

Algebraische Topologie

Stefan Haller

INHALTSVERZEICHNIS

I. Die Fundamentalgruppe	3
I.1. Elementare Eigenschaften der Fundamentalgruppe	4
I.2. Die Fundamentalgruppe des Kreises	14
I.3. Homotopieinvarianz	23
I.4. Der Abbildungsgrad	34
I.5. Der Satz von Seifert–van Kampen	38
I.6. Die Fundamentalgruppe einiger Matrizen­gruppen	50
I.7. Weitere Beispiele zum Seifert–van Kampen Satz	58
II. Überlagerungen	65
II.1. Elementare Eigenschaften von Überlagerungen	65
II.2. Strikt diskontinuierliche Gruppenwirkungen	70
II.3. Homotopieliftungseigenschaft	73
II.4. Liften von Abbildungen	79
II.5. Normale Überlagerungen	82
II.6. Konstruktion von Überlagerungen	85
II.7. Darstellungen der Fundamentalgruppe	89
II.8. Überlagerungen topologischer Gruppen	92
III. Kategorien und Funktoren	95
III.1. Kategorien	95
III.2. Funktoren	98
III.3. Natürliche Transformationen	102
III.4. Produkte und Koprodukte	104
IV. Homologie	107
IV.1. Kettenkomplexe und Homologie	107
IV.2. Kettenhomotopie	112
IV.3. Die lange exakte Homologiesequenz	115
IV.4. Rang und Euler-Charakteristik	121
IV.5. Singuläre Homologie	130

Dieses Skriptum findet sich unter <http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/AT09.html>.

IV.6. Relative Homologie und lange exakte Sequenzen	136
IV.7. Homotopieinvarianz	141
IV.8. Baryzentrische Unterteilung	148
IV.9. Der Ausschneidungssatz	155
IV.10. Die Mayer–Vietoris Sequenz	162
IV.11. Der Hurewicz Homomorphismus	165
IV.12. Anwendungen	168
Literatur	183

I. Die Fundamentalgruppe

Der Begriff des einfachen Zusammenhangs ist in mehreren Gebieten der Mathematik anzutreffen. Etwa besagt der Riemannsche Abbildungssatz, dass jedes einfach zusammenhängende Gebiet in \mathbb{C} biholomorph zu \mathbb{C} oder der Einheits Scheibe $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist. Etwas allgemeiner, jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche (d.h. komplexe 1-dimensionale Mannigfaltigkeit) ist zu genau einer der Flächen \mathbb{C} , \mathbb{E} oder $\mathbb{C}P^1$ biholomorph.

Ein Resultat aus der Theorie der Lie-Gruppen besagt, dass für eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe G und jede weitere Lie-Gruppe H die Abbildung die einem Lie-Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow H$ den entsprechenden Lie-Algebrenhomomorphismus $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ zuordnet bijektiv ist. Daher sind zwei einfach zusammenhängende Lie-Gruppen genau dann isomorph wenn es ihre Lie-Algebren sind. Damit ist die Klassifikation der einfach zusammenhängenden Lie-Gruppen auf die Klassifikation der Lie-Algebren zurückgeführt.

Eine vollständige einfach zusammenhängende n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung (o.B.d.A. $\kappa = -1, 0, 1$) ist isometrisch zu \mathbb{R}^n (falls $\kappa = 0$, euklidische Geometrie), S^n (falls $\kappa = 1$, sphärische Geometrie) oder H^n (falls $\kappa = -1$, hyperbolische Geometrie).

Jedem (zusammenhängenden) topologischen Raum mit Basispunkt kann seine Fundamentalgruppe zugeordnet werden. Ihre Elemente sind Homotopieklassen geschlossener Wege beim Basispunkt, die Konkatenation von Wegen liefert die Gruppenstruktur. Ein zusammenhängender Raum ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn seine Fundamentalgruppe trivial ist. Die Fundamentalgruppe liefert daher eine feine Abstufung zwischen den beiden Begriffen *einfach zusammenhängend* und *nicht einfach zusammenhängend*.

Die Fundamentalgruppe ist eine topologische Invariante, dh. homöomorphe zusammenhängende Räume haben isomorphe Fundamentalgruppen. Gelingt es von zwei Räumen die Fundamentalgruppen auszurechnen, und sind diese nicht isomorph, dann waren die beiden Räume nicht homöomorph. Da die Fundamentalgruppe eine Homotopieinvariante ist, lässt sich sogar schließen, dass die beiden Räume nicht einmal homotopieäquivalent sein können.

Mit Hilfe des Satzes von Seifert–van Kampen kann für einige interessante Räume die Fundamentalgruppe tatsächlich bestimmt werden. Etwa lassen sich die Fundamentalgruppen der geschlossenen Flächen berechnen, woraus dann folgt, dass geschlossene Flächen unterschiedlichen Geschlechts nicht homotopieäquivalent, und daher auch nicht homöomorph sind. Andere Beispiele kommen aus der Knotentheorie, haben die Komplemente zweier Knoten in \mathbb{R}^3 nicht-isomorphe Fundamentalgruppen, dann können die Knoten nicht äquivalent sein.

Die Fundamentalgruppe hat gute funktorielle Eigenschaften, stetigen Abbildungen zwischen Räumen entsprechen Homomorphismen zwischen ihren Fundamentalgruppen. Dies ist eine typische Situation in der algebraischen Topologie: topologischen Räumen werden algebraische Objekte (Gruppen, Ringe, ...)

zugeordnet, stetige Abbildungen entsprechen dabei in funktorieller Weise Homomorphismen zwischen diesen Objekte. Weitere Beispiele solcher topologischer Invarianten liefern die höheren Homotopiegruppen, die Homologiegruppen oder der Kohomologiering.

Die Berechnung der Fundamentalgruppe des Kreises, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, führt rasch zu einem Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra und auch zu einem Beweis des Browserschen Fixpunktsatzes für stetige Abbildungen $D^2 \rightarrow D^2$. Sie erlaubt es auch für stetige Abbildungen $S^1 \rightarrow S^1$ einen Abbildungsgrad zu definieren. Für stetig differenzierbare Abbildungen kann dieser auch als Integral geschrieben werden und liefert daher ein erstes einfaches Beispiel für den Zusammenhang zwischen Analysis und Topologie.

Der in diesem Kapitel behandelte Stoff ist Standardmaterial das sich in vielen Lehrbüchern findet. Die Darstellung hier orientiert sich eng an jenen in [4, Chapter 1] und [18, Kapitel 5], es seien aber auch [13], [15] und [19] erwähnt.

I.1. Elementare Eigenschaften der Fundamentalgruppe. Es sei X ein topologischer Raum. Weiters bezeichne $I := [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ das kompakte Einheitsintervall versehen mit der üblichen Teilraumtopologie. Unter einem *Weg* in X verstehen wir eine stetige Abbildung $f : I \rightarrow X$. Wir nennen f einen Weg von $f(0)$ nach $f(1)$. Stimmen die beiden Endpunkte eines Weges f überein, dh. gilt $f(0) = x = f(1)$, dann wird f ein *geschlossener* Weg oder eine *Schleife* bei x genannt. Ist $x \in X$, dann bezeichnen wir mit $c_x : I \rightarrow X$ den *konstanten* Weg, $c_x(s) := x$.

Unter einer *Homotopie von Wegen* in X verstehen wir eine stetige Abbildung $H : I \times I \rightarrow X$, sodass $H(0, t) = x_0$ und $H(1, t) = x_1$ unabhängig von t sind. Für jedes $t \in I$ ist dann $H_t : I \rightarrow X$, $H_t(s) := H(s, t)$, ein Weg von $H_t(0) = x_0$ nach $H_t(1) = x_1$. Zwei Wege $f, g : I \rightarrow X$ heißen *homotop* falls eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \rightarrow X$ existiert, sodass $H_0 = f$ und $H_1 = g$, dh. $H(s, 0) = f(s)$ und $H(s, 1) = g(s)$ für alle $s \in I$. In diesem Fall wird H eine Homotopie von f nach g genannt, und wir schreiben $f \simeq g$ oder $f \stackrel{H}{\simeq} g$. Um zu betonen, dass die Endpunkte fix sind, sprechen wir auch von einer *Homotopie relativ Endpunkten* und sagen f ist homotop zu g relativ Endpunkten.

I.1.1. PROPOSITION. *Homotop relativ Endpunkten zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Wege in X .*

BEWEIS. Zur *Reflexivität*: Ist f ein Weg in X , dann ist $H : I \times I \rightarrow X$, $H(s, t) := f(s)$, eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f$ nach $H_1 = f$, also gilt $f \stackrel{H}{\simeq} f$. Zur *Symmetrie*: Sei also $f \stackrel{H}{\simeq} g$. Dann ist $G : I \times I \rightarrow X$, $G(s, t) := H(s, 1 - t)$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $G_0 = H_1 = g$ nach $G_1 = H_0 = f$, also gilt $g \stackrel{G}{\simeq} f$. Zur *Transitivität*: Seien also $f \stackrel{H'}{\simeq} g$ und $g \stackrel{H''}{\simeq} h$.

Dann ist

$$H : I \times I \rightarrow X, \quad H(s, t) := \begin{cases} H'(s, 2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H''(s, 2t - 1) & \text{falls } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = H'_0 = f$ nach $H_1 = H''_1 = h$, also gilt $f \stackrel{H}{\simeq} h$. Die Stetigkeit von H folgt aus Lemma I.1.2 unten. \square

Die Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation \simeq heißen *Homotopieklassen*. Wir schreiben $[f]$ für die Homotopieklasse eines Weges f .

I.1.2. LEMMA. *Es seien X und Y zwei topologische Räume und $f : Y \rightarrow X$ eine Abbildung. Weiters seien A und B zwei abgeschlossene Teilmengen von Y , sodass $Y = A \cup B$. In dieser Situation gilt: f ist genau dann stetig, wenn die Einschränkungen $f|_A : A \rightarrow X$ und $f|_B : B \rightarrow X$ beide stetig sind.*

BEWEIS. Mit f sind natürlich auch die Einschränkungen $f|_A$ und $f|_B$ stetig. Es bleibt daher zu zeigen, dass aus der Stetigkeit der Einschränkungen auch die Stetigkeit von f folgt. Sei dazu C eine abgeschlossene Teilmenge von X und $D := f^{-1}(C) \subseteq Y$. Es ist zu zeigen, dass D in Y abgeschlossen ist. Aus der Stetigkeit von $f|_A$ folgt, dass $D \cap A = f|_A^{-1}(D)$ abgeschlossen in A ist. Da A in Y abgeschlossen ist folgt, dass $D \cap A$ auch in Y abgeschlossen ist. Ebenso folgt aus der Stetigkeit von $f|_B$ und der Abgeschlossenheit von B , dass $D \cap B$ abgeschlossen in Y ist. Also ist auch ihre Vereinigung $(D \cap A) \cup (D \cap B) = D \cap (A \cup B) = D$ abgeschlossen in Y . \square

I.1.3. BEISPIEL (Reparametrisierung). Ist $f : I \rightarrow X$ ein Weg und $\varphi : I \rightarrow I$ stetig mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$, dann gilt $f \circ \varphi \simeq f$. Es ist nämlich $H : I \times I \rightarrow X$, $H(s, t) := f((1-t)\varphi(s) + ts)$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f \circ \varphi$ nach $H_1 = f$. Beachte, dass $(1-t)\varphi(s) + ts$ stets in I liegt und H daher wohldefiniert ist.

I.1.4. BEISPIEL. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und $f, g : I \rightarrow X$ zwei Wege mit $f(0) = g(0)$ und $f(1) = g(1)$. Dann gilt $f \simeq g$, denn $H : I \times I \rightarrow X$, $H(s, t) := (1-t)f(s) + tg(s)$, ist eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$. Beachte, dass wegen der Konvexität von X diese Homotopie tatsächlich Werte in X hat.

Es sei X ein topologischer Raum. Sind f und g zwei Wege in X mit $f(1) = g(0)$, dann ist

$$fg : I \rightarrow X, \quad (fg)(s) := \begin{cases} f(2s) & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2 \\ g(2s - 1) & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg von $f(0)$ nach $g(1)$. Er wird der *Produktweg*, die *Konkatenation* oder auch *Zusammensetzung* von f und g genannt.

I.1.5. LEMMA. *Es seien f_0, f_1, g_0 und g_1 Wege in X , sodass $f_0 \simeq f_1, g_0 \simeq g_1, f_0(1) = g_0(0)$ und daher auch $f_1(1) = g_1(0)$. Dann gilt $f_0g_0 \simeq f_1g_1$.*

BEWEIS. Sind $F : I \times I \rightarrow X$ und $G : I \times I \rightarrow X$ Homotopien von Wegen mit $f_0 \stackrel{F}{\simeq} f_1$ und $g_0 \stackrel{G}{\simeq} g_1$, dann definiert

$$H : I \times I \rightarrow X, \quad H(s, t) := \begin{cases} F(2s, t) & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2, \\ G(2s - 1, t) & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f_0g_0$ nach $H_1 = f_1g_1$. Die Stetigkeit von H folgt wieder aus Lemma I.1.2. \square

I.1.6. LEMMA. *Sind f, g und h drei Wege in X mit $f(1) = g(0)$ und $g(1) = h(0)$, dann gilt $(fg)h \simeq f(gh)$.*

BEWEIS. $(fg)h$ ist eine Reparametrisierung von $f(gh)$, denn es gilt $(fg)h = (f(gh)) \circ \varphi$ mit

$$\varphi : I \rightarrow I, \quad \varphi(s) := \begin{cases} 2s & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/4, \\ s+1/4 & \text{falls } 1/4 \leq s \leq 1/2, \text{ und} \\ s/2+1/2 & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Aus Beispiel I.1.3 folgt daher $(fg)h \simeq f(gh)$. \square

I.1.7. LEMMA. *Es sei f ein Weg in X und $x := f(0), y := f(1)$. Dann gilt für die Konkatenationen mit den konstanten Wegen $fc_y \simeq f$ sowie $c_xf \simeq f$.*

BEWEIS. Der Weg fc_y ist eine Reparametrisierung von f , denn es gilt $fc_y = f \circ \varphi$ mit

$$\varphi : I \rightarrow I, \quad \varphi(s) := \begin{cases} 2s & \text{falls } 0 \leq s \leq 1/2, \text{ und} \\ 1 & \text{falls } 1/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Aus Beispiel I.1.3 folgt daher $fc_y \simeq f$. Analog lässt sich $c_xf \simeq f$ zeigen. \square

Für einen Weg $f : I \rightarrow X$ ist $\bar{f} : I \rightarrow X, \bar{f}(s) := f(1 - s)$, ein Weg von $f(1)$ nach $f(0)$. Er wird als der zu f inverse Weg bezeichnet.

I.1.8. LEMMA. *Es sei f ein Weg in X und $x := f(0), y := f(1)$. Dann gilt $f\bar{f} \simeq c_x$ und $\bar{f}f \simeq c_y$.*

BEWEIS. Es ist

$$H : I \times I \rightarrow X, \quad H(s, t) := \begin{cases} f(2s) & \text{falls } 0 \leq s \leq t/2, \\ f(t) & \text{falls } t/2 \leq s \leq 1 - t/2, \\ f(2 - 2s) & \text{falls } 1 - t/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = c_x$ nach $H_1 = f\bar{f}$. Die Stetigkeit von H folgt wieder aus Lemma I.1.2. Analog lässt sich $\bar{f}f \simeq c_y$ zeigen. \square

Sei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Basispunkt. Mit $\pi_1(X, x_0)$ bezeichnen wir die Menge aller Homotopieklassen geschlossener Wege bei x_0 , genauer

$$\pi_1(X, x_0) := \{\text{Wege } f : I \rightarrow X \text{ mit } f(0) = x_0 = f(1)\} / \simeq$$

wobei \simeq die oben besprochene Äquivalenzrelation der Homotopie relativ Endpunkten bezeichnet. Ist f ein Weg in X mit $f(0) = x_0 = f(1)$ dann schreiben wir $[f]$ für seine Äquivalenzklasse in $\pi_1(X, x_0)$. Nach Lemma I.1.5 definiert die Konkatenation von Wegen eine Multiplikation

$$\pi_1(X, x_0) \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad ([f], [g]) \mapsto [f][g] := [fg]$$

die nach Lemma I.1.6 assoziativ ist, $([f][g])[h] = [f]([g][h])$. Die Äquivalenzklasse des konstanten Weges c_{x_0} ist nach Lemma I.1.7 neutrales Element dieser Multiplikation, $[f][c_{x_0}] = [f] = [c_{x_0}][f]$. Nach Lemma I.1.8 gilt weiters $[f][\bar{f}] = [c_{x_0}] = [\bar{f}][f]$. Zusammenfassend erhalten wir

I.1.9. PROPOSITION. *Die Konkatenation von Wegen definiert auf $\pi_1(X, x_0)$ eine Gruppenstruktur, $[f][g] = [fg]$. Das neutrale Element wird durch den konstanten Weg c_{x_0} repräsentiert, $1 = [c_{x_0}]$. Das zu $[f]$ inverse Element wird durch den inversen Weg repräsentiert, $[f]^{-1} = [\bar{f}]$.*

I.1.10. DEFINITION (Fundamentalgruppe). Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ wird als die *Fundamentalgruppe* oder *erste Homotopiegruppe* von X beim Basispunkt x_0 bezeichnet.

I.1.11. BEMERKUNG. Die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ ist i.A. nicht kommutativ und wird daher i.A. multiplikativ notiert. Insbesondere schreiben wir $1 \in \pi_1(X, x_0)$ für das neutrale Element und σ^{-1} für das Inverse von $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Ist die Fundamentalgruppe abelsch, so wird sie manchmal auch additiv geschrieben. Ist sie trivial, dh. besteht sie nur aus dem neutralen Element $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$, dann wird dies üblicherweise durch die additive Schreibweise $\pi_1(X, x_0) = 0$ ausgedrückt.

I.1.12. BEISPIEL. Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Teilmenge und $x_0 \in X$ so gilt $\pi_1(X, x_0) = 0$, siehe Beispiel I.1.4.

Unter einem *punktierten Raum* verstehen wir ein Paar (X, x_0) wobei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein Basispunkt ist. Punktierte Räume werden auch als *Räume mit Basispunkt* bezeichnet. Jedem punktierten Raum (X, x_0) haben wir in Definition I.1.10 seine Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ zugeordnet.

Sind (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte Räume und ist $\varphi : X \rightarrow Y$ stetig mit $\varphi(x_0) = y_0$, dann nennen wir φ eine *Abbildung punktierter Räume* oder auch *basispunkterhaltende stetige Abbildung* und schreiben $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Ist $\psi : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ eine weitere Abbildung punktierter Räume, dann ist auch die Komposition $\psi \circ \varphi : (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$ eine Abbildung punktierter Räume. Die identische Abbildung $\text{id}_{(X, x_0)} : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ ist basispunkterhaltend. Unter

einem Homöomorphismus punktierter Räume verstehen wir einen basispunkterhaltenden Homöomorphismus.

