AUFGABEN ZUM PROSEMINAR ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

Aufgabe 1. Es bezeichne $I := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ das kompakte Einheitsintervall. Auf $I \times I$ betrachte die von

$$(x,0) \sim (x,1), \qquad \text{für alle } x \in I$$
$$(0,y) \sim (1,y), \qquad \text{für alle } y \in I$$

erzeugte Äquivalenzrelation und den damit assozierten Quotientenraum $X := (I \times I)/\sim$. Zeige, dass die Abbildung

$$f : X \to S^1 \times S^1, \qquad f(x,y) := \bigl(e^{2\pi \mathbf{i} x}, e^{2\pi \mathbf{i} y}\bigr)$$

ein Homöomorphismus ist. Dabei bezeichnet $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ den Einheitskreis.

Aufgabe 2. Es seien $R > r > 0$. Betrachte den durch

$$T := \Bigl\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \bigl(\sqrt{x^2+y^2} - R\bigr)^2 + z^2 = r^2\Bigr\}$$

gegebenen Teilraum (Fläche) des $\mathbb{R}^3$. Fertige eine Skizze von T an, und konstruiere einen Homöomorphismus zwischen T und $S^1 \times S^1$.

Aufgabe 3. Es seien X und Y zwei topologische Räume und $A, B \subseteq Y$ zwei abgeschlossene Teilmengen mit $A \cup B = Y$. Zeige, dass eine Abbildung $f : Y \to X$ genau dann stetig ist, wenn die Einschränkungen $f|_A : A \to X$ und $f|_B : B \to X$ beide stetig sind.

Aufgabe 4. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$ die Einheitssphäre. Auf $S^n \times [-1,1]$ betrachte die durch

$$(x,1) \sim (y,1), \qquad (x,-1) \sim (y,-1), \qquad (x,t) \sim (x,t)$$

gegebene Äquivalenzrelation, $x, y \in S^n$, $t \in [-1,1]$. Zeige, dass der Quotientenraum

$$(S^n \times [-1,1])/\sim$$

homöomorph zu S^{n+1} ist. Fertige Skizzen an!

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/AT.html`.