mathrm{SO}_2) \cong \mathbb{Z}$. Für die stabilen zweiten Homotopiegruppen erhalten wir

$$0 = \pi_2(\mathrm{SO}_4) \cong \pi_2(\mathrm{SO}_5) \cong \pi_2(\mathrm{SO}_6) \cong \cdots,$$

denn aus der Überlagerung $S^3 \times S^3 \to \mathrm{SO}_4$, siehe Beispiel II.5.10, folgt mittels Satz III.3.19 und Satz III.5.25, $\pi_2(\mathrm{SO}_4) \cong \pi_2(S^3 \times S^3) \cong \pi_2(S^3) \times \pi_2(S^3) = 0$. Im nicht stabilen Bereich gilt $\pi_2(\mathrm{SO}_2) = 0$, denn $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$, und $\pi_2(\mathrm{SO}_3) = 0$, auf Grund der Überlagerung $S^3 \to \mathrm{SO}_3$.

Da die Inklusion $\mathrm{SO}_n \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ eine Homotopieäquivalenz ist, siehe Beispiel I.8.14, gilt $\pi_k(\mathrm{SO}_n) \cong \pi_k(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}))$. Folglich sind alle $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ wegzusammenhängend und es gilt $\pi_1(\mathrm{GL}_1^+(\mathbb{R})) = 0$, $\pi_1(\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}_2$, $n \geq 3$, sowie $\pi_2(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})) = 0$, $n \geq 1$. Auch die Inklusion $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ ist eine Homotopieäquivalenz und daher $\pi_k(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) \cong \pi_k(\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}))$.

Aus dem Wegzusammenhang von SO_n folgt auch, dass O_n genau zwei Wegzusammenhangskomponenten besitzt, $\mathrm{O}_n = \mathrm{SO}_n \sqcup \{A \in \mathrm{O}_n : \det A = -1\}$. Ist $B \in \mathrm{O}_n$ und $\det B = -1$ dann liefert Multiplikation mit B einen Homöomorphismus $\mathrm{SO}_n \cong \{A \in \mathrm{O}_n : \det A = -1\}$. Es gilt daher $\pi_0(\mathrm{O}_n) \cong \mathbb{Z}_2$ und $\pi_k(\mathrm{O}_n) \cong \pi_k(\mathrm{SO}_n)$, $1 \leq k$, egal welchen Basispunkt wir in O_n verwenden. Aus

(III.19) erhalten wir daher auch für O_n ein Stabilitätsphänomen,

$$\pi_k(\mathrm{O}_{k+2}) \cong \pi_k(\mathrm{O}_n), \qquad k+2 \leq n.$$

Da die Inklusion $\mathrm{O}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ eine Homotpieäquivalenz ist, erhalten wir auch ensprechende Resultate für die Homotopiegruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Insbesondere folgt, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ aus zwei homöomorphen Zusammenhangskomponenten besteht, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \sqcup \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$, wobei $\mathrm{GL}_n^- = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det A < 0\}$. Multiplikation mit $B \in \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$ liefert einen Homöomorphismus $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cong \mathrm{GL}_n^-(\mathbb{R})$.

Ohne Beweis sei hier noch folgendes Periodizitätsresultat für die stabilen Homotopiegruppen erwähnt:

$$\pi_{k+8}(\mathrm{O}_{(k+8)+2}) \cong \pi_k(\mathrm{O}_{k+2}).$$

Dies wird als *Bott Periodizität* bezeichnet. Die Gruppen sind durch

$k \mod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_k(\mathrm{O}_{k+2})$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$

gegeben. Die ersten drei Spalten folgen aus unseren Berechnungen oben.

III.6.19. Beispiel (Homotopiegruppen der unitären Gruppen). Nun zur komplexen Version von Beispiel III.6.18. Betrachte die Abbildung $p : \mathrm{U}_{n+1} \to S^{2n+1}$, $p(A) := Ae_1$, wobei $e_1 \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ den ersten Einheitsvektor bezeichnet. Wir verifizieren zunächst, dass p ein Faserbündel mit Fasern homöomorph zu U_n ist. Wir werden im folgenden U_n als Untergruppe von U_{n+1} auffassen, $\mathrm{U}_n = \{A \in \mathrm{U}_{n+1} : Ae_1 = e_1\} = p^{-1}(e_1)$. Für $A, B \in \mathrm{U}_{n+1}$ gilt offensichtlich $p(A) = p(B)$ genau dann wenn $B^{-1}A \in \mathrm{U}_n$. Sei nun $b_0 \in S^{2n+1}$ und wähle $b_1, \dots, b_n \in S^{2n+1}$, sodass $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathrm{U}_{n+1}$. Dann ist $V := \{z \in S^{2n+1} : \det(z, b_1, \dots, b_n) \neq 0\}$ eine offene Umgebung von b_0. Wir werden nun eine Trivialisierung von p über V konstruieren. Wir erinnern uns dazu, dass $\mathrm{U}_{n+1} \times \Delta_{n+1}(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$, $(A, D) \mapsto AD$, einen Homöomorphismus definiert, siehe Beispiel I.7.10. Wir bezeichnen den inversen Homöomorphismus mit $(\psi_1, \psi_2) : \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C}) \to \mathrm{U}_{n+1} \times \Delta_{n+1}(\mathbb{C})$ Es ist dann $\sigma : V \to \mathrm{U}_{n+1}$, $\sigma(z) := \psi_1(z, b_1, \dots, b_n)$, eine stetige Abbildung mit $p(\sigma(z)) = z$, für $z \in V$, denn aus $\psi_1(z, b_1, \dots, b_n)\psi_2(z, b_1, \dots, b_n) = (z, b_1, \dots, b_n)$ und $|z| = 1$ folgt, dass die erste Spalte von $\psi_2(z, b_1, \dots, b_n)$ mit dem ersten Einheitvektor e_1 übeeinstimmen muss. Für $A \in p^{-1}(V)$ erhalten wir $p(\sigma(p(A))) = p(A)$, also $\sigma(p(A))^{-1}p(A) \in \mathrm{U}_n \subseteq \mathrm{U}_{n+1}$. Wir definieren nun die gesuchte Trivialisierung durch $\varphi : p^{-1}(V) \to V \times \mathrm{U}_n$, $\varphi(A) := \big(p(A), \sigma(p(A))^{-1}A\big)$. Dies ist tatsächlich ein Homöomorphismus mit Inverser $V \times \mathrm{U}_n \to p^{-1}(V)$, $\big(z, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)\big) \mapsto \sigma(z) \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$. Also ist $p : \mathrm{U}_{n+1} \to S^{2n+1}$ ein Faserbündel und daher auch eine Serre Faserung, siehe Proposition III.6.7. Aus Satz III.6.10 erhalten wir eine lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen

$$\cdots \to \pi_{k+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{\partial} \pi_k(\mathrm{U}_n) \xrightarrow{i_*} \pi_k(\mathrm{U}_{n+1}) \xrightarrow{p_*} \pi_k(S^{2n+1}) \to \cdots \tag{III.20}$$

wobei $i : \mathrm{U}_n \to \mathrm{U}_{n+1}$ die Inklusion bezeichnet. Für $k = 0$ und $n \geq 1$ ist $\pi_0(S^{2n+1}) = 0$ und wegen der Exaktheit von (III.20) daher $i_* : \pi_0(\mathrm{U}_n) \to \pi_0(\mathrm{U}_{n+1})$ surjektiv. Induktiv folgt $\pi_0(\mathrm{U}_n) = 0$, denn wegen $\mathrm{U}_1 \cong S^1$ ist $\pi_0(\mathrm{U}_1) = 0$. Wir sehen daher, dass U_n für jedes $n \geq 1$ wegzusammenhängend ist. Für $k \leq 2n-1$ ist $\pi_{k+1}(S^{2n+1}) = 0 = \pi_k(S^{2n+1})$, siehe Satz III.5.25, wegen der Exaktheit von (III.20) induziert die Inklusion $i : \mathrm{U}_n \to \mathrm{U}_{n+1}$ daher Isomorphismen $\pi_k(\mathrm{U}_n) \cong \pi_k(\mathrm{U}_{n+1})$, $k \leq 2n-1$. Mittels Induktion folgt

$$\pi_k\big(\mathrm{U}_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}\big) \cong \pi_k(\mathrm{U}_n), \qquad \big\lceil \tfrac{k+1}{2} \big\rceil \leq n, \tag{III.21}$$

wobei $\lceil \frac{k+1}{2} \rceil$ die kleinste ganze Zahl größer oder gleich $\frac{k+1}{2}$ bezeichnet. Für hinreichend große n ist daher $\pi_k(\mathrm{U}_n)$ unabhängig von n, wieder liegt ein Stabilitätsphänomen vor. Wegen $\mathrm{U}_1 \cong S^1$ und (III.21) erhalten wir

$$\mathbb{Z} \cong \pi_1(U_1) \cong \pi_1(\mathrm{U}_2) \cong \pi_1(\mathrm{U}_3) \cong \cdots$$

Da $\mathrm{U}_2 \cong \mathrm{SU}_2 \times S^1 \cong S^3 \times S^1$ folgt $\pi_2(\mathrm{U}_2) \cong \pi_2(S^3) \times \pi_2(S^1) = 0$ und daher

$$0 = \pi_2(\mathrm{U}_1) \cong \pi_2(\mathrm{U}_2) \cong \pi_2(\mathrm{U}_3) \cong \cdots$$

Erinnern wir uns an den Homöomorphismus $\mathrm{U}_n \cong \mathrm{SU}_n \times S^1$ aus Beispiel I.7.9, so erhalten wir $\pi_k(\mathrm{U}_n) \cong \pi_k(\mathrm{SU}_n) \times \pi_k(S^1)$. Es folgt $\pi_0(\mathrm{SU}_n) = 0$, dh. alle SU_n sind wegzusammenhängend. Aus $\mathbb{Z} \cong \pi_1(\mathrm{U}_n) \cong \pi_1(\mathrm{SU}_n) \times \pi_1(\mathbb{Z}) \cong \pi_1(\mathrm{SU}_n) \times \mathbb{Z}$ schließen wir $\pi_1(\mathrm{SU}_n) = 0$, $n \geq 1$. Daher sind alle SU_n einfach zusammenhängend. Für $k \geq 2$ gilt $\pi_k(\mathrm{SU}_n) \cong \pi_k(\mathrm{U}_n)$. Da die kanonischen Inklusionen $\mathrm{U}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{SU}_n \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ Homotopieäquivalenzen sind erhalten wir $\pi_k(\mathrm{U}_n) \cong \pi_k(\mathrm{GL}_n)$ und $\pi_k(\mathrm{SU}_n) \cong \pi_k(\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}))$. Insbesondere ist $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend, für jedes $n \geq 1$.

Schließlich sei noch die komplexe Version der Bott Periodizität erwähnt,

$$\pi_{k+2}\big(\mathrm{U}_{\lceil \frac{(k+2)+1}{2} \rceil}\big) \cong \pi_k\big(\mathrm{U}_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}\big),$$

es gilt daher $\pi_k\big(\mathrm{U}_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}\big) = 0$ für gerades k und $\pi_k\big(\mathrm{U}_{\lceil \frac{k+1}{2} \rceil}\big) \cong \mathbb{Z}$ für ungerades k.

III.7. Kofaserungen. Eine stetige Abbildung $\iota : A \to X$ wird *Kofaserung* genannt wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Ist Y ein topologischer Raum, $h : X \to Y$ stetig und $H : A \times I \to Y$ eine Homotopie mit $H_0 = h \circ \iota$, dann existiert eine Homotopie $\tilde{H} : X \times I \to Y$ mit $\tilde{H}_0 = h$ und $\tilde{H}_t \circ \iota = H_t$, für alle $t \in I$. Wir sagen ein Paar (X, A) hat die *Homotopieerweiterungseigenschaft* wenn die Inklusion $\iota : A \to X$ eine Kofaserung ist. Dies bedeutet, dass eine auf $A \subseteq X$ definierte Homotopie $H : A \times I \to Y$ deren Anfangsabbildung H_0 zu einer Abbildung $h : X \to Y$ ausgedehnt ist (dh. $h(a) = H_0(a)$, $a \in A$) zu einer Homotopie $\tilde{H} : X \times I \to Y$ fortgesetzt werden kann (dh. $\tilde{H}(a,t) = H(a,t)$, $a \in A$, $t \in I$) deren Anfangsabbildung $\tilde{H}_0$ mit h übereinstimmt (dh. $\tilde{H}(x,0) = h(x)$, $x \in X$.)

III.7.1. Bemerkung. Der Begriff der Kofaserungen ist dual zum Begriff der Faserung. Sei dazu $\iota : A \to Y$, $h : X \to Y$ und $H : A \times I \to Y$. Wir bezeichnen mit Y^I die Menge der stetigen Abbildungen $I \to Y$. Beachte, dass H als Abbildung $H : A \to Y^I$ aufgefasst werden kann, $H(a)(t) := H(a,t)$.[34] Weiters bezeichne $\mathrm{ev}_0 : Y^I \to Y$ die durch Auswertung bei $t = 0$ gegebene Abbildung. Die Voraussetzung $H_0 = h \circ \iota$ bedeutet gerade, dass das äussere Quadrat im linken Diagramm kommutiert, $\mathrm{ev}_0 \circ H = h \circ \iota$. Liegt eine Kofaserung vor, dann gibt es in dieser Situation stets eine Abbildung $\tilde{H} : X \times I \to Y$ die, als Abbildung $\tilde{H} : X \to Y^I$ aufgefasst, beide Dreiecke im linken Diagramm kommutativ macht. Die Kommutativität des oberen Dreiecks entspricht dabei der Bedingung $\tilde{H}_0 = h$, und die des unteren Dreiecks der Bedingung $\tilde{H}_t \circ \iota = H_t$. Die Dualität mit dem Begriff der Faserung manifestiert sich nun in der Tatsache, dass in der eine Faserung charakterisierende Eigenschaft, siehe das Diagramm rechts, alle Pfeile in die umgekehrte Richtung zeigen. Dies wird als *Eckmann–Hilton Dualität* bezeichnet.

$$\begin{tikzcd} Y & X \arrow[l, "h"'] \arrow[dl, dashed, "\tilde{H}"'] \\ Y^I \arrow[u, "\mathrm{ev}_0"] & A \arrow[l, "H"] \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{inc}_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B \end{tikzcd}$$

III.7.2. Proposition. *Eine Kofaserung $\iota : A \to X$ ist stets ein Homöomorphismus auf ihr Bild, dh. $\iota : A \to \iota(A)$ ist ein Homöomorphismus, wobei $\iota(A)$ mit der von X induzierten Topologie versehen ist.*

Beweis. Wir betrachten den Abbildungszylinder $Z_\iota = X \sqcup (A \times I)/_{(a,1)\sim\iota(a)}$, vgl. Beispiel I.9.11, sowie die Abbildungen $H : A \times I \to Z_\iota$, $H(a,t) := [(a, 1-t)]$, und $h : X \to Z_\iota$, $h(x) := [x]$. Dies sind stetige Abbildungen und es gilt $h \circ \iota = H_0$, denn $h(\iota(a)) = [\iota(a)] = [(a,1)] = H(a,0)$ für $a \in A$. Da ι eine Kofaserung ist existiert eine Homotopie $\tilde{H} : X \times I \to Z_\iota$ mit $\tilde{H}_0 = h$ und $\tilde{H}_t \circ \iota = H_t$, $t \in I$. Insbesondere gilt $\tilde{H}_1 \circ \iota = H_1$. Wir erinnern uns, dass $H_1 : A \to Z_\iota$, $a \mapsto [(a,0)]$, eine Einbettung ist, dh. $H_1 : A \to H_1(A)$ ist ein Homöomorphismus. Es liefert daher $(H_1)^{-1} \circ \tilde{H}_1|_{\iota(A)} : \iota(A) \to H_1(A) \to A$ eine zu ι inverse stetige Abbildung. □

III.7.3. Bemerkung. Auf Grund von Proposition III.7.2 ist $\iota : A \to X$ genau dann eine Kofaserung, wenn das Paar $(X, \iota(A))$ die Homotopieerweiterungseigenschaft. Es genügt daher Paare mit Homotopieerweiterungseigenschaft zu untersuchen.

III.7.4. Lemma. *Hat (X, A) die Homotopieerweiterungseigenschaft dann ist $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ ein Retrakt von $X \times I$.*

Beweis. Betrachte die stetigen Abbildungen $h : X \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$, $h(x) := (x, 0)$, und $H : A \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$, $H(a,t) := (a,t)$. Offensichtlich

[34] Wir wollen zu diesem Zeitpunkt noch keine Topologie auf Y^I einführen, versuchen hier also nicht die stetigen Abbildungen $A \times I \to Y$ als die stetigen Abbildungen $A \to Y^I$ zu charakterisieren.

gilt $H_0 = h|_A$, wegen der Homotopieerweiterungseigenschaft von (X, A) existiert daher eine Homotopie $\tilde{H} : X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ mit $\tilde{H}_0 = h$ und $\tilde{H}|_{A\times I} = H$. Es folgt $\tilde{H}(x, 0) = (x, 0)$, $x \in X$, und $\tilde{H}(a, t) = (a, t)$, $a \in A$, $t \in I$, also ist $\tilde{H}$ eine Retraktion auf $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$. □

III.7.5. Proposition. *Ist X ein Hausdorffraum und hat (X, A) die Homotopieerweiterungseigenschaft, dann ist A ein abgeschlossener Teilraum von X.*

Beweis. Nach Lemma III.7.4 existiert eine Retraktion $r : X \times I \to X \times I$, sodass $(X\times\{0\})\cup(A\times I) = \{(x, t) \in X\times I : r(x, t) = (x, t)\}$. Mit X ist auch $X\times I$ ein Hausdorffraum, aus der Stetigkeit von r folgt daher, dass $(X\times\{0\})\cup(A\times I)$ ein abgeschlossener Teilraum von $X\times I$ ist. Daher ist auch $A\times\{1\}$ ein abgeschlossener Teilraum von $X \times \{1\}$, also A abgeschlossen in X. □

III.7.6. Proposition. *Es sei A ein abgeschlossener Teilraum von X. Dann hat (X, A) die Homotopieerweiterungseigenschaft genau dann, wenn $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ ein Retrakt von $X \times I$ ist.*

Beweis. Eine Implikation haben wir bereits in Lemma III.7.4 bewiesen. Sei nun umgekehrt $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ ein Retrakt von $X \times I$ und $r : X \times I \to (X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ eine Retraktion. Um die Homotopieerweiterungseigenschaft von (X, A) zu verifizieren betrachten wir eine stetige Abbildung $h : X \to Y$ sowie eine Homotopie $H : A \times I \to Y$ mit $H_0 = h|_A$. Definiere eine Abbildung $g : (X \times \{0\}) \cup (A \times I) \to Y$ durch $g(x, 0) := h(x)$, $x \in X$, und $g(a, t) := H(a, t)$, $a \in A$, $t \in I$. Wegen $H_0 = h|_A$ ist dies wohldefiniert. Beachte, dass $X \times \{0\}$ ein abgeschlossener Teilraum von $(X\times\{0\})\cup(A\times I)$ ist. Wegen der Abgeschlossenheit von A, ist auch $A\times I$ ein abgeschlossener Teilraum von $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$. Die Einschränkungen von g auf $X \times \{0\}$ bzw. $A \times I$ sind stetig. Nach Lemma I.1.2 ist daher auch g stetig. Also liefert $\tilde{H} := g \circ r : X \times I \to Y$ die gewünschte Homotopie. □

III.7.7. Proposition. *Hat das Paar (X, A) die Homotopieerweiterungseigenschaft und ist Z ein weiterer topologischer Raum dann hat auch das Paar $(X \times Z, A \times Z)$ die Homotopieerweiterungseigenschaft.*

Beweis. Wir geben den Beweis nur für den Fall, dass X ein Hausdorffraum ist. Nach Lemma III.7.4 ist $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ ein Retrakt von $X \times I$. Damit ist auch $(X\times Z\times\{0\})\cup(A\times Z\times I)$ ein Retrakt von $X\times Z\times I$. Nach Proposition III.7.6 hat daher auch $(X \times Z, A \times Z)$ die Homotopieerweiterungseigenschaft. Beachte hier, dass A ein abgeschlossener Teilraum von X ist, siehe Proposition III.7.5, und damit auch $A \times Z$ ein abgeschlossener Teilraum von $X \times Z$ ist. □

III.7.8. Beispiel. Es sei $f : X \to Y$ stetig und $Z_f = (Y\sqcup(X\times I))/_{(x,1)\sim f(x)}$ der Abbildungszylinder. Weiters bezeichne $\iota : X \sqcup Y \to Z_f$ die durch $\iota(x) = [(x, 0)]$,

$x \in X$, und $\iota(y) = [y]$, $y \in Y$, defnierte Einbettung. Dann ist ι eine Kofaserung. Fassen wir $X \sqcup Y$ als Teilraum in Z_f auf dann besagt dies gerade, dass das Paar $(Z_f, X \cup Y)$ die Homotopieerweiterungseigenschaft hat. Offensichtlich folgt daraus, dass auch (Z_f, X) und (Z_f, Y) die Homotopieerweiterungseigenschaft haben. Bis auf Homotopie(äquivalenz) kann daher jede Abbildung als Kofaserung betrachtet werden, vgl. Beispiel I.9.11. Um die Homotopieerweiterungseigenschaft von $(Z_f, X \cup Y)$ zu verifizieren betrachten wir die kanonische Projektion $p : Y \sqcup (X \times I) \to Z_f$ und wählen eine Retraktion $r = (r_1, r_2) : I \times I \to I \times I$ auf $(I \times \{0\}) \cup (\partial I \times I)$. Wir definieren eine stetige Abbildung $r' : (Y \sqcup (X \times I)) \times I \to Z_f \times I$ durch $r'(y, t) := (y, t)$ für $(y, t) \in Y \times I$, und $r'(x, s, t) := \big(p(x, r_1(s, t)), r_2(s, t)\big)$ für $(x, s, t) \in X \times I \times I$. Aus $r_1(1, t) = 1$ und $r_2(1, t) = t$ erhalten wir $r'(x, 1, t) = r'(f(x), t)$, $x \in X$, $t \in I$, also faktorisiert r' zu einer Abbildung $r'' : Z_f \times I \to Z_f \times I$, dh. $r' = r'' \circ (p \times \mathrm{id}_I)$. Mit p ist auch $p \times \mathrm{id}_I : (Y \sqcup (X \times I)) \times I \to Z_f \times I$ eine Quotientenabbildung, siehe [**10**, Satz 5 in Kapitel I.7.9], also ist r'' stetig. Setze $W := (Z_f \times \{0\}) \cup ((X \cup Y) \times I) \subseteq Z_f \times I$. Nach Konstruktion gilt $r''(Z_f \times I) \subseteq W$ und $r''|_W = \mathrm{id}_W$, also ist r'' eine Retraktion von $Z_f \times I$ auf W. Da $X \cup Y$ angeschlossen in Z_f ist, folgt nun aus Proposition III.7.6, dass $(Z_f, X \cup Y)$ die Homotopieerweiterungseigenschaft hat.