I.1.13. PROPOSITION. *Eine Abbildung punktierter Räume $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ induziert einen Gruppenhomomorphismus*

$$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), \quad \varphi_*([f]) := [\varphi \circ f].$$

Ist $\psi : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ eine weitere Abbildung punktierter Räume, dann gilt $(\psi \circ \varphi)_ = \psi_* \circ \varphi_*$ sowie $(\text{id}_{(X, x_0)})_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$.*

BEWEIS. Sei also $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Abbildung punktierter Räume, und f eine Schleife bei x_0 . Dann ist $\varphi \circ f$ eine Schleife bei y_0 . Sind f_0, f_1 zwei Schleife bei x_0 mit $f_0 \stackrel{H}{\simeq} f_1$, so ist $\varphi \circ H : I \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von Wegen mit $\varphi \circ f_0 \stackrel{\varphi \circ H}{\simeq} \varphi \circ f_1$, also $[\varphi \circ f_0] = [\varphi \circ f_1] \in \pi_1(Y, y_0)$. Dies zeigt, dass φ_* wohldefiniert ist. Für zwei Schleifen f, g bei x_0 gilt offensichtlich $\varphi \circ (fg) = (\varphi \circ f)(\varphi \circ g)$, also $\varphi_*([f][g]) = \varphi_*([fg]) = [\varphi \circ (fg)] = [(\varphi \circ f)(\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f][\varphi \circ g] = \varphi_*([f])\varphi_*([g])$. Dies zeigt, dass φ_* ein Gruppenhomomorphismus ist. Weiters gilt $(\psi \circ \varphi)_*([f]) = [(\psi \circ \varphi) \circ f] = [\psi \circ (\varphi \circ f)] = \psi_*([\varphi \circ f]) = \psi_*(\varphi_*([f]))$ und daher $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$. Die Aussage $(\text{id}_{(X, x_0)})_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ ist ebenso trivial. \square

I.1.14. PROPOSITION. *Ist $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ ein Homöomorphismus punktierter Räume, so ist die induzierte Abbildung $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Es bezeichne $\varphi^{-1} : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ die Umkehrabbildung. Aus Proposition I.1.13 erhalten wir $(\varphi^{-1})_* \circ \varphi_* = (\varphi^{-1} \circ \varphi)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ sowie $\varphi_* \circ (\varphi^{-1})_* = (\varphi \circ \varphi^{-1})_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$. Daher sind φ_* und $(\varphi^{-1})_*$ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. \square

I.1.15. BEMERKUNG. Sind $\varphi, \psi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ zwei Homöomorphismen punktierter Räume, dann stimmen die induzierten Isomorphismen φ_* und ψ_* i.A. nicht überein, siehe etwa Beispiel I.2.2 unten.

I.1.16. PROPOSITION. *Es sei (X, x_0) ein punktierter Raum und es bezeichne X_0 die Wegzusammenhangskomponente von x_0 . Dann induziert die kanonische Inklusion $(X_0, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ einen Isomorphismus $\pi_1(X_0, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$.*

BEWEIS. Es bezeichne $\iota : (X_0, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ die kanonische Inklusion und $\iota_* : \pi_1(X_0, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ den induzierten Homomorphismus.

Wir zeigen zunächst, dass ι_* surjektiv ist. Ist $f : I \rightarrow X$ eine Schleife bei x_0 , dann liegt diese zur Gänze in X_0 und kann daher als Schleife $f' : I \rightarrow X_0$ aufgefasst werden, $\iota \circ f' = f$. Diese repräsentiert ein Element $[f'] \in \pi_1(X_0, x_0)$ für das offensichtlich $\iota_*([f']) = [\iota \circ f'] = [f]$ gilt. Somit ist ι_* surjektiv.

Kommen wir nun zur Injektivität von ι_* . Es seien $f', g' : I \rightarrow X_0$ zwei Schleifen bei x_0 mit $\iota_*([f']) = \iota_*([g']) \in \pi_1(X, x_0)$. Dann existiert eine Homotopie relativ Endpunkten $H : I \times I \rightarrow X$ von $H_0 = \iota \circ f'$ nach $H_1 = \iota \circ g'$. Da

$I \times I$ wegzusammenhängend ist, nimmt H nur Werte in X_0 an, kann daher als Homotopie $H' : I \times I \rightarrow X_0$ aufgefasst werden, $\iota \circ H' = H$. Insbesondere gilt $\iota \circ H'_0 = H_0 = \iota \circ f'$ und $\iota \circ H'_1 = H_1 = \iota \circ g'$, aus der Injektivität von ι folgt daher $H'_0 = f'$ und $H'_1 = g'$. Wir erhalten $f' \stackrel{H'}{\simeq} g'$, dh. $[f'] = [g'] \in \pi_1(X_0, x_0)$, also ist ι_* injektiv. \square

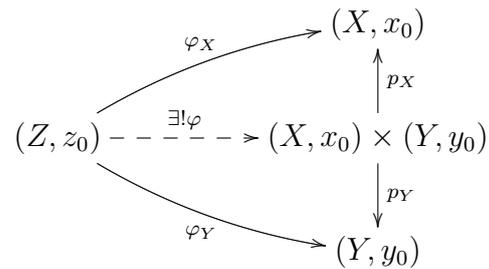
Wir wollen uns nun überlegen wie die Fundamentalgruppe eines Produktraumes mit den Fundamentalgruppen der Faktoren zusammenhängt. Wir beginnen damit das Produkt punktierter Räume und das Produkt von Gruppen zu besprechen.

Sind (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte Räume, dann ist auch

$$(X, x_0) \times (Y, y_0) := (X \times Y, (x_0, y_0))$$

ein punktierter Raum, der als *Produkt der punktierten Räume* (X, x_0) und (Y, y_0) bezeichnet wird. Die Projektionen auf die beiden Komponenten liefern zwei Abbildungen punktierter Räume $p_X : (X, x_0) \times (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ und $p_Y : (X, x_0) \times (Y, y_0) \rightarrow (Y, y_0)$, die als *kanonische Projektionen* bezeichnet werden. Das Produkt punktierter Räume hat die folgende *universelle Eigenschaft*:

Ist (Z, z_0) ein weiterer punktierter Raum und sind $\varphi_X : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$ sowie $\varphi_Y : (Z, z_0) \rightarrow (Y, y_0)$ zwei Abbildungen punktierter Räume, dann existiert genau eine Abbildung punktierter Räume $\varphi : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0) \times (Y, y_0)$, sodass $p_X \circ \varphi = \varphi_X$ und $p_Y \circ \varphi = \varphi_Y$ gilt. Das



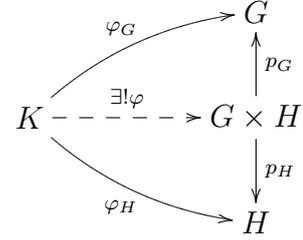
nebenstehende kommutative Diagramm soll dies verdeutlichen. Diese Abbildung φ ist durch $\varphi(x, y) = (\varphi_X(x), \varphi_Y(x))$ gegeben und wird mit (φ_X, φ_Y) bezeichnet.

Analog definieren wir das Produkt beliebig vieler punktierter Räume (X_α, x_α) , $\alpha \in A$, durch

$$\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha) := \left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, (x_\alpha)_{\alpha \in A} \right).$$

Dabei bezeichnet $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ den Punkt in $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ mit Komponenten x_α . Für jedes $\alpha \in A$ haben wir eine kanonische Projektion $p_\alpha : \prod_{\alpha' \in A} (X_{\alpha'}, x_{\alpha'}) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$ mit folgender universellen Eigenschaft: Ist (Z, z_0) ein punktierter Raum und sind $\varphi_\alpha : (Z, z_0) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$ Abbildungen punktierter Räume, $\alpha \in A$, dann existiert genau eine Abbildung punktierter Räume $\varphi : (Z, z_0) \rightarrow \prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha)$, sodass $p_\alpha \circ \varphi = \varphi_\alpha$, für alle $\alpha \in A$. Diese Abbildung ist durch $\varphi(z) = (\varphi_\alpha(z))_{\alpha \in A}$ gegeben und wird mit $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ bezeichnet. Durch diese universelle Eigenschaft ist das Produkt punktierter Räume zusammen mit den kanonischen Projektionen, bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt.

Das Produkt von Gruppen besitzt eine analoge Eigenschaft. Sind G und H zwei Gruppen, dann ist $G \times H$ bezüglich komponentenweiser Multiplikation wieder eine Gruppe. Die beiden kanonischen Projektionen $p_G : G \times H \rightarrow G$ und $p_H : G \times H \rightarrow H$ sind Gruppenhomomorphismen. Das Produkt $G \times H$ hat die folgende *universelle Eigenschaft*: Sind $\varphi_G : K \rightarrow G$ und $\varphi_H : K \rightarrow H$ zwei Gruppenhomomorphismen, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : K \rightarrow G \times H$ mit $p_G \circ \varphi = \varphi_G$ und $p_H \circ \varphi = \varphi_H$. Dieser Homomorphismus ist durch $\varphi(k) = (\varphi_G(k), \varphi_H(k))$ gegeben und wird mit (φ_G, φ_H) bezeichnet. Auch das Produkt beliebig vieler Gruppen $\prod_{\alpha \in A} G_\alpha$ hat diese Eigenschaft. Die kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_{\alpha' \in A} G_{\alpha'} \rightarrow G_\alpha$ sind Gruppenhomomorphismen, und zu Gruppenhomomorphismen $\varphi_\alpha : K \rightarrow G_\alpha$, $\alpha \in A$, existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : K \rightarrow \prod_{\alpha \in A} G_\alpha$, sodass $p_\alpha \circ \varphi = \varphi_\alpha$, für alle $\alpha \in A$. Dieser Homomorphismus ist durch $\varphi(k) = (\varphi_\alpha(k))_{\alpha \in A}$ gegeben und wird mit $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ bezeichnet.



Nun aber zur Fundamentalgruppe des Produkts $\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha)$. Die kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_{\alpha' \in A} (X_{\alpha'}, x_{\alpha'}) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$ induzieren Gruppenhomomorphismen

$$(p_\alpha)_* : \pi_1 \left(\prod_{\alpha' \in A} (X_{\alpha'}, x_{\alpha'}) \right) \rightarrow \pi_1(X_\alpha, x_\alpha), \quad [f] \mapsto [p_\alpha \circ f].$$

Diese liefern einen Gruppenhomomorphismus

$$\pi_1 \left(\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha) \right) \rightarrow \prod_{\alpha \in A} \pi_1(X_\alpha, x_\alpha), \quad [f] \mapsto ([p_\alpha \circ f])_{\alpha \in A}. \quad (\text{I.1})$$

I.1.17. PROPOSITION. Für punktierte Räume (X_α, x_α) , $\alpha \in A$, ist (I.1) ein Isomorphismus. Insbesondere gilt $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ für je zwei punktierte Räume (X, x_0) und (Y, y_0) .

BEWEIS. Um die Surjektivität von (I.1) einzusehen, betrachten wir ein beliebiges Element $g \in \prod_{\alpha \in A} \pi_1(X_\alpha, x_\alpha)$, dh. $g = ([f_\alpha])_{\alpha \in A}$ wobei $f_\alpha : I \rightarrow X_\alpha$ Schleifen bei x_α sind die Elemente $[f_\alpha] \in \pi_1(X_\alpha, x_\alpha)$ repräsentieren, $\alpha \in A$. Es ist dann $f := (f_\alpha)_{\alpha \in A} : I \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ eine Schleife bei $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, definiert daher ein Element $[f] \in \pi_1(\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha))$. Nach Konstruktion wird $[f]$ durch den Homomorphismus (I.1) auf g abgebildet. Also ist (I.1) surjektiv.

Nun zur Injektivität von (I.1). Es seien $f, g : I \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ zwei Schleifen bei $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, sodass die davon repräsentierten Elemente $[f], [g] \in \pi_1(\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha))$ dasselbe Bild unter (I.1) haben. Es gilt daher $[p_\alpha \circ f] = [p_\alpha \circ g] \in \pi_1(X_\alpha, x_\alpha)$, für alle $\alpha \in A$. Also existieren Homotopien relativ Endpunkten $H^\alpha : I \times I \rightarrow X_\alpha$ von $H_0^\alpha = p_\alpha \circ f$ nach $H_1^\alpha = p_\alpha \circ g$, $\alpha \in A$. Es definiert dann $H := (H^\alpha)_{\alpha \in A} : I \times I \rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ eine Homotopie relativ Endpunkten von f nach g . Damit ist $[f] = [g] \in \pi_1(\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha))$ und (I.1) also injektiv. \square

Wir wenden uns nun der Frage zu, inwiefern die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ eines Raumes X vom Basispunkt x_0 abhängt.

I.1.18. PROPOSITION. *Es sei $h : I \rightarrow X$ ein Weg und $x_0 := h(0)$, $x_1 := h(1)$. Dann definiert*

$$\beta_h : \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad \beta_h([f]) := [hf\bar{h}],$$

einen Isomorphismus von Gruppen, $\beta_h^{-1} = \beta_{\bar{h}}$.

BEWEIS. Nach den Beobachtungen am Beginn dieses Abschnitts ist β_h wohldefiniert,¹ und für $[f], [g] \in \pi_1(X, x_1)$ gilt $\beta_h([f][g]) = [hfg\bar{h}] = [hfc_{x_1}g\bar{h}] = [hf\bar{h}hg\bar{h}] = [hf\bar{h}][hg\bar{h}] = \beta_h([f])\beta_h([g])$, also ist β_h ein Gruppenhomomorphismus. Verwenden wir noch die offensichtliche Tatsache $\bar{\bar{h}} = h$, so erhalten wir $(\beta_{\bar{h}} \circ \beta_h)([f]) = \beta_{\bar{h}}([hf\bar{h}]) = [\bar{h}hf\bar{h}\bar{\bar{h}}] = [\bar{h}hf\bar{h}h] = [c_{x_1}fc_{x_1}] = [f]$. Daher gilt $\beta_{\bar{h}} \circ \beta_h = \text{id}_{\pi_1(X, x_1)}$. Ebenso lässt sich $\beta_h \circ \beta_{\bar{h}} = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ zeigen, also sind β_h und $\beta_{\bar{h}}$ zueinander inverse Gruppenisomorphismen. \square

I.1.19. BEMERKUNG. Sind x_0 und x_1 zwei Basispunkte in X die in derselben Wegzusammenhangskomponente von X liegen, dann sind nach Proposition I.1.18 die Gruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ isomorph. Für wegzusammenhängendes X schreiben wir daher oft auch $\pi_1(X)$. Liegen x_0 und x_1 nicht in derselben Wegzusammenhangskomponente, dann dürfen wir uns i.A. keinerlei Relation zwischen den Gruppen $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_1)$ erwarten, vgl. Proposition I.1.16.

I.1.20. BEMERKUNG. Der Isomorphismus β_h aus Proposition I.1.18 hängt nur von der Homotopieklasse von h ab, dh. aus $h \simeq h'$ folgt $\beta_h = \beta_{h'}$. Genauer, für zwei Wege h, h' von x_0 nach x_1 gilt $\beta_h = \beta_{h'}$ genau dann, wenn $[h\bar{h}']$ im Zentrum² $Z(\pi_1(X, x_0))$ der Fundamentalgruppe liegt. Ist $\pi_1(X, x_0)$ nicht abelsch, dann gilt $Z(\pi_1(X, x_0)) \neq \pi_1(X, x_0)$ und der in Proposition I.1.18 konstruierte Isomorphismus hängt tatsächlich von $[h]$ ab. Ist die Fundamentalgruppe nicht abelsch, erhalten wir daher *keine kanonische Identifikation* von $\pi_1(X, x_0)$ mit $\pi_1(X, x_1)$.

I.1.21. PROPOSITION. *Für einen topologischer Raum X sind äquivalent:*

- (i) *Zu je zwei Punkten $x_0, x_1 \in X$ gibt es genau eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 .*
- (ii) *X ist wegzusammenhängend, und für alle $x_0 \in X$ gilt $\pi_1(X, x_0) = 0$.*
- (iii) *X ist wegzusammenhängend, und es existiert $x_0 \in X$ mit $\pi_1(X, x_0) = 0$.*

BEWEIS. Die Äquivalenz (ii) \Leftrightarrow (iii) folgt aus Proposition I.1.18. Nun zur Implikation (i) \Rightarrow (ii): Da nach Voraussetzung mindestens eine Homotopieklasse von

¹Genaugenommen müssten wir hier Klammern setzen, $\beta_h([f]) = [(hf)\bar{h}]$ oder $\beta_h([f]) = [h(f\bar{h})]$, nach Lemma I.1.6 stimmen die Homotopieklassen $[(hf)\bar{h}]$ und $[h(f\bar{h})]$ aber überein.

²Das Zentrum einer Gruppe G ist $Z(G) := \{g \in G \mid \forall h \in G : gh = hg\}$. Das Zentrum ist stets ein abelscher Normalteiler. Es gilt $Z(G) = G$ genau dann, wenn G abelsch ist.

Wegen von x_0 nach x_1 existiert, muss X wegzusammenhängend sein. Betrachten wir nun $x_1 = x_0$, so folgt $\pi_1(X, x_0) = 0$ aus der Annahme, dass höchstens eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 existiert. Es bleibt (ii) \Rightarrow (i) zu zeigen. Seien dazu $x_0, x_1 \in X$. Aus dem Wegzusammenhang von X folgt, dass es zumindest eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 gibt. Sind $f, g : I \rightarrow X$ zwei Wege von x_0 nach x_1 , dann ist $f\bar{g}$ eine Schleife bei x_0 die wegen $\pi_1(X, x_0) = 0$ homotop zum konstanten Weg c_{x_0} sein muss, $f\bar{g} \simeq c_{x_0}$. Es folgt $f \simeq fc_{x_1} \simeq f(\bar{g}g) \simeq (f\bar{g})g \simeq c_{x_0}g \simeq g$, also kann es höchstens eine Homotopieklasse von Wegen von x_0 nach x_1 geben. \square

I.1.22. DEFINITION (Einfacher Zusammenhang). Ein topologischer Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, falls er die (äquivalenten) Bedingungen in Proposition I.1.21 erfüllt.

I.1.23. BEISPIEL. Jede konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^n ist einfach zusammenhängend, siehe Beispiel I.1.12. Beachte, dass konvexe Teilmengen offensichtlich wegzusammenhängend sind. Insbesondere sind \mathbb{R}^n , die abgeschlossenen Bälle $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ und die offenen Bälle $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ einfach zusammenhängend.

I.1.24. BEISPIEL. Das Produkt beliebig vieler einfach zusammenhängender Räume ist wieder einfach zusammenhängend, siehe Proposition I.1.17. Beachte, dass Produkte wegzusammenhängender Räume wieder wegzusammenhängend sind.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ die n -dimensionale Einheitskugel versehen mit der von \mathbb{R}^{n+1} induzierten Teilraumtopologie. Beachte, dass S^n abgeschlossen und beschränkt in \mathbb{R}^{n+1} ist. Nach dem Satz von Heine-Borel ist S^n daher ein kompakter Raum. Etwa besteht $S^0 = \{-1, 1\}$ aus nur zwei Punkten. Die eindimensionale Kugel können wir auch als Teilraum der komplexen Zahlen auffassen, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

I.1.25. BEISPIEL. $S^n \setminus \{P\}$ ist homöomorph zu \mathbb{R}^n und daher einfach zusammenhängend, $P \in S^n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Um dies einzusehen betrachten wir zunächst die Inversion mit Pol P ,

$$\nu_P : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{P\}, \quad \nu_P(x) := P + \frac{2}{\|x - P\|^2}(x - P).$$

Der Bildpunkt $\nu_P(x)$ liegt daher auf dem Halbstrahl von P durch x und es gilt $\|x - P\|\|\nu_P(x) - P\| = 2$. Daraus folgt sofort $\nu_P \circ \nu_P = \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{P\}}$, insbesondere ist ν_P ein Homöomorphismus. Weiters gilt

$$\|\nu_P(x)\|^2 = 1 + \frac{4\langle x, P \rangle}{\|x - P\|^2}$$

und daher ist $\nu_P(x) \in S^n$ genau dann, wenn $x \in P^\perp = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, P \rangle = 0\}$. Die Einschränkung von ν_P liefert daher einen Homöomorphismus

$$\varphi_P : P^\perp \rightarrow S^n \setminus \{P\}, \quad \varphi_P(x) = P + \frac{2}{\|x - P\|^2}(x - P).$$

Dieser Homöomorphismus wird die *stereographische Projektion mit Pol P* genannt.³ Als Hyperebene in \mathbb{R}^{n+1} ist P^\perp homöomorph zu \mathbb{R}^n , daher ist auch $S^n \setminus \{P\}$ homöomorph zu \mathbb{R}^n . Nach Proposition I.1.14 und Beispiel I.1.23 ist daher $S^n \setminus \{P\}$ einfach zusammenhängend.

I.1.26. SATZ. S^n ist einfach zusammenhängend, falls $n \geq 2$.

BEWEIS. Bezeichne mit $N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ den Nordpol und mit $x_0 := S := (0, \dots, 0, -1) \in S^n$ den Südpol. Weiters betrachte die offenen Teilmengen $U := S^n \setminus \{N\}$ und $V := S^n \setminus \{S\}$. Nach Beispiel I.1.25 ist $\pi_1(U, x_0) = 0$, es genügt daher zu zeigen, dass die von der kanonischen Inklusion $\iota : (U, x_0) \rightarrow (S^n, x_0)$ induzierte Abbildung $\iota_* : \pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(S^n, x_0)$ surjektiv ist. Sei dazu $f : I \rightarrow S^n$ eine Schleife bei x_0 . Es ist zu zeigen, dass f homotop relativ Endpunkten zu einer Schleife in U ist. Da $\{U, V\}$ eine offene Überdeckung von S^n ist, bilden auch die beiden Mengen $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ eine offene Überdeckung des Intervalls I . Da I kompakt ist, existieren $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1$, sodass für jedes $i = 1, \dots, m$ entweder $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U$ oder $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq V$ gilt, siehe Lemma I.1.28 unten. Durch Weglassen gewisser s_i können wir erreichen, dass $f(s_i) \neq N$, für jedes $0 \leq i \leq m$, denn ist $f(s_i) = N$ dann muss $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq V$ und $f([s_i, s_{i+1}]) \subseteq V$ gelten. Betrachte die reparametrisierten Einschränkungen $f_i : I \rightarrow S^n$, $f_i(s) := f((1-s)s_{i-1} + ss_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$. Nach Beispiel I.1.3 gilt dann $f \simeq f_1 f_2 \dots f_m$, wobei wir wieder auf die Klammersetzung verzichten, da sie für die Aussage unwesentlich ist, vgl. Lemma I.1.6. Es genügt nun zu zeigen, dass jedes f_i homotop relativ Endpunkten zu einem Weg in U ist, denn dann ist auch f homotop relativ Endpunkten zu einer Schleife in U , siehe Lemma I.1.5. Für die i mit $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U$ ist nichts zu zeigen. Betrachten wir also ein i mit $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq V$, dh. $f_i(I) \subseteq V$. Die stereographische Projektion $\varphi_S : \mathbb{R}^n = S^\perp \rightarrow S^n \setminus \{S\} = V$ aus Beispiel I.1.25 ist ein Homöomorphismus mit $\varphi_S(0) = N$. Also ist $\varphi_S^{-1} \circ f_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg in \mathbb{R}^n und es gilt $(\varphi_S^{-1} \circ f_i)(0) \neq 0 \neq (\varphi_S^{-1} \circ f_i)(1)$, denn $f(s_i) \neq N$. Da $n \geq 2$ finden wir einen Weg $g_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $g_i(0) = (\varphi_S^{-1} \circ f_i)(0)$ und $g_i(1) = (\varphi_S^{-1} \circ f_i)(1)$. Nach Konstruktion ist $\varphi_S \circ g_i$ ein Weg in $V \setminus \{N\} \subseteq U$. Da \mathbb{R}^n einfach zusammenhängend ist, sind die beiden Wege $\varphi_S^{-1} \circ f_i$ und g_i homotop relativ Endpunkten in \mathbb{R}^n , siehe Proposition I.1.21, also sind auch f_i und $\varphi_S \circ g_i$ homotop relativ Endpunkten in $V \subseteq S^n$. \square

I.1.27. BEISPIEL. Für $n_i \geq 2$ ist $S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}$ einfach zusammenhängend, siehe Satz I.1.26 und Beispiel I.1.24

³Unter *der* stereographischen Projektion wird üblicherweise die stereographische Projektion mit Pol $P = N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ verstanden.

Im Beweis von Satz I.1.26 haben wir von der Lebesguesche Überdeckungszahl Gebrauch gemacht, und wollen daher dieses elementare Resultat kurz wiederholen.

I.1.28. LEMMA (Überdeckungszahl von Lebesgue). *Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodass jeder Ball mit Radius ε zur Gänze in einer der Überdeckungsmengen von \mathcal{U} enthalten ist. Genauer, für jedes $x \in X$ existiert $U \in \mathcal{U}$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq U$, wobei $B_\varepsilon(x) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$ den offenen Ball mit Mittelpunkt x und Radius ε bezeichnet.*

BEWEIS. Da \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X bildet, existiert zu jedem $x \in X$ ein $r_x > 0$ und $U_x \in \mathcal{U}$ mit $B_{2r_x}(x) \subseteq U_x$. Die Bälle $B_{r_x}(x)$ bilden eine offene Überdeckung von X . Wegen der Kompaktheit von X überdecken schon endlich viele davon ganz X , dh. $B_{r_{x_1}}(x_1) \cup \dots \cup B_{r_{x_n}}(x_n) = X$ für gewisse $x_1, \dots, x_n \in X$. Wir zeigen nun, dass $\varepsilon := \min\{r_{x_1}, \dots, r_{x_n}\} > 0$ die gewünschte Eigenschaft besitzt. Sei dazu $x \in X$. Wähle $1 \leq i \leq n$ mit $x \in B_{r_i}(x_i)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt $B_{r_i}(x) \subseteq B_{2r_i}(x_i)$, und daher $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{r_i}(x) \subseteq B_{2r_i}(x_i) \subseteq U_{x_i}$. Also liegt $B_\varepsilon(x)$ zur Gänze in der Überdeckungsmenge U_{x_i} . \square

I.2. Die Fundamentalgruppe des Kreises. Wir wollen in diesem Abschnitt die Fundamentalgruppe von $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ bestimmen. Als Basispunkt verwenden wir $x_0 := 1 \in S^1$. Für $n \in \mathbb{Z}$ betrachten wir den Weg

$$\omega_n : I \rightarrow S^1, \quad \omega_n(s) := e^{2\pi i n s} = \cos(2\pi n s) + \mathbf{i} \sin(2\pi n s). \quad (\text{I.2})$$

Da $\omega_n(0) = \omega_n(1) = 1$ ist jedes ω_n eine Schleife bei $1 \in S^1$ und definiert daher eine Homotopieklasse $[\omega_n] \in \pi_1(S^1, 1)$.

I.2.1. SATZ. *Die Abbildung $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$, $\phi(n) := [\omega_n]$, siehe (I.2), ist ein Isomorphismus von Gruppen, $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.*

I.2.2. BEISPIEL. Für $k \in \mathbb{Z}$ betrachte die Basispunkt erhaltende Abbildung $p_k : (S^1, 1) \rightarrow (S^1, 1)$, $p_k(z) := z^k$. Wir wollen nun den induzierten Homomorphismus $(p_k)_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ bestimmen. Genauer wollen wir zeigen, dass nebenstehendes Diagramm kommutiert, wobei $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ den Isomorphismus aus Satz I.2.1 bezeichnet und $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot k} \mathbb{Z}$ der durch Multiplikation mit k gegebene Gruppenhomomorphismus ist. Tatsächlich ist $(p_k \circ \omega_n)(s) = (e^{2\pi i n s})^k = e^{2\pi i k n s} = \omega_{kn}(s)$, vgl. (I.2), und daher $(p_k)_*(\phi(n)) = (p_k)_*([\omega_n]) = [p_k \circ \omega_n] = [\omega_{kn}] = \phi(kn)$. Beachte, dass p_1 und p_{-1} beides Homöomorphismen sind, die induzierten Homomorphismen $(p_1)_*$ und $(p_{-1})_*$ aber nicht übereinstimmen.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow[\cong]{\phi} & \pi_1(S^1, 1) \\ \downarrow \cdot k & & \downarrow (p_k)_* \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow[\cong]{\phi} & \pi_1(S^1, 1) \end{array}$$

Für den Beweis von Satz I.2.1 betrachten wir die Abbildung

$$p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, \quad p(s) := e^{2\pi i s}. \quad (\text{I.3})$$

Drei Eigenschaften von p werden wesentlich in den Beweis von Satz I.2.1 eingehen. Erstens ist der Definitionsbereich \mathbb{R} einfach zusammenhängend, siehe Beispiel I.1.23, weiters ist $p^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ und schließlich hat p die sogenannte Homotopieliftungseigenschaft.

I.2.3. PROPOSITION (Homotopieliftungseigenschaft). *Es seien $H : Y \times I \rightarrow S^1$ und $\tilde{h} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $p \circ \tilde{h} = H_0$. Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$.⁴*

I.2.4. BEMERKUNG. Bezeichnen wir mit $\iota_0 : Y \rightarrow Y \times I$, $\iota_0(y) := (y, 0)$, die Inklusion bei 0, so lässt sich die Aussage von Proposition I.2.3 schön an nebenstehenden Diagramm veranschaulichen. Die Voraussetzung in Proposition I.2.3 besagt gerade, dass das äußere Quadrat kommutiert, dh. die Komposition $p \circ \tilde{h}$ stimmt mit der Komposition $H \circ \iota_0$ überein. Die Konklusion von Proposition I.2.3 besagt nun, dass eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, die die beiden Dreiecke kommutativ macht, dh. die Komposition $\tilde{H} \circ \iota_0$ stimmt mit \tilde{h} überein, und $p \circ \tilde{H}$ stimmt mit H überein.

$$\begin{array}{ccc}
 Y & \xrightarrow{\tilde{h}} & \mathbb{R} \\
 \iota_0 \downarrow & \nearrow \exists! \tilde{H} & \downarrow p \\
 Y \times I & \xrightarrow{H} & S^1
 \end{array}$$

I.2.5. BEMERKUNG. Sind $f : X \rightarrow S^1$ und $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Abbildungen mit $p \circ \tilde{f} = f$, dann wird \tilde{f} ein *Lift* von f genannt. In diesem Fall sagen wir auch f kann über p zu einer stetigen Abbildung \tilde{f} geliftet werden. Nicht jede Abbildung lässt sich stetig über p liften, etwa besitzt die identische Abbildung $\text{id}_{S^1} : S^1 \rightarrow S^1$ keinen stetigen Lift, siehe Satz I.2.1. Existiert ein Lift \tilde{f} von f , dann ist dieser nicht eindeutig, denn durch Translation mit ganzen Zahlen erhalten wir unendlich viele weitere Lifte.

Wir verschieben den Beweis von Proposition I.2.3 und betrachten zunächst die folgenden beiden Spezialfälle: $Y = \{*\}$, der einpunktige Raum, sowie $Y = I$, siehe die Propositionen I.2.6 und I.2.8 unten.

I.2.6. PROPOSITION. *Es sei $f : I \rightarrow S^1$ ein Weg und $\tilde{x} \in \mathbb{R}$ mit $p(\tilde{x}) = f(0)$. Dann existiert genau ein Weg $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$.*

BEWEIS. Wenden wir Proposition I.2.3 auf den einpunktigen Raum $Y := \{*\}$, die Abbildung $\tilde{h} : \{*\} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{h}(*) := \tilde{x}$, und $H : \{*\} \times I \rightarrow S^1$, $H(*, t) := f(t)$, an so erhalten wir eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{H} : \{*\} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ die $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$ erfüllt. Offensichtlich hat dann $\tilde{f}(t) := \tilde{H}(*, t)$ alle gewünschten Eigenschaften. \square

I.2.7. BEISPIEL. Für die Wege $\tilde{\omega}_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\omega}_n(s) := ns$, $n \in \mathbb{Z}$, gilt $\tilde{\omega}_n(0) = 0$, $\tilde{\omega}_n(1) = n$ und $p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$. Insbesondere ist $\tilde{\omega}_n$ ein Lift von ω_n , siehe (I.2).

⁴Ist $G : Y \times I \rightarrow X$ eine Abbildung und $t \in I$ so schreiben wir $G_t : Y \rightarrow X$ für die durch $G_t(y) := G(y, t)$ definierte Abbildung. In dieser Proposition also $H_0(y) := H(y, 0)$ und $\tilde{H}_0(y) := \tilde{H}(y, 0)$.

Beachte, dass $\tilde{\omega}_n$ nur für $n = 0$ geschlossen ist. Wir werden die Wege $\tilde{\omega}_n$ auch im Beweis von Satz I.2.1 unten verwenden.

I.2.8. PROPOSITION. *Es sei $\tilde{h} : I \rightarrow \mathbb{R}$ ein Weg und $H : I \times I \rightarrow S^1$ eine Homotopie von Wegen mit $H_0 = p \circ \tilde{h}$. Dann existiert eine eindeutige Homotopie von Wegen $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$.*

BEWEIS. Wenden wir Proposition I.2.3 mit $Y := I$ an, so erhalten wir eine eindeutige stetige Abbildung $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$. Es ist noch zu zeigen, dass \tilde{H} eine Homotopie relativ Endpunkten ist. Für $i = 0, 1$ betrachten wir dazu den Weg $\tilde{\sigma}_i : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\sigma}_i(t) := \tilde{H}(i, t)$. Aus $p \circ \tilde{H} = H$ folgt $(p \circ \tilde{\sigma}_i)(t) = H(i, t)$ und dies ist konstant in t , da H eine Homotopie von Wegen ist. Aus $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$ erhalten wir weiters $\tilde{\sigma}_i(0) = \tilde{H}(i, 0) = \tilde{h}(i)$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition I.2.6 folgt daher, dass $\tilde{\sigma}_i$ mit dem konstanten Weg $c_{\tilde{h}(i)}$ übereinstimmen muss. Also ist \tilde{H} tatsächlich eine Homotopie von Wegen. \square

BEWEIS VON SATZ I.2.1. *Zur Surjektivität von ϕ :* Sei $f : I \rightarrow S^1$ eine Schleife bei $1 \in S^1$. Zu zeigen ist, dass $n \in \mathbb{Z}$ mit $\phi(n) = [f]$ existiert. Nach Proposition I.2.6, und da $p(0) = 1$, existiert ein Weg $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(0) = 0$. Da $p(\tilde{f}(1)) = f(1) = 1$, und weil $p^{-1}(1) = \mathbb{Z}$, muss $\tilde{f}(1)$ ganzzahlig sein, $n := \tilde{f}(1) \in \mathbb{Z}$. Beobachte nun, dass \tilde{f} und $\tilde{\omega}_n$ aus Beispiel I.2.7 beides Wege in \mathbb{R} sind die bei 0 starten und bei n enden. Aus dem einfachen Zusammenhang von \mathbb{R} , siehe Beispiel I.1.23, und Proposition I.1.21 erhalten wir eine Homotopie von Wegen $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ von $\tilde{H}_0 = \tilde{\omega}_n$ nach $\tilde{H}_1 = \tilde{f}$. Es ist dann $H := p \circ \tilde{H} : I \times I \rightarrow S^1$ eine Homotopie von Wegen von $H_0 = p \circ \tilde{H}_0 = p \circ \tilde{\omega}_n = \omega_n$ nach $H_1 = p \circ \tilde{H}_1 = p \circ \tilde{f} = f$. Daher gilt $\phi(n) = [\omega_n] = [f]$.

Zur Injektivität von ϕ : Seien also $m, n \in \mathbb{Z}$ und $\phi(m) = \phi(n)$. Zu zeigen ist $n = m$. Da $\phi(m) = \phi(n)$ existiert eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \rightarrow S^1$ von $H_0 = \omega_m$ nach $H_1 = \omega_n$. Nach Proposition I.2.8, und da $p \circ \tilde{\omega}_m = \omega_m$, existiert eine Homotopie von Wegen $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{\omega}_m$. Da \tilde{H} die Endpunkte fixiert gilt insbesondere $\tilde{H}_1(0) = \tilde{H}_0(0) = \tilde{\omega}_m(0) = 0$ und $\tilde{H}_1(1) = \tilde{H}_0(1) = \tilde{\omega}_m(1) = m$. Weiters ist $p \circ \tilde{H}_1 = H_1 = \omega_n$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition I.2.6 folgt daher $\tilde{H}_1 = \tilde{\omega}_n$, und wir erhalten $m = \tilde{H}_1(1) = \tilde{\omega}_n(1) = n$.

Zur Homomorphismus Eigenschaft von ϕ : Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Es ist zu zeigen $\phi(m+n) = \phi(m)\phi(n)$. Betrachte dazu die Translation $\tau_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau_m(s) := m+s$. Dann ist $\tilde{\omega}_m(\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$ ein Weg in \mathbb{R} der bei 0 startet und bei $m+n$ endet. Auch $\tilde{\omega}_{m+n}$ ist ein Weg von 0 nach $m+n$. Da \mathbb{R} einfach zusammenhängend ist, existiert eine Homotopie von Wegen $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \mathbb{R}$ von $\tilde{H}_0 = \tilde{\omega}_{m+n}$ nach $\tilde{H}_1 = \tilde{\omega}_m(\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)$, siehe Proposition I.1.21. Es ist daher $H := p \circ \tilde{H} : I \times I \rightarrow S^1$ eine Homotopie von Wegen von $H_0 = p \circ \tilde{H}_0 = p \circ \tilde{\omega}_{m+n} = \omega_{m+n}$ nach $H_1 = p \circ \tilde{H}_1 = p \circ (\tilde{\omega}_m(\tau_m \circ \tilde{\omega}_n)) = (p \circ \tilde{\omega}_m)(p \circ \tau_m \circ \tilde{\omega}_n) = (p \circ \tilde{\omega}_m)(p \circ \tilde{\omega}_n) = \omega_m \omega_n$. Es gilt daher $\omega_{m+n} \simeq \omega_m \omega_n$, also $\phi(m+n) = [\omega_{m+n}] = [\omega_m \omega_n] = [\omega_m][\omega_n] = \phi(m)\phi(n)$. \square

Es bleibt schließlich noch Proposition I.2.3 zu beweisen. Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen. Für den Rest des Abschnitts seien $H : Y \times I \rightarrow S^1$ und $\tilde{h} : Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $p \circ \tilde{h} = H_0$ wie in Proposition I.2.3.