III.7.9. Beispiel. Das Paar (D^n, S^{n-1}) hat die Homotopieerweiterungseigenschaft. Dies folgt aus Beispiel III.7.8, denn D^n ist homöomorph zum Abbildungszylinder der konstanten Abbildung $S^{n-1} \to \{*\}$. Alternativ könnten wir in diesem einfach Beispiel auch explizit eine Retraktion $r : D^n \times I \to (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)$ angeben und mit Hilfe von Proposition III.7.6 argumentieren. Das Paar $(I^n, \partial I^n)$ ist homöomorph zu (D^n, S^{n-1}) und hat daher ebenfalls die Homotopieerweiterungseigenschaft.

III.7.10. Proposition. *Es habe (X, A) die Homotopieerweiterungseigenschaft und A sei kontrahierbar. Dann ist die kanonische Projektion $p : X \to X/A$ eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Da A kontrahierbar ist existieren ein Punkt $a_0 \in A$ und eine Homotopie $H : A \times I \to A$ mit $H_0 = \mathrm{id}_A$ und $H_1(A) = \{a_0\}$. Weiters sei $h := \mathrm{id}_X : X \to X$. Auf Grund der Homotopieerweiterungseigenschaft von (X, A) existiert eine Homotopie $\tilde{H} : X \times I \to X$ mit $\tilde{H}_0 = h$ und $\tilde{H}|_{A \times I} = H$. Es folgt $\tilde{H}(x, 0) = x$, $\tilde{H}(a, t) \in A$ und $\tilde{H}(a, 1) = a_0$, für alle $x \in X$, $a \in A$ und $t \in I$. Wegen $\tilde{H}(a, t) \in A$ faktorisiert $\tilde{H}$ zu einer Abbildung $\bar{H} : X/A \times I \to X/A$, dh. $p \circ \tilde{H} = \bar{H} \circ (p \times \mathrm{id}_I)$. Beachte, dass $\bar{H}$ stetig ist, denn $p \times \mathrm{id}_I : X \times I \to X/A \times I$ ist eine Quotientenabbildung. Da $\tilde{H}_1(a) = a_0$ faktorisiert $\tilde{H}_1$ zu einer stetigen Abbildung $g : X/A \to X$, dh. $g \circ p = \tilde{H}_1$. Aus der Surjektivität von $p : X \to X/A$ folgt nun auch $p \circ g = \bar{H}_1$, denn zu $z \in X/A$ existiert $x \in X$ mit $p(x) = z$ und daher $p(g(z)) = p(g(p(x))) = p(\tilde{H}_1(x)) = \bar{H}_1(p(x)) = \bar{H}_1(z)$. Insgesamt erhalten wir $g \circ p = \tilde{H}_1 \overset{\tilde{H}}{\simeq} \tilde{H}_0 = \mathrm{id}_X$ und $p \circ g = \bar{H}_1 \overset{\bar{H}}{\simeq} \bar{H}_0 = \mathrm{id}_{X/A}$. Also ist p eine Homotopieäquivalenz. $\square$

Ist $A \subseteq X$ ein Teilraum dann werden zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ *homotop relativ* A genannt, falls eine Homotopie $H : X \times I \to Y$ mit $H_0 = f$, $H_1 = g$ und $H_t(a) = a$ existieren, $a \in A$, $t \in I$. Insbesondere müssen f und g auf A übereinstimmen. Wir schreiben in diesem Fall $f \simeq g$ rel A, und nennen H eine Homotopie relativ A. Homotop relativ A zu sein ist eine Äquivalenzrelation. Ist $\iota : A \to X$ eine Kofaserung dann nennen wir zwei Abbildungen $f, g : X \to Y$ homotop relativ A falls sie homotop relativ $\iota(A)$ sind, dh. falls eine Homotopie $H : X \times I \to Y$ mit $H_0 = f$, $H_1 = g$ und $H_t \circ \iota = \iota$ existiert, $t \in I$, vgl. Proposition III.7.2.

III.7.11. Satz. *Es seien $i : A \to X$ und $j : A \to Y$ zwei Kofaserungen. Weiters sei $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz mit $f \circ i = j$. Dann existiert eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ j = i$, $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel A und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ rel A, dh. es existieren Homotopien $H : X \times I \to X$ und $G : Y \times I \to Y$ mit $H_0 = g \circ f$, $H_1 = \mathrm{id}_X$, $G_0 = f \circ g$, $G_1 = \mathrm{id}_Y$ $H_t \circ i = j$ und $G_t \circ j = i$ für alle $t \in I$.*

Wir beginnen den Beweis von Satz III.7.11 mit einigen Lemmata.

III.7.12. Lemma. *Es seien $i : A \to X$ und $j : A \to Y$ Kofaserungen und $f : X \to Y$ stetig mit $f \circ i = j$. Weiters existiere eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Dann existiert eine stetige Abbildung $g' : Y \to X$ mit $g' \circ j = i$ und $g' \simeq g$.*

Beweis. Da $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ existiert eine Homotopie $H : X \times I \to X$ mit $H_0 = g \circ f$ und $H_1 = \mathrm{id}_X$. Betrachte die Homotopie $G : A \times I \to X$, $G := H \circ (i \times \mathrm{id}_I)$. Offensichtlich ist $G_0 = H_0 \circ i = g \circ f \circ i = g \circ j$ und $G_1 = H_1 \circ i = i$. Da j eine Kofaserung ist, existiert eine Homotopie $\tilde{G} : Y \times I \to X$ mit $\tilde{G}_0 = g$ und $\tilde{G}_t \circ j = G_t$, für alle $t \in I$. Betrachte nun $g' := \tilde{G}_1 : Y \to X$. Es gilt dann $g' = \tilde{G}_1 \simeq \tilde{G}_0 = g$ via $\tilde{G}$, und $g' \circ j = \tilde{G}_1 \circ j = G_1 = i$. □

III.7.13. Lemma. *Es sei $i : A \to X$ eine Kofaserung und $f : X \to X$ eine stetige Abbildung, sodass $f \circ i = i$ und $f \simeq \mathrm{id}_X$. Dann existiert eine stetige Abbildung $k : X \to X$ mit $k \circ i = i$ und $k \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel A, dh. es existiert eine Homotopie $H : X \times I \to X$ mit $H_0 = k \circ f$, $H_1 = \mathrm{id}_X$ und $H_t \circ i = i$.*

Beweis. Da $f \simeq \mathrm{id}_X$ existiert eine Homotopie $F : X \times I \to X$ mit $F_0 = f$ und $F_1 = \mathrm{id}_X$. Betrachte nun die Homotopie $G : A \times I \to X$, $G := F \circ (i \times \mathrm{id}_I)$. Da $G_0 = F_0 \circ i = f \circ i = i = \mathrm{id}_X \circ i$ und weil i eine Kofaserung ist existiert eine Homotopie $\tilde{G} : X \times I \to X$ mit $\tilde{G}_0 = \mathrm{id}_X$ und $\tilde{G}_t \circ i = G_t$. Setzen wir $k := \tilde{G}_1 : X \to X$, dann gilt $k \circ i = \tilde{G}_1 \circ i = G_1 = F_1 \circ i = i$. Es bleibt noch $k \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel A zu zeigen. Für die Konstruktion von H betrachten wir zunächst

$$l : X \times I \to X, \qquad l(x, s) := \begin{cases} \tilde{G}\big(f(x), 1 - 2s\big) & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2, \\ F(x, 2s - 1) & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Beachte, dass l wegen $\tilde{G}\big(f(x), 1-2\frac{1}{2}\big) = \tilde{G}_0(f(x)) = f(x) = F_0(x) = F(x, 2\frac{1}{2}-1)$ wohldefiniert und stetig ist, vgl. Lemma I.1.2. Offensichtlich gilt $l_0 = k \circ f$ und $l_1 = \mathrm{id}_X$. Weiters betrachten wir $L : A \times I \times I \to X$,

$$L(a,s,t) := \begin{cases} \tilde{G}\big(i(a), 1-2s(1-t)\big) & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2, \\ F\big(i(a), 1-2(1-s)(1-t)\big) & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Aus Lemma I.1.2 und $\tilde{G}\big(i(a), 1-2\frac{1}{2}(1-t)\big) = \tilde{G}_t(i(a)) = G_t(a) = F_t(i(a)) = F\big(i(a), 1-2(1-\frac{1}{2})(1-t)\big)$ folgt, dass L wohldefiniert und stetig ist. Mit $i : A \to X$ ist auch $i \times \mathrm{id}_I : A \times I \to X \times I$ eine Kofaserung, siehe Proposition III.7.7. Offensichtlich gilt $L(a,s,0) = l(i(a),s)$, also existiert eine Homotopie $\tilde{L} : X \times I \times I \to X$ mit $\tilde{L}(x,s,0) = l(x,s)$ und $\tilde{L}(i(a),s,t) = L(a,s,t)$, $x \in X$, $a \in A$, $s,t \in I$. Wir können nun die gesuchte Homotopie $H : X \times I \to X$ durch

$$H(x,t) := \begin{cases} \tilde{L}(x,0,3t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/3, \\ \tilde{L}(x,3t-1,1) & \text{falls } 1/3 \leq t \leq 2/3, \\ \tilde{L}(x,1,3-3t) & \text{falls } 2/3 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

definieren. Aus $H_0(x) = \tilde{L}(x,0,0) = l_0(x) = (k \circ f)(x)$ erhalten wir $H_0 = k \circ f$, und aus $H_1(x) = \tilde{L}(x,1,0) = l_1(x) = x$ folgt $H_1 = \mathrm{id}_X$. Es bleibt noch $H_t \circ i = i$ zu verifizieren. Dies folgt aber sofort aus $\tilde{L}(i(a),0,t) = L(a,0,t) = \tilde{G}_1(i(a)) = k(i(a)) = i(a)$, $\tilde{L}(i(a),1,t) = L(a,1,t) = F_1(i(a)) = i(a)$ und $\tilde{L}(i(a),s,1) = L(a,s,1) = i(a)$, $a \in A$, $s,t \in I$. □

III.7.14. Lemma. *Es seien $i : A \to X$, $j : A \to Y$ Kofaserungen und $f : X \to Y$ stetig mit $f \circ i = j$. Weiters existiere $g : Y \to X$ mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Dann existiert auch eine stetige Abbildung $g' : Y \to X$ mit $g' \circ j = i$ und $g' \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel A, dh. es existiert eine Homotopie $H : X \times I \to X$, $H_1 = g' \circ f$, $H_0 = \mathrm{id}_X$, $H_t \circ i = i$.*

Beweis. Nach Lemma III.7.12 existiert eine stetige Abbildung $g'' : Y \to X$ mit $g'' \circ j = i$ und $g'' \circ f \simeq \mathrm{id}_X$. Offensichtlich gilt $(g'' \circ f) \circ i = i$. Wenden wir Lemma III.7.13 auf $g'' \circ f$ an erhalten wir eine stetige Abbildung $k : X \to X$ mit $k \circ i = i$ und $k \circ g'' \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel A. Für $g' := k \circ g'' : Y \to X$ gilt dann $g' \circ j = i$ und $g' \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel A. □

Beweis von Satz III.7.11. Aus Lemma III.7.14 erhalten wir eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ j = i$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ rel A, dh. es existiert eine Homotopie $H : X \times I \to X$ mit $H_0 = g \circ f$, $H_1 = \mathrm{id}_X$ und $H_t \circ i = i$. Mit f ist auch g eine Homotopieäquivalenz. Wenden wir nun Lemma III.7.14 auf g an so erhalten wir eine stetige Abbildung $f' : X \to Y$ mit $f' \circ i = j$ und $f' \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ rel A, dh. es existiert eine Homotopie $G' : Y \times I \to Y$ mit $G'_0 = f' \circ g$, $G_1 = \mathrm{id}_Y$ und $G'_t \circ j = j$. Es ist nun $f' \circ g \circ f \circ g \simeq f \circ g$ rel A via der Homotopie $G' \circ \big((f \circ g) \times \mathrm{id}_I\big)$, aber auch $f' \circ g \circ f \circ g \simeq f' \circ g$ rel A via der Homotopie $f' \circ H \circ (g \times \mathrm{id}_I)$. Es folgt $f \circ g \simeq f' \circ g$ rel A und damit auch $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$ rel A. □

Hat ein Paar (X, A) die Homotopieerweiterungseigenschaft so stimmen die verschiedenen Begriffe von Deformationsretraktionen die wir in Definition I.8.7 besprochen haben überein. Genauer gilt

III.7.15. Korollar. *Das Paar (Y, A) habe die Homotopieerweiterungseigenschaft. Dann sind äquivalent:*

(i) *A ist Deformationsretrakt von Y, dh. es existiert eine Homotopie $H : Y \times I \to Y$ mit $H_0 = \mathrm{id}_Y$, $H_1(Y) \subseteq A$ und $H_t|_A = \mathrm{id}_A$ für alle $t \in I$.*

(ii) *A ist schwacher Deformationsretrakt von Y, dh. es existiert eine Homotopie $H : Y \times I \to Y$ mit $H_0 = \mathrm{id}_Y$, $H_1(Y) \subseteq A$ und $H_1|_A = \mathrm{id}_A$.*

(iii) *Die kanonische Inklusion $\iota : A \to Y$ ist eine Homotopieäquivalenz.*

Beweis. Die Implikation (i)⇒(ii) ist trivial. Ist H eine Homotopie wie in (ii) und setzen wir $r := H_1 : Y \to A$, dann gilt $r \circ \iota = \mathrm{id}_A$ sowie $\iota \circ r = H_1 \overset{H}{\simeq} H_0 = \mathrm{id}_Y$, also ist ι eine Homotopieäquivalenz und damit die Implikation (ii)⇒(iii) gezeigt. Nun zum Beweis von (iii)⇒(i). Wenden wir Satz III.7.11 auf $X := A$, $f := \iota$ und die beiden Kofaserungen $i := \mathrm{id}_A$, $j := \iota$ an, so erhalten wir eine Homotopie $G : Y \times I \to Y$ mit $G_0(Y) \subseteq A$, $G_1 = \mathrm{id}_Y$ und $G_t|_A = \mathrm{id}_A$, $t \in I$. Es ist daher $H(x, t) := G(x, 1 - t)$ die gesuchte retrahierende Deformation. □

III.7.16. Korollar. *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann eine Homotopieäquivalenz, wenn X Deformationsretrakt von Z_f ist. Dabei fassen wir wieder X als Teilraum des Abbildungszylinders $Z_f = (Y \sqcup (X \times I))/_{(x,1)\sim f(x)}$ auf, $x \mapsto [(x, 0)]$,*

Beweis. Es bezeichnen $i : X \to Z_f$ und $j : Y \to Z_f$ die kanonischen Einbettungen. Nach Beispiel I.9.11 ist j eine Homotopieäquivalenz und $j \circ f \simeq i$. Es ist daher i eine Homotopieäquivalenz genau dann, wenn f eine ist. Zusammen mit Korollar III.7.15 und Beispiel III.7.8 folgt die Behauptung. □

III.7.17. Korollar. *Zwei topologische Räume sind genau dann homotopieäquivalent, wenn ein topologischer Raum Z existiert der sowohl X als auch Y als Deformationsretrakt enthält.*

Beweis. Sind X und Y als Deformationsretrakte in Z eingebettet dann folgt sofort $X \simeq Z \simeq Y$ und daher $X \simeq Y$. Sei nun umgekehrt $f : X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz und Z_f ihr Abbildungszylinder. Nach Korollar III.7.16 ist X ein Deformationsretrakt von Z_f. Nach Beispiel I.9.11 ist auch Y ein Deformationsretrakt von Z_f. Also folgt die Behauptung mit $Z := Z_f$. □

III.8. CW-Komplexe. Ein topologischer Raum wird als *n-Zelle* bezeichnet wenn er homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Einpunktige Räume sind daher 0-Zellen, die Intervalle $(0, 1)$, $(0, \infty)$ und $(-1, 1)$ sind 1-Zellen, $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ ist eine n-Zelle, $n \in \mathbb{N}_0$. Unter einer *Zellenzerlegung* eines topologischen Raumes X verstehen wir eine Familie $\mathcal{E}$ paarweise disjunkter Teilmengen $e \subseteq X$ mit $\bigcup_{e\in\mathcal{E}} e = X$, sodass jedes $e \in \mathcal{E}$ eine Zelle ist, dh. es existiert $n \in \mathbb{N}_0$ mit $e \cong \mathbb{R}^n$.

Das Paar $(X, \mathcal{E})$ wird in diesem Fall als ein *zellenzerlegter Raum* bezeichnet. Unter dem *n-Skelett* oder *n-Gerüst* eines zellenzerlegeten Raums $(X, \mathcal{E})$ verstehen wir den Teilraum $X^n := \bigcup_{0 \leq k \leq n} \bigcup_{e \in \mathcal{E}_k} e$, wobei $\mathcal{E}_k$ die Menge der k-Zellen von $\mathcal{E}$ bezeichnet.[35] Offensichtlich gilt $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \cdots$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} X^n = X$. Wir werden einen zellenzerlegten Raum oft nur mit X bezeichnen und die Zellenzerlegung $\mathcal{E}$ in der Notation unterdrücken. Sprechen wir von den Zellen bzw. n-Zellen des zellenzerlegten Raums so sind die Zellen aus $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{E}_n$ gemeint.

III.8.1. Definition (Charakteristische Abbildung). Es sei X ein zellenzerlegeter Raum und e eine n-Zelle von X. Eine stetige Abbildung $\varphi : D^n \to X$ wird *charakteristischen Abbildung für e* genannt, falls die Einschränkung $\varphi|_{B^n}$ einen einem Homöomorphismus von B^n auf e liefert und $\varphi(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$ gilt. Die Einschränkung $\varphi|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to X^{n-1}$ wird in diesem Fall als *Klebeabbildung* bezeichnet.