I.2.9. LEMMA (Überlagerungseigenschaft). *Es existieren offene Teilmengen $U_\alpha \subseteq S^1$ und offene Teilmengen $\tilde{U}_\alpha^j \subseteq \mathbb{R}$, $\alpha \in \{0, 1\}$, $j \in \mathbb{Z}$, mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $U_0 \cup U_1 = S^1$.
- (ii) $p^{-1}(U_\alpha) = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \tilde{U}_\alpha^j$.
- (iii) $\tilde{U}_\alpha^j \cap \tilde{U}_\alpha^k = \emptyset$, falls $j \neq k$.
- (iv) $p|_{\tilde{U}_\alpha^j} : \tilde{U}_\alpha^j \rightarrow U_\alpha$ ist ein Homöomorphismus.

BEWEIS. Setzen wir $U_0 := S^1 \setminus \{1\}$ und $U_1 := S^1 \setminus \{-1\}$, so ist $\{U_0, U_1\}$ eine offene Überdeckung von S^1 , und es gilt $p^{-1}(U_0) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sowie $p^{-1}(U_1) = \mathbb{R} \setminus (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$. Die Intervalle $\tilde{U}_0^j := (j, j+1)$ und $\tilde{U}_1^j := (j - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2})$, $j \in \mathbb{Z}$, haben dann die gewünschten Eigenschaften. \square

I.2.10. LEMMA. *Zu jedem Punkt $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung N von y , $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$, sodass für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt $H(N \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_{\alpha_i}$.*

BEWEIS. Sei also $y \in Y$ fix. Zu jedem $s \in I$ existiert $\alpha_s \in \{0, 1\}$ mit $H(y, s) \in U_{\alpha_s}$, siehe Lemma I.2.9(i). Da H stetig ist, finden wir zu jedem $s \in I$ eine offene Umgebung N_s von y und eine offene Umgebung J_s von s mit $H(N_s \times J_s) \subseteq U_{\alpha_s}$. Klarerweise bildet $\{J_s\}_{s \in I}$ eine offene Überdeckung von I . Da I kompakt ist, existieren $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und $s_1, \dots, s_n \in I$ mit $[t_{i-1}, t_i] \subseteq J_{s_i}$, $1 \leq i \leq n$, siehe Lemma I.1.28. Betrachte nun die offene Umgebung $N := \bigcap_{i=1}^n N_{s_i}$ von y . Für $1 \leq i \leq n$ gilt dann $H(N \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq H(N_{s_i} \times J_{s_i}) \subseteq U_{\alpha_{s_i}}$. Mit $\alpha_i := \alpha_{s_i}$ folgt daher die Behauptung. \square

I.2.11. LEMMA. *Zu jedem $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung V von y und eine stetige Abbildung $\tilde{G} : V \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{G} = H|_{V \times I}$ und $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_V$.*

BEWEIS. Sei also $y \in Y$ fix. Nach Lemma I.2.10 existieren eine offene Umgebung N von y , $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{0, 1\}$, sodass

$$H(N \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_{\alpha_i} \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{I.4})$$

Wegen (I.4) und $p \circ \tilde{h} = H_0$ ist $p(\tilde{h}(y)) = H_{t_0}(y) \in U_{\alpha_1}$, also existiert $j_1 \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{h}(y) \in \tilde{U}_{\alpha_1}^{j_1}$, siehe Lemma I.2.9(ii). Betrachte die offene Umgebung $V^1 := N \cap \tilde{h}^{-1}(\tilde{U}_{\alpha_1}^{j_1})$ von y und die Abbildung

$$\tilde{G}^1 : V^1 \times [t_0, t_1] \rightarrow \tilde{U}_{\alpha_1}^{j_1} \subseteq \mathbb{R}, \quad \tilde{G}^1 := (p|_{\tilde{U}_{\alpha_1}^{j_1}})^{-1} \circ H|_{V^1 \times [t_0, t_1]}.$$

Nach (I.4) und Lemma I.2.9(iv) ist \tilde{G}^1 wohldefiniert und stetig. Offensichtlich gilt $p \circ \tilde{G}^1 = H|_{V^1 \times [t_0, t_1]}$. Aus $H_0 = p \circ \tilde{h}$ erhalten wir $p \circ \tilde{G}_{t_0}^1 = H_{t_0}|_{V^1} = p \circ \tilde{h}|_{V^1}$, und da p auf $\tilde{U}_{\alpha_1}^{j_1}$ injektiv ist folgt $\tilde{G}_{t_0}^1 = \tilde{h}|_{V^1}$.

Wegen (I.4) und $p \circ \tilde{G}^1 = H|_{V^1 \times [t_0, t_1]}$ ist $p(\tilde{G}_{t_1}(y)) = H_{t_1}(y) \in U_{\alpha_2}$, also existiert $j_2 \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{G}_{t_1}^1(y) \in \tilde{U}_{\alpha_2}^{j_2}$, siehe Lemma I.2.9(ii). Betrachte die offene Umgebung $V^2 := V^1 \cap (\tilde{G}_{t_1}^1)^{-1}(\tilde{U}_{\alpha_2}^{j_2})$ von y und die Abbildung

$$\tilde{G}^2 : V^2 \times [t_1, t_2] \rightarrow \tilde{U}_{\alpha_2}^{j_2} \subseteq \mathbb{R}, \quad \tilde{G}^2 := (p|_{\tilde{U}_{\alpha_2}^{j_2}})^{-1} \circ H|_{V^2 \times [t_1, t_2]}.$$

Nach (I.4) und Lemma I.2.9(iv) ist \tilde{G}^2 wohldefiniert und stetig. Offensichtlich gilt $p \circ \tilde{G}^2 = H|_{V^2 \times [t_1, t_2]}$. Es folgt $p \circ \tilde{G}_{t_1}^2 = H_{t_1}|_{V^2} = p \circ \tilde{G}_{t_1}^1|_{V^2}$, und da p auf $\tilde{U}_{\alpha_2}^{j_2}$ injektiv ist, erhalten wir $\tilde{G}_{t_1}^2 = \tilde{G}_{t_1}^1|_{V^1}$.

Induktiv fortfahrend erhalten wir offene Umgebungen $V^1 \supseteq V^2 \supseteq \dots \supseteq V^n$ von y und stetige Abbildungen $\tilde{G}^i : V^i \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \subseteq \tilde{U}_{\alpha_i}^{j_i} \subseteq \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, sodass

$$p \circ \tilde{G}^i = H|_{V^i \times [t_{i-1}, t_i]}, \quad \tilde{G}_{t_0}^1 = \tilde{h}|_{V^1} \quad \text{und} \quad \tilde{G}_{t_{i-1}}^i = \tilde{G}_{t_{i-1}}^{i-1}|_{V^i} \quad \text{für } i = 2, \dots, n.$$

Betrachte nun die offene Umgebung $V := V^n$ von y und definiere eine Abbildung $\tilde{G} : V \times I \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\tilde{G}|_{V \times [t_{i-1}, t_i]} := \tilde{G}^i|_{V \times [t_{i-1}, t_i]}$. Da $\tilde{G}_{t_{i-1}}^i|_V = \tilde{G}_{t_{i-1}}^{i-1}|_V$ ist dies wohldefiniert. Aus der Stetigkeit von $\tilde{G}^i|_{V \times [t_{i-1}, t_i]}$ und Lemma I.1.2 folgt, dass \tilde{G} stetig ist. Aus $p \circ \tilde{G}^i = H|_{V^i \times [t_{i-1}, t_i]}$ erhalten wir $p \circ \tilde{G} = H|_{V \times I}$. Schließlich folgt aus $\tilde{G}_{t_0}^1 = \tilde{h}|_{V^1}$ auch $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_V$. Also hat \tilde{G} alle gewünschten Eigenschaften. \square

I.2.12. LEMMA. *Sind $\tilde{f}, \tilde{g} : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Wege mit $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$ und $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$, dann gilt $\tilde{f} = \tilde{g}$.*

BEWEIS. Wir betrachten die Menge $Z := \{s \in I : \tilde{f}(s) = \tilde{g}(s)\}$. Da \tilde{f} und \tilde{g} beide stetig sind, ist Z eine abgeschlossene Teilmenge von I . Da $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$ ist $0 \in Z$, also $Z \neq \emptyset$. Wir werden unten zeigen, dass Z auch offen in I ist. Aus dem Zusammenhang von I folgt dann $Z = I$, also $\tilde{f} = \tilde{g}$. Um die Offenheit von I zu zeigen, sei $s \in Z$. Nach Lemma I.2.9 existieren $\alpha \in \{0, 1\}$ und $j \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{f}(s) = \tilde{g}(s) \in \tilde{U}_{\alpha}^j$. Betrachte die offene Umgebung $W := \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}_{\alpha}^j) \cap \tilde{g}^{-1}(\tilde{U}_{\alpha}^j)$ von s . Da $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$, und da $p|_{\tilde{U}_{\alpha}^j} : \tilde{U}_{\alpha}^j \rightarrow U_{\alpha}$ injektiv ist, siehe Lemma I.2.9(iv), erhalten wir $\tilde{f}|_W = \tilde{g}|_W$. Also ist $W \subseteq Z$ und daher Z offen in I . \square

BEWEIS VON PROPOSITION I.2.3. Nach Lemma I.2.11 existiert zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung V^y von y und eine stetige Abbildung $\tilde{G}^y : V^y \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{G}^y = H|_{V^y \times I}$ und $\tilde{G}_0^y = \tilde{h}|_{V^y}$. Sind $y_1, y_2 \in Y$, so stimmen die Abbildungen \tilde{G}^{y_1} und \tilde{G}^{y_2} auf $(V^{y_1} \cap V^{y_2}) \times I$ überein, denn ist $y \in V^{y_1} \cap V^{y_2}$ dann gilt für die Wege $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(t) := \tilde{G}^{y_1}(y, t)$, und $\tilde{g} : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g}(t) := \tilde{G}^{y_2}(y, t)$ sowohl $(p \circ \tilde{f})(t) = H(y, t) = (p \circ \tilde{g})(t)$, $t \in I$, als auch $\tilde{f}(0) = \tilde{h}(y) = \tilde{g}(0)$, und daher $\tilde{G}^{y_1}(y, t) = \tilde{f}(t) = \tilde{g}(t) = \tilde{G}^{y_2}(y, t)$ für alle $t \in I$, siehe Lemma I.2.12. Wir erhalten daher eine Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\tilde{H}|_{V^y \times I} = \tilde{G}^y$, für jedes $y \in Y$. Da die Einschränkung von \tilde{H} auf jede der offenen Mengen $V^y \times I$ stetig ist, muss \tilde{H} stetig sein. Aus $p \circ \tilde{G}^y = H|_{V^y \times I}$ erhalten wir $p \circ \tilde{H} = H$. Schließlich folgt aus $\tilde{G}_0^y = \tilde{h}|_{V^y}$ auch $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$. Damit ist die Existenz der Abbildung \tilde{H} in Proposition I.2.3 gezeigt. Es bleibt noch die Eindeutigkeit zu verifizieren. Seien dazu

$\tilde{H}^1, \tilde{H}^2 : Y \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{H}^1 = H = p \circ \tilde{H}^2$ und $\tilde{H}_0^1 = \tilde{h} = \tilde{H}^2$. Zu $y \in Y$ betrachten wir die Wege $\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{f}(t) := \tilde{H}^1(y, t)$, und $\tilde{g} : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g}(t) := \tilde{H}^2(y, t)$. Dann gilt $(p \circ \tilde{f})(t) = H(y, t) = (p \circ \tilde{g})(t)$, $t \in I$, sowie $\tilde{f}(0) = \tilde{h}(y) = \tilde{g}(0)$. Aus Lemma I.2.12 folgt daher $\tilde{H}^1(y, t) = \tilde{f}(t) = \tilde{g}(t) = \tilde{H}^2(y, t)$ für alle $t \in I$, also stimmen \tilde{H}^1 und \tilde{H}^2 überein. \square

Damit ist der Beweis von Satz I.2.1 vollständig. Im Rest dieses Abschnitts wollen wir noch einige Anwendungen besprechen.

I.2.13. BEISPIEL. Für $P \in \mathbb{R}^n$ ist $\varphi : S^{n-1} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{P\}$, $\varphi(x, t) := P + tx$, ein Homöomorphismus. Mit Hilfe von Satz I.1.26 und Proposition I.1.17 sehen wir, dass $\mathbb{R}^n \setminus \{P\}$ einfach zusammenhängend ist, falls $n \geq 3$. Im Fall $n = 2$ gilt $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}) \cong \mathbb{Z}$ nach Satz I.2.1 und Proposition I.1.17. Genauer, und für $P = 0$, sehen wir, dass die Inklusion $\iota : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ einen Isomorphismus $\iota_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{C}^\times)$ induziert. Im Fall $n = 1$ ist $\mathbb{R}^1 \setminus \{P\}$ nicht (weg)zusammenhängend, also auch nicht einfach zusammenhängend.

I.2.14. SATZ. \mathbb{R}^2 ist nicht homöomorph zu \mathbb{R}^n , $2 \neq n$.

BEWEIS. Sei also $\varphi : \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus. Wähle einen Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ und setze $Q := \varphi(P) \in \mathbb{R}^n$. Die Einschränkung von φ liefert einen Homöomorphismus $\varphi|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}} : \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n \setminus \{Q\}$. Ist $n = 0$, so erhalten wir einen Widerspruch, denn $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \neq \emptyset$ aber $\mathbb{R}^0 \setminus \{Q\} = \emptyset$. Auch im Fall $n = 1$ erhalten wir einen Widerspruch, denn $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ ist wegzusammenhängend, aber $\mathbb{R}^1 \setminus \{Q\}$ ist nicht wegzusammenhängend. Schließlich führt auch der Fall $n > 2$ auf einen Widerspruch, denn $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$ ist nicht einfach zusammenhängend, während $\mathbb{R}^n \setminus \{Q\}$ sehr wohl einfach zusammenhängend ist, siehe Beispiel I.2.13. Es muss daher $n = 2$ sein. \square

I.2.15. BEMERKUNG. Es gilt allgemein $\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$, falls $m \neq n$. Wir werden dies später zeigen, die Fundamentalgruppe reicht hierfür nicht aus. Es ist übrigens leicht zu sehen, dass \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n nur dann *diffeomorph* sein können, wenn $m = n$ gilt. Ist nämlich $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Diffeomorphismus und $x_0 \in \mathbb{R}^m$ beliebig, dann folgt aus der Kettenregel, dass die Jacobimatrix $D_{x_0}\varphi$ einen linearen Isomorphismus zwischen \mathbb{R}^m und \mathbb{R}^n liefert, und dies ist natürlich nur für $m = n$ möglich.

I.2.16. BEISPIEL. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $T^n := S^1 \times \cdots \times S^1$ den n -dimensionalen Torus. Aus Proposition I.1.17 und Satz I.2.1 folgt $\pi_1(T^n) \cong \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$. Ein expliziter Isomorphismus ist durch $\phi_n : \mathbb{Z}^n \rightarrow \pi_1(T^n, x_n)$, $\phi_n(k) := [\omega_k]$, gegeben. Hierbei bezeichnet $\omega_k : I \rightarrow T^n$ den Weg $\omega_k(s) := (e^{2\pi i k_1 s}, \dots, e^{2\pi i k_n s})$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, und als Basispunkt verwenden wir $x_n := (1, \dots, 1) \in T^n$. Insbesondere sehen wir, dass S^2 nicht homöomorph zu T^2 sein kann, denn die Fundamentalgruppen $\pi_1(S^2) = 0$ und $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$ sind nicht isomorph, siehe Satz I.1.26 und Proposition I.1.14. Etwas allgemeiner sehen wir, dass S^n und T^n nicht homöomorph sind, $n \geq 2$.

I.2.17. BEISPIEL. Auf \mathbb{R}^n betrachte die Äquivalenzrelation $x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^n : y = x + k$. Die Abbildung $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$, $p(x_1, \dots, x_n) := (e^{2\pi i x_1}, \dots, e^{2\pi i x_n})$ induziert einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n / \sim \cong T^n$. Wir können den Torus daher auch als Quotient von \mathbb{R}^n verstehen. Mit $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ bezeichnen wir die Menge aller ganzzahligen $(m \times n)$ -Matrizen. Jedes $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$ definiert eine stetige (lineare) Abbildung $\tilde{\mu}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{\mu}_A(x) := Ax$. Beachte, dass aus $x \sim y$ auch $\tilde{\mu}_A(x) \sim \tilde{\mu}_A(y)$ folgt. Daher faktorisiert $\tilde{\mu}_A$ zu einer stetigen Abbildung $\mu_A : T^n \rightarrow T^m$, $p \circ \tilde{\mu}_A = \mu_A \circ p$. Beachte auch, dass μ_A Basispunkt erhaltend ist, $\mu_A : (T^n, x_n) \rightarrow (T^m, x_m)$. Wir wollen nun die induzierten Gruppenhomomorphismen $(\mu_A)_* : \pi_1(T^n, x_n) \rightarrow \pi_1(T^m, x_m)$ bestimmen. Genauer wollen wir zeigen, dass $(\mu_A)_*(\phi_n(k)) = \phi_m(Ak)$ gilt, $k \in \mathbb{Z}^n$, wobei ϕ den Isomorphismus aus Beispiel I.2.16 bezeichnet. In anderen Worten, wir wollen zeigen, dass das nebenstehende Diagramm kommutiert. Für $k \in \mathbb{Z}^n$ betrachten wir den Weg $\tilde{\omega}_k : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{\omega}_k(s) := sk$. Offensichtlich gilt dann $p \circ \tilde{\omega}_k = \omega_k$, wobei $\omega_k : I \rightarrow T^n$ den Weg aus Beispiel I.2.16 bezeichnet. Weiteres haben wir die Relation $\tilde{\mu}_A \circ \tilde{\omega}_k = \tilde{\omega}_{Ak}$. Wir erhalten daraus $\mu_A \circ \omega_k = \mu_A \circ p \circ \tilde{\omega}_k = p \circ \tilde{\mu}_A \circ \tilde{\omega}_k = p \circ \tilde{\omega}_{Ak} = \omega_{Ak}$, also $(\mu_A)_*(\phi_n(k)) = (\mu_A)_*([\omega_k]) = [\mu_A \circ \omega_k] = [\omega_{Ak}] = \phi_m(Ak)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow[\cong]{\phi_n} & \pi_1(T^n, x_0) \\ \downarrow A & & \downarrow (\mu_A)_* \\ \mathbb{Z}^m & \xrightarrow[\cong]{\phi_m} & \pi_1(T^m, x_0) \end{array}$$

Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt *Retrakt* von X , falls eine stetige Abbildung $r : X \rightarrow A$ existiert mit $r(x) = x$ für alle $x \in A$. Jede solche Abbildung r wird *Retraktion von X auf A* genannt. Eine Retraktion ist also nichts anderes als eine stetige *Linksinverse* der kanonischen Inklusion $\iota : A \rightarrow X$, dh. $r \circ \iota = \text{id}_A$.

I.2.18. PROPOSITION. *Es sei A ein Retrakt von X , und $x_0 \in A$. Dann ist der von der kanonischen Inklusion $\iota : (A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ induzierte Homomorphismus $\iota_* : \pi_1(A, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ injektiv.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert eine Retraktion $r : X \rightarrow A$, dh. $r \circ \iota = \text{id}_A$. Insbesondere gilt $r(x_0) = x_0$, wir können daher r als Abbildung punktierter Räume $r : (X, x_0) \rightarrow (A, x_0)$ auffassen. Aus Proposition I.1.13 erhalten wir $r_* \circ \iota_* = (r \circ \iota)_* = (\text{id}_{(A, x_0)})_* = \text{id}_{\pi_1(A, x_0)}$, also muss ι_* injektiv sein. \square

I.2.19. SATZ. *S^1 ist nicht Retrakt von D^2 , dh. es gibt keine stetige Abbildung $r : D^2 \rightarrow S^1$ mit $r(x) = x$ für alle $x \in S^1$.*

BEWEIS. Als konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^2 ist D^2 einfach zusammenhängend, siehe Beispiel I.1.23, also $\pi_1(D^2) = 0$. Nach Satz I.2.1 gilt $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Es kann daher keine injektive Abbildung $\pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(D^2)$ existieren. Aus Proposition I.2.18 folgt nun, dass S^1 nicht Retrakt von D^2 sein kann. \square

I.2.20. BEMERKUNG. Die Aussage von Satz I.2.19 bleibt in beliebigen Dimensionen richtig, S^{n-1} ist nicht Retrakt von D^n , $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ ist dies trivial,

denn jede stetige Abbildung von $D^1 = [-1, 1]$ nach $S^0 = \{-1, 1\}$ muss konstant sein. Den Fall $n > 2$ werden wir später behandeln, die Fundamentalgruppe reicht hierfür nicht aus. Wir wollen hier noch einen differentialtopologischen Beweis dieser Aussage skizzieren. Wir nehmen indirekt an es wäre $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ eine Retraktion, $r \circ \iota = \text{id}_{S^{n-1}}$. Wir können r durch eine glatte Retraktion approximieren, dürfen daher o.B.d.A. annehmen, dass r eine glatte Abbildung ist. Nach dem Satz von Sard existiert ein regulärer Wert $x_0 \in S^{n-1}$. Nach dem impliziten Funktionensatz ist $M := r^{-1}(x_0)$ eine kompakte glatte 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von D^n mit Rand $\partial M = M \cap S^{n-1}$. Aus $r \circ \iota = \text{id}_{S^{n-1}}$ folgt $M \cap S^{n-1} = \{x_0\}$, also hat M genau einen Randpunkt. Andererseits ist jede kompakte 1-dimensionale Mannigfaltigkeit zu einer endlichen disjunkten Vereinigung $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \sqcup I \sqcup \dots \sqcup I$ diffeomorph und muss daher eine gerade Anzahl von Randpunkten besitzen. Wir erhalten einen Widerspruch, es kann also keine solche Retraktion r geben. Derselbe Beweis zeigt, dass der Rand ∂N einer kompakten glatten Mannigfaltigkeit mit Rand N nicht Retrakt von N sein kann.

I.2.21. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $f : D^2 \rightarrow D^2$ besitzt einen Fixpunkt.*

BEWEIS. Indirekt angenommen $f : D^2 \rightarrow D^2$ hätte keinen Fixpunkt. Dann können wir eine stetige Abbildung $r : D^2 \rightarrow S^1$ definieren, indem wir $x \in D^2$ den eindeutig bestimmten Schnittpunkt des Halbstrahls $\{x + t(x - f(x)) : t \geq 0\}$ mit S^1 zuordnen. Eine einfache Rechnung zeigt, dass diese Abbildung durch die Formel $r : D^2 \rightarrow S^1$, $r(x) := x + t(x)(x - f(x))$ gegeben ist, wobei $t : D^2 \rightarrow [0, \infty)$,

$$t(x) := \frac{\langle x, f(x) - x \rangle + \sqrt{\langle x, f(x) - x \rangle^2 + (1 - |x|^2)|f(x) - x|^2}}{|f(x) - x|^2}.$$

In dieser Darstellung ist auch die Stetigkeit von r evident. Für $x \in S^1$ gilt $r(x) = x$, denn aus $1 \geq |f(x)|^2 = |x + f(x) - x|^2 = |x|^2 + 2\langle x, f(x) - x \rangle + |f(x) - x|^2 \geq 1 + 2\langle x, f(x) - x \rangle + 0$ folgt $\langle x, f(x) - x \rangle \leq 0$ und damit $t(x) = 0$. Also ist r eine Retraktion von D^2 auf S^1 , ein Widerspruch zu Satz I.2.19. Daher muss f einen Fixpunkt besitzen. \square

I.2.22. BEMERKUNG. Auch Satz I.2.21 bleibt in beliebigen Dimensionen richtig, jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ besitzt einen Fixpunkt, $n \in \mathbb{N}$. Für $n = 1$ folgt dies aus dem Zwischenwertsatz der Analysis. Für $n > 2$ werden wir dies mit Hilfe derselben Konstruktion aus der höherdimensionalen Version von Satz I.2.19 herleiten, vgl. Bemerkung I.2.20. Es lässt sich auch umgekehrt Satz I.2.19 auf elementare Weise aus Satz I.2.21 herleiten, denn setzen wir eine Retraktion $r : D^2 \rightarrow S^1$ mit der sogenannten Antipodalabbildung $A : S^1 \rightarrow S^1$, $A(z) := -z$, zusammen, würden wir eine fixpunktfreie Abbildung $\iota \circ A \circ r : D^2 \rightarrow D^2$ erhalten.

I.2.23. SATZ (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes nicht konstante Polynom mit komplexen Koeffizienten besitzt eine Nullstelle in \mathbb{C} .*

BEWEIS. Sei also

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad n \geq 0, \quad a_i \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0$$

ein Polynom und $p(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zu zeigen ist $n = 0$. Die Schleife

$$f : I \rightarrow S^1, \quad f(s) := \frac{p(e^{2\pi i s})/p(1)}{|p(e^{2\pi i s})/p(1)|}$$

definiert ein Element $[f] \in \pi_1(S^1, 1)$. Die Abbildung

$$H : I \times I \rightarrow S^1, \quad H(s, t) := \frac{p(te^{2\pi i s})/p(t)}{|p(te^{2\pi i s})/p(t)|}$$

ist eine Homotopie relativ Endpunkten vom konstanten Weg $H_0 = c_1$ nach $H_1 = f$. Daher repräsentiert f das neutrale Element in $\pi_1(S^1, 1)$. Andererseits ist

$$\tilde{G} : I \times I \rightarrow \mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\tilde{G}(s, t) := t^n p(e^{2\pi i s}/t) = a_n e^{2\pi i n s} + t a_{n-1} e^{2\pi i(n-1)s} + \cdots + t^{n-1} a_1 e^{2\pi i s} + t^n a_0$$

eine stetige Abbildung, und

$$G : I \times I \rightarrow S^1, \quad G(s, t) := \frac{\tilde{G}(s, t)/\tilde{G}(0, t)}{|\tilde{G}(s, t)/\tilde{G}(0, t)|}$$

definiert eine Homotopie relative Endpunkten von $G_0 = w_n$ nach $G_1 = f$, vgl. (I.2). Also gilt $[\omega_n] = [f] \in \pi_1(S^1, 1)$, und daher ist auch $[\omega_n]$ das neutrale Element in $\pi_1(S^1, 1)$. Aus Satz I.2.1 folgt nun $n = 0$. \square

I.2.24. KOROLLAR. *Es sei $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom n -ten Grades, $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Dann existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, sodass*

$$p(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n).$$

Über \mathbb{C} zerfällt daher jedes Polynom in Linearfaktoren.

BEWEIS. Wir dürfen uns auf normierte Polynome beschränken, es sei daher o.B.d.A. $a_n = 1$. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n . Für $n = 1$ ist die Aussage trivial. Für den Induktionsschritt sei nun p ein normiertes Polynom n -ten Grades, $n \geq 2$. Nach Satz I.2.23 existiert $\alpha_n \in \mathbb{C}$ mit $p(\alpha_n) = 0$. Polynomdivision mit Rest liefert ein Polynom $(n-1)$ -ten Grades q und eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit $p(z) = q(z)(z - \alpha_n) + c$. Setzen wir $z = \alpha_n$, so erhalten wir sofort $0 = p(\alpha_n) = q(\alpha_n)(\alpha_n - \alpha_n) + c = c$, dh. $p(z) = q(z)(z - \alpha_n)$. Beachte, dass mit p auch q ein normiertes Polynom ist. Nach Induktionsvoraussetzung existieren daher $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ mit $q(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_{n-1})$, woraus nun $p(z) = (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$ folgt. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt. \square

I.3. Homotopieinvarianz. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \rightarrow Y$ heißen *homotop* falls eine stetige Abbildung $H : X \times I \rightarrow Y$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$ existiert. Dabei bezeichnet $H_t : X \rightarrow Y$ die stetige Abbildung $H_t(x) := H(x, t)$, $t \in I$. Jede solche Abbildung H wird eine *Homotopie* von f nach g genannt. Wir schreiben $f \simeq g$ oder $f \stackrel{H}{\simeq} g$. Ist $f : X \rightarrow Y$ homotop zu einer konstanten Abbildung, dh. existiert $y_0 \in Y$ mit $f \simeq c_{y_0}$ wobei $c_{y_0} : X \rightarrow Y$, $c_{y_0}(x) := y_0$, dann nennen wir f *nullhomotop*.

I.3.1. PROPOSITION. *Homotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der stetigen Abbildungen $X \rightarrow Y$.*

BEWEIS. Der Beweis ist völlig analog zu dem Beweis von Proposition I.1.1. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, dann gilt $f \stackrel{H}{\simeq} f$ mit $H : X \times I \rightarrow Y$, $H(x, t) := f(x)$, also ist die Relation reflexiv. Ist $f \stackrel{H}{\simeq} g$, dann folgt $g \stackrel{G}{\simeq} f$ mittels $G(x, t) := H(x, 1 - t)$, also ist die Relation symmetrisch. Gilt $f \stackrel{H'}{\simeq} g$ und $g \stackrel{H''}{\simeq} h$ so definiert

$$H : X \times I \rightarrow Y, \quad H(x, t) := \begin{cases} H'(x, 2t) & \text{falls } 0 \leq t \leq 1/2 \\ H''(x, 2t - 1) & \text{falls } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

eine Homotopie von f nach h , dh. $f \stackrel{H}{\simeq} h$, und damit ist die Relation auch transitiv. Die Stetigkeit von H folgt wieder aus Lemma I.1.2. \square

Die mit obiger Äquivalenzrelation assoziierten Äquivalenzklassen werden *Homotopieklassen* genannt. Die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen $X \rightarrow Y$ wird mit $[X, Y]$ bezeichnet. Die von $f : X \rightarrow Y$ repräsentierte Klasse werden wir mit $[f]$ bezeichnen.

I.3.2. BEISPIEL. Bezeichnet $\{*\}$ den einpunktigen Raum, dann können wir $[\{*\}, X]$ mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X identifizieren. Dabei entspricht $[f] \in [\{*\}, X]$ die (wohldefinierte) Wegzusammenhangskomponente von X die $f(*)$ enthält.

I.3.3. BEMERKUNG. Die Menge der Homotopieklassen $[S^1, X]$ hängt eng mit der Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ zusammen, siehe Satz I.3.33 unten.

I.3.4. LEMMA. *Es seien $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ und $g_0, g_1 : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen mit $f_0 \simeq f_1$ und $g_0 \simeq g_1$. Dann gilt auch $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$. Wir erhalten daher eine wohldefinierte Verknüpfung $[X, Y] \times [Y, Z] \rightarrow [X, Z]$, $([f], [g]) \mapsto [g \circ f]$.*

BEWEIS. Es seien $F : X \times I \rightarrow Y$ und $G : Y \times I \rightarrow Z$ Homotopien mit $f_0 \stackrel{F}{\simeq} f_1$ und $g_0 \stackrel{G}{\simeq} g_1$. Dann liefert $H : X \times I \rightarrow Z$, $H(x, t) := G(F(x, t), t)$ eine Homotopie von $g_0 \circ f_0$ nach $g_1 \circ f_1$, dh. $g_0 \circ f_0 \stackrel{H}{\simeq} g_1 \circ f_1$. \square

I.3.5. DEFINITION (Homotopieäquivalenz). Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ wird *Homotopieäquivalenz* genannt, falls eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$

existiert, sodass $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ gilt. Zwei topologische Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, falls eine Homotopieäquivalenz $f : X \rightarrow Y$ existiert. In diesem Fall schreiben wir $X \simeq Y$, und sagen auch X und Y haben denselben *Homotopietyp*.

Jeder Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ ist eine Homotopieäquivalenz, denn $g := f^{-1} : Y \rightarrow X$ erfüllt ja sogar $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$. Homöomorphe Räume sind daher stets homotopieäquivalent. Die identische Abbildung $\text{id}_X : X \rightarrow X$ ist eine Homotopieäquivalenz, es gilt daher $X \simeq X$. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz und $g : Y \rightarrow X$ mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$, dann ist trivialerweise auch $g : Y \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz. Aus $X \simeq Y$ folgt daher $Y \simeq X$. Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei Homotopieäquivalenzen, dann ist auch die Komposition $g \circ f : X \rightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz, siehe Lemma I.3.4. Aus $X \simeq Y$ und $Y \simeq Z$ folgt daher stets $X \simeq Z$. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz und ist $g : X \rightarrow X$ homotop zu f , dann ist auch g eine Homotopieäquivalenz.

I.3.6. BEMERKUNG. Eine stetige Abbildung $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ induziert eine Abbildung $\varphi_* : [X, Y_1] \rightarrow [X, Y_2]$, $\varphi_*([f]) := [\varphi \circ f]$. Nach Lemma I.3.4 ist φ_* wohldefiniert. Ist $\psi : Y_2 \rightarrow Y_3$ eine weitere stetige Abbildung, dann gilt offensichtlich $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_* : [X, Y_1] \rightarrow [X, Y_3]$ und $(\text{id}_Y)_* = \text{id}_{[X, Y]}$. Sind $\varphi_0, \varphi_1 : Y_1 \rightarrow Y_2$ homotop, so gilt $(\varphi_0)_* = (\varphi_1)_* : [X, Y_1] \rightarrow [X, Y_2]$, siehe Lemma I.3.4. Ist $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ eine Homotopieäquivalenz, dann induziert diese eine Bijektion $\varphi_* : [X, Y_1] \rightarrow [X, Y_2]$. Ist nämlich $\psi : Y_2 \rightarrow Y_1$ mit $\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_{Y_1}$ und $\varphi \circ \psi \simeq \text{id}_{Y_2}$, dann folgt $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (\text{id}_{Y_1})_* = \text{id}_{[X, Y_1]}$ und $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (\text{id}_{Y_2})_* = \text{id}_{[X, Y_2]}$, also ist $\psi_* : [X, Y_2] \rightarrow [X, Y_1]$ die Inverse von φ_* . Insbesondere induziert eine Homotopieäquivalenz $\varphi : Y_1 \rightarrow Y_2$ eine Bijektion zwischen der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von Y_1 und der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von Y_2 , siehe Beispiel I.3.2.

I.3.7. BEMERKUNG. Eine stetige Abbildung $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ induziert eine Abbildung $\varphi^* : [X_1, Y] \rightarrow [X_2, Y]$, $\varphi^*([f]) := [f \circ \varphi]$. Wieder ist φ^* wegen Lemma I.3.4 wohldefiniert. Ist $\psi : X_3 \rightarrow X_2$ eine weitere stetige Abbildung, dann gilt $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^* : [X_1, Y] \rightarrow [X_3, Y]$ und $(\text{id}_X)^* = \text{id}_{[X, Y]}$. Sind $\varphi_0, \varphi_1 : X_2 \rightarrow X_1$ homotop, so gilt $(\varphi_0)^* = (\varphi_1)^* : [X_1, Y] \rightarrow [X_2, Y]$, siehe Lemma I.3.4. Ist $\varphi : X_2 \rightarrow X_1$ eine Homotopieäquivalenz, dann induziert diese eine Bijektion $\varphi^* : [X_1, Y] \rightarrow [X_2, Y]$. Ist nämlich $\psi : X_1 \rightarrow X_2$ mit $\varphi \circ \psi \simeq \text{id}_{X_1}$ und $\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_{X_2}$ dann folgt $\psi^* \circ \varphi^* = (\varphi \circ \psi)^* = (\text{id}_{X_1})^* = \text{id}_{[X_1, Y]}$ und $\varphi^* \circ \psi^* = (\psi \circ \varphi)^* = (\text{id}_{X_2})^* = \text{id}_{[X_2, Y]}$, also ist $\psi^* : [X_2, Y] \rightarrow [X_1, Y]$ die Inverse von φ^* .

I.3.8. DEFINITION (Kontrahierbare Räume). Ein topologischer Raum X heißt *kontrahierbar* falls er den Homotopietyp des einpunktigen Raumes hat, $X \simeq \{*\}$.

Ein topologischer Raum X ist genau dann kontrahierbar, wenn die konstante Abbildung $X \rightarrow \{*\}$ eine Homotopieäquivalenz ist. Dies ist genau dann der Fall,

wenn $x_0 \in X$ existiert, sodass die Inklusion $\{x_0\} \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz ist. Offensichtlich ist X kontrahierbar genau dann, wenn die identische Abbildung id_X nullhomotop ist, dh. wenn $x_0 \in X$ und eine Homotopie $H : X \times I \rightarrow X$ mit $H_0 = \text{id}_X$ und $H_1 = c_{x_0}$ existieren, wobei $c_{x_0} : X \rightarrow X$, $c_{x_0}(x) := x_0$, die konstante Abbildung bezeichnet.⁵ Ein kontrahierbarer Raum muss wegzusammenhängend sein, denn für $x \in X$ ist $t \mapsto H(x, t)$ ein Weg von x nach x_0 . Ist X kontrahierbar und $x_1 \in X$ beliebig, dann gilt $\text{id}_X \simeq c_{x_1}$, dh. die Inklusion $\{x_1\} \rightarrow X$ ist eine Homotopieäquivalenz, für jedes $x_1 \in X$. Letzteres folgt aus der Tatsache, dass ein Weg von x_0 nach x_1 als Homotopie zwischen der Inklusion $\{x_0\} \rightarrow X$ und der Inklusion $\{x_1\} \rightarrow X$ aufgefasst werden kann.

I.3.9. BEISPIEL. Für einen kontrahierbaren Raum Y ist jede stetige Abbildung $X \rightarrow Y$ nullhomotop, die Menge $[X, Y]$ besteht daher aus nur einem Element. Um dies einzusehen fixiere $y \in Y$. Wegen der Kontrahierbarkeit von Y ist die identische Abbildung $\text{id}_Y : Y \rightarrow Y$ homotop zur konstanten Abbildung $c_y : Y \rightarrow Y$, $\text{id}_Y \simeq c_y$. Sei nun $f : X \rightarrow Y$ stetig. Aus Lemma I.3.4 folgt dann $f = \text{id}_Y \circ f \simeq c_y \circ f = \tilde{c}_y$, also ist f homotop zu der konstanten Abbildung $\tilde{c}_y : X \rightarrow Y$, $\tilde{c}_y(x) := y$.