III.8.2. Lemma. *Es sei X ein zellenzerlegter Hausdorffraum, e eine n-Zelle von X und $\varphi : D^n \to X$ eine charakteristische Abbildung für e. Dann gilt:*

(i) *$\varphi(D^n) = \bar{e}$, $\bar{e} \subseteq X^n$ und $\bar{e}$ ist kompakt.*
(ii) *$\varphi(S^{n-1}) = \bar{e} \setminus e$, $\bar{e} \setminus e \subseteq X^{n-1}$ und $\bar{e} \setminus e$ ist kompakt.*

Beweis. Als stetiges Bild einer kompakten Menge ist $\varphi(D^n)$ kompakt und wegen der Hausdorffeigenschaft von X auch abgeschlossen. Aus $\varphi(B^n) = e$ und der Stetigkeit von φ folgt $e \subseteq \varphi(D^n) \subseteq \bar{e}$. Wir erhalten $\varphi(D^n) = \bar{e}$ womit (i) gezeigt wäre. Nun zu (ii): Beachte, dass $\varphi(S^{n-1}) \cap e = \emptyset$, denn $\varphi(S^{n-1}) \subseteq X^{n-1}$ und $e \cap X^{n-1} = \emptyset$. Zusammen mit $\varphi(B^n) = e$ und $\varphi(D^n) = \bar{e}$ folgt sofort $\varphi(S^{n-1}) = \bar{e} \setminus e$ und damit auch $\bar{e} \setminus e \subseteq X^{n-1}$. Als stetiges Bild der kompakten Menge S^{n-1} ist auch $\bar{e} \setminus e$ kompakt. □

III.8.3. Beispiel. Betrachte folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. $e_1 := \{(0,1)\}$, $e_2 := \{(0,-1)\}$, $e_3 := \{(1,0)\}$, $e_4 := \{0\} \times (-1,1)$, $e_5 := (0,1) \times \{0\}$ und $X := e_1 \cup e_2 \cup e_3 \cup e_4 \cup e_5$. Die Teilmengen e_i liefern eine Zellenzerlegung von X mit 0-Zellen e_1, e_2, e_3 und 1-Zellen e_4, e_5. Es gilt daher $X^0 = e_1 \cup e_2 \cup e_3$ und $X^1 = X$. Die 1-Zelle e_5 kann keine charakteristische Abbildung besitzen, denn $\bar{e}_5 \setminus e_5 = \{(0,0), (1,0)\}$ ist nicht in X^0 enthalten, vgl. Lemma III.8.2(ii).

III.8.4. Beispiel. Betrachte folgende Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. $e_1 := \{(0,1)\}$, $e_2 := \{(0,-1)\}$, $e_3 := \{(1,0)\}$, $e_4 := \{0\} \times (-1,1)$, $e_5 := \big\{(x, \sin(\pi/x)) : x \in (0,1)\big\}$ und $X := e_1 \cup e_2 \cup e_3 \cup e_4 \cup e_5$. Die Teilmengen e_i liefern eine Zellenzerlegung von X mit 0-Zellen e_1, e_2, e_3 und 1-Zellen e_4, e_5. Es gilt daher $X^0 = e_1 \cup e_2 \cup e_3$ und $X^1 = X$. Die 1-Zelle e_5 kann keine charakteristische Abbildung besitzen, denn $\bar{e}_5 \setminus e_5 = \{(1,0)\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$ ist nicht in X^0 enthalten, vgl. Lemma III.8.2(ii).

[35] Die Dimension einer Zelle ist wohldefiniert, dh. eine n-Zelle kann nicht m-Zelle sein wenn $m \neq n$, siehe Satz III.9.12 unten. Da wir diesen Satz noch nicht zur Verfügung haben, soll eine Zellenzerlegung $\mathcal{E}$ auch eine Zerlegung $\mathcal{E} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{E}_n$ beinhalten, wobei $\mathcal{E}_n$ nur aus n-Zellen besteht.

III.8.5. Definition (CW-Komplexe). Ein zellenzerlegter Hausdorffraum X wird *CW-Komplex* genannt wenn jede Zelle von X eine charakteristische Abbildung besitzt und folgende beiden Axiome erfüllt sind:

(C) Ist e eine Zelle von X so trifft $\bar{e}$ nur endlich viele andere Zellen.

(W) $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist für jede Zelle e von X.

Die Zellenzerlegung wird in diesem Fall als *CW-Zerlegung* von X bezeichnet. Besteht die Zellenzerlegung nur aus endlich vielen Zellen so sprechen wir von einem *endlichen CW-Komplex.* Gilt $X = X^n$ und $X \neq X^{n-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ so heißt der CW-Komplex *n-dimensional,* existiert kein solches n, dann wird er *∞-dimensional* genannt.

III.8.6. Bemerkung. Der Begriff des CW-Komplexes wurde von Whitehead eingeführt. Die Buchstaben C und W beziehen sich dabei auf *closure finiteness* und *weak topology.*

III.8.7. Bemerkung. Ist X ein zellenzerlegter Hausdorffraum mit endlich vielen Zellen die alle eine charakteristische Abbildung besitzen, dann sind auch die Axiome (C) und (W) in Definition III.8.5 erfüllt und X ist ein CW-Komplex. Für (C) ist dies offensichtlich. Um (W) einzusehen seien $e_1, \dots, e_k$ die Zellen von X. Dann gilt offensichtlich $X = e_1 \cup \dots \cup e_k = \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k$ also $A = A \cap X = A \cap (\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k) = (A \cap \bar{e}_1) \cup \dots \cup (A \cap \bar{e}_k)$. Ist nun jedes $A \cap \bar{e}_i$ abgeschlossen, dann muss auch A als endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen abgeschlossen sein. Die Axiome (C) und (W) sind daher nur im Fall unendlich vieler Zellen relevant.

III.8.8. Bemerkung. Ein nichtleerer CW-Komplex muss mindestens eine 0-Zelle besitzen. Um dies einzusehen nehmen wir indirekt an es gilt $X^0 = \emptyset$. Weiters sei $n \in \mathbb{N}$ mit $X^n \neq \emptyset$ und $X^{n-1} = \emptyset$. Jede charakteristische Abbildung einer n-Zelle muss S^{n-1} nach $X^{n-1} = \emptyset$ abbilden, was wegen $S^{n-1} \neq \emptyset$, $n \geq 1$, einen Widerspruch liefert.

III.8.9. Bemerkung. Eine Abbildung $f : X \to Y$ von einem CW-Komplex X in einen topologischen Raum Y ist genau dann stetig ist, wenn die Einschränkung $f|_{\bar{e}} : \bar{e} \to Y$ stetig ist für jede Zelle e von X. Dies folgt sofort aus Axiom (W).

III.8.10. Bemerkung. Eine Teilmenge A eines CW-Komplexes X ist genau dann abgeschlossen wenn der Durchschnitt $A \cap K$ mit jeder kompakten Teilmenge K von X abgeschlossen ist. Dies folgt sofort aus Axiom (W) in Definition III.8.5 und Lemma III.8.2(i).

III.8.11. Proposition. *Es sei X ein CW-Komplex und für jede Zelle e von X sei φ_e eine charakteristische Abbildung für e. Eine Abbildung $f : X \to Y$ in einen topologischen Raum Y ist genau dann stetig, wenn die Komposition $f \circ \varphi_e$ stetig ist, für jede Zelle e.*

Beweis. Die eine Implikation ist trivial, mit f ist natürlich auch jede der Kompositionen $f \circ \varphi_e$ stetig. Sei nun umgekehrt $f \circ \varphi_e$ stetig, für jede Zelle

e von X. Weiters sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen. Es genügt zu zeigen, dass $A := f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist. Sei nun e eine n-Zelle von X, also $\varphi_e : D^n \to X$. Nach Axiom (W) in Definition III.8.5 genügt es zu zeigen, dass $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist. Nach Lemma III.8.2(i) gilt $\varphi(D^n) = \bar{e}$ und daher auch $A \cap \bar{e} = \varphi_e(\varphi_e^{-1}(A))$. Nach Voraussetzung ist $\varphi_e^{-1}(A) = (f \circ \varphi_e)^{-1}(B)$ abgeschlossen, also kompakt. Als stetige Bild einer kompakten Teilmenge ist daher auch $A \cap \bar{e}$ kompakt und damit abgeschlossen. □

III.8.12. Beispiel. Jeder diskrete Raum ist in kanonischer Weise ein 0-dimensionaler CW-Komplex.

III.8.13. Beispiel. Graphen sind 1-dimensionale CW-Komplexe.

III.8.14. Beispiel. $I = \{0\} \cup (0,1) \cup \{1\}$ ist eine CW-Zerlegung von I.

III.8.15. Beispiel. Das Quadrat $I \times I$ besitzt eine CW-Zerlegung mit vier 0-Zellen (die Ecken), vier 1-Zellen (die Kanten ohne Ecken) und einer 2-Zelle $(0,1) \times (0,1)$.

III.8.16. Beispiel. $\mathbb{R} = \mathbb{Z} \cup \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k, k+1)$ ist eine CW-Zerlegung von $\mathbb{R}$ mit unendlich vielen 0-Zellen (die Punkte in $\mathbb{Z}$) und unendlich vielen 1-Zellen $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

III.8.17. Beispiel (CW-Zerlegung der Sphäre). Es sei $P \in S^n$, $n \geq 0$. Dann liefert $S^n = \{P\} \cup (S^n \setminus \{P\})$ eine CW-Zerlegung von S^n mit einer 0-Zelle P und einer n-Zelle $S^n \setminus \{P\}$.

III.8.18. Beispiel (CW-Zerlegung des Balls). Ist $P \in S^{n-1}$, $n \geq 1$, dann liefert $D^n = \{P\} \cup (S^{n-1} \setminus \{P\}) \cup B^n$ eine CW-Zerlegung von D^n mit einer 0-Zelle P, einer $(n-1)$-Zelle $S^{n-1} \setminus \{P\}$ und einer n-Zelle B^n.

III.8.19. Beispiel (CW Zerlegung von $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$). Der reelle projektive Raum $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ besitzt eine CW-Zerlegung mit einer k-Zelle für jedes $k = 0, 1, \ldots, n$, siehe Beispiel I.9.16.

III.8.20. Beispiel (CW-Zerlegung von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$). Der komplexe projektive Raum $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ besitzt eine CW-Zerlegung mit einer k-Zelle für jedes $k = 0, 2, 4, \ldots, 2n$, siehe Beispiel I.9.17.

III.8.21. Beispiel (CW-Zerlegung von $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$). Der quaternionische projektive Raum $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ besitzt eine CW-Zerlegung mit einer k-Zelle für jedes $k = 0, 4, 8, \ldots, 4n$, siehe Aufgabe 17.

III.8.22. Beispiel. Die Zerlegung $D^2 = B^2 \cup \bigcup_{P\in S^1}\{P\}$ liefert eine Zellenzerlegung von D^2 mit einer 2-Zelle (das Innere B^2) und unendlich vielen 0-Zellen (jeder Punkt am Rand S^1.) Offensichtlich besitzt jede Zelle eine charakteristische Abbildung und auch Axiom (W) aus Definition III.8.5 ist erfüllt, denn $\bar{B}^2 = D^2$. Allerdings ist Axiom (C) verletzt, denn der Abschluss der 2-Zelle trifft unendlich viele Zellen. Also ist dies keine CW-Zerlegung von D^2.

III.8.23. Beispiel. Die Zerlegung $D^2 = \{0\} \cup \bigcup_{z\in S^1}\{z\} \cup \bigcup_{w\in S^1}\{rw : 0 < r < 1\}$ liefert eine Zellenzerlegung von D^2 mit unendlich vielen 0-Zellen (der Mittelpunkt und jeder Punkt am Rand S^1) und unendlich vielen 1-Zellen (jeder Radius.) Offensichtlich besitzt jede Zelle eine charakteristische Abbildung und Axiom (C) aus Definition III.8.5 ist erfüllt. Allerdings ist Axiom (W) verletzt, denn $A = \big\{re^{i\theta} : r \in [0,1],\ \theta \in (0,\pi/2)\big\}$ ist keine abgeschlossene Teilmenge von D^2, aber der Durchschnitt mit dem Abschluss einer beliebigen Zelle ist abgeschlossen. Also ist dies keine CW-Zerlegung von D^2.

III.8.24. Lemma. *Es sei $(X,\mathcal{E})$ ein CW-Komplex, $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ und $X' := \bigcup_{e\in\mathcal{E}'} e$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$(X',\mathcal{E}')$ ist ein CW-Komplex.*
(ii) *X' ist abgeschlossen in X.*
(iii) *Es gilt $\bar{e} \subseteq X'$ für jede Zelle $e \in \mathcal{E}'$.*

Beweis. Ad (i)⇒(iii): Es bezeichne $\iota : X' \to X$ die kanonische Inklusion und es sei $e \in \mathcal{E}'$. Nach Voraussetzung existiert eine charakteristische Abbildung $\varphi : D^n \to X'$ für die Zelle e von X'. Es ist dann $\iota\circ\varphi : D^n \to X$ eine charakteristische Abbildung für die Zelle e von X. Aus Lemma III.8.2(i) folgt $\bar{e} = (\iota\circ\varphi)(D^n) \subseteq X'$. Ad (iii)⇒(ii): Sei $e \in \mathcal{E}$. Da X das Axiom (W) erfüllt genügt es zu zeigen, dass $X' \cap \bar{e}$ abgeschlossen in X ist. Da $X' = \bigcup_{\tilde{e}\in\mathcal{E}'} \tilde{e}$ und weil X dem Axiom (C) genügt existieren $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{E}'$ mit $X' \cap \bar{e} = (e_1 \cup \cdots \cup e_n) \cap \bar{e}$. Nach Voraussetzung gilt $\bar{e}_i \subseteq X'$, wir erhalten $X' \cap \bar{e} \subseteq (\bar{e}_1 \cup \cdots \cup \bar{e}_n) \cap \bar{e} \subseteq X' \cap \bar{e}$, also $X' \cap \bar{e} = (\bar{e}_1 \cup \cdots \cup \bar{e}_n) \cap \bar{e}$ und dies ist offensichtlich abgeschlossen in X. Ad (ii)⇒(i): Als Teilraum eines Hausdorffraumes ist auch X' ein Hausdorffraum. Beachte weiters, dass auf Grund der Abgeschlossenheit von X' der Abschluss einer Teilmenge von X' in X' mit ihrem Abschluss in X übereinstimmt. Insbesondere ist eine Teilmenge von X' abgeschlossen in X' genau dann wenn sie abgeschlossen in X ist. Sei nun $e \in \mathcal{E}'$ und $\varphi : D^n \to X$ eine charakteristische Abbildung für die Zelle e von X. Es folgt $\varphi(D^n) \subseteq \bar{e} \subseteq X'$, also ist φ auch charakteristische Abbildung für die Zelle e von X'. Damit besitzt jede Zelle der Zellenzerlegung $\mathcal{E}'$ von X' eine charakteristische Abbildung. Axiom (C) für X' folgt sofort aus Axiom (C) für X. Es bleibt noch das Axiom (W) für $(X',\mathcal{E}')$ zu verifizieren. Sei also $A \subseteq X'$, sodass $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist, für jede Zelle $e \in \mathcal{E}'$. Es ist zu zeigen, dass A abgeschlossen ist. Da $(X,\mathcal{E})$ Axiom (W) erfüllt genügt es zu zeigen, dass $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist, für jede Zelle $e \in \mathcal{E}$. Für die Zellen $e \in \mathcal{E}'$ ist dies nach Voraussetzung der Fall. Sei also $e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}'$. Da $(X,\mathcal{E})$ dem Axiom (C) genügt existieren $e_1, \dots, e_n \in \mathcal{E}'$ mit $A \cap \bar{e} = A \cap (e_1 \cup \cdots \cup e_n) \cap \bar{e}$. Es folgt $A \cap \bar{e} = A \cap (\bar{e}_1 \cup \cdots \cup \bar{e}_n) \cap \bar{e} = \big((A \cap \bar{e}_1) \cup \cdots \cup (A \cap \bar{e}_n)\big) \cap \bar{e}$ und dies ist abgeschlossen, denn jedes $A \cap \bar{e}_i$ ist abgeschlossen. □

III.8.25. Definition (CW-Teilräume). Es sei $(X,\mathcal{E})$ ein CW-Komplex. Eine Teilmenge X' von X wird *CW-Teilraum* genannt, falls sie Vereinigung von Zellen in $\mathcal{E}$ ist, dh. es existiert eine Teilmenge $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ mit $X' = \bigcup_{e\in\mathcal{E}'} e$, und eine der drei äquivalenten Bedingungen in Lemma III.8.24 erfüllt ist. In diesem Fall bezeichnen wir (X, X') als *CW-Paar*. Insbesondere ist ein CW-Teilraum in kanonischer Weise wieder ein CW-Komplex, siehe Lemma III.8.24(i).

III.8.26. Bemerkung. Der Durchschnitt beliebig vieler CW-Teilräumen von X ist wieder ein CW-Teilraum von X, siehe Lemma III.8.24(ii).

III.8.27. Bemerkung. Die Vereinigung beliebig vieler CW-Teilräume von X ist wieder ein CW-Teilraum von X, siehe Lemma III.8.24(iii).

III.8.28. Bemerkung. Das n-Skelett X^n eines CW-Komplexes X ist ein CW-Teilraum von X, siehe Lemma III.8.24(iii) und Lemma III.8.2(i).

III.8.29. Bemerkung. Ist X^n das n-Skelett eines CW-Komplexes X und sind e_λ, $\lambda \in \Lambda$, gewisse $(n+1)$-Zellen von X, dann ist auch $X^n \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda$ ein CW-Teilraum von X, siehe Lemma III.8.24(iii) und Lemma III.8.2(i).

III.8.30. Lemma. *Jede Zelle eines CW-Komplexes ist in einem endlichen CW-Teilraum enthalten.*

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach der Dimension der Zelle. Für 0-Zellen ist die Aussage trivial. Induktiv nehmen wir nun an, dass jede k-Zelle, $0 \leq k < n$, in einem endlichen CW-Teilraum enthalten ist. Weiters sei e eine n-Zelle. Nach Lemma III.8.2(ii) gilt $\bar{e} \setminus e \subseteq X^{n-1}$. Auf Grund von Axiom (C) existieren endlich viele Zellen $e_1, \dots, e_l$ von X^{n-1}, sodass $\bar{e} \setminus e \subseteq e_1 \cup \dots \cup e_l$. Nach Induktionsvoraussetzung liegt jede der Zellen e_i in einem endlichen CW-Teilraum. Die Vereinigung dieser CW-Teilräume ist ein endlicher CW-Teilraum A der $\bar{e} \setminus e$ enthält, siehe Bemerkung III.8.27. Nach Konstruktion gilt $\bar{e} \subseteq A \cup e$, also ist $A \cup e$ ein endlicher CW-Teilraum der e enthält, siehe Lemma III.8.24(iii). $\square$

III.8.31. Proposition. *Eine kompakte Teilmenge eines CW-Komplexes ist stets in einem endlichen CW-Teilraum enthalten.*

Beweis. Sei also X ein CW-Komplex. Wähle einen Punkt in jeder Zelle von X und bezeichne mit $P \subseteq X$ die Menge dieser Punkte. Ist $A \subseteq P$ eine beliebige Teilmenge und e eine Zelle von X, dann ist $A \cap \bar{e}$ endlich, siehe Axiom (C) in Definition III.8.5. Aus der Hausdorffeigenschaft von X folgt, dass $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen ist. Nach Axiom (W) in Definition III.8.5 ist daher A abgeschlossen. Damit ist jede Teilmenge von P abgeschlossen, also trägt P die diskrete Topologie. Sei nun K eine kompakte Teilmenge von X. Dann ist $K \cap P$ ein diskreter kompakter Raum, also endlich. Es folgt, dass K nur endlich viele Zellen von X trifft. Nach Lemma III.8.30 und Bemerkung III.8.27 liegt K daher in einem endlichen CW-Teilraum. $\square$

III.8.32. Proposition. *Ein CW-Komplex genau dann kompakt, wenn er endlich ist.*

Beweis. Ein endlicher CW-Komplex muss kompakt sein, dies folgt aus Lemma III.8.2(i) und der Tatsache, dass die Vereinigung endlich vieler kompakter Teilmengen (die Abschlüsse der endlich vielen Zellen) wieder kompakt ist. Die andere Implikation folgt sofort aus Proposition III.8.31. □

Ein Hausdorffraum wird *lokalkompakt* genannt falls jeder Punkt eine kompakte Umgebung besitzt. Ein CW-Komplex heißt *lokal endlich* falls jeder Punkt eine Umgebung besitzt die nur endlich viele Zellen trifft.