I.3.10. DEFINITION (Deformationsretrakt). Ein Teilraum A eines topologischen Raumes X heißt *Deformationsretrakt* von X falls eine Homotopie $H : X \times I \rightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften existiert: $H_0 = \text{id}_X$, $H_1(X) \subseteq A$ und $H_t|_A = \text{id}_A$ für alle $t \in I$. In diesem Fall wird $r := H_1 : X \rightarrow A$ als *Deformationsretraktion* bezeichnet, und H wird manchmal eine *retrahierende Deformation* genannt. Bezeichnet $\iota : A \rightarrow X$ die kanonische Inklusion, so gilt $r \circ \iota = \text{id}_A$, Deformationsretraktionen sind daher Retraktionen. Schließlich ist $\iota : A \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz, denn $\text{id}_X \stackrel{H}{\simeq} \iota \circ r$.⁶

I.3.11. BEMERKUNG. Existiert $x_0 \in X$, sodass der einpunktige Teilraum $\{x_0\} \subseteq X$ Deformationsretrakt von X ist, dann ist X offensichtlich kontrahierbar. Die Umkehrung stimmt i.A. jedoch nicht. Es ist nicht schwer einen kontrahierbaren Raum X und ein Punkt $Q \in X$ zu konstruieren, sodass $\{Q\}$ nicht Deformationsretrakt von X ist.

I.3.12. BEISPIEL. Die Sphäre S^{n-1} ist Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, es ist nämlich $H : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $H(x, t) := (1-t)x + \frac{t}{|x|}x$ eine retrahierende Deformation. Insbesondere ist die kanonische Inklusion $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ eine Homotopieäquivalenz.

⁵Es ist nicht verlangt, dass die Homotopie den Punkt x_0 festhält, dh. wir verlangen nicht, dass $H(x_0, t) = x_0$ gilt.

⁶Wir folgen hier den Definitionen in [19, page 24] oder [4, page 2]. In [18, Definition 2.4.3] oder [15, page 30] wird dies als *strenger* Deformationsretrakt bezeichnet. Verlangen wir statt $H_t|_A = \text{id}_A$ nur $H_1|_A = \text{id}_A$ dann erhalten wir den Begriff des *schwachen Deformationsretrakts*. In diesem Fall ist $r : X \rightarrow A$ immer noch eine Retraktion, und auch die Inklusion $\iota : A \rightarrow X$ ist eine Homotopieäquivalenz.

I.3.13. BEISPIEL (Sternförmige Teilmengen). Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls $z \in X$ mit folgender Eigenschaft existiert: $x \in X, t \in [0, 1] \Rightarrow tz + (1-t)x \in X$. Dies bedeutet gerade, dass die affine Strecke von x nach z zur Gänze in X liegt. Jedes solche z wird ein Zentrum von X genannt. Ist z ein Zentrum von X , dann ist $\{z\}$ ein Deformationsretrakt von X , eine retrahierende Deformation ist durch $H : X \times I \rightarrow X, H(x, t) := tz + (1-t)x$ gegeben. Insbesondere ist die Inklusion $\{z\} \rightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz. Sternförmige Teilmengen sind daher stets kontrahierbar. Dasselbe gilt für konvexe Teilmengen, denn konvexe Teilmengen sind sternförmig, jeder ihrer Punkte ist Zentrum.

I.3.14. BEISPIEL. Es sei $P \in S^n$. Dann ist $S^n \setminus \{P\} \cong \mathbb{R}^n$ kontrahierbar, siehe Beispiel I.1.25. Jede stetige Abbildung $X \rightarrow S^n \setminus \{P\}$ ist daher nullhomotop, siehe Beispiel I.3.9. Insbesondere ist die Inklusion des Äquators $S^{n-1} \rightarrow S^n, x \mapsto (x, 0)$, nullhomotop. Hierfür lässt sich auch ganz leicht eine explizite Homotopie angeben, $H : S^{n-1} \times I \rightarrow S^n, H(x, t) := (\sqrt{1-t^2}x, t)$. Für $t = 0$ erhalten wir die Inklusion des Äquators, $H_0(x) = (x, 0)$, und für $t = 1$ erhalten wir die konstante Abbildung $H_1(x) = (0, \dots, 0, 1)$.

I.3.15. BEISPIEL. Ist A Deformationsretrakt von X , und ist B Deformationsretrakt von Y , dann ist $A \times B$ Deformationsretrakt von $X \times Y$. Sind nämlich $G : X \times I \rightarrow X$ und $H : Y \times I \rightarrow Y$ retrahierende Deformationen von X auf A bzw. von Y auf B , so ist $(x, y, t) \mapsto (G(x, t), H(y, t))$ eine retrahierende Deformation von $X \times Y$ auf $A \times B$.

Für die Konstruktion von Homotopien auf Quotientenräumen wird sich folgendes Resultat der mengentheoretischen Topologie als hilfreich erweisen, ein Beweis findet sich in [14, I.7.9 Satz 5].

I.3.16. LEMMA. *Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einem topologischen Raum X , und es bezeichne $p : X \rightarrow X/\sim$ die kanonische Projektion auf den Quotientenraum. Weiters sei K ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann ist*

$$p \times \text{id}_K : X \times K \rightarrow (X/\sim) \times K$$

eine Quotientenabbildung, dh. eine Teilmenge $U \subseteq (X/\sim) \times K$ ist genau dann offen, wenn $(p \times \text{id}_K)^{-1}(U)$ offen in $X \times K$ ist.

I.3.17. LEMMA. *Es sei \sim eine Äquivalenzrelation auf einem topologischen Raum X , und es bezeichne $p : X \rightarrow X/\sim$ die Projektion auf den Quotientenraum. Weiters sei $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie mit folgender Eigenschaft*

$$x_1, x_2 \in X, t \in I, x_1 \sim x_2 \Rightarrow \tilde{H}(x_1, t) = \tilde{H}(x_2, t).$$

Dann existiert genau eine Homotopie $H : (X/\sim) \times I \rightarrow Y$ mit $H(p(x), t) = \tilde{H}(x, t)$, für alle $x \in X$ und $t \in I$.

BEWEIS. Offensichtlich gibt es genau eine Abbildung $H : (X/\sim) \times I \rightarrow Y$ mit $H(p(x), t) = \tilde{H}(x, t)$. Es bleibt daher nur die Stetigkeit von H zu zeigen. Dies folgt aber sofort aus Lemma I.3.16 und der Stetigkeit von \tilde{H} . \square

Ist A ein nichtleerer Teilraum eines topologischen Raumes X , dann schreiben wir X/A für den Raum der aus X entsteht wenn wir A zu einem einzigen Punkt kollabieren. Genauer bezeichnet \sim die von $a \sim b, a, b \in A$, erzeugte Äquivalenzrelation auf X , dann definieren wir $X/A := X/\sim$ und versehen X/A mit der Quotiententopologie. Wir erhalten eine stetige Abbildung $p : X \rightarrow X/A$, die als *kanonische Projektion* bezeichnet wird. Sie bildet ganz A auf einen einzigen Punkt in X/A ab den wir mit $*$ $:= p(A)$ bezeichnen. Wir können den Quotienten daher auch als punktierten Raum $(X/A, *)$ auffassen. Ist (Z, z_0) ein punktierter Raum und $f : X \rightarrow Z$ eine stetige Abbildung mit $f(A) = \{z_0\}$, dann gibt es genau eine Abbildung punktierter Räume $\bar{f} : (X/A, *) \rightarrow (Z, z_0)$, sodass $\bar{f} \circ p = f$. Die Stetigkeit von \bar{f} folgt sofort aus der Definition der Quotiententopologie auf X/A .

I.3.18. BEISPIEL (Kegel). Ist X ein topologischer Raum, dann wird

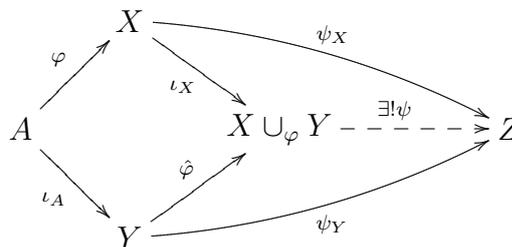
$$CX := (X \times I)/(X \times \{0\})$$

der Kegel über X genannt. Der Basispunkt $\{*\}$ ist ein Deformationsretrakt von CX , die Abbildung $\tilde{H} : (X \times I) \times I \rightarrow X \times I, \tilde{H}(x, s, t) := (x, (1-t)s)$, faktorisiert zu einer retrahierenden Deformation $H : CX \times I \rightarrow CX$ auf den Punkt $\{*\}$. Die Stetigkeit von H folgt aus Lemma I.3.17. Insbesondere ist die kanonische Inklusion $\{*\} \rightarrow CX$ eine Homotopieäquivalenz, und CX daher kontrahierbar. Die Abbildung $\iota : X \rightarrow CX, \iota(x) := [(x, 1)]$, ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild, wir können X daher als Teilraum von CX auffassen. Offensichtlich ist $CX \setminus \{*\}$ eine offene Umgebung von $\iota(X)$, und $\iota(X)$ ist Deformationsretrakt dieser Umgebung, denn $CX \setminus \{*\} \cong X \times (0, 1]$.

Ist $A \subseteq Y$ und $\varphi : A \rightarrow X$ stetig, dann definieren wir

$$X \cup_\varphi Y := (X \sqcup Y)/\sim,$$

wobei \sim die von $a \sim \varphi(a), a \in A$, erzeugte Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ bezeichnet. Wir sagen der Raum $X \cup_\varphi Y$ entsteht aus X durch *Ankleben* von Y längs φ . Wir erhalten zwei kanonische stetige Abbildungen $\iota_X : X \rightarrow X \cup_\varphi Y$ und $\hat{\varphi} : Y \rightarrow X \cup_\varphi Y$. Die Abbildung ι_X ist ein Homöomorphismus auf ihr Bild, wir können X daher als Teilraum von $X \cup_\varphi Y$ auffassen. Bezeichnet $\iota_A : A \rightarrow Y$ die kanonische Inklusion, dann gilt offensichtlich $\iota_X \circ \varphi = \hat{\varphi} \circ \iota_A$.



Der verklebte Raum $X \cup_\varphi Y$ hat folgende universelle Eigenschaft. Sind $\psi_X : X \rightarrow Z$ und $\psi_Y : Y \rightarrow Z$ zwei stetige Abbildungen mit $\psi_X \circ \varphi = \psi_Y \circ \iota_A$ dann existiert eine eindeutige stetige Abbildung $\psi : X \cup_\varphi Y \rightarrow Z$ mit $\psi_X = \psi \circ \iota_X$ und $\psi_Y = \psi \circ \hat{\varphi}$. Wir werden diese Abbildung mit $\psi_X \cup_\varphi \psi_Y := \psi$ bezeichnen.

I.3.19. LEMMA. *Es sei A ein Deformationsretrakt von Y und $\varphi : A \rightarrow X$ stetig. Dann ist $\iota_X(X)$ ein Deformationsretrakt von $X \cup_\varphi Y$, und die kanonische Einbettung $\iota_X : X \rightarrow X \cup_\varphi Y$ daher eine Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Es sei $H : Y \times I \rightarrow Y$ eine retrahierende Deformation, dh. $H_0 = \text{id}_Y$, $H_1(Y) \subseteq A$ und $H_t|_A = \text{id}_A$. Betrachte die Abbildung $\tilde{G} : (X \sqcup Y) \times I \rightarrow X \cup_\varphi Y$ die durch $\tilde{G}(x, t) := \iota_X(x)$, $(x, t) \in X \times I$, und $\tilde{G}(y, t) := \hat{\varphi}(H(y, t))$, $(y, t) \in Y \times I$, definiert ist. Da $H_t|_A = \text{id}_A$ faktorisiert \tilde{G} zu einer stetigen Abbildung $G : (X \cup_\varphi Y) \times I \rightarrow X \cup_\varphi Y$, vgl. Lemma I.3.17. Wegen $H_0 = \text{id}_Y$ ist $G_0 = \text{id}_{X \cup_\varphi Y}$. Da $H_1(Y) \subseteq A$ gilt $G_1(X \cup_\varphi Y) \subseteq \iota_X(X)$. Schließlich ist $G_t|_{\iota_X(X)} = \text{id}_{\iota_X(X)}$ für alle $t \in I$. Daher ist G eine retrahierende Deformation und $\iota_X(X)$ ein Deformationsretrakt von $X \cup_\varphi Y$. \square

I.3.20. BEISPIEL (Abbildungszylinder). Es sei $\varphi : Y \rightarrow X$ stetig, und es bezeichne $\iota_Y : Y \rightarrow Y \times I$ die Einbettung $\iota_Y(y) := (y, 1)$. Wir können φ als eine auf dem Teilraum $A := \iota_Y(Y) = Y \times \{1\}$ definierte Abbildung auffassen. Der Raum $Z_\varphi := X \cup_\varphi (Y \times I)$ wird der *Abbildungszylinder* von φ genannt. Wir erhalten eine kanonische Einbettung $\iota_X : X \rightarrow Z_\varphi$ und eine stetige Abbildung $\hat{\varphi} : Y \times I \rightarrow Z_\varphi$ mit $\iota_X \circ \varphi = \hat{\varphi} \circ \iota_Y$. Offensichtlich ist A ein Deformationsretrakt von $Y \times I$, nach Lemma I.3.19 ist daher $\iota_X(X)$ ein Deformationsretrakt von Z_φ und die Einbettung $\iota_X : X \rightarrow Z_\varphi$ eine Homotopieäquivalenz. Die Abbildung $j_Y : Y \rightarrow Z_\varphi$, $j_Y(y) := \hat{\varphi}(y, 0)$ liefert auch eine Einbettung von Y in Z_φ . Diese ist zu $\iota_X \circ \varphi$ homotop, $H : Y \times I \rightarrow Z_\varphi$, $H(y, t) := \hat{\varphi}(y, t)$, liefert eine Homotopie von $H_0 = j_Y$ nach $H_1 = \hat{\varphi} \circ \iota_Y = \iota_X \circ \varphi$. Bis auf Homotopie(äquivalenz) können wir daher jede stetige Abbildung als Einbettung auffassen.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & Z_\varphi := X \cup_\varphi (Y \times I) \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \hat{\varphi} \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & Y \times I \end{array}$$

Zwei Abbildungen punktierter Räume $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ heißen *homotop relativ Basispunkt* falls eine stetige Abbildung $H : I \times X \rightarrow Y$ mit $H_0 = f$, $H_1 = g$ und $H(x_0, t) = y_0$, für alle $t \in I$, existiert. Jede solche Abbildung H heißt eine *Homotopie relativ Basispunkt* von f nach g . Für jedes $t \in I$ ist $H_t : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, $H_t(x) := H(x, t)$, eine Abbildung punktierter Räume. Wie in Proposition I.3.1 lässt sich zeigen, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen punktierter Räume liefert. Die Äquivalenzklassen werden wir mit $[(X, x_0), (Y, y_0)]$ bezeichnen. Auch Lemma I.3.4 bleibt sinngemäß für Abbildungen punktierter Räume richtig. Eine Abbildung punktierter Räume $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ wird *Homotopieäquivalenz punktierter Räume* genannt, falls eine Abbildung punktierter Räume $g : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ existiert, sodass $g \circ f \simeq \text{id}_{(X, x_0)}$ relativ Basispunkt und $f \circ g \simeq \text{id}_{(Y, y_0)}$ relativ Basispunkt. In diesem Fall schreiben wir $(X, x_0) \simeq (Y, y_0)$. Auch die Bemerkungen I.3.6 und I.3.7 haben offensichtliche Analoga für punktierte Räume.

I.3.21. BEISPIEL. Ist A ein Deformationsretrakt von X und $x_0 \in A$, dann ist die kanonische Inklusion $(A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Homotopieäquivalenz punktierter Räume.⁷

I.3.22. BEISPIEL. Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann können wir die Menge $[(S^0, 1), (X, x_0)]$ mit der Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X identifizieren. Dabei entspricht $[f] \in [(S^0, 1), (X, x_0)]$ die (eindeutig bestimmte) Wegzusammenhangskomponente von X die $f(-1)$ enthält.

I.3.23. BEISPIEL. Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann kann die Menge $[(S^1, 1), (X, x_0)]$ auf kanonische Art mit $\pi_1(X, x_0)$ identifiziert werden, siehe Proposition I.3.32 unten.

I.3.24. PROPOSITION. (*Homotopieinvarianz*) Sind $\varphi, \psi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ homotop relativ Basispunkt, dann induzieren diese denselben Homomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen, dh. $\varphi_* = \psi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$.

BEWEIS. Sei $f : I \rightarrow X$ eine Schleife bei x_0 . Weiters sei $H : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie relativ Basispunkt von $H_0 = \varphi$ nach $H_1 = \psi$. Dann ist $G : I \times I \rightarrow Y$, $G(s, t) := H(f(s), t)$, eine Homotopie relativ Endpunkten von $G_0 = H_0 \circ f = \varphi \circ f$ nach $G_1 = H_1 \circ f = \psi \circ f$, also $\varphi \circ f \stackrel{G}{\simeq} \psi \circ f$ und damit $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f] = [\psi \circ f] = \psi_*([f])$. \square

I.3.25. PROPOSITION. Ist $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine Homotopieäquivalenz punktierter Räume, dann induziert diese einen Isomorphismus zwischen den Fundamentalgruppen, $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y, y_0)$.

BEWEIS. Sei dazu $\psi : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$, sodass $\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_{(X, x_0)}$ relativ Basispunkt und $\varphi \circ \psi \simeq \text{id}_{(Y, y_0)}$ relativ Basispunkt. Aus Proposition I.3.24 folgt $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (\text{id}_{(X, x_0)})_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ sowie $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (\text{id}_{(Y, y_0)})_* = \text{id}_{\pi_1(Y, y_0)}$. Also sind φ_* und ψ_* zueinander inverse Gruppenisomorphismen. \square

I.3.26. PROPOSITION. Es sei $H : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie, $x_0 \in X$, $y_0 := H_0(x_0)$, $y_1 := H_1(x_0)$, und es bezeichne $h : I \rightarrow Y$ den Weg $h(t) := H(x_0, t)$ von y_0 nach y_1 . Dann gilt $(H_0)_* = \beta_h \circ (H_1)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, y_0)$.

BEWEIS. Sei also $f : I \rightarrow X$ eine Schleife bei x_0 . Die Abbildung

$$G : I \times I \rightarrow Y, \quad G(s, t) := \begin{cases} h(4s) & \text{falls } 0 \leq s \leq t/4, \\ H(f(\frac{4s-t}{4-3t}), t) & \text{falls } t/4 \leq s \leq 1 - t/2, \\ h(2 - 2s) & \text{falls } 1 - t/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

definiert eine Homotopie relativ Endpunkten in Y von $G_0 = H_0 \circ f$ nach $G_1 = (h(H_1 \circ f))\bar{h}$. Also gilt $(H_0)_*([f]) = [H_0 \circ f] = [G_0] = [G_1] = [h(H_1 \circ f)\bar{h}] = \beta_h([H_1 \circ f]) = (\beta_h \circ (H_1)_*)([f])$. \square

⁷Ist A nur ein schwacher Deformationsretrakt, dann ist die Inklusion $(A, x_0) \rightarrow (X, x_0)$ i.A. keine Homotopieäquivalenz punktierter Räume.

I.3.27. SATZ (Homotopieinvarianz). *Ist $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz und $x_0 \in X$, dann ist $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ ein Isomorphismus.*

BEWEIS. Da φ eine Homotopieäquivalenz ist, existieren eine stetige Abbildung $\psi : Y \rightarrow X$ sowie Homotopien $H : X \times I \rightarrow X$ und $G : Y \times I \rightarrow Y$ mit $\psi \circ \varphi \stackrel{H}{\simeq} \text{id}_X$ und $\varphi \circ \psi \stackrel{G}{\simeq} \text{id}_Y$. Betrachte den Weg $h : I \rightarrow X$, $h(t) := H(x_0, t)$ von $\psi(\varphi(x_0))$ nach x_0 , und den Weg $g : I \rightarrow Y$, $g(t) := G(\varphi(x_0), t)$ von $\varphi(\psi(\varphi(x_0)))$ nach $\varphi(x_0)$. Nach Proposition I.3.26 gilt $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (H_0)_* = \beta_h \circ (H_1)_* = \beta_h \circ (\text{id}_X)_* = \beta_h$ sowie $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (G_0)_* = \beta_g \circ (G_1)_* = \beta_g \circ (\text{id}_Y)_* = \beta_g$. Daher kommutiert das nebenstehende Diagramm. Nach Proposition I.1.18 ist β_h ein Isomorphismus, also muss ψ_* surjektiv sein. Da β_g ein Isomorphismus ist, muss ψ_* auch injektiv sein. Damit ist ψ_* ein Isomorphismus, woraus wir nun schließen, dass $\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ ein Isomorphismus sein muss. \square

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(Y, \varphi(x_0)) \\ \beta_h \downarrow \cong & \swarrow \psi_* & \cong \downarrow \beta_g \\ \pi_1(X, \psi\varphi(x_0)) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(Y, \varphi\psi\varphi(x_0)) \end{array}$$

I.3.28. BEMERKUNG. Aus Proposition I.1.14 folgt, dass wir die Fundamentalgruppe als eine *topologische Invariante* wegzusammenhängender Räume auffassen können, dh. homöomorphe wegzusammenhängende topologische Räume müssen isomorphe Fundamentalgruppen haben. Satz I.3.27 besagt nun, dass die Fundamentalgruppe sogar eine *Homotopieinvariante* wegzusammenhängender Räume liefert, dh. homotopieäquivalente wegzusammenhängende topologische Räume müssen isomorphe Fundamentalgruppen haben. In anderen Worten, sind die Fundamentalgruppen zweier wegzusammenhängender Räume nicht isomorph, dann können die Räume nicht einmal homotopieäquivalent sein.

I.3.29. KOROLLAR. *Kontrahierbare Räume sind einfach zusammenhängend.*

BEWEIS. Ein kontrahierbarer Raum X ist wegzusammenhängend, siehe oben, und die konstante Abbildung $X \rightarrow \{*\}$ ist eine Homotopieäquivalenz. Nach Satz I.3.27 induziert diese einen Isomorphismus $\pi_1(X) \cong \pi_1(\{*\})$. Aus $\pi_1(\{*\}) = 0$ folgt daher auch $\pi_1(X) = 0$. \square

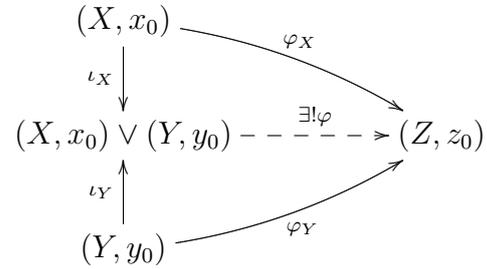
I.3.30. BEISPIEL (Möbiusband). Auf $I \times [-1, 1]$ betrachte die von $(0, y) \sim (1, -y)$, $y \in [-1, 1]$, erzeugte Äquivalenzrelation. Der damit assoziierten Quotientenraum $M := (I \times [-1, 1])/\sim$ wird *Möbiusband* genannt. Es bezeichne $p : I \times [-1, 1] \rightarrow M$ die kanonische Projektion und $S := p(I \times \{0\})$. Die retrahierende Deformation $\tilde{H} : (I \times [-1, 1]) \times I \rightarrow I \times [-1, 1]$, $\tilde{H}(x, y, t) := (x, (1-t)y)$, faktorisiert zu einer retrahierenden Deformation $H : M \times I \rightarrow M$, $p \circ \tilde{H}_t = H_t \circ p$, von M auf S . Daher ist S ein Deformationsretrakt von M und die Inklusion $S \rightarrow M$ eine Homotopieäquivalenz. Da S homöomorph zu S^1 ist, erhalten wir $\pi_1(M) \cong \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Die Schleife $I \rightarrow M$, $s \mapsto p(s, 0)$, repräsentiert einen Erzeuger von $\pi_1(M)$.

I.3.31. BEISPIEL. Betrachte wieder die Abbildungen $\mu_A : (T^n, x_n) \rightarrow (T^m, x_m)$ aus Beispiel I.2.17, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. Aus Proposition I.3.24 und der Berechnung des induzierten Homomorphismus in Beispiel I.2.17 sehen wir, dass μ_A und μ_B nicht homotop relativ Basispunkt sind, falls $A \neq B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. Die Abbildung $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}) \rightarrow [(T^n, x_n), (T^m, x_m)], A \mapsto [\mu_A]$, ist daher injektiv.

Unter der *Einpunktvereinigung* zweier punktierter Räume (X, x_0) und (Y, y_0) verstehen wir den punktierten Raum der aus der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ durch Identifikation der beiden Punkte x_0 und y_0 entsteht. Genauer,

$$(X, x_0) \vee (Y, y_0) := ((X \sqcup Y) / \{x_0, y_0\}, *).$$

Die beiden Abbildungen punktierter Räume $\iota_X : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0) \vee (Y, y_0)$, $\iota_X(x) := [(x, y_0)]$, und $\iota_Y : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0) \vee (Y, y_0)$, $\iota_Y(y) := [(x_0, y)]$, werden als *kanonische Einbettungen* bezeichnet. Beide sind Homöomorphismen auf ihr Bild, wir können daher (X, x_0) , und ebenso (Y, y_0) , als Teilraum von $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ auffassen. Die Einpunktvereinigung hat die folgende *universelle Eigenschaft*. Sind $\varphi_X : (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$ und $\varphi_Y : (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ zwei Abbildungen punktierter Räume, dann existiert eine eindeutige Abbildung punktierter Räume $\varphi : (X, x_0) \vee (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$, sodass $\varphi \circ \iota_X = \varphi_X$ und $\varphi \circ \iota_Y = \varphi_Y$, siehe nebenstehendes Diagramm. Diese Abbildung ist durch $\varphi(x, y_0) := \varphi_X(x)$, $x \in X$, und $\varphi(x_0, y) := \varphi_Y(y)$, $y \in Y$, gegeben und wird mit $\varphi_X \vee \varphi_Y$ bezeichnet. Beachte, dass $\varphi_X(x_0) = z_0 = \varphi_Y(y_0)$ und daher $\varphi_X \vee \varphi_Y$ wohldefiniert ist. Analog definieren wir die Einpunktvereinigung beliebig vieler punktierter Räume (X_α, x_α) , $\alpha \in A$, durch



$$\bigvee_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha) := \left(\left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \right) / \{x_\alpha : \alpha \in A\}, * \right).$$

Wieder haben wir kanonische Inklusionen $\iota_\alpha : (X_\alpha, x_\alpha) \rightarrow \bigvee_{\alpha' \in A} (X_{\alpha'}, x_{\alpha'})$ mit folgender universellen Eigenschaft. Ist (Z, z_0) ein punktierter Raum und sind $\varphi_\alpha : (X_\alpha, x_\alpha) \rightarrow (Z, z_0)$ Abbildungen punktierter Räume, $\alpha \in A$, dann existiert genau eine Abbildung punktierter Räume $\varphi : \bigvee_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha) \rightarrow (Z, z_0)$, sodass $\varphi \circ \iota_\alpha = \varphi_\alpha$ für alle $\alpha \in A$.

Betrachte nun wieder $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ mit Basispunkt $1 \in S^1$. Weiters bezeichnen $\iota_1 : (S^1, 1) \rightarrow (S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ und $\iota_2 : (S^1, 1) \rightarrow (S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ die beiden kanonischen Inklusionen. Definiere Abbildungen punktierter Räume:

$$\begin{aligned} \mu : (S^1, 1) &\rightarrow (S^1, 1) \vee (S^1, 1), & \mu(z) &:= \begin{cases} \iota_1(z^2) & \text{falls } \text{Im } z \geq 0, \\ \iota_2(z^2) & \text{falls } \text{Im } z \leq 0. \end{cases} & \text{(I.5)} \\ \nu : (S^1, 1) &\rightarrow (S^1, 1), & \nu(z) &:= z^{-1} = \bar{z} \end{aligned}$$

Wir können damit eine alternative Beschreibung der Fundamentalgruppe geben.

I.3.32. PROPOSITION. *Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann definiert*

$$\Psi = \Psi_{(X, x_0)} : [(S^1, 1), (X, x_0)] \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad \Psi([f]) := [f \circ \omega_1],$$

eine Bijektion, siehe (I.2), und es gilt $\Psi([f])\Psi([g]) = \Psi([(f \vee g) \circ \mu])$ sowie $\Psi([f])^{-1} = \Psi([f \circ \nu])$. Diese Bijektion ist natürlich, dh. für jede Abbildung punktierter Räume $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} [(S^1, 1), (X, x_0)] & \xrightarrow[\cong]{\Psi_{(X, x_0)}} & \pi_1(X, x_0) \\ \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\ [(S^1, 1), (Y, y_0)] & \xrightarrow[\cong]{\Psi_{(Y, y_0)}} & \pi_1(Y, y_0) \end{array}$$

Dabei bezeichnet $\varphi_* : [(S^1, 1), (X, x_0)] \rightarrow [(S^1, 1), (Y, y_0)]$, $\varphi_*([f]) := [\varphi \circ f]$.

BEWEIS. Zunächst ist Ψ wohldefiniert, denn sind $f, g : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ homotop relativ Basispunkt, $f \stackrel{H}{\simeq} g$, dann ist $(s, t) \mapsto H(\omega_1(s), t)$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $f \circ \omega_1$ nach $g \circ \omega_1$, also $[f \circ \omega_1] = [g \circ \omega_1] \in \pi_1(X, x_0)$. Beachte, dass $\omega_1 : I \rightarrow S^1$ zu einem Homöomorphismus $I/\{0, 1\} \rightarrow S^1$ faktorisiert. Daher definiert $f \mapsto f \circ \omega_1$ eine Bijektion zwischen der Menge der Abbildungen punktierter Räume $(S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ und der Menge der Schleifen bei x_0 . Es folgt sofort, dass Ψ surjektiv ist. Wir sehen aber auch, dass $H \mapsto H \circ (\omega_1 \times \text{id}_I)$ eine Bijektion zwischen der Menge der basispunkterhaltenden Homotopien $S^1 \times I \rightarrow X$ mit $H_t(1) = x_0$ und der Menge der Homotopien $I \times I \rightarrow X$ relativ Endpunkt x_0 liefert. Daraus folgt nun auch die Injektivität von Ψ . Nun zur Beschreibung der Gruppenstruktur. Für $f : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ gilt $\Psi([f])^{-1} = [f \circ \omega_1]^{-1} = [\overline{f \circ \omega_1}] = [f \circ \bar{\omega}_1] = [f \circ \nu \circ \omega_1] = \Psi([f \circ \nu])$. Ist weiters $g : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ dann gilt

$$((f \vee g) \circ \mu \circ \omega_1)(s) = \begin{cases} (f \vee g)(t_1(\omega_1(2s))) = f(\omega_1(2s)) & \text{für } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ (f \vee g)(t_2(\omega_1(2s - 1))) = g(\omega_1(2s - 1)) & \text{für } \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

wobei wir $\omega_1(s)^2 = \omega_1(2s) = \omega_1(2s - 1)$ im ersten Gleichheitszeichen verwendet haben. Wir schließen $(f \vee g) \circ \mu \circ \omega_1 = (f \circ \omega_1)(g \circ \omega_1)$, also $\Psi([(f \vee g) \circ \mu]) = \Psi([f])\Psi([g])$. Für die Natürlichkeitsaussage bemerken wir, $\varphi_*(\Psi_{(X, x_0)}([f])) = \varphi_*([f \circ \omega_1]) = [\varphi \circ (f \circ \omega_1)] = [(\varphi \circ f) \circ \omega_1] = \Psi_{(Y, y_0)}([\varphi \circ f]) = \Psi_{(Y, y_0)}(\varphi_*([f]))$. \square

Für einen punktierten Raum (X, x_0) sei $\Phi_{(X, x_0)} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$ durch die Komposition

$$\Phi_{(X, x_0)} : \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\Psi_{(X, x_0)}^{-1}} [(S^1, 1), (X, x_0)] \rightarrow [S^1, X], \quad (\text{I.6})$$

definiert, wobei $\Psi_{(X, x_0)}$ die Bijektion aus Proposition I.3.32 bezeichnet und die Abbildung $[(S^1, 1), (X, x_0)] \rightarrow [S^1, X]$ einer Homotopieklasse relativ Basispunkt die entsprechende sogenannte *freie Homotopieklasse* zuordnet.

I.3.33. SATZ. *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und $x_0 \in X$. Die Abbildung $\Phi_{(X,x_0)}$ aus (I.6) induziert eine Bijektion zwischen der Menge der Konjugationsklassen⁸ von $\pi_1(X, x_0)$ und $[S^1, X]$. Für jeden Weg h von $x_0 = h(0)$ nach $x_1 = h(1)$ gilt weiters $\Phi_{(X,x_1)} = \Phi_{(X,x_0)} \circ \beta_h$, vgl. Proposition I.1.18. Schließlich ist Φ natürlich, dh. für jede Abbildung punktierter Räume $\varphi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\Phi_{(X,x_0)}} & [S^1, X] \\ \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi_* \\ \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{\Phi_{(Y,y_0)}} & [S^1, Y] \end{array}$$

BEWEIS. Es sei $h : I \rightarrow X$ ein Weg von $x_0 := h(0)$ nach $x_1 := h(1)$. Weiters sei $f : I \rightarrow X$ eine Schleife bei x_1 . Dann definiert

$$\tilde{G} : I \times I \rightarrow X, \quad \tilde{G}(s, t) := \begin{cases} h(4s + t) & \text{falls } 0 \leq s \leq \frac{1-t}{4}, \\ f\left(\frac{4s+t-1}{3t+1}\right) & \text{falls } \frac{1-t}{4} \leq s \leq \frac{1+t}{2}, \\ h(2 - 2s + t) & \text{falls } \frac{1+t}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

eine Homotopie von $\tilde{G}_0 = (hf)\bar{h}$ nach $\tilde{G}_1 = f$. Dies ist i.A. keine Homotopie relativ Endpunkten, es gilt jedoch $\tilde{G}(i, t) = h(t)$, für $i = 0, 1$ und alle $t \in I$. Daher faktorisiert \tilde{G} zu einer Homotopie $G : S^1 \times I \rightarrow X$, $G(\omega_1(s), t) = H(s, t)$. Wir erhalten $\Phi_{(X,x_1)}([f]) = \Phi_{(X,x_0)}([hf\bar{h}]) \in [S^1, X]$, und damit $\Phi_{(X,x_1)} = \Phi_{(X,x_0)} \circ \beta_h$. Für Wege mit $h(0) = x_0 = x_1 = h(1)$ besagt dies gerade, dass konjugierte Elemente in $\pi_1(X, x_0)$ auf dasselbe Element in $[S^1, X]$ abgebildet werden. Auch die Surjektivität von $\Phi_{(X,x_0)}$ folgt aus dieser Konstruktion. Ist nämlich $\tilde{f} : S^1 \rightarrow X$ stetig dann finden wir auf Grund des Wegzusammenhangs von X einen Weg h von $h(0) = x_0$ nach $h(1) = f(1)$, und G definiert eine Homotopie zwischen $G_1 = \tilde{f}$ und der Schleife G_0 die wegen $G_0(1) = x_0$ im Bild der Abbildung $[(S^1, 1), (X, x_0)] \rightarrow [S^1, X]$ liegt. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\Phi_{(X,x_0)}$ auf der Menge der Konjugationsklassen injektiv ist. Seien also $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ Schleifen bei x_0 , sodass $\Phi_{(X,x_0)}([f_0]) = \Phi_{(X,x_0)}([f_1])$. Es ist zu zeigen, dass $[f_0]$ und $[f_1]$ in $\pi_1(X, x_0)$ konjugiert sind. Nach Voraussetzung existiert eine Homotopie $H : S^1 \times I \rightarrow X$ mit $H_0 \circ \omega_1 = f_0$ und $H_1 \circ \omega_1 = f_1$. Betrachte nun die Schleife $h : I \rightarrow X$, $h(t) := H(1, t)$, und

$$F : I \times I \rightarrow X, \quad F(s, t) := \begin{cases} h(4s) & \text{falls } 0 \leq s \leq t/4, \\ H\left(\omega_1\left(\frac{4s-t}{4-3t}\right), t\right) & \text{falls } t/4 \leq s \leq 1 - t/2, \\ h(2 - 2s) & \text{falls } 1 - t/2 \leq s \leq 1. \end{cases}$$

⁸Zwei Elemente g_1 und g_2 einer Gruppe G heißen *konjugiert*, falls $h \in G$ mit $g_2 = hg_1h^{-1}$ existiert. Dies definiert offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf G . Die damit assoziierten Äquivalenzklassen werden *Konjugationsklassen* von G genannt.

Dies ist eine Homotopie relativ Endpunkten von $F_0 = H_0 \circ \omega_1 = f_0$ nach $F_1 = (h(H_1 \circ \omega_1))\bar{h} = (hf_1)\bar{h}$. Damit ist $[f_0] = [hf_1\bar{h}] = [h][f_1][h]^{-1}$, also sind $[f_0]$ und $[f_1]$ konjugierte Elemente in $\pi_1(X, x_0)$. Die Natürlichkeit von Φ folgt aus der Natürlichkeitsaussage in Proposition I.3.32. \square

I.3.34. KOROLLAR (Einfacher Zusammenhang). *Für einen wegzusammenhängenden topologischen Raum X sind äquivalent:*

- (i) $\pi_1(X) = 0$, dh. X ist einfach zusammenhängend.
- (ii) Jede stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow X$ ist nullhomotop.
- (iii) Jede stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow X$ lässt sich zu einer stetigen Abbildung $F : D^2 \rightarrow X$ fortsetzen, dh. $f = F \circ \iota$, wobei $\iota : S^1 \rightarrow D^2$ die kanonische Inklusion bezeichnet.