III.8.33. Proposition. *Ein CW-Komplex ist genau dann lokalkompakt wenn er lokal endlich ist.*

Beweis. Es sei X ein CW-Komplex. Ist X lokalkompakt, dann besitzt jeder Punkt eine kompakte Umgebung und diese liegt in einem endlichen Teilkomplex, siehe Proposition III.8.31, also ist X lokal endlich. Sei nun umgekehrt X lokal endlich. Dann besitzt jeder Punkt eine Umgebung die nur endlich viele Zellen trifft. Die Vereinigung der Abschlüsse dieser endlich vielen Zellen bildet eine kompakte Umgebung des Punktes, siehe Lemma III.8.2. □

III.8.34. Bemerkung. Es sei X ein CW-Komplex. Wähle eine charakteristische Abbildung $D^n \to X^n$ für jede n-Zelle von X und bezeichne ihre disjunkte Vereinigung mit $\varphi : \bigsqcup D^n \to X^n$. Die Einschränkung von φ liefert eine stetige Abbildung $\psi : \bigsqcup S^{n-1} \to X^{n-1}$. Die Abbildung $\mathrm{id}_{X^{n-1}} \sqcup \varphi : X^{n-1} \sqcup \bigsqcup D^n \to X^n$ faktorisiert durch die kanonische Projektion $p : X^{n-1} \sqcup \bigsqcup D^n \to X^{n-1} \cup_\psi \bigsqcup D^n$ zu einer bijektiven stetigen Abbildung

$$f := \mathrm{id}_{X^{n-1}} \cup_\psi \varphi : X^{n-1} \cup_\psi \bigsqcup D^n \to X^n.$$

Da X Axiom (W) genügt ist $\mathrm{id}_{X^{n-1}} \sqcup \varphi : X^{n-1} \sqcup \bigsqcup D^n \to X^n$ eine abgeschlossene Abbildung, dh. Bilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen. Damit ist auch f eine abgeschlossene Abbildung, also ein Homöomorphismus. Wir sehen daher, dass das n-Skelett eines CW-Komplexes aus dem $(n-1)$-Skelett durch Ankleben von n-Zellen ensteht.

III.8.35. Bemerkung. Ein CW-Komplex ist genau dann wegzusammenhängend, wenn sein 1-Skelett wegzusammenhängend ist. Dies folgt sofort aus Bemerkung III.8.34 und Proposition III.8.31.

III.8.36. Bemerkung. Eine Teilemenge A eines CW-Komplexes X ist genau dann abgeschlossen wenn $X^n \cap A$ für jedes n abgeschlossen ist. Äquivalent ist eine Teilmenge U genau dann offen, wenn $X^n \cap U$ für jedes n offen in X^n ist. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist daher genau dann stetig wenn die Einschränkung $f|_{X^n} : X^n \to Y$ für jeds n stetig ist.

III.8.37. Bemerkung. Ist $Y_{n-1} \subseteq Y_n$ ein Teilraum, $n \in \mathbb{N}$, dann schreiben wir $\varinjlim Y_n$ für die Menge $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ versehen mit folgender Topologie: eine Teilmenge $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ ist genau dann offen wenn $U \cap Y_n$ offen in Y_n ist. Dies ist die gröbste

Topologie, sodass die kanonischen Inklusionen $Y_n \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n$ alle stetig sind. Eine Abbildung $f : \varinjlim Y_n \to Z$ ist genau dann stetig, wenn die Einschränkungen $f|_{Y_n} : Y_n \to Z$ alle stetig sind. Für einen CW-Komplex X gilt daher $X = \varinjlim X^n$, siehe Bemerkung III.8.36.

III.8.38. Proposition. *Überlagerungen von CW-Komplexen sind in kanonischer Weise wieder CW-Komplexe.*

Beweis. Sei also $(X, \mathcal{E})$ ein CW-Komplex und $p : \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung. Zunächst ist mit X auch $\tilde{X}$ ein Hausdorffraum, siehe Beispiel II.1.16. Für jede Zelle $e \in \mathcal{E}$ ist die Einschränkung $p|_{p^{-1}(e)} : p^{-1}(e) \to e$ eine triviale Überlagerung, siehe Korollar II.4.10. Es existiert daher ein diskreter Raum Λ und ein Homöomorphismus $p^{-1}(e) \cong e \times \Lambda$. Jede Wegzusammenhangskomponente von $p^{-1}(e)$ ist also eine Zelle der gleichen Dimension wie e. Durchläuft e die Zellen in $\mathcal{E}$ so bilden diese Wegzusammenhangskomponenten eine Zellenzerlegung $\tilde{\mathcal{E}}$ von $\tilde{X}$. Ist $\tilde{e} \in \tilde{\mathcal{E}}$ eine n-Zelle von $\tilde{X}$, dann ist $e := p(\tilde{e}) \in \mathcal{E}$ eine n-Zelle von X und $p|_{\tilde{e}} : \tilde{e} \to e$ ist ein Homöomorphismus. Weiters gilt offensichtlich $p^{-1}(X^n) = \tilde{X}^n$ sowie $p(\tilde{X}^n) = X^n$. Ist $\varphi : D^n \to X$ eine charakteristische Abbildung für e dann lässt sich diese zu einer stetigen Abbildung $\tilde{\varphi} : D^n \to \tilde{X}$ mit $\tilde{\varphi}(B^n) \cap \tilde{e} \neq \emptyset$ liften, dh. $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$, siehe Satz II.4.5. Beachte, dass $(p|_{\tilde{e}})^{-1} \circ \varphi|_{B^n}$ ein Lift von $\varphi|_{B^n}$ ist und daher $(p|_{\tilde{e}})^{-1} \circ \varphi|_{B^n} = \tilde{\varphi}|_{B^n}$ gilt, siehe Proposition II.3.1. Daher ist $\tilde{\varphi}|_{B^n} : B^n \to \tilde{e}$ ein Homöomorphismus. Da auch $\tilde{\varphi}(S^{n-1}) \subseteq p^{-1}(\varphi(S^{n-1})) \subseteq p^{-1}(X^{n-1}) = \tilde{X}^{n-1}$ sehen wir, dass $\tilde{\varphi}$ eine charakteristische Abbildung der Zelle $\tilde{e}$ ist. Also besitzt jede Zelle in $\tilde{\mathcal{E}}$ eine charakteristische Abbildung. Nach Lemma III.8.2(i) ist $\bar{\tilde{e}}$ kompakt ist, woraus wir $p(\bar{\tilde{e}}) = \bar{e}$ erhalten, denn es gilt $e = p(\tilde{e}) \subseteq p(\bar{\tilde{e}}) \subseteq \bar{e}$ und $p(\bar{\tilde{e}})$ ist als stetiges Bild einer kompakten Menge selbst kompakt und daher abgeschlossen. Da $(X, \mathcal{E})$ Axiom C genügt, trifft $p(\bar{\tilde{e}}) = \bar{e}$ nur endlich viele Zellen von X. Ist $e' \in \mathcal{E}$ eine Zelle von X dann folgt aus $p^{-1}(e') \cong e' \times \Lambda$ und der Kompaktheit von $\bar{\tilde{e}}$, dass $\bar{\tilde{e}}$ nur endlich viele der Zusammenhangskomponenten von $p^{-1}(e')$ treffen kann. Es trifft daher $\bar{\tilde{e}}$ nur endlich viele Zellen in $\tilde{\mathcal{E}}$, also erfüllt auch $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{E}})$ das Axiom C. Schließlich erfüllt $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{E}})$ auch Axiom (W), denn X genügt dem Axiom (W) und p ist ein lokaler Homöomorphismus. $\square$

III.8.39. Proposition. *Jeder CW-Komplex ist lokal kontrahierbar.*

Beweis. Siehe etwa [**4**, Proposition A.4], [**14**, Satz 4.3.3] oder [**10**, Satz auf Seite 185]. $\square$

III.8.40. Bemerkung. Ein CW-Komplex ist genau dann zusammenhängend ist wenn er wegzusammenhängend ist. Dies folgt aus Proposition III.8.39.

III.8.41. Bemerkung. Nach Proposition III.8.39 ist jeder CW-Komplex lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend. Die gesamte Überlagerungstheorie aus Kapitel II lässt sich daher auf CW-Komplexe anwenden. Insbesondere besitzt jeder zusammenhängende CW-Komplex eine universelle Überlagerung, siehe Satz II.6.9.

III.8.42. Proposition. *CW-Komplexe sind normal.*[36]

Beweis. Siehe [**4**, Proposition A.3]. □

III.8.43. Proposition. *Ist (X, A) ein CW-Paar, dann ist auch X/A in kanonischer Weise ein CW-Komplex.*

Beweis. Es bezeichne $(X, \mathcal{E})$ die CW-Zerlegung von X, $p : X \to X/A$ die kanonische Projektion und $* := p(A)$ den ausgezeichneten Punkt in X/A. Aus Proposition III.8.42 folgt sofort, dass X/A ein Hausdorffraum ist. Die Bilder unter der Abbildung p der Zellen in $X \setminus A$ zusammen mit der 0-Zelle $*$ liefern eine Zellenzerlegung $\mathcal{E}'$ von X/A. Dies sind tatsächlich Zellen, denn $p|_{X\setminus A} : X \setminus A \to (X/A)\setminus\{*\}$ ist ein Homöomorphismus. Durch Komposition charaktristischer Abbildungen der Zellen in $X\setminus A$ mit p erhalten wir charakteristische Abbildungen für die Zellen von X/A. Offensichtlich genügt die Zellenzerlegung $\mathcal{E}'$ Axiom (C). Nun zu Axiom (W). Es sei $B \subseteq X/A$, sodass $B \cap \bar{e}'$ abgeschlossen ist, für alle $e' \in \mathcal{E}'$. Nach Konstruktion der Zellen von X/A ist auch dann $B \cap \overline{p(e)}$ abgeschlossen, für jede Zelle $e \in \mathcal{E}$. Aus der Stetigkeit von p folgt daher, dass $p^{-1}(B \cap \overline{p(e)})$ abgeschlossen ist, $e \in \mathcal{E}$. Aus der Stetigkeit von p erhalten wir auch $p(\bar{e}) \subseteq \overline{p(e)}$, also $\bar{e} \subseteq p^{-1}(\overline{p(e)})$. Somit ist $p^{-1}(B)\cap\bar{e} = p^{-1}(B)\cap p^{-1}(\overline{p(e)})\cap\bar{e} = p^{-1}(B\cap\overline{p(e)})\cap\bar{e}$ abgeschlossen, für jede Zelle $e \in \mathcal{E}$. Da $(X, \mathcal{E})$ Axiom (W) genügt, folgt dass $p^{-1}(B)$ abgeschlossen ist. Daher ist B bezüglich der Quotiententopoologie auf X/A abgeschlossen, womit auch Axiom (W) für $(X/A, \mathcal{E}')$ verifiziert ist. □

III.8.44. Beispiel. Es sei X ein CW-Komplex mit n-Zellen e_λ, $\lambda \in \Lambda$. Dann ist X^n/X^{n-1} homöomorph zur Einpunktvereinigung von n-Sphären, genauer, $X^n/X^{n-1} \cong \bigvee_{\lambda\in\Lambda}(S^n, *)$. Nach Proposition III.8.43 ist X^n/X^{n-1} nämlich ein CW-Komplex mit einer einzigen 0-Zelle und einer n-Zelle für jede n-Zelle von X. Nach Bemerkung III.8.34 ensteht X^n/X^{n-1} aus einem einpunktigen Raum durch Ankleben von n-Zellen.

III.8.45. Beispiel. Es seien (X_λ, x_λ), $\lambda \in \Lambda$, CW-Komplexe mit ausgezeichneten 0-Zellen $x_\lambda \in X_\lambda$. Dann ist auch $\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, x_\lambda)$ ein CW-Komplex. Dies folgt aus Proposition III.8.43, denn der fragliche Raum ensteht aus dem CW-Komplex $\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ durch Kollabieren des Teilraums $A = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, genauer $\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(X_\lambda, x_\lambda) \cong \big(\bigsqcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big)/A$.

III.8.46. Definition (Zelluläre Abbildungen). Eine stetige Abbildung zwischen CW-Komplexen $f : X \to Y$ wird *zellulär* genannt falls $f(X^n) \subseteq Y^n$ gilt, für jedes $n \in \mathbb{N}_0$.

III.8.47. Proposition. *Es sei (X, A) ein CW-Paar und $f : A \to Y$ eine zelluläre Abbildung. Dann ist auch $Y \cup_f X$ in kanonischer Weise ein CW-Komplex.*

[36] Ein Hausdorffraum wird *normal* geannt, wenn je zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen durch Umgebungen getrennt werden können. Sind A und B disjunkte abgeschlossene Teilmengen, dann existieren offene Teilmengen U und V mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$.

Beweis. Aus Proposition III.8.42 folgt sofort, dass $Y \cup_f X$ ein Hausdorffraum ist. Die Zellen von Y zusammen mit den Zellen in $X \setminus A$ bilden eine Zellenzerlegung von $Y \cup_f X$. Durch Zusammensetzen mit der kanonischen Projektion $p : Y \sqcup X \to Y \cup_f X$ erhalten wir charakteristische Abbildungen für die Zellen von $Y \cup_f X$ aus charakteristischen Abbildungen der Zellen in Y und $X \setminus A$. Es ist nun nicht schwer die Axiome (C) und (W) für diese Zellenzerlegung von $Y \cup_f X$ zu verifizieren. $\square$

Ist X ein Hausdorffraum so bezeichnen wir mit X_c die Menge X versehen mit der Topologie in der eine Teilmenge $A \subseteq X$ abgeschlossen ist, falls der Durchschnitt $A \cap K$ mit jeder kompakten Teilmenge K von X abgeschlossen ist. Eine Teilmenge U ist genau dann offen wenn $U \cap K$ offen in K ist, für jede kompakte Teilmenge K von X. Dies ist die feinste Topologie sodass die Inklusionen kompakter Teilmengen von X stetig sind. Sie wird als die von den *kompakten Teilmengen* erzeugte Topologie bezeichnet. Gilt $X = X_c$ so heißt der Raum X *kompakt erzeugt.*

III.8.48. Beispiel. Jeder lokalkompakte Hausdorffraum kompakt erzeugt. Jeder CW-Komplex ist kompakt erzeugt, siehe Bemerkung III.8.10.

Die Topologie auf X_c ist feiner als die Topologie auf X, dh. die indentische Abbildung $X_c \to X$ ist stetig. Beachte auch, dass X und X_c die selben kompakten Mengen haben, dh. die identische Abbildung $X_c \to X$ ist proper. Die von X bzw. X_c auf einer kompakten Teilmenge induzierten Topologien stimmen überein. Beachte, dass die Topologie auf $(X \times Y)_c$ i.A. feiner als die Topologie auf $X_c \times Y_c$ ist. Es gilt jedoch:

III.8.49. Lemma. *Es seien X und Y Hausdorffäume, $X = X_c$ und Y lokalkompakt. Dann gilt $(X \times Y)_c = X \times Y$.*

III.8.50. Proposition. *Sind X und Y zwei CW-Komplexe, dann ist $(X \times Y)_c$ in kanonischer Weise ein CW-Komplex.*

Beweis. Es bezeichnen $(X, \mathcal{E})$ und $(Y, \mathcal{F})$ die CW-Zerlegungen von X und Y. Da $B^n \times B^m \cong B^{n+m}$ bildet $\mathcal{G} := \{e \times f \mid e \in \mathcal{E},\ f \in \mathcal{F}\}$ eine Zellenzerlegung von $X \times Y$. Für das k-Skelett gilt $(X \times Y)^k = \bigcup_{n+m=k} X^n \times Y^m$. Sind $\varphi : D^n \to X$ und $\psi : D^m \to Y$ charakteristische Abbildungen der Zellen $e \in \mathcal{E}$ und $f \in \mathcal{F}$, dann ist $\varphi \times \psi : D^n \times D^m \to X \times Y$ eine charakteristische Abbildung der Zelle $e \times f \in \mathcal{G}$, denn $D^n \times D^m \cong D^{n+m}$. Wegen der Kompaktheit von $\overline{e \times f} = \bar{e} \times \bar{f}$ ist $e \times f$ auch eine Zelle in $(X \times Y)_c$ mit charakteristischer Abbildug $\varphi \times \psi : D^n \times D^m \to (X \times Y)_c$. Offensichtlich genügt $\mathcal{G}$ dem Axiom (C). Nun zu Axiom (W). Sei also $A \subseteq (X \times Y)_c$, sodass $A \cap (\bar{e} \times \bar{f})$ abgeschlossen ist, für alle $e \in \mathcal{E}$ und $f \in \mathcal{F}$. Weiters sei $K \subseteq X \times Y$ kompakt. Es ist die Abgeschlossenheit von $A \cap K$ zu zeigen. Es genügt zu zeigen, dass $A \cap (K_1 \times K_2)$ abgeschlossen ist, $K_1 := p_X(K)$ und $p_Y(K)$, denn K ist abgeschlossen in $K_1 \times K_2$. Nach Proposition III.8.31 existieren endlich viele Zellen $e_i \in \mathcal{E}$ und $f_j \in \mathcal{F}$ mit $K_1 \subseteq \bar{e}_1 \cup \cdots \cup \bar{e}_n$ und

$K_2 \subseteq \bar{f}_1 \cup \cdots \cup \bar{f}_m$. Es folgt $A \cap (K_1 \times K_2) = \bigcup_{i,j} A \cap (\bar{e}_i \times \bar{f}_j)$ und dies ist als endlich Vereinigung abgeschlossener Teilmengen wieder abgeschlossen. $\square$

III.8.51. Bemerkung. Sind X und Y CW-Komplexe und X lokal endlich, dann ist $X \times Y = (X \times Y)_c$ ein CW-Komplex. Dies folgt aus Proposition III.8.50, Lemma III.8.49, Beispiel III.8.48 und Proposition III.8.33.

III.8.52. Bemerkung. Sind X und Y zwei CW-Komplexe mit abzählbar vielen Zellen, dann ist $X \times Y = (X \times Y)_c$ ein CW-Komplex, siehe [**4**, Theorem A.6].

III.8.53. Beispiel. Es sei X ein CW-Komplex mit Zellenzerlegung $\mathcal{E}$. Nach Bemerkung III.8.51 ist $X \times I$ ein CW-Komplex. Verwenden wir die Zellenzerlegung $I = \{0\} \cup (0,1) \cup \{1\}$ so erhalten wir die folgende CW-Zerlegung von $X \times I$:

$$\big\{e \times \{0\} \mid e \in \mathcal{E}\big\} \cup \big\{e \times \{1\} \mid e \in \mathcal{E}\big\} \cup \big\{e \times (0,1) \mid e \in \mathcal{E}\big\}$$

Eine n-Zelle von X liefert daher zwei n-Zellen, $e\times\{0\}$ und $e\times\{1\}$, und eine $(n+1)$-Zelle, $e\times(0,1)$, in $X\times I$. Insbesondere ist eine Homotopie $H : X\times I \to Y$ in einen beliebigen topologischen Raum Y genau dann stetig, wenn die Einschränkung $H|_{X^n\times I} : X^n \times I \to Y$ für jedes n stetig ist, vgl. Bemerkung III.8.36.

III.8.54. Proposition. *Jedes CW-Paar hat die Homotopieerweiterungseigenschaft.*

Beweis. Sei also (X, A) ein CW-Paar, $h : X \to Y$ und $H : A \times I \to Y$ mit $H_0 = h|_A$. Es ist $\tilde{H} : X \times I \to Y$ mit $\tilde{H}|_{A\times I} = H$ und $\tilde{H}_0 = h$ zu konstruieren. Wir werden unten stetige Abbildungen $\tilde{H}^n : (X^n \cup A) \times I \to Y$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit folgenden Eigenschaften konstrueiren:

$$\tilde{H}^n|_{(X^{n-1}\cup A)\times I} = \tilde{H}^{n-1} \tag{III.22}$$

$$\tilde{H}^0|_{A\times I} = H \tag{III.23}$$

$$\tilde{H}^n_0 = h|_{X^n\cup A} \tag{III.24}$$

Ist dies gelungen so definieren wir $\tilde{H} : X \times I \to Y$ durch $\tilde{H}|_{X^n\times I} := \tilde{H}^n|_{X^n\times I}$. Auf Grund von (III.22) ist $\tilde{H}$ wohldefiniert und stetig, siehe Beispiel III.8.53. Aus (III.23) erhalten wir sofort $\tilde{H}|_{A\times I} = H$ und aus (III.24) auch $\tilde{H}_0 = h$.

Wir werden die Abbildungen $\tilde{H}^n$ induktiv konstruieren. Für $n = 0$ ist dies trivial, etwa können wir $\tilde{H}^0(a,t) := H(a,t)$ für $(a,t) \in A\times I$ und $\tilde{H}^0(x,t) := h(x)$ für $(x,t) \in (X^0 \setminus A) \times I$ setzen. Induktiv nehmen wir nun an, dass Abbildungen $\tilde{H}^{n-1} : (X^{n-1}\cup A)\times I \to Y$ mit den gewünschten Eigenschaften schon konstruiert sein. Bezeichne mit $f : \big((X^n \cup A) \times \{0\}\big) \cup \big((X^{n-1} \cup A) \times I\big) \to Y$ die durch $f|_{(X^n\cup A)\times\{0\}} := h|_{(X^n\cup A)}$ und $f|_{(X^{n-1}\cup A)\times I} := \tilde{H}^{n-1}$ definierte Abbildung. Beachte, dass f wohldefiniert und stetig ist, denn $\tilde{H}^{n-1}$ erfüllt (III.24). Es genügt nun zu zeigen, dass $\big((X^n\cup A)\times\{0\}\big)\cup\big((X^{n-1}\cup A)\times I\big)$ ein Retrakt von $(X^n\cup A)\times I$ ist, denn ist r eine entsprechende Retraktion, dann hat $\tilde{H}^n := f \circ r$ alle gewünschten Eigenschaften.

Um eine Retraktion $r : (X^n \cup A) \times I \to \big((X^n \cup A) \times \{0\}\big) \cup \big((X^{n-1} \cup A) \times I\big)$ zu konstruieren wähle eine charakteristische Abbildung für jede n-Zelle in $X \setminus A$ und bezeichnen ihre disjunkte Vereinigung mit $\varphi : \bigsqcup D^n \to X^n$. Durch Einschränken der Abbildung $\varphi \times \mathrm{id}_I : \bigsqcup D^n \times I \to X^n \times I$ erhalten wir eine Abbildung

$$\psi : \bigsqcup (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I) \to (X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \times I).$$

Da $X \times I$ ein CW-Komplex ist liefert die Abbildung $\mathrm{id}_{(X^{n-1} \cup A) \times I} \cup_\psi (\varphi \times \mathrm{id}_I)$ einen Homöomorphismus

$$(X^n \cup A) \times I \cong \big((X^{n-1} \cup A) \times I\big) \cup_\psi \bigsqcup D^n \times I.$$

Wähle wir nun eine Retraktion $\rho : \bigsqcup D^n \times I \to \bigsqcup (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)$ und setzen $r := \mathrm{id}_{(X^{n-1} \cup A) \times I} \cup_\psi (\psi \circ \rho)$, so ist dies die gesuchte Retraktion. □

Ein einfach zusammenhängender 1-dimensionaler CW-Komplex wird *Baum* genannt.

III.8.55. Lemma. *Bäume sind kontrahierbar.*

Beweis. Sei also X ein einfach zusammenhängender 1-dimensionaler CW-Komplex und x_0 eine 0-Zelle. Es ist eine stetige Abbildung $H : X \times I \to X$ mit $H_0 = \mathrm{id}_X$ und $H_1 = c_{x_0}$ zu konstruieren. Wir werden die in Beispiel III.8.53 besprochene CW-Zerlegung von $X \times I$ verwenden. Da X wegzusammenhängend ist finden wir zu jeder 0-Zelle e von X einen stetigen Weg $\sigma_e : I \to X$ von $\sigma_e(0) = e$ nach $\sigma_e(1) = x_0$. Wir definieren die gesuchte Abbildung H zunächst auf dem 1-Skelett $(X \times I)^1 = (X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\}) \cup (X^0 \times I)$ von $X \times I$ durch $H^1 : (X \times I)^1 \to X$, $H^1(x, 0) := x$, $H^1(x, 1) := x_0$ und $H^1(e, t) := \sigma_e(t)$, $x \in X$, $t \in I$ und $e \in X^0$. Es bleibt zu zeigen, dass H^1 zu einer stetigen Abbildung $X \times I \to X$ ausgedehnt werden kann. Wähle zu jeder 1-Zelle von X eine charakteristische Abbildung und bezeichne ihre disjunkte Vereinigung mit $\varphi : \bigsqcup D^1 \to X$. Durch Einschränken der Abbildung $\varphi \times \mathrm{id}_I : D^1 \times I \to X \times I$ erhalten wir eine Abbildung $\psi : \bigsqcup \partial(D^1 \times I) \to (X \times I)^1$. Da $X \times I$ ein CW-Komplex ist, siehe Beispiel III.8.53, liefert die Abbildung $\mathrm{id}_{(X \times I)^1} \cup_\psi (\varphi \times \mathrm{id}_I)$ einen Homöomorphismus

$$X \times I \cong (X \times I)^1 \cup_\psi \bigsqcup D^1 \times I.$$

Da X einfach zusammenhängend ist, lässt sich $H^1 \circ \psi : \bigsqcup \partial(D^1 \times I) \to X$ zu einer stetigen Abbildung $G : \bigsqcup D^1 \times I \to X$ fortsetzen, siehe Korollar I.8.29. Es ist nun $H := H^1 \cup_\psi G$ die gesuchte Homotopie. □

III.8.56. Bemerkung. Ist X ein endlicher Baum mit k_0 0-Zellen und k_1 1-Zellen, dann gilt $k_1 = k_0 - 1$. Dies lässt sich durch Induktion nach der Zahl der 1-Zellen beweisen. Für $k_1 = 0$ ist dies offensichtlich, denn ein zusammenhämgender CW-Komplex der nur aus 0-Zellen besteht muss einpunktig sein, dh. $k_0 = 1$. Für den Induktionsschritt wählen wir eine 1-Zelle e in X und eine charakteristische Abbildung $\varphi : D^1 \to X$ für e. Aus dem einfachen Zusammenhang von X folgt $\varphi(-1) \neq \varphi(1)$. Der Teilkomplex $A := \bar{e}$ von X besitzt daher genau zwei 0-Zellen und eine 1-Zelle. Weiters liefert φ einen Homöomorphismus $D^1 \cong A$, dh. A ist kontrahierbar. Der CW-Komplex X/A, siehe Proposition III.8.43, hat daher $k_0 - 1$ viele 0-Zellen und $k_1 - 1$ viele 1-Zellen. Nach Proposition III.7.10 ist die Projektion $X \to X/A$ eine Homotopieäquivalenz, also X/A wieder ein Baum, siehe auch Proposition III.8.54. Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir nun $(k_1 - 1) = (k_0 - 1) - 1$, also $k_1 = k_0 - 1$.

Unter einem Baum in einem CW-Komplex X verstehen wir einen CW-Teilraum von X der ein Baum ist. Ein Baum in X wird *aufspannender Baum* genannt, falls er alle 0-Zellen von X enthält.

III.8.57. Lemma. *Jeder zusammenhängende CW-Komplex besitzt einen aufspannenden Baum.*

Beweis. Es sei X ein zusammenhängender CW-Komplex. Die Menge aller Bäume in X ist eine teilweise georndete Menge, wobei $B \leq B'$ falls $B \subseteq B'$. Ist $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, eine linear geordnete[37] Menge von Bäumen in X, dann ist auch $B := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ ein Baum in X. Um dies einzusehen bemerken wir zunächst, dass B wieder ein CW-Teilraum ist, siehe Bemerkung III.8.27. Nun zum einfachen Zusammenhang von B. Ist σ eine Schleife in B, dann trifft diese nur endlich viele Zellen von B, siehe Proposition III.8.31. Es existieren daher endlich viele λ_i, sodass σ in $B_{\lambda_1} \cup \cdots \cup B_{\lambda_n}$ enthalten ist. Da $\{B_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ linear geordnet ist, existiert i_0 mit $B_{\lambda_1} \cup \cdots \cup B_{\lambda_n} \subseteq B_{\lambda_0}$, $\lambda_0 := \lambda_{i_0}$. Also liegt die Schleife σ zur Gänze in B_{λ_0}. Nach Voraussetzung ist B_{λ_0} einfach zusammenhängend, also lässt sich σ in B_{λ_0} kontrahieren. Also ist jede Schleife in B kontrahierbar und B daher einfach zusammenhängend. Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass jede linear geordnete Teilmenge von Bäumen in X eine obere Schranke besitzt. Aus dem Lemma von Zorn, siehe etwa [**6**, Anhang], folgt daher die Existenz eines maximalen Baums B in X, dh. ist B' ein weiterer Baum in X und $B \subseteq B'$ dann gilt schon $B = B'$. Wir werden nun zeigen, dass ein maximaler Baum alle 0-Zellen von X enthalten muss. Indirekt angenommen es existiert eine 0-Zelle x_0 von X und $x_0 \notin B$. Mit X ist auch das 1-Skelett X^1 wegzusammenhängend, siehe Bemerkung III.8.35. Es existiert daher ein Weg $\sigma : I \to X^1$ von $\sigma(0) \in B$ nach $\sigma(1) = x_0$. Es sei $t_0 := \max\{t \in I : \sigma(t) \in B\}$ und $t_1 := \min\{t \in [t_0, 1] : \sigma(t) \in X^0\}$. Es existiert dann eine 1-Zelle e von X, sodass die Einschränkung $\sigma|_{[t_0,t_1]} : [t_0, t_1] \to \bar{e}$ ein Homöomorphismus ist. Der eine Randpunkt $\sigma(t_0)$ liegt in $B \cap X^0$ und für den andere gilt $\sigma(t_1) \in X^0 \setminus B$. Es ist daher $B \cup \bar{e}$ ein Baum der echt grösser als B ist, was der Maximalität von B widerspricht. Wir schließen, dass B tatsächlich alle 0-Zellen von X enthält. □

[37]dh. für $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ gilt entweder $B_{\lambda_1} \leq B_{\lambda_2}$ oder $B_{\lambda_2} \leq B_{\lambda_1}$.

III.8.58. Proposition. *Jeder zusammenhängende CW-Komplex ist homotopieäquivalent zu einem CW-Komplex mit nur einer* 0*-Zelle.*

Beweis. Sei X ein zusammenhängender CW-Komplex. Nach Lemma III.8.57 existiert ein aufspannender Baum B in X. Nach Propostion III.8.43 ist X/B ein CW-Komplex mit nur einer 0-Zelle. Nach Lemma III.8.55 ist B kontrahierbar. Da (X, B) die Homotopieerweiterungseigenschaft besitzt, siehe Proposition III.8.54, folgt nun aus Proposition III.7.10, dass die Projektion $X \to X/B$ eine Homotopieäquivalenz ist. □

III.8.59. Lemma. *Es gilt* $\pi_1\big(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(S^1,*)\big) \cong *_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{Z}$*, wobei* Λ *eine beliebige Indexmenge bezeichnet.*

Beweis. Die Inklusionen der Komponenten $(S^1,*) \to \bigvee_{\lambda\in\Lambda}(S^1,*)$ induzieren Homomorphismen $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1,*) \to \pi_1\big(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(S^1,*)\big)$. Aus der universellen Eigenschaft des freien Produkts von Gruppen erhalten wir daher einen Homomorphismus $*_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{Z} \to \pi_1\big(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(S^1,*)\big)$. Für endliche Indexmengen Λ ist dies ein Isomorphismus, siehe Beispiel I.9.7. Wir zeigen nun, dass dies für beliebige Indexmengen richtig bleibt. Die Surjektivität folgt aus Surjektivität für endliche Indexmengen und der Tatsache, dass eine Schleife in $\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(S^1,*)$ schon in einem endlichen Teil $\bigvee_{\lambda\in\Lambda'}(S^1,*) \subseteq \bigvee_{\lambda\in\Lambda}(S^1,*)$ liegen muss, $\Lambda' \subseteq \Lambda$ eine endliche Teilmenge, siehe Proposition III.8.31. Die Injektivität folgt aus der Injektivität für endliche Indexmengen, Lemma I.9.1(ii) und der Tatsache, dass der von der Inklusion induzierte Homomorphismus $\pi_1\big(\bigvee_{\lambda\in\Lambda'}(S^1,*)\big) \to \pi_1\big(\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(S^1,*)\big)$ injektiv ist. Letzteres folgt aus der Existenz einer Retraktion $\bigvee_{\lambda\in\Lambda}(S^1,*) \to \bigvee_{\lambda\in\Lambda'}(S^1,*)$. □

III.8.60. Proposition. *Die Fundamentlagruppe eines zusammenhängenden* 1*-dimensionalen CW-Komplexes ist eine freie Gruppe.*

Beweis. Sei also X ein zusammenhängender 1-dimensionaler CW-Komplex. Nach Proposition III.8.58 dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass X nur eine 0-Zelle besitzt. Es folgt $X = X^1 = X^1/X^0 \cong \bigvee_{\lambda\in\Lambda}(S^1,*)$, siehe Beispiel III.8.44. Die Aussage der Proposition folgt nun aus Lemma III.8.59. □

III.8.61. Bemerkung. Ist X ein endlicher zusammenhängender 1-dimensionaler CW-Komplex mit k_0 0-Zellen und k_1 1-Zellen, dann ist $\pi_1(X)$ frei vom Rang k_1-k_0+1. Um dies einzusehen betrachten wir nochmals den Beweis von Proposition III.8.60. Wähle einen aufspannenden Baum B in X, siehe Proposition III.8.57. Da B alle 0-Zellen von X enthält, besteht B aus k_0 0-Zellen und k_0-1 vielen 1-Zellen, siehe Bemerkung III.8.56. Der zu X homotopieäquivalente CW-Komplex X/B, siehe Beweis von Proposition III.8.58, ist daher zu der Einpunktvereinigung von k_1-k_0+1 Kreisen homöomorph, $X \simeq X/B \cong \bigvee_{i=1}^{k_1-k_0+1}(S^1,*)$. Aus Lemma III.8.59 folgt nun, dass $\pi_1(X) \cong \pi_1(X/B)$ frei vom Rang k_1-k_0+1 ist.

III.8.62. Satz. *Untergruppen freier Gruppen sind frei.*

Beweis. Sei also $G \cong *_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{Z}$ eine freie Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Betrachte den 1-dimensionalen zusammenhängenden CW-Komplex $X := \bigvee_{\lambda\in\Lambda}(S^1, *)$. Ist $x_0 \in X$ ein Basispunkt, dann gilt $\pi_1(X, x_0) \cong G$, siehe Lemma III.8.59. Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine zusammenhängende punktierte Überlagerung mit charakteristischer Untergruppe H, siehe Korollar II.6.11 und Bemerkung III.8.41. Es gilt daher $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong H$, siehe Proposition II.3.11(i). Nach Proposition III.8.38 ist auch $\tilde{X}$ ein 1-dimensionaler CW-Komplex, seine Fundamentalgruppe nach Proposition III.8.60 daher frei. Somit ist auch H eine freie Gruppe. $\square$

III.8.63. Bemerkung. Ist G eine freie Gruppe mit endlichem Rang n, dh. $G \cong \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$, und ist $H \subseteq G$ eine Untergruppe mit endlichem Index k, dh. $\sharp(G/H) = k$, dann ist H eine freie Gruppe vom Rang $k(n-1)+1$. Der Rang der Untergruppe H ist daher i.A. grösser als der Rang von G. Wir betrachten dazu nochmals den Beweis von Satz III.8.62. In dieser Situation besitzt X genau eine 0-Zelle und n 1-Zellen. Weiters ist $p : \tilde{X} \to X$ eine k-blättrige Überlagerung, siehe Proposition II.3.11(v). Es hat $\tilde{X}$ daher genau k 0-Zellen und kn 1-Zellen. Nach Bemerkung III.8.61 muss $H \cong \pi_1(\tilde{X})$ daher den Rang $kn - k + 1$ haben.

III.9. Die Sätze von Whitehead und Freudenthal.

III.9.1. Satz (Zelluläre Approximation). *Jede stetige Abbildung zwischen CW-Komplexen ist homotop zu einer zellulären Abbildung. Ist $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen CW-Komplexen und $A \subseteq X$ ein CW-Teilraum, sodass $f|_A : A \to Y$ zellulär ist, dann existiert eine Homotopie $H : X \times I \to Y$ mit $H_0 = f$, $H_1 : X \to Y$ zellulär und $H_t|_A = f$ für alle $t \in I$.*

III.9.2. Lemma. *Es sei $\psi : S^n \to A$ stetig und $X := A \cup_\psi D^{n+1}$. Dann ist das Paar (X, A) n-zusammenhängend.*

Beweis. Sei also $k \leq n$ und $f : (I^k, \partial I^k) \to (X, A)$ stetig. Nach Lemma III.5.21 genügt es eine zu f homotope Abbildung $(I^k, \partial I^k) \to (X, A)$ zu konstruieren deren Bild zur Gänze in A liegt. Wir werden unten einen Punkt $P \in B^{n+1} \subseteq X$ und eine zu f homotope Abbildung $g : (I^k, \partial I^k) \to (X, A)$ mit $g(I^k) \subseteq X \setminus \{P\}$ konstruieren. Ist dies gelungen, dann können wir den Beweis wie folgt zu Ende führen. Da S^n ein Deformationsretrakt von $D^{n+1} \setminus \{P\}$ ist und weil $X \setminus \{P\} = A \cup_\psi (D^{n+1} \setminus P)$, ist auch A Deformationsretrakt von $X \setminus \{P\}$, dh. es existiert eine Homotopie $H : X \setminus \{P\} \times I \to X \setminus \{P\}$ mit $H_0 = \mathrm{id}_{X\setminus\{P\}}$, $H_1(X \setminus \{P\}) \subseteq A$ und $H_t|A = \mathrm{id}_A$. Es liefert dann $(I^k \times I, \partial I^k \times I) \to (X, A)$, $(x,t) \mapsto H(g(x), t)$, eine Homotopie von g nach $H_1 \circ g$ und es gilt $(H_1 \circ g)(I^k) \subseteq A$. Also ist $f \simeq g$ homotop zu einer Abbildung deren Bild zur Gänze in A liegt. Nun aber zur Konstruktion von P und g. Es bezeichne $U := X \setminus D^{n+1}_{1/2}$ und $V := B^{n+1} \subseteq X$, also $U \cup V = X$. Wir unterteilen I^k in endlich viele Würfel $Q_1, \dots, Q_N$, sodass für jeden dieser Würfel entweder $f(Q_i) \subseteq U$ oder $f(Q_i) \subseteq V$

gilt. Mit Hilfe von Lemma III.5.26 ist es nicht schwer eine zu f homotope Abbildung $g : (I^k, \partial I^k) \to (X, A)$ zu konstruieren, sodass g auf einer Umgebung jedes Würfels Q_i mit $f(Q_i) \subseteq V$ glatt ist. Aus Lemma III.5.27 folgt dann, dass $V \setminus g(I^k)$ nicht leer ist, also einen Punkt P enthält. □

III.9.3. Proposition. *Für einen CW-Komplex X ist das Paar (X, X^n) n-zusammenhängend.*

Beweis. Es sei $k \leq n$ und $f : (D^k, S^{k-1}) \to (X, X^n)$ stetig. Nach Lemma III.5.21 genügt es eine Homotopie $H : (D^k \times I, S^{k-1} \times I) \to (X, X^n)$ zu konstruieren mit $H_0 = f$ und $H_1(D^k) \subseteq A$. Nach Proposition III.8.31, dürfen wir o.B.d.A. $X = X^n \cup e_1 \cup \cdots \cup e_l$ annehmen, wobei $e_1, \ldots, e_l$ endlich viele Zellen von X sind, deren Dimension grösser als n ist. Nach Lemma III.9.2 ist f homotop zu einer Abbildung $(D^k, S^{k-1}) \to (X, X^n)$ deren Bild in $X \cup e_1 \cup \cdots \cup e_{l-1}$ enthalten ist. Sukzessives Anwenden von Lemma III.9.2 liefert schließlich eine zu f homotope Abbildung $(D^k, S^{k-1}) \to (X, X^n)$ deren Bild in X^n liegt. □

Beweis von Satz III.9.1. Wir konstruieren zunächst Abbildungen $H^n : (X^n \cup A) \times I \to Y$ mit folgenden Eigenschaften:

$$H^n|_{(X^{n-1} \cup A) \times I} = H^{n-1} \tag{III.25}$$

$$H^n_0 = f|_{X^n \cup A} \tag{III.26}$$

$$H^0_t|_A = f|_A \tag{III.27}$$

$$H^n_1(X^n) \subseteq Y^n \tag{III.28}$$

Ist dies gelungen, so definieren wir $H : X \times I \to Y$ durch $H|_{X^n \times I} := H^n|_{X^n \times I}$. Wegen (III.25) und Beispiel III.8.53 ist dies wohldefiniert und stetig. Aus (III.26) erhalten wir $H_0 = f$, aus (III.27) $H_t|_A = f$, und aus (III.28) folgt, dass H_1 eine zelluläre Abbildug ist.

Wir konstruieren die Abbildungen H^n induktiv. Für $n = 0$ ist dies trivial, zu $x \in X^0 \setminus A$ wählen wir einen Weg $\sigma_x : I \to Y$ von $\sigma_x(0) = f(x)$ nach $\sigma_x(1) \in Y^0$. Setzen wir nun $H^0(a, t) := f(a)$ und $H^0(x, t) := \sigma_x(t)$, $a \in A$, $t \in I$, $x \in X^0 \setminus A$, dann hat H^0 alle gewünschten Eigenschaften. Sei nun H^{n-1} schon konstruiert. Zu jeder n-Zelle in $X \setminus A$ wählen wir ein charakteristische Abbildung und bezeichnen ihre diskunkte Vereinigung mit $\varphi : \bigsqcup D^n \to X^n$. Durch Einschränken der Abbildung $\varphi \times \mathrm{id}_I : \bigsqcup D^n \times I \to X^n \times I$ erhalten wir eine Abbildung

$$\psi : \bigsqcup (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I) \to (X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \times I).$$

Da $X \times I$ ein CW-Komplex ist liefert die Abbildung $\mathrm{id}_{(X^n \cup A) \times I} \cup_\psi (\varphi \times \mathrm{id}_I)$ einen Homöomorphismus

$$(X^n \cup A) \times I \cong (X^{n-1} \cup A) \times I \cup_\psi \bigsqcup D^n \times I.$$

Betrachte nun die durch $g|_{X^n \times \{0\}} = f|_{X^n}$ und $g|_{X^{n-1} \times I} := H^{n-1}|_{X^{n-1} \times I}$ gegebenen Abbildung $g : (X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \times I) \to Y$. Da H^{n-1} die Relation (III.26) erfüllt ist dies wohldefiniert und stetig. Nach Proposition III.9.3 lässt sich die Abbildung, siehe (III.28),

$$g \circ \psi : \bigsqcup \big((D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I), S^{n-1} \times \{1\} \big) \to (Y, Y^{n-1}) \to (Y, Y^n)$$

zu einer stetigen Abbildung $G : \bigsqcup (D^n \times I, D^n \times \{1\}) \to (Y, Y^n)$ ausdehnen, vgl. Lemma III.5.21. Setzen wir nun $H^n := H^{n-1} \cup_\psi G$ so hat diese Abbildung alle gewünschten Eigenschaften. □

III.9.4. Definition (Schwache Homotopieaäquivalenz). Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ wird *schwache Homotopieäquivalenz* genannt, falls sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jeden Basispunkt $x_0 \in X$ einen Isomorphismus $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ induziert.

III.9.5. Bemerkung. Nach Proposition III.4.8 ist jede Homotopieäquivalenz auch eine schwache Homotopieäquivalenz. Ein Satz von Whitehead besagt, dass für Abbildungen zwischen CW-Komplexen auch die Umkehrung gilt, vgl. Satz III.9.7 unten. Wir bemerken noch, dass jede zu einer schwachen Homotopieäquivalenz homotope Abbildung selbst eine schwache Homotopieäquivalenz ist und, dass auch die Komposition von schwachen Homotopieäquivalenzen wieder eine schwache Homotopieäquivalenz ist, vgl. Aufgabe 27.

III.9.6. Lemma. *Es sei (X, A) ein CW-Paar und (Y, B) ein Paar von Räumen mit $B \neq \emptyset$. Für jedes n für das es eine n-Zelle in $X \setminus A$ gibt und jeden Basispunkt $y_0 \in B$ sei $\pi_n(Y, B, y_0) = 0$. Dann ist jede Abbildung $f : (X, A) \to (Y, B)$ homotop rel. A zu einer Abbildung $X \to B$, dh. es existiert eine Homotopie $H : X \times I \to Y$ mit $H_0 = f$, $H_1(X) \subseteq B$ und $H(a, t) = f(a)$ für $a \in A$ und $t \in I$.*

Beweis. Wir werden unten stetige Abbildungen $H^n : (X^n \cup A) \times I \to Y$ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

$$H^n|_{X^{n-1} \cup A) \times I} = H^{n-1} \tag{III.29}$$

$$H^n_0 = f_{X^n \cup A} \tag{III.30}$$

$$H^0_t|_A = f|_A \tag{III.31}$$

$$H^n_1(X^n) \subseteq B \tag{III.32}$$

Ist dies gelungen, dann definieren wir $H : X \times I \to Y$ durch $H|_{X^n \times I} = H^n|_{X^n \times I}$. Nach (III.29) und Beispiel III.8.53 ist H wohldefiniert und stetig. Aus (III.30) erhalten wir $H_0 = f$, aus (III.31) folgt $H_t|_A = f$ und aus (III.32) schließlich $H_1(X) \subseteq B$.

Wir konstruieren H^n induktiv. Für $n = 0$ ist dies trivial. Zu $x \in X^0 \setminus A$ wählen wir einen Weg $\sigma_x : I \to Y$ von $\sigma_x(0) = f(x)$ nach $\sigma_x(1) \in B$. Setzen wir $H^0(a, t) := f(a)$ und $H^0(x, t) := \sigma_x(t)$, $a \in A$, $t \in I$, $x \in X^0 \setminus A$, so hat H^0 alle gewünschten Eigenschaften. Sei nun H^{n-1} schon konstruiert. Zu jeder n-Zelle in $X \setminus A$ wählen wir ein charakteristische Abbildung und bezeichnen ihre diskunkte Vereinigung mit $\varphi : \bigsqcup D^n \to X^n$. Durch Einschränken der Abbildung $\varphi \times \mathrm{id}_I : \bigsqcup D^n \times I \to X^n \times I$ erhalten wir eine Abbildung

$$\psi : \bigsqcup (D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I) \to (X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \times I).$$

Da $X \times I$ ein CW-Komplex ist liefert die Abbildung $\mathrm{id}_{(X^n \cup A)\times I} \cup_\psi (\varphi \times \mathrm{id}_I)$ einen Homöomorphismus

$$(X^n \cup A) \times I \cong (X^{n-1} \cup A) \times I \cup_\psi \bigsqcup D^n \times I.$$

Betrachte nun die durch $g|_{X^n \times \{0\}} = f|_{X^n}$ und $g|_{X^{n-1}\times I} := H^{n-1}|_{X^{n-1}\times I}$ gegebenen Abbildung $g : (X^n \times \{0\}) \cup (X^{n-1} \times I) \to Y$. Da H^{n-1} die Relation (III.30) erfüllt ist dies wohldefiniert und stetig. Weiters gilt $g(X^{n-1} \times \{1\}) \subseteq B$, siehe (III.32). Da $\pi_n(Y, B) = 0$ lässt sich

$$g \circ \psi : \bigsqcup \big((D^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I), S^{n-1} \times \{1\}\big) \to (Y, B)$$

zu einer stetigen Abbildung $G : \bigsqcup \big(D^n \times I, D^n \times \{1\}\big) \to (Y, B)$ ausdehnen, vgl. Lemma III.5.21. Setzen wir nun $H^n := H^{n-1} \cup_\psi G$ so diese Abbildung alle gewünschten Eigenschaften. □

III.9.7. Satz (Whitehead). *Jede schwache Homotopieäquivalenz zwischen CW Komplexen ist eine Homotopieäquivalenz. Ist (X, A) ein CW-Paar und die Inklusion $A \to X$ eine schwache Homotopieäquivalenz, dann ist A ein Deformationsretrakt von X.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Aussage über die Inklusion von CW-Teilräumen. Da die Inklusion $A \to X$ eine schwache Homotopieäquivalenz ist, erhalten wir aus der langen exakten Sequenz des Paares (X, A), siehe Satz III.5.15, sofort $\pi_n(X, A, x_0) = 0$, für jeden Basispunkt $x_0 \in A$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Wenden wir nun Lemma III.9.6 auf die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : (X, A) \to (X, A)$ an, so erhalten wir eine Homotopie $H : X \times I \to X$ mit $H_0 = \mathrm{id}_X$, $H_1(X) \subseteq A$ und $H_t|_A = \mathrm{id}_A$. Also ist $H_1 : X \to A$ eine Deformationsretraktion von X auf A.

Nun zur ersten Aussage. Sei also $f : X \to Y$ eine schwache Homotopieäquivalenz zwischen CW-Komplexen. O.B.d.A. dürfen wir f als zellulär annehmen, siehe Satz III.9.1. Nach Proposition III.8.47 ist der Abbildungszylinder $Z_f = Y \cup_f (X \times I)$ ein CW-Komplex, siehe auch Beispiel III.8.53. Es bezeichnen $\iota_X : X \to Z_f$ und $\iota_Y : Y \to Z_f$ die kanonischen Einbettungen. Wir erinnern uns, dass ι_Y eine Homotopieäquivalenz ist und $\iota_X \simeq \iota_Y \circ f$ gilt. Mit f ist daher auch ι_X eine schwache Homotopieäquivalenz. Nach dem schon beiwesenen Teil des Satzes ist X also ein Deformationsretrakt von Z_f. Insbesondere ist ι_X eine Homotopieäquivalenz. Aus $\iota_X \simeq \iota_Y \circ f$ folgt nun, dass auch f eine Homotopieäquivalenz ist. □

III.9.8. Bemerkung. Whiteheads Satz besagt nicht, dass zwei CW-Komplexe mit isomorphen Homotopiegruppen schon homotopieäquivalent sein müssen. Etwa haben $X := \mathbb{RP}^2$ und $Y := S^2 \times \mathbb{RP}^\infty$ isomorphe Homotopiegruppen, sind aber nicht homotopieäquivalent.

III.9.9. Satz (Exzision). *Es sei X ein CW-Komplex, $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ zwei CW-Teilräume, sodass $X = A \cup B$ und $C := A \cap B \neq \emptyset$. Weiters sei (A, C) n-zusammenhängend und (B, C) m-zusammenhängend, $n, m \geq 0$. Dann ist der von der Inklusion induzierte Homomorphismus $\pi_k(A, C) \to \pi_k(X, B)$ ein Isomorphismus für $k < m + n$ und eine Surjektion für $k = n + m$.*

Beweis. Siehe etwa [**4**, Theorem 4.23] oder [**9**, Chapter 11.1]. $\square$

Wir erinnern uns an die Suspension, siehe Beispiel III.1.18. Ist (X, x_0) ein punktierter Raum so erhalten wir auf Grund von $\Sigma S^k \cong S^{k+1}$ Homomorphismen

$$\Sigma : \pi_k(X, x_0) \to \pi_{k+1}(\Sigma X, x_0). \tag{III.33}$$

Repräsentiert $f : (S^k, *) \to (X, x_0)$ ein Element in $\pi_k(X, x_0)$ so wird $\Sigma([f])$ durch die Abbildung $\Sigma f : (S^{k+1}, *) \to (\Sigma X, x_0)$ repräsentiert. An dieser Stelle sei auch nochmals auf die Einbettung $X \to \Sigma X$, $x \mapsto [(x, 0)]$, hingewiesen, sie erlaubt es den Basispunkt $x_0 \in X$ auch als Basispunkt $x_0 \in \Sigma X$ aufzufassen.

III.9.10. Satz (Freudenthal). *Es sei X ein $(n-1)$-zusammenhängender CW-Komplex, $n \geq 1$, und $x_0 \in X$. Dann ist* (III.33) *ein Isomorphismus für $k < 2n-1$ und eine Surjektion für $k = 2n - 1$.*

Beweis. Betrachte die Teilmengen $C_+ := X \times [0, 1]/(X \times \{1\})$ und $C_- := X \times [-1, 0]/(X \times \{-1\})$ von ΣX. Offensichtlich gilt $\Sigma X = C_+ \cup C_-$ und $C_+ \cap C_- = X \subseteq \Sigma X$. Versehen wir das Intervall mit der CW-Zerlegung $[-1, 1] = \{-1\} \cup (-1, 0) \cup \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\}$ erhalten wir eine CW-Zerlegung von $X \times [-1, 1]$, siehe Beispiel III.8.53, und damit eine CW-Zerlegung von ΣX, siehe Proposition III.8.43. Es sind dann C_- und C_+ CW-Teilräume von ΣX. Aus der Kontrahierbarkeit der Kegeln $C_\pm$ und der langen exakten Sequenz der Paare $(C_\pm, X)$ erhalten wir Isomorphismen $\partial : \pi_k(C_\pm, X) \cong \pi_{k-1}(X)$.

$$\begin{tikzcd}
\pi_k(C_+, X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "\partial"] & \pi_k(\Sigma X, C_-) \\
\pi_{k-1}(X) \arrow[r, "\Sigma"] & \pi_k(\Sigma X) \arrow[u, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $(C_\pm, X)$ n-zusammenhängend. Nach Satz III.9.9 ist die obere horizontale Abbildung im Diagramm ein Isomorphismus für $k < 2n$ und surjektiv falls $k = 2n$. Aus der Kontrahierbarkeit von C_- und der langen exakten Sequenz des Paares $(\Sigma X, C_-)$ folgt, dass auch die rechte vertikale Abbildung im Diagramm ein Isomorphismus ist. Es bleibt daher zu zeigen, dass dieses Diagramm kommutiert. Sei dazu $f : S^{k-1} \to X$ eine Abbildung die ein Element in $\pi_{k-1}(X)$ darstellt. Schränken wir ihre Suspension $\Sigma f : S^k \to \Sigma X$ auf die obere Hemisphäre von S^k und identifizieren diese mit D^k so erhalten wir eine Abbildung $g : (D^k, S^{k-1}) \to (C^+, X)$ und damit eine Element $[g] \in \pi_k(C_+, X)$ für das offensichtlich $\partial([g]) = [f]$ gilt. Betrachten wir nun $[g] \in \pi_k(\Sigma X, C_-)$, dann stimmt dies mit dem Bild von $[\Sigma f] \in \pi_k(\Sigma X)$ unter der Abbildung $\pi_k(\Sigma X) \to \pi_k(\Sigma X, C_-)$ überein. $\square$

III.9.11. Satz. *Es gilt* $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

Beweis. Aus Satz III.9.10 und $\Sigma S^k \cong S^{k+1}$ erhalten wir Isomorphismen

$$\pi_2(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \pi_4(S^4) \cong \cdots .$$

Nach Beispiel III.6.12 gilt $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

III.9.12. Satz. *Für $n \neq m$ sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph.*

Beweis. Sei also $n < m$. Indirekt angenommen es existiert ein Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Wähle $P \in \mathbb{R}^n$ und setze $Q := \varphi(P)$. Dann liefert die Einschränkung von φ einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n \setminus \{P\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{Q\}$. Daher sind S^{n-1} und S^{m-1} homotopieäquivalent, denn $\mathbb{R}^k \setminus \{*\} \simeq S^{k-1}$. Zusammen mit Satz III.9.11 und Satz III.5.25 erhalten wir den Widerspruch $\mathbb{Z} \cong \pi_{n-1}(S^{n-1}) \cong \pi_{n-1}(S^{m-1}) = 0$. $\square$

III.9.13. Bemerkung. Auf Grund von Satz III.9.12 ist die Dimension einer topologischer Mannigfaltigkeit ein wohldefinierter Begriff.

III.9.14. Satz. *S^n ist nicht Retrakt von D^{n+1}.*

Beweis. Es bezeichne $\iota : S^n \to D^{n+1}$ die kanonische Inklusion. Indirekt angenommen es gäbe eine Retraktion $r : D^{n+1} \to S^n$, $r \circ \iota = \mathrm{id}_{S^n}$. Dann gilt $\mathrm{id}_{\pi_n(S^n)} = (r \circ \iota)_* = r_* \circ \iota_* = 0 : \pi_n(S^n) \to \pi_n(D^{n+1}) \to \pi_n(S^n)$, denn $\pi_n(D^{n+1}) = 0$. Es folgt $\pi_n(S^n) = 0$ und dies widerspricht Satz III.9.11. $\square$

III.9.15. Satz (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $D^n \to D^n$ besitzt einen Fixpunkt.*

Beweis. Indirekt angenommen $f : D^n \to D^n$ hätte keinen Fixpunkt. Wie im Beweis von Satz I.5.3 lässt sich mittels f eine Retraktion von D^n auf S^{n-1} konstruieren, was Satz III.9.14 widerspricht. $\square$

Ist (X, x_0) ein punktierter Raum und $[f] \in \pi_k(X, x_0)$ wobei $f : (S^k, *) \to (X, x_0)$, so können wir auch die freie Homotopieklasse $[f] \in [S^k, X]$ betrachten. Dies liefert eine Abbildung

$$\Phi : \pi_k(X, x_0) \to [S^k, X], \qquad [f] \mapsto [f]. \tag{III.34}$$

III.9.16. Lemma. *Für einfach zusammenhängende Räume ist* (III.34) *bijektiv.*

Beweis. Sei also (X, x_0) ein einfach zusammenhängender punktierter Raum und $* \in S^k$ ein Basispunkt. Wir zeigen zunächst die Surjektivität von Φ. Sei also $f : S^k \to X$. Da X wegzusammenhängend ist, finden wir einen Weg $\sigma : I \to X$ von $\sigma(0) = f(*)$ nach $\sigma(1) = x_0$. Da das Paar $(S^k, \{*\})$ die Homotopieerweiterungseigenschaft besitzt, siehe Proposition III.8.54, existiert eine Homotopie $H : S^k \times I \to X$ mit $H_0 = f$ und $H_t(*) = \sigma(t)$, $t \in I$. Die Abbildung

$g := H_1 : S^k \to X$ ist daher homotop zu g, dh. $[f] = [g] \in [S^k, X]$, erfüllt aber auch $g(*) = H_1(*) = \sigma(1) = x_0$. Also definiert g ein Element $[g] \in \pi_k(X, x_0)$ für das offensichtlich $\Phi([g]) = [f]$ gilt. Nun zur Injektivität von Φ. Seien also $f, g : (S^k, *) \to (X, x_0)$ mit $\Phi([f]) = \Phi([g])$, dh. $[f] = [g] \in [S^k, X]$. Es existiert daher eine Homotopie $H : S^k \times I \to X$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$. Betrachte die Schleife $\sigma : I \to X$, $\sigma(t) := H_t(*)$. Da X einfach zusammenhängend ist, existiert eine Homotopie relativ Endpunkten $G : I \times I \to X$, $G(t, 0) = \sigma(t)$, $G(t, 1) = G(0, s) = G(1, s) = x_0$, $s, t \in I$. Wegen der Homotopieerweiterungseigenschaft des Paares $\big(S^k \times I, (S^k \times \{0\}) \cup (\{*\} \times I) \cup (S^k \times \{1\})\big)$, siehe Proposition III.8.54, existiert eine Homotopie $\tilde{H} : S^k \times I \times I \to X$ mit $\tilde{H}(x, t, 0) = H(x, t)$, $\tilde{H}(x, 0, s) = f(x)$, $\tilde{H}(x, 1, s) = g(x)$ und $\tilde{H}(*, t, s) = G(t, s)$, $x \in S^k$, $s, t \in I$. Betrachten wir nun $F : S^k \times I \to X$, $F(x, t) := \tilde{H}(x, t, 1)$, dann gilt $F_0 = f$, $F_1 = g$ und $F_t(*) = x_0$, dh. $[f] = [g] \in \pi_k(X, x_0)$. □

Nach Lemma III.9.16 ist $\Phi : \pi_n(S^n, *) \to [S^n, S^n]$ eine Bijektion, siehe (III.34). Dies bleibt auch für $n = 1$ richtig, siehe Abschnitt I.8. Ist nun $f : S^n \to S^n$ eine stetige Abbildung so induziert diese eine Abbildung $f_* : [S^n, S^n] \to [S^n, S^n]$, $f_*([g]) := [f \circ g]$, und wir erhalten eine Abbildung $\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi : \pi_n(S^n, *) \to \pi_n(S^n, *)$. Für Basispunkt erhaltende Abbildungen stimmt dies mit dem induzierten Homomorphismus $f_* : \pi_n(S^n, *) \to \pi_n(S^n, *)$ überein. Nach Lemma III.9.16 ist jede stetige Abbildung $S^n \to S^n$ homotop zu einer Basispunkt erhaltenden, folglich ist $\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi$ ein Homomorphismus, für alle stetigen f, denn $\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi$ hängt offensichtlich nur von der Homomtopieklasse von f ab. Nach Satz III.9.11 muss dieser Homomorphismus durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl gegeben sein, dh. es existiert genau eine Zahl $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, sodass $(\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi)(\sigma) = \deg(f) \cdot \sigma$, für alle $\sigma \in \pi_n(S^n, *)$. Diese Zahl $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ wird der *Abbildungsgrad* der Abbildung $f : S^n \to S^n$ genannt.

III.9.17. Satz (Abbildungsgrad). *Für den Abbildungsgrad stetiger Abbildungen $S^n \to S^n$ gilt:*

(i) $\deg(f) = \deg(g)$ *genau dann wenn* $f \simeq g$.
(ii) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$.
(iii) $\deg(\Sigma f) = \deg(f)$.
(iv) *Ist* $\deg(f) \neq 0$ *so muss* f *surjektiv sein.*
(v) $\deg(\mathrm{id}_{S^n}) = 1$.

Beweis. Ad (i): Sind f und g homotop so induzieren sie dieselbe Abbildung $f_* = g_* : [S^n, S^n] \to [S^n, S^n]$, es folgt daher $\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi = \Phi^{-1} \circ g_* \circ \Phi$ und damit $\deg(f) = \deg(g)$. Gilt umgekehrt $\deg(f) = \deg(g)$, dann auch $\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi = \Phi^{-1} \circ g_* \circ \Phi$ und daher $f_* = g_* : [S^n, S^n] \to [S^n, S^n]$. Wenden wir f_* und g_* auf das Element $[\mathrm{id}_{S^n}] \in [S^n, S^n]$ an, so erhalten wir $[f] = [g]$. Also sind f und g homotop. Behauptung (ii) folgt sofort aus der trivialen Tatsache $\Phi^{-1} \circ (f \circ g)_* \circ \Phi = (\Phi^{-1} \circ f_* \circ \Phi) \circ (\Phi^{-1} \circ g_* \circ \Phi)$. Behautpung (iii) folgt aus den offensichtlichen Relationen $\Sigma \circ \Phi = \Phi \circ \Sigma$ und $(\Sigma f)_* \circ \Sigma = \Sigma \circ f_*$ sowie der Tatsache, dass $\Sigma : \pi_n(S^n, *) \to \pi_{n+1}(S^{n+1}, *)$ ein Isomorphismus ist, siehe Satz III.9.10. Um (iv) einzusehen, nehmen wir an $f : S^n \to S^n$ ist nicht surjektiv. Dann existiert ein Punkt $P \in S^n$ und $f : S^n \to S^n \setminus \{P\}$. Wegen der Kontrahierbarkeit von $S^n \setminus \{P\}$ ist f daher homotop zu einer konstanten Abbildung und damit $\deg(f) = 0$. Schließlich ist die Behauptung (v) trivial. □

III.9.18. Bemerkung. Eine orthogonale Abbildung $\varphi \in \mathrm{O}_{n+1}$ definiert eine stetige Abbildung $\varphi : S^n \to S^n$ und für diese gilt $\deg(\varphi) = \det(\varphi)$. Da O_{n+1} nur zwei Zusammenhangskomponenten hat genügt es wegen Satz III.9.17(i) den Fall der Spiegelung $\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$ zu betrachten. Wegen Satz III.9.17(iii) genügt es dies für die Spiegelung $\varphi(x_0, x_1) = (-x_0, x_1)$ zu zeigen, siehe Satz I.8.31(iii). Für die sogenannte *Antipodalabbildung* $A : S^n \to S^n$, $A(x) := -x$, folgt $\deg(A) = (-1)^{n+1}$. Insbesondere, siehe Satz III.9.17(i), ist bei geradem n die Antipodalabbildung $A : S^n \to S^n$ nicht zur identischen Abbildung $\mathrm{id}_{S^n} : S^n \to S^n$ homotop.

III.9.19. Satz (Satz vom Igel). *Ist n gerade, dann besitzt jedes stetige Vektorfeld auf S^n eine Nullstelle.*[38]

Beweis. Wir nehmen indirekt an es existiert eine stetige Abbildun $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\langle f(x), x\rangle = 0$ und $f(x) \neq 0$, für alle $x \in S^n$. Dann definiert

$$H : S^n \times I \to S^n, \qquad H(x,t) := \cos(\pi t)x + \sin(\pi t)\tfrac{f(x)}{|f(x)|}$$

eine Homotopie von $H_0 = \mathrm{id}_{S^n}$ nach $H_1 = A$, wobei $A : S^n \to S^n$, $A(x) := -x$, die Antipodalabbildung bezeichnet. Für gerades n ist die Antipodalabbildung aber nicht zur identischen Abbildung homotop, siehe Bemerkung III.9.18, und wir erhalten einen Widerspruch. □

III.9.20. Bemerkung. Ist X ein CW-Komplex, dann ist ΣX zusammenhängend. Aus Satz III.9.10 folgt, dass die zweifache Suspension $\Sigma^2 X := \Sigma\Sigma X$ 1-zusammenhängend ist. Induktiv erhalten wir aus Satz III.9.10, dass die n-fache Suspension $\Sigma^n X := \Sigma\Sigma^{n-1} X$ $(n-1)$-zusammenhängend ist. Weiters folgt aus Satz III.9.10, dass der Homomorphismus $\Sigma : \pi_k(\Sigma^n X) \to \pi_{k+1}(\Sigma^{n+1} X)$ ein Isomorphismus ist, $k < 2n + 1$. Wir erhalten eine Folge von Homomorhismen

$$\pi_k(X) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{k+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\Sigma} \pi_{k+2}(\Sigma^2 X) \cdots \pi_{k+n}(\Sigma^n X) \xrightarrow{\cong} \pi_{k+n+1}(\Sigma^{n+1} X) \to \cdots$$

die ab $n = k + 2$ alle Isomorphismen sind. Unter der *k-ten stabilen Homotopiegruppe* von X verstehen wir die Gruppe

$$\pi_k^s(X) := \pi_{2k+2}(\Sigma^{k+2} X) \cong \pi_{k+n}(\Sigma^n X), \qquad n \geq k + 2.$$

Vor allem die stabilen Homotopiegruppen der Sphären

$$\pi_k^s := \pi_k^s(S^0) = \pi_{2k+2}(S^{k+2}) \cong \pi_{k+n}(S^n), \qquad n \geq k + 2,$$

[38] Unter einem stetigen Vektorfeld auf S^n verstehn wir eine stetige Abbildung $f : S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$, sodass $\langle f(x), x\rangle = 0$, für alle $x \in S^n$.

spielen eine wichtige Rolle. Aus Satz III.9.10 erhalten wir etwa $\pi_0^s \cong \mathbb{Z}$. Einige Resultate sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
π_k^s	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{240}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_6$

III.9.21. Bemerkung. In Beispiel III.6.12 haben wir gesehen, dass die Hopffaserung $S^3 \to S^2$ Isomorphismen $\pi_k(S^3) \cong \pi_k(S^2)$ induziert, $k \geq 3$, siehe (III.14). Aus Satz III.9.11 folgt daher $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$, die Hopffaserung $S^3 \to S^2$ repräsentiert einen Erzeuger dieser Gruppe. In Aufgabe 30 haben wir aus der Hopffaserung $S^7 \to S^4$ Isomorphismen $\pi_k(S^4) \cong \pi_{k-1}(S^3) \times \pi_k(S^7)$, $k \geq 1$, konstruiert. Es folgt, dass $\pi_7(S^4)$ ein Element unendlicher Ordnung enthält, insbesondere ist $\pi_7(S^4) \neq 0$. In Aufgabe 31 haben wir die Hopffaserung $S^{15} \to S^8$ verwendet um Isomorphismen $\pi_k(S^{15}) \times \pi_{k-1}(S^7) \cong \pi_k(S^8)$, $k \geq 1$, zu konstruieren. Es folgt, dass $\pi_{15}(S^8)$ ein Element unendlicher Ordnung besitzt, insbesondere ist $\pi_{15}(S^8) \neq 0$.

Literatur

[1] R. Bott und L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology.* Graduate Texts in Mathematics **82**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[2] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology.* Reprint of the 1972 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[3] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology.* Princeton Mathematical Series **15**, Princeton University Press, 1952.

[4] A. Hatcher, *Algebraic Topology.* Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Frei erhältlich unter `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[5] D. Husemoller, *Fibre Bundles.* Third edition. Graduate Texts in Mathematics **20**. Springer-Verlag, New York, 1994.

[6] K. Jänich, *Topologie.* Dritte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[7] S. MacLane, *Categories for the working mathematician.* Graduate Texts in Mathematics **5**, Springer-Verlag, 1971.

[8] S. MacLane, *Homology.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **114**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[9] J.P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[10] H. Schubert, *Topologie. Eine Einführung.* Vierte Auflage. Mathematische Leitfäden. B.G. Teubner, Stuttgart, 1975.

[11] E.H. Spanier, *Algebraic Topology.* Corrected reprint. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1989.

[12] L.A. Steen and J.A. Seebach, *Counterexamples in Topology.* Reprint of the second (1978) edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1995.

[13] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles.* Reprint of the 1957 edition. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.

[14] R. Stöcker und H. Zieschang, *Algebraische Topologie. Eine Einführung.* Mathematische Leitfäden, B.G. Teubner, Stuttgart, 1988.

[15] G.W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory.* Graduate Texts in Mathematics **61**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

Übungsaufgaben

Zu Kapitel I.

1. Aufgabe. Es bezeichne $I := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ das kompakte Einheitsintervall. Auf $I \times I$ betrachte die von $(x,0) \sim (x,1)$, $x \in I$, und $(0,y) \sim (1,y)$, $y \in I$, erzeugte Äquivalenzrelation, und den damit assozierten Quotientenraum $X := (I \times I)/{\sim}$. Zeige, dass die Abbildung $f : I \times I \to S^1 \times S^1$, $f(x,y) := \bigl(e^{2\pi\mathbf{i}x}, e^{2\pi\mathbf{i}y}\bigr)$ einen Homöomorphismus $(I \times I)/{\sim} \cong S^1 \times S^1$ induziert. Dabei bezeichnet $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ den Einheitskreis.

2. Aufgabe. Es seien $R > r > 0$. Betrachte den durch
$$T := \Bigl\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \bigl(\sqrt{x^2+y^2} - R\bigr)^2 + z^2 = r^2\Bigr\}$$
gegebenen Teilraum (Fläche) des $\mathbb{R}^3$. Fertige eine Skizze von T an, und konstruiere einen Homöomorphismus zwischen T und $S^1 \times S^1$.

3. Aufgabe. Es seien X und Y zwei topologische Räume und $A, B \subseteq Y$ zwei abgeschlossene Teilmengen mit $A \cup B = Y$. Zeige, dass eine Abbildung $f : Y \to X$ genau dann stetig ist, wenn die Einschränkungen $f|_A : A \to X$ und $f|_B : B \to X$ beide stetig sind, vgl. Lemma I.1.2.

4. Aufgabe. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre. Auf $S^n \times [-1,1]$ betrachte die von $(x,1) \sim (y,1)$ und $(x,-1) \sim (y,-1)$ erzeugte Äquivalenzrelation, $x, y \in S^n$. Zeige, dass der Quotientenraum $(S^n \times [-1,1])/{\sim}$ homöomorph zu S^{n+1} ist. Fertige Skizzen an!

5. Aufgabe. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ wird sternförmig genannt, falls $z \in X$ mit folgender Eigenschaft existiert: $x \in X,\ t \in [0,1] \Rightarrow (1-t)x + tz \in X$, d.h. wenn die affine Strecke von x nach z zur Gänze in X liegt, für jedes $x \in X$. Jedes solche z wird ein Zentrum von X genannt. Zeige, dass sternförmige Teilmengen einfach zusammenhängend sind. Schließe, dass die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ einfach zusammenhängend ist.

6. Aufgabe. Es seien $h, h' : I \to X$ zwei Wege von $x_0 := h(0) = h'(0)$ nach $x_1 := h(1) = h'(1)$. Zeige, dass $\beta_h = \beta_{h'}$ falls $h \simeq h'$. Zeige weiters, dass $\beta_h = \beta_{h'}$ genau dann, wenn $[h\bar{h}']$ im Zentrum von $\pi_1(X, x_0)$ liegt, vgl. Bemerkung I.3.7.

7. Aufgabe. Führe die Details in Beispiel I.6.9 aus. Zeige insbesondere, dass SU_2 homöomorph zu S^3 und daher einfach zusammenhängend ist.

8. Aufgabe. Führe die Details in Beispiel I.6.8 aus. Zeige insbesondere, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/{\sim}$ ein kompakter Hausdorffraum ist, und $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \cong S^2$ gilt. Schließe, dass $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ einfach zusammenhängend ist.

9. Aufgabe. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum der Kodimension $k := n - \dim A$. Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus A$ einfach zusammenhängend ist, falls $k \geq 3$. Im Fall $k = 2$ zeige weiters, dass $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \mathbb{Z}$, and gib eine Schleife in $\mathbb{R}^n \setminus A$

an, die einen Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A)$ repräsentiert. Hinweis: Konstruiere einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n \setminus A \cong (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{\dim A}$.

10. Aufgabe. Führe die Details in Beispiel I.7.12 aus. Zeige insbesondere, dass $\mathrm{SO}_n \times \Delta_n(\mathbb{R})$ homöomorph zu $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ ist und schließe, dass die kanonische Inklusion $\mathrm{SO}_n \to \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ einen Isomorphismus der Fundamentalgruppen induziert. Konstruiere einen Homöomorphismus $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$ und schließe $\pi_1(\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})) \cong \pi_1(\mathrm{SO}_2) \cong \mathbb{Z}$. Gib auch eine Schleife in SO_2 an die einen Erzeuger von $\pi_1(\mathrm{SO}_2)$ repräsentiert.

11. Aufgabe. Es sei $f : X \to Y$ stetig. Zeige f ist eine Homotopieäquivalenz genau dann, wenn stetige Abbildungen $g : Y \to X$ und $h : Y \to X$ existieren, sodass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ and $f \circ h \simeq \mathrm{id}_Y$.

12. Aufgabe. Es sei $Z := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, und betrachte den folgenden Teilraum $X := \big(Z \times I\big) \cup \big(I \times \{0\}\big) \subseteq \mathbb{R}^2$. Weiters seien $P := (0,0) \in X$, $Q := (0,1) \in X$ und $A := I \times \{0\} \subseteq X$. Zeige, dass A ein Deformationsretrakt von X ist. Zeige, dass $\{P\}$ ein Deformationsretrakt von X ist. Schließe, dass X kontrahierbar und die Inklusion $\{Q\} \to X$ eine Homotopieäquivalenz ist. Zeige, dass $\{Q\}$ nicht Deformationsretrakt von X ist.

13. Aufgabe. Es seien G_α Gruppen, $\alpha \in A$. Zeige, dass $\big(*_{\alpha \in A} G_\alpha\big)^{\mathrm{ab}} \cong \bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha^{\mathrm{ab}}$, wobei $H^{\mathrm{ab}} := H/[H,H]$ die Abelisierung der Gruppe H bezeichnet.

14. Aufgabe. Verwende den Satz von Seifert–van Kampen um zu zeige, dass die Fundamentalgruppe von $X := (S^1 \times S^1)/(\{1\} \times S^1)$ isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist. Gib eine Schleife in X an, die einen Erzeuger von $\pi_1(X)$ repräsentiert.

15. Aufgabe. Es seien M_1 und M_2 zwei zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension n. Wähle offene Teilmengen $U_i \subseteq M_i$, Homöomorphismen $\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ und setze $\dot{M}_i := M_i \setminus \varphi_i^{-1}(B^n)$, $i = 1, 2$. Betrachte $A := \varphi_2^{-1}(S^{n-1}) \subseteq \dot{M}_2$ und die Abbildung $\varphi : A \to \dot{M}_1$, $\varphi := \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$. Definiere die zusammenhängende Summe von M_1 und M_2 durch $M_1 \sharp M_2 := \dot{M}_1 \cup_\varphi \dot{M}_2$. Zeige, dass $M_1 \sharp M_2$ eine zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeit der Dimension n ist. Verwende den Satz von Seifert-van Kampen um $\pi_1(M_1 \sharp M_2) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$ zu zeigen, falls $n \geq 3$.

Zu Kapitel II.

16. Aufgabe (Hamiltons Quaternionen). Es bezeichne $\mathbb{H}$ die Menge aller (2×2)-Matrizen mit komplexen Eintragungen der Form $\left(\begin{smallmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{smallmatrix}\right)$, $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $\mathbb{H}$ bezüglich Addition und Multiplikation von Matrizen alle Körperaxiome bis auf die Kommutativität der Multiplikation erfüllt. Setze

$$1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{i} := \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{j} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{k} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Zeige, dass $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ eine Basis des $\mathbb{H}$ zugrundeliegenden reellen Vektorraums bildet. Verifiziere auch $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ sowie

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

Wir haben Algebrahomomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{smallmatrix}\right)$, und $\mathbb{R} \to \mathbb{H}$, $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$. Die zu $x \in \mathbb{H}$ konjugierte Quaternion wird durch $\bar{x} := x^*$ definiert, wobei x^* die konjugiert Transponierte der Matrix x bezeichnet. Etwa ist $\bar{1} = 1$, $\bar{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$, $\bar{\mathbf{j}} = -\mathbf{j}$ and $\bar{\mathbf{k}} = -\mathbf{k}$. Zeige $\bar{\bar{x}} = x$, $\overline{x + y} = \bar{x} + \bar{y}$ und $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ für alle $x, y \in \mathbb{H}$, und $\overline{ax} = a\bar{x}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{H}$. Zeige weiters $\bar{x} = x$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$. Der Realteil von $x \in \mathbb{H}$ ist durch $\operatorname{Re}(x) := (x + \bar{x})/2 = \operatorname{tr}(x)/2 \in \mathbb{R}$ definiert, etwa gilt $\operatorname{Re}(1) = 1$ und $\operatorname{Re}(\mathbf{i}) = \operatorname{Re}(\mathbf{j}) = \operatorname{Re}(\mathbf{k}) = 0$. Zeige $\operatorname{Re}(xy) = \operatorname{Re}(yx)$ für alle $x, y \in \mathbb{H}$. Zeige, dass $\langle x, y\rangle := \operatorname{Re}(x\bar{y})$ ein Euklidisches inneres Produkt auf $\mathbb{H}$ definiert bezüglich dem $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ eine Orthonormalbasis bildet. Verifiziere $\langle xy, z\rangle = \langle y, \bar{x}z\rangle$, $\langle yx, z\rangle = \langle y, z\bar{x}\rangle$ sowie $\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = \langle x, y\rangle$, für alle $x, y, z, \in \mathbb{H}$. Zeige, dass für die assozierte Norm $|x|^2 := \langle x, x\rangle = x\bar{x} = \bar{x}x$ gilt $|xy| = |x||y|$. Schließe, dass sich die Multiplikation in $\mathbb{H}$ zu einer Gruppenstruktur auf $S^3 = \{x \in \mathbb{H} : |x| = 1\}$ einschränkt. Zeige auch, dass diese Gruppe mit SU_2 übereinstimmt.

17. Aufgabe. Wir betrachten $\mathbb{H}^n = \mathbb{H} \times \cdots \times \mathbb{H}$ als links $\mathbb{H}$-Modul, dh. für $\lambda \in \mathbb{H}$ and $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n$ setzen wir $\lambda(x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Zeige, dass $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{H} : \lambda x = y$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiert. Zeige, dass der Quotientenraum $\mathbb{H}\mathrm{P}^n := \big(\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/{\sim}$ ein kompakter Hausdorffraum ist. Konstruiere eine stetige Abbildung $\varphi : S^{4n-1} \to \mathbb{H}\mathrm{P}^{n-1}$, sodass

$$\mathbb{H}\mathrm{P}^n \cong \mathbb{H}\mathrm{P}^{n-1} \cup_\varphi D^{4n}.$$

Schließe, dass $\mathbb{H}\mathrm{P}^n$ für alle $n \geq 0$ einfach zusammenhängend ist.