BEWEIS. Die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (ii) folgt aus Satz I.3.33 und der Beobachtung, dass die Menge der Äquivalenzklassen einer Gruppe G genau dann einpunktig ist, wenn G nur aus dem neutralen Element besteht. Betrachte nun die stetige Abbildung $\varphi : S^1 \times I \rightarrow D^2 \subseteq \mathbb{C}$, $\varphi(z, t) := tz$. Existiert eine stetige Abbildung $F : D^2 \rightarrow X$ mit $F \circ \iota = f$, dann liefert $H := F \circ \varphi : S^1 \times I \rightarrow X$ eine Homotopie von der konstanten Abbildung $H_0 = c_{F(0)}$ nach $H_1 = F \circ \iota = f$. Damit ist die Implikation (iii) \Rightarrow (ii) gezeigt. Sei nun umgekehrt $H : S^1 \times I \rightarrow X$ eine Homotopie von einer konstanten Abbildung $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = f$. Beachte, dass φ einen Homöomorphismus $(S^1 \times I)/(S^1 \times \{0\}) \cong D^2$ induziert. Daher faktorisiert H zu einer stetigen Abbildung $F : D^2 \rightarrow X$, $F \circ \varphi = H$, für die dann $F \circ \iota = H_1 = f$ gilt. Damit ist auch die Implikation (ii) \Rightarrow (iii) gezeigt. \square

I.3.35. BEISPIEL. Betrachte wieder die Abbildungen $\mu_A : (T^n, x_n) \rightarrow (T^m, x_m)$ aus Beispiel I.2.17, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. Seien nun $A \neq B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. Aus Beispiel I.2.17 folgt $(\mu_A)_* \neq (\mu_B)_* : \pi_1(T^n, x_n) \rightarrow \pi_1(T^m, x_m)$. Mit Hilfe von Satz I.3.33 sehen wir nun, dass auch die induzierten Abbildungen $(\mu_A)_*, (\mu_B)_* : [S^1, T^n] \rightarrow [S^1, T^m]$ verschieden sind, denn $\Phi_{(T^n, x_n)} : \pi_1(T^n, x_n) \rightarrow [S^1, T^n]$ ist bijektiv da $\pi_1(T^n, x_n)$ abelsch ist. Also können μ_A und μ_B nicht einmal homotop sein, siehe Bemerkung I.3.6. In anderen Worten, die Abbildung

$$\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}) \rightarrow [T^n, T^m], \quad A \mapsto [\mu_A],$$

ist injektiv. Wir werden später sehen, dass diese Abbildung sogar bijektiv ist, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z}) \cong [T^n, T^m]$. Im Fall $n = 1 = m$ folgt dies aus Satz I.4.1(i) unten.

I.4. Der Abbildungsgrad. Es sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig. Weiters sei $h : I \rightarrow S^1$ ein Weg von $h(0) = 1$ nach $h(1) = f(1)$. Betrachte die Gruppenhomomorphismen

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\phi} \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{f_*} \pi_1(S^1, f(1)) \xrightarrow{\beta_h} \pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{\phi^{-1}} \mathbb{Z},$$

siehe Satz I.2.1 und Proposition I.1.18. Nach Bemerkung I.1.20 ist deren Komposition unabhängig von der Wahl des Weges h , denn $\pi_1(S^1)$ ist abelsch. Als Homomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ muss sie durch Multiplikation mit einer ganzen Zahl gegeben

sein. Diese Zahl wird der *Abbildungsgrad* von f genannt und mit $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ bezeichnet. Es gilt daher $\beta_h(f_*(\phi(k))) = \phi(k \deg(f))$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

I.4.1. SATZ. *Für den Abbildungsgrad stetiger Funktionen $f, g : S^1 \rightarrow S^1$ gilt:*

- (i) $\deg(f) = \deg(g) \Leftrightarrow f \simeq g$.
- (ii) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$.
- (iii) $\deg(f) = n$, falls $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. Wir leiten zunächst eine etwas andere Beschreibung des Abbildungsgrades her. Wenden wir auf $\phi(\deg(f)) = \beta_h(f_*(\phi(1)))$ die Abbildung $\Phi_{(S^1,1)}$ aus Satz I.3.33 an, so erhalten wir $(\Phi_{(S^1,1)} \circ \phi)(\deg(f)) = \Phi_{(S^1,1)}(\beta_h(f_*(\phi(1)))) = \Phi_{(S^1,f(1))}(f_*(\phi(1))) = \Phi_{(S^1,f(1))}([f \circ \omega_1]) = [f] \in [S^1, S^1]$. Nach Satz I.3.33 ist die Abbildung $\Phi_{(S^1,1)} \circ \phi : \mathbb{Z} \rightarrow [S^1, S^1]$ bijektiv, denn $\pi_1(S^1)$ ist abelsch. Wir erhalten daher $\deg(f) = (\Phi_{(S^1,1)} \circ \phi)^{-1}([f])$, woraus nun auch die erste Behauptung folgt. Nun zu (ii). Da nach Satz I.3.33 jede stetige Abbildung $S^1 \rightarrow S^1$ homotop zu einer den Basispunkt 1 fixierenden Abbildung ist, dürfen wir nach (i) o.B.d.A. annehmen $f(1) = 1 = g(1)$. Daher gilt $f_*(\phi(k)) = \phi(k \deg(f))$ sowie $g_*(\phi(k)) = \phi(k \deg(g))$, $k \in \mathbb{Z}$. Es folgt $(f \circ g)_*(\phi(k)) = f_*(g_*(\phi(k))) = f_*(\phi(k \deg(g))) = \phi(k \deg(g) \deg(f))$, also $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$. Behauptung (iii) folgt aus Beispiel I.2.2. \square

I.4.2. PROPOSITION. *Es sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ stetig und $\deg(f) \neq 0$. Dann ist f surjektiv.*

BEWEIS. Wir gehen indirekt vor und nehmen an $f : S^1 \rightarrow S^1$ ist nicht surjektiv. Dann existiert $P \in S^1$, sodass $f : S^1 \rightarrow S^1 \setminus \{P\}$, also faktorisiert $f_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1 \setminus \{P\}, f(1)) \rightarrow \pi_1(S^1, f(1))$. Nach Beispiel I.1.25 ist $\pi_1(S^1 \setminus \{P\}) = 0$, also stimmt $f_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, f(1))$ mit dem trivialen Homomorphismus überein, es muss daher $\deg(f) = 0$ gelten. \square

I.4.3. PROPOSITION. *Es sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine gerade stetige Abbildung, dh. $f(-z) = f(z)$ für alle $z \in S^1$. Dann ist $\deg(f)$ gerade.*

BEWEIS. Betrachte die Abbildung $q : S^1 \rightarrow S^1$, $q(z) := z^2$. Beachte, dass q eine Quotientenabbildung ist, dh. $U \subseteq S^1$ ist genau dann offen, wenn $q^{-1}(U)$ offen in S^1 ist. Sind $z_1, z_2 \in S^1$ mit $q(z_1) = q(z_2)$, dann gilt $f(z_1) = f(z_2)$ nach Voraussetzung an f . Daher faktorisiert f zu einer stetigen Abbildung $g : S^1 \rightarrow S^1$, dh. $g \circ q = f$. Aus Satz I.4.1 erhalten wir nun $\deg(f) = \deg(g \circ q) = \deg(g) \deg(q) = 2 \deg(g)$, also ist $\deg(f)$ gerade. \square

I.4.4. PROPOSITION. *Es sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung, sodass $f(z) \neq -z$ für alle $z \in S^1$. Dann ist f homotop zur identischen Abbildung id_{S^1} , und daher $\deg(f) = 1$.*

BEWEIS. Aus der Voraussetzung an f folgt, dass

$$H : S^1 \times I \rightarrow S^1, \quad H(z, t) := \frac{(1-t)f(z) + tz}{|(1-t)f(z) + tz|},$$

eine wohldefinierte Homotopie von $H_0 = f$ nach $H_1 = \text{id}_{S^1}$ ist. Aus Satz I.4.1 folgt daher $\deg(f) = \deg(\text{id}_{S^1}) = 1$. \square

Die Abbildung $A : S^1 \rightarrow S^1$, $A(z) := -z$, wird als *Antipodalabbildung* bezeichnet. Beachte, dass $H : S^1 \times I \rightarrow S^1$, $H(z, t) := e^{\pi it} z$, eine Homotopie von $H_0 = \text{id}_{S^1}$ nach $H_1 = A$ liefert, die Antipodalabbildung ist daher homotop zur identischen Abbildung, $A \simeq \text{id}_{S^1}$. Insbesondere gilt $\deg(A) = 1$ nach Satz I.4.1.

I.4.5. PROPOSITION. *Es sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung ohne Fixpunkt, dh. $f(z) \neq z$, für alle $z \in S^1$. Dann ist f homotop zur Antipodalabbildung⁹ A , und daher $\deg(f) = 1$.*

BEWEIS. Die Abbildung $A \circ f : S^1 \rightarrow S^1$ erfüllt die Voraussetzungen von Proposition I.4.4, dh. $(A \circ f)(z) \neq -z$, für alle $z \in S^1$. Daher ist sie homotop zur identischen Abbildung, $A \circ f \simeq \text{id}_{S^1}$. Aus der offensichtlichen Relation $A \circ A = \text{id}_{S^1}$ erhalten wir nun $f = \text{id}_{S^1} \circ f = A \circ A \circ f \simeq A \circ \text{id}_{S^1} = A$. \square

Eine weitere Möglichkeit den Abbildungsgrad zu verstehen liefert Proposition I.4.6(iii) unten. Wir erinnern uns an die Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(s) = e^{2\pi is}$, aus Abschnitt I.2, siehe (I.3). Weiters bezeichnen wir mit $\tau_y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau_y(s) := s + y$, die Translation um $y \in \mathbb{R}$. Offensichtlich gilt $\tau_{y_1} \circ \tau_{y_2} = \tau_{y_1+y_2} = \tau_{y_2} \circ \tau_{y_1}$.

I.4.6. PROPOSITION. *Für eine stetige Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ gilt:*

- (i) *Es existiert eine stetige Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $p \circ \tilde{f} = f \circ p$.*
- (ii) *Sind $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Abbildungen wie in (i), dann existiert $k \in \mathbb{Z}$, sodass $\tilde{f}_2 = \tau_k \circ \tilde{f}_1$.*
- (iii) *Jede Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (i) erfüllt $\tilde{f} \circ \tau_1 = \tau_{\deg(f)} \circ \tilde{f}$, dh. $\tilde{f}(s+1) = \tilde{f}(s) + \deg(f)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.*

BEWEIS. Ad (i): Fixiere $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0) = f(1)$. Sei nun $x > 0$. Da $[0, x] \cong I$ existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{g}_x : [0, x] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{g}_x(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{g}_x = f \circ p|_{[0, x]}$, siehe Proposition I.2.6. Ebenso existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{h}_x : [-x, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{h}_x(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{h}_x = f \circ p|_{[-x, 0]}$. Zusammen definieren \tilde{g}_x und \tilde{h}_x eine stetige Abbildung $\tilde{f}_x : [-x, x] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}_x(0) = x_0$ und $p \circ \tilde{f}_x = f \circ p|_{[-x, x]}$. Auch gibt es nur eine Abbildung \tilde{f}_x mit diesen Eigenschaften. Für $x' > 0$ stimmen daher \tilde{f}_x und $\tilde{f}_{x'}$ auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich $[-x, x] \cap [-x', x']$ überein. Wir können daher die gewünschte Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\tilde{f}|_{[-x, x]} := \tilde{f}_x$ definieren. Ad (ii): Seien also $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $p \circ \tilde{f}_1 = f \circ p = p \circ \tilde{f}_2$. Insbesondere gilt $p(\tilde{f}_1(0)) = p(\tilde{f}_2(0))$, also existiert $k \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{f}_2(0) = \tilde{f}_1(0) + k$. Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Wege $g : I \rightarrow S^1$, $g(t) := f(p(tx))$, $\tilde{g}_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g}_1(t) := (\tau_k \circ \tilde{f}_1)(tx)$, und $\tilde{g}_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{g}_2(t) := \tilde{f}_2(tx)$. Nach Wahl von k ist $\tilde{g}_1(0) = \tilde{g}_2(0)$. Weiters haben wir $p \circ \tilde{g}_1 = g = p \circ \tilde{g}_2$. Nach

⁹Da $A \simeq \text{id}_{S^1}$ könnten wir hier A durch die identische Abbildung ersetzen. In höheren Dimensionen wird jedoch A die richtige Verallgemeinerung liefern.

der Eindeutigkeitsaussage in Proposition I.2.6 müssen \tilde{g}_1 und \tilde{g}_2 übereinstimmen, insbesondere folgt $\tilde{f}_2(x) = \tilde{g}_2(1) = \tilde{g}_1(1) = (\tau_k \circ \tilde{f}_1)(x)$. Da $x \in \mathbb{R}$ beliebig war erhalten wir $\tilde{f}_2 = \tau_k \circ \tilde{f}_1$. Ad (iii): Zunächst gilt $p \circ \tilde{f} \circ \tau_1 = f \circ p \circ \tau_1 = f \circ p = p \circ \tilde{f}$. Nach (ii) existiert $n \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{f} \circ \tau_1 = \tau_n \circ \tilde{f}$. Insbesondere, $\tilde{f}(1) = (\tilde{f} \circ \tau_1)(0) = (\tau_n \circ \tilde{f})(0) = \tilde{f}(0) + n$. Da \mathbb{R} einfach zusammenhängend ist, ist der Weg $\tilde{f}|_I : I \rightarrow \mathbb{R}$ homotop relativ Endpunkten zum Weg $t \mapsto \tilde{f}(0) + nt$. Durch Komposition mit p sehen wir, dass der Weg $f \circ \omega_1 = f \circ p|_I = p \circ \tilde{f}|_I$ homotop relativ Endpunkten zum Weg $t \mapsto e^{2\pi i \tilde{f}(0)} \omega_1(t)^n$ ist. Daher ist die Abbildung $f : S^1 \rightarrow S^1$ homotop zur Abbildung $z \mapsto e^{2\pi i \tilde{f}(0)} z^n$. Schließlich zeigt die Homotopie $H(z, t) := e^{2\pi i t \tilde{f}(0)} z^n$, dass f zur Abbildung $z \mapsto z^n$ homotop ist, nach Satz I.4.1(iii) gilt daher $n = \deg(f)$. \square

I.4.7. SATZ. *Es sei $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine ungerade stetige Abbildung, dh. $f(-z) = -f(z)$ für alle $z \in S^1$. Dann ist $\deg(f)$ ungerade, f daher nicht nullhomotop.*

BEWEIS. Betrachte die Antipodalabbildung $A : S^1 \rightarrow S^1$, $A(z) := -z$. Beachte $A \circ A = \text{id}_{S^1}$ und $p \circ \tau_{1/2} = A \circ p$, vgl. Proposition I.4.6(i). Die Voraussetzung an f besagt dann $f \circ A = A \circ f$. Nach Proposition I.4.6(i) existiert eine stetige Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $p \circ \tilde{f} = f \circ p$. Es folgt $p \circ (\tilde{f} \circ \tau_{1/2}) = f \circ p \circ \tau_{1/2} = f \circ A \circ p = A \circ f \circ p = A \circ p \circ \tilde{f} = p \circ (\tau_{1/2} \circ \tilde{f})$. Nach Proposition I.4.6(iii) existiert daher $k \in \mathbb{Z}$, sodass $\tilde{f} \circ \tau_{1/2} = \tau_k \circ \tau_{1/2} \circ \tilde{f} = \tau_{k+1/2} \circ \tilde{f}$. Wir erhalten daraus $\tilde{f} \circ \tau_1 = \tilde{f} \circ \tau_{1/2} \circ \tau_{1/2} = \tau_{k+1/2} \circ \tilde{f} \circ \tau_{1/2} = \tau_{k+1/2} \circ \tau_{k+1/2} \circ \tilde{f} = \tau_{2k+1} \circ \tilde{f}$. Andererseits gilt auch $\tilde{f} \circ \tau_1 = \tau_{\deg(f)} \circ \tilde{f}$, siehe Proposition I.4.6(iii). Es folgt daher $\tau_{\deg(f)} \circ \tilde{f} = \tau_{2k+1} \circ \tilde{f}$, also $\deg(f) = 2k + 1$. Somit ist $\deg(f)$ ungerade. Nach Satz I.4.1 kann f nicht nullhomotop sein. \square

I.4.8. SATZ. *Es existiert keine stetige Abbildung $f : S^2 \rightarrow S^1$ mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^2$.*

BEWEIS. Wir gehen indirekt vor und nehmen an $f : S^2 \rightarrow S^1$ ist eine stetige Abbildung mit $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^2$. Bezeichnet $\iota : S^1 \rightarrow S^2$, $\iota(z) := (z, 0)$ die Inklusion des Äquators, so erhalten wir eine stetige Abbildung $g := f \circ \iota : S^1 \rightarrow S^1$ mit $g(-x) = -g(x)$. Nach Satz I.4.7 ist g nicht nullhomotop. Andererseits ist $\iota : S^1 \rightarrow S^2$ nullhomotop, siehe Beispiel I.3.14, also muss auch $g = f \circ \iota$ nullhomotop sein, siehe Lemma I.3.4. Wir erhalten einen Widerspruch, es kann also keine solche Abbildung $f : S^2 \rightarrow S^1$ geben. \square

I.4.9. BEMERKUNG. Wir werden später sehen, dass Satz I.4.8 in höheren Dimensionen richtig bleibt: ist $f : S^m \rightarrow S^n$ stetig und $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^m$, dann muss $m \leq n$ sein. Für $m \leq n$ existieren tatsächlich solche Abbildungen, etwa $f : S^m \rightarrow S^n$, $f(x) := (x, 0, \dots, 0)$.

I.4.10. SATZ (Borsuk–Ulam). *Ist $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung, dann existiert $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.*

BEWEIS. Indirekt angenommen es gilt $f(x) \neq f(-x)$ für alle $x \in S^2$. Die stetige Abbildung

$$g : S^2 \rightarrow S^1, \quad g(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}$$

erfüllt dann $g(-x) = -g(x)$ und wir erhalten einen Widerspruch zu Satz I.4.8. Also muss $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$ existieren. \square

I.4.11. BEMERKUNG. Insbesondere sehen wir, dass es nicht möglich ist S^2 injektiv und stetig nach \mathbb{R}^2 abzubilden, dh. S^2 kann nicht homöomorph zu einem Teilraum von \mathbb{R}^2 sein. Auch Satz I.4.10 bleibt in höheren Dimensionen richtig: ist $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, dann existiert $x \in S^n$ mit $f(x) = f(-x)$. Dies folgt analog aus der Verallgemeinerung von Satz I.4.8. Umgekehrt lässt sich Satz I.4.8 auf elementare Weise aus Satz I.4.10 herleiten, denn eine stetige Abbildung $f : S^2 \rightarrow S^1$ mit $f(-x) = -f(x)$ können wir als stetige Abbildung $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auffassen für die dann sicherlich $f(x) \neq f(-x)$ gilt.

I.4.12. BEMERKUNG. Nach Satz I.4.1 liefert der Abbildungsgrad eine Bijektion $[S^1, S^1] \cong \mathbb{Z}$. Da die kanonische Inklusion $S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ eine Homotopieäquivalenz ist, induziert sie eine Bijektionen $[S^1, S^1] \cong [S^1, \mathbb{C}^\times]$, siehe Bemerkung I.3.6. Wir erhalten daher auch einen Abbildungsgrad $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ für stetige Abbildungen $f : S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ mit Eigenschaften analog zu denen in Satz I.4.1. Ebenso lassen sich Abbildungsgrade stetiger Abbildungen $\mathbb{C}^\times \rightarrow S^1$ oder $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$ definieren.

I.4.13. BEMERKUNG. Für stetig