18. Aufgabe. Betrachte $S^3 \subseteq \mathbb{H}$ und $\mathbb{I} := 1^\perp = \{x \in \mathbb{H} : \bar{x} = -x\} \cong \mathbb{R}^3$. Zeige, dass für $x \in S^3$ und $y \in \mathbb{I}$ der Ausdruck $\lambda_x(y) := xy\bar{x}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\lambda_x : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ definiert. Zeige, dass λ_x bezüglich der Einschränkung des Euklidischen inneren Produkts auf $\mathbb{H}$ eine Isometrie ist. Schließe, dass wir eine Abbildung $\lambda : S^3 \to \mathrm{SO}_3$ erhalten. Zeige, dass λ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\ker(\lambda) = \{\pm 1\}$ ist. Zeige, dass λ zu einem Homöomorphismus $\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \cong \mathrm{SO}_3$ faktorisiert und schließe, dass $S^3 \to \mathrm{SO}_3$ eine zwei-blättrige Überlagerung ist. Insbesondere erhalten wir $\pi_1(\mathrm{SO}_3) \cong \mathbb{Z}_2$. *Hinweis:* Für $x \neq \pm 1 \in S^3$ ist die Isometrie λ_x eine Rotation um die von $x - \bar{x}$ aufgespannte Achse um den Winkel $2\arccos(\operatorname{Re}(x))$. Um dies einzusehen verifiziere a) die Punkte auf dem von $x - \bar{x}$ aufgespannten Teilraum sind Fixpunkte von λ_x; b) für $y \in \mathbb{I}$ mit $\langle y, x - \bar{x}\rangle = 0$ haben wir $\langle y, x\rangle = 0$, also $y\bar{x} = xy$ und daher $2\langle \lambda_x(y), y\rangle = x^2y\bar{y} + y\bar{y}\bar{x}^2 = 2\big(2(\operatorname{Re}(x))^2 - 1\big)|y|^2$; c) verwende die Relation $\arccos(2t^2 - 1) = 2\arccos(t)$, $0 \leq t \leq 1$, um zu zeigen, dass der Winkel zwischen $\lambda_x(y)$ und y mit $2\arccos(\operatorname{Re}(x))$ übereinstimmt.

19. Aufgabe. Es seien $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Z}$, sodass p und q_i teilerfremd sind, für alle $i = 1, \dots, n$. Bezeichne den damit assozierten Linsenraum mit $L := L(p; q_1, \dots, q_n)$, und bezeichne die Kleinsche Flasche durch K. Zeige $[L, K] = 0$, dh. je zwei stetige Abbildungen $L \to K$ sind homotop. *Hinweis:* Zeige, dass jeder Homomorphismus $\pi_1(L) \to \pi_1(K)$ trivial sein muss, und verwende die Überlagerung $\mathbb{R}^2 \to K$.

20. Aufgabe. Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung und (Y, y_0) ein einfach zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender punktierter Raum. Zeige, dass die Abbildung $p_* : [(Y, y_0), (\tilde{X}, \tilde{x}_0)] \to [(Y, y_0), (X, x_0)]$, $p_*([\tilde{f}]) := [p \circ \tilde{f}]$, eine Bijektion ist. Schließe, dass die zwei-fache Überlagerung $p : S^k \to \mathbb{R}\mathrm{P}^k$ eine Bijektion $p_* : [(S^n, y_0), (S^k, \tilde{x}_0)] \xrightarrow{\cong} [(S^n, y_0), (\mathbb{R}\mathrm{P}^k, x_0)]$ induziert, $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dabei sind $y_0 \in S^n$, $\tilde{x}_0 \in S^k$ beliebig und $x_0 := p(\tilde{x}_0) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^k$.

21. Aufgabe. Es bezeichne Σ die orientierbare Fläche mit Geschlecht 2. Wir erinnern uns, dass $\pi_1(\Sigma) \cong \left\langle a, b, c, d \;\middle|\; aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \right\rangle$, siehe Korollar I.9.20. Bestimme die Anzahl der Isomorphieklassen zwei-blättriger Überlagerungen von Σ. Wieviele davon sind zusammenhängend. Hinweis: Zähle die Äquivalenzklassen der Darstellungen von $\pi_1(\Sigma)$ auf der Menge $\{1, 2\}$.

22. Aufgabe. Es bezeichne $L = S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$ einen Linsenraum. Wir erinnern uns, dass $\pi_1(L) \cong \mathbb{Z}_p$, siehe Beispiel II.5.7. Bestimme die Anzahl der Isomorphieklassen zusammenhängender (punktierter) Überlagerungen von L. Hinweis: Untergruppen zyklischer Gruppen sind zyklisch.

23. Aufgabe. Für $x, y \in S^3 \subseteq \mathbb{H}$ betrachte die Abbildung $\lambda_{x,y} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\lambda_{x,y}(z) := xz\bar{y}$. Zeige, dass jedes $\lambda_{x,y}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Isometrie bezüglich des Euklidischen inneren Produkts auf $\mathbb{H}$ ist, vgl. Aufgabe 16. Schließe, dass wir eine stetige Abbildungn $\lambda : S^3 \times S^3 \to \mathrm{SO}(\mathbb{H}) = \mathrm{SO}_4$ erhalten. Zeige, dass λ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\ker(\lambda) = \{(1, 1), (-1, -1)\} \cong \mathbb{Z}_2$ ist. Zeige, dass λ zu einem Homöomorphismus $(S^3 \times S^3)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}_4$ faktorisiert, wobei das nicht-triviale Element in $\mathbb{Z}_2$ durch $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ auf $S^3 \times S^3$ wirkt. Folgere, dass $\lambda : S^3 \times S^3 \to \mathrm{SO}_4$ eine zwei-fache (die universelle) Überlagerung von SO_4 ist. Folgere auch $\pi_1(\mathrm{SO}_4) \cong \mathbb{Z}_2$. *Hinweis um die Surjektivität von λ zu zeigen:* Zu $A \in \mathrm{SO}_4$ finde $x \in S^3$ mit $(\lambda_{x,1} \circ A)(1) = 1$ und verwende Aufgabe 18.

Zu Kapitel III.

24. Aufgabe. Es sei (X, e) ein H-Raum mit Multiplikation $\mu : (X, e) \times (X, e) \to (X, e)$. Zeige, dass der induzierte Homomorphismus

$$\mu_* : \pi_n(X, e) \times \pi_n(X, e) = \pi_n\big((X, e) \times (X, e)\big) \to \pi_n(X, e)$$

mit der Multiplikation in $\pi_n(X,e)$ übereinstimmt, $n \geq 1$. *Hinweis:* Zeige, dass für $f, g : (I^n, \partial I^n) \to (X,e)$ die Abbildung $H : (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X,e)$,

$$H(s_1,\dots,s_n,t) :=$$
$$\begin{cases} \mu\big(f\big((1+t)s_1, s_2,\dots,s_n\big), g\big((1-t)s_1, s_2,\dots,s_n\big)\big) & s_1 \leq 1/2, \\ \mu\big(f\big((1-t)s_1+t, s_2,\dots,s_n\big), g\big((1+t)s_1-t, s_2,\dots,s_n\big)\big) & 1/2 \leq s_1, \end{cases}$$

eine Homotopie zwischen $\mu \circ (f,g)$ und der Konkatenation von $\mu \circ (\mathrm{id}_X, c_e) \circ f$ mit $\mu \circ (c_e, \mathrm{id}_X) \circ g$ definiert. Hier bezeichnet $c_e : (X,e) \to (X,e)$ die konstante Abbildung, $c_e(x) = e$.

25. Aufgabe. Es sei (X,e) ein H-Raum mit Multiplikation $\mu : (X,e) \times (X,e) \to (X,e)$. Zeige, dass die $\pi_1(X,e)$-Wirkung auf $\pi_n(X,e)$ trivial ist, dh. $\beta_\gamma(\sigma) = \sigma$, für alle $\gamma \in \pi_1(X,e)$ und alle $\sigma \in \pi_n(X,e)$, $n \geq 1$. *Hinweis:* Zu einer Schleife γ bei e betrachte die Homotope $H : X \times I \to X$, $H(x,t) := \mu(x, \gamma(t))$, und bestimme die Homomorphismen $(H_0)_*, (H_1)_* : \pi_n(X,e) \to \pi_n(X,e)$. Beachte, dass die Homotopie H nicht den Basispunkt e bewahrt.

26. Aufgabe. Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung, $x_0 \in A \subseteq X$ und $\tilde{A} := p^{-1}(A)$. Zeige, dass p Isomorphismen $\pi_n(\tilde{X}, \tilde{A}, \tilde{x}_0) \cong \pi_n(X, A, x_0)$, $n \geq 2$, induziert. *Hinweis:* Wende das Fünfer Lemma auf die langen exakten Sequenzen von Homotopiegruppen der Paare (X,A) und $(\tilde{X}, \tilde{A})$ an. Für den Fall $n = 2$ zeige, dass p einen Isomorphismus zwischen dem Kern von $\tilde{\iota}_* : \pi_1(\tilde{A}, \tilde{x}_0) \to \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ und dem Kern von $\iota_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ induziert, wobei $\iota : A \to X$ und $\tilde{\iota} : \tilde{A} \to \tilde{X}$ die kanonischen Inklusionen bezeichnen.

27. Aufgabe. Eine stetige Abbildung $\varphi : Y \to X$ wird n-Äquivalenz genannt, $n \in \mathbb{N}_0$, falls für jeden Basispunkt $y_0 \in Y$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $\varphi_* : \pi_k(Y, y_0) \to \pi_k(X, \varphi(y_0))$ ist ein Isomorphismus für $0 \leq k < n$, und $\varphi_* : \pi_n(Y, y_0) \to \pi_n(X, \varphi(y_0))$ ist surjektiv. Die Abbildung φ wird schwache Äquivalenz genannt, falls sie eine n-Äquivalenz ist, für jedes n. Zeige:

(i) Eine Komposition von n-Äquivalenzen ist eine n-Äquivalenz.
(ii) Jede zu einer n-Äquivalenz homotope Abbildung ist eine n-Äquivalenz.
(iii) Jede Homotopieäquivalenz ist eine schwache Äquivalenz.
(iv) Die Inklusion eines Teilraums $\iota : A \to X$ ist eine n-Äquivalenz genau dann, wenn das Paar (X, A) n-zusammenhängend ist.
(v) $\varphi : Y \to X$ ist einen n-Äquivalenz genau dann, wenn das Paar (Z_φ, Y) n-zusammenhängend ist. Hier bezeichnet $Z_\varphi = (X \sqcup (Y \times I))/_{(y,1)\sim\varphi(y)}$ den Abbildungszylinder von φ, und Y wird als Teilraum von Z_φ betrachtet, $y \mapsto [(y,0)]$, cf. Beispiel I.9.11.

28. Aufgabe. Betrachte die Kleinsche Flasche $K = (S^1 \times I)/\sim$, wobei $(z,0) \sim (z^{-1},1)$. Zeige, dass die kanonische Projektion $S^1 \times I \to I$ zu einem Faserbündel $p : K \to I/\{0,1\} \cong S^1$ faktorisiert dessen Fasern homöomorph zu

S^1 sind. Verwende die assozierte lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen um zu zeigen:

(i) $\pi_k(K) = 0$, für alle $k \geq 2$.
(ii) Es existiert eine exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} \pi_1(K) \xrightarrow{\rho} \mathbb{Z} \to 0$.
(iii) Wähle einen Homomorphismus $\sigma : \mathbb{Z} \to \pi_1(K)$ mit $\rho \circ \sigma = \mathrm{id}_\mathbb{Z}$ und verifiziere, dass $\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \pi_1(K)$, $\psi(k, l) := \iota(k)\sigma(l)$, bijektiv ist.
(iv) Zeige, dass die Formel $\sigma(l)\iota(k)\sigma(l)^{-1} = \iota(\varphi(l)(k))$ einen Homomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ definiert, der nicht von der Wahl von σ abhängt.
(v) Schließe, dass $\psi(k_1, l_1)\psi(k_2, l_2) = \psi\big(k_1 + \varphi(l_1)(k_2), l_1 + l_2\big)$, für alle $(k_1, l_1), (k_2, l_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
(vi) Zeige $\varphi(1) \neq \mathrm{id}_\mathbb{Z}$.
(vii) Schließe $\varphi(l) = (-1)^l \,\mathrm{id}_\mathbb{Z}$, und daher $\pi_1(K) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.

Dies ist eine weitere Möglichkeit die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche zu bestimmen.

29. Aufgabe. Betrachte $S^{4n+3} \subseteq \mathbb{H}^{n+1}$ und $p : S^{4n+3} \to \mathbb{HP}^n$, vgl. Aufgabe 17. Zeige, dass p ein Faserbündel mit zu S^3 homöomorphen Fasern ist. Zeige mit Hilfe der entsprechenden langen exakten Sequenz von Homotopiegruppen $\pi_k(\mathbb{HP}^n) \cong \pi_{k-1}(S^3)$, für $1 \leq k \leq 4n+2$. Schließe, dass $\mathbb{HP}^n$ 3-zusammenhängend ist, dh. $\pi_0(\mathbb{HP}^n) = \pi_1(\mathbb{HP}^n) = \pi_2(\mathbb{HP}^n) = \pi_3(\mathbb{HP}^n) = 0$. Zeige, dass wir im Fall $n = 1$ ein Faserbündel $p : S^7 \to S^4$ und Isomorphismen $\pi_k(S^4) \cong \pi_{k-1}(S^3)$ erhalten, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

30. Aufgabe. Es sei $p : E \to B$ eine Serre Faserung, $x_0 \in E$, $b_0 := p(x_0)$ und $F = p^{-1}(b_0)$ die Faser über b_0. Weiters sei die Inklusion der Faser $\iota : (F, x_0) \to (E, x_0)$ homotop relativ Basispunkt x_0 zur konstanten Abbildung c_{x_0}. Zeige, dass

$$0 \to \pi_k(E, x_0) \xrightarrow{p_*} \pi_k(B, b_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F, x_0) \to 0$$

exakt ist, $k \geq 1$. Für $k \geq 2$ konstruiere einen Homomorphismus $\sigma : \pi_{k-1}(F, x_0) \to \pi_k(B, b_0)$ mit $\partial \circ \sigma = \mathrm{id}_{\pi_{k-1}(F,x_0)}$. Zeige, dass $p_* + \sigma$ einen Isomorphismus

$$\pi_k(E, x_0) \times \pi_{k-1}(F, x_0) \cong \pi_k(B, b_0)$$

liefert, $k \geq 2$. Wende dies auf die Hopffaserung aus Aufgabe 29 an und zeige,

$$\pi_k(\mathbb{HP}^n) \cong \pi_{k-1}(S^3) \times \pi_k(S^{4n+3}) \quad \text{sowie} \quad \pi_k(S^4) \cong \pi_{k-1}(S^3) \times \pi_k(S^7)$$

für alle $k \geq 1$ und $n \geq 1$. *Hinweis zur Konstruktion von σ:* Es genügt einen Homomorphismus $\tilde\sigma : \pi_{k-1}(F, x_0) \to \pi_k(E, F, x_0)$ mit $\partial^{\mathrm{pair}} \circ \tilde\sigma = \mathrm{id}_{\pi_{k-1}(F,x_0)}$ zu konstruieren, wobei $\partial^{\mathrm{pair}} : \pi_k(E, F, x_0) \to \pi_{k-1}(F, x_0)$ den Randoperator in der langen exakten Sequenz des Paares (E, F) bezeichnet. Sei nun $H : F \times I \to E$ eine Homotopie relativ Basispunkt von $H_0 = \iota$ nach $H_1 = c_{x_0}$. Repräsentiert $f : (I^{k-1}, \partial I^{k-1}) \to (F, x_0)$ ein Element $[f] \in \pi_{k-1}(F, x_0)$ dann können wir $\tilde\sigma([f])$ durch das von $(I^k, \partial I^k, J^k) \to (E, F, x_0)$, $(s_1, \ldots, s_k) \mapsto H(f(s_1, \ldots, s_{k-1}), s_k)$, repräsentierte Element in $\pi_k(E, F, x_0)$ definieren.

31. Aufgabe. Konstruiere ein Faserbündel $p : S^{15} \to S^8$ dessen Fasern homöomorph zu S^7 sind. Betrachte dazu auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{O} := \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ die Multiplikation $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - \bar{b}_2 b_1, b_1 \bar{a}_2 + b_2 a_1)$, $a_i, b_i \in \mathbb{H}$. (Dies ist eine nicht-assotiative Algebra, die sogenannten *Cayley Oktonionen.*) Für $z = (a, b) \in \mathbb{O}$ setze $\bar{z} := (\bar{a}, -b)$ und $|z| := \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$, die übliche Euklidische Norm. Mittels der Einbettung $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{O}$, $r \mapsto (r, 0)$, fassen wir reellen Zahlen als Oktonionen auf. Beachte, dass Multiplikation mit $r \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{O}$ und Skalarmultiplikation r übereinstimmen. Verifiziere die folgenden Aussagen, $z, w \in \mathbb{O}$, $r \in \mathbb{R}$:

(i) $rz = zr$ und $r(zw) = (rz)w = z(rw)$.
(ii) $z\bar{z} = \bar{z}z = |z|^2$.
(iii) Ist $0 \neq z$ dann erfüllt $z^{-1} := \bar{z}/|z|^2$ die Relationen $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.
(iv) $\bar{\bar{z}} = z$, $\overline{rz} = r\bar{z}$ und $(z^{-1})^{-1} = z$.
(v) $|zw| = |z||w|$, $\overline{zw} = \bar{w}\bar{z}$ und $(zw)^{-1} = w^{-1}z^{-1}$.
(vi) $(zw)\bar{w} = z(w\bar{w})$ and $(zw)w^{-1} = z$.

Es bezeichne $\mathbb{O}_\infty := \mathbb{O} \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{O}$, die offenen Umgebungen von ∞ sind die Komplemente der kompakten Teilmengen von $\mathbb{O}$. Zeige $\mathbb{O}_\infty \cong S^8$, oder allgemeiner, $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n$.[39] Betrachte $S^{15} \subseteq \mathbb{O} \times \mathbb{O}$ und definiere eine Abbildung

$$p : S^{15} \to \mathbb{O}_\infty, \qquad p(z_0, z_1) := \begin{cases} z_0 z_1^{-1} & \text{falls } z_1 \neq 0, \text{ und} \\ \infty & \text{falls } z_1 = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass p stetig ist. Zeige, dass

$$\varphi : p^{-1}(\mathbb{O}) \to \mathbb{O} \times S^7, \qquad \varphi(z_0, z_1) := \big(z_0 z_1^{-1}, z_1/|z_1|\big)$$

eine Trivialisierung von p über $\mathbb{O} \subseteq \mathbb{O}_\infty$ ist, dessen Inverse durch folgende Formel gegeben ist:

$$\varphi^{-1} : \mathbb{O} \times S^7 \to p^{-1}(\mathbb{O}), \qquad \varphi^{-1}(z, w) := (zw, w)\big/\sqrt{|zw|^2 + |w|^2}.$$

Zeige, dass $\nu : \mathbb{O}_\infty \to \mathbb{O}_\infty$, $\nu(z) := z^{-1}$, $\nu(0) := \infty$, $\nu(\infty) := 0$ ein Homöomorphismus ist, $\nu \circ \nu = \mathrm{id}_{\mathbb{O}_\infty}$. Verifiziere $p \circ \tau = \nu \circ p$, wobei $\tau : S^{15} \to S^{15}$ den durch $\tau(z_0, z_1) := (z_1, z_0)$ gegebenen Homöomorphismus bezeichnet, $\tau \circ \tau = \mathrm{id}_{S^{15}}$. Schließe, dass $(\nu \times \mathrm{id}_{S^7}) \circ \varphi \circ \tau$ eine Trivialisierung von p über $\mathbb{O}_\infty \setminus \{0\}$ liefert und, dass p daher ein Faserbündel ist. Verwende Aufgabe 30 um die folgenden Isomorphismen herzuleiten,

$$\pi_k(S^{15}) \times \pi_{k-1}(S^7) \cong \pi_k(S^8), \qquad k \geq 1.$$

Insbesondere erhalten wir $\pi_k(S^8) \cong \pi_{k-1}(S^7)$, für $1 \leq k \leq 14$.

[39] Hinweis: Die stereographische Projektion $S^n \setminus \{P\} \to \mathbb{R}^n$ ist proper (dh. Urbilder kompakter Mengen sind kompakt) und lässt sich daher zu einer stetigen Abbildung $S^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ fortsetzen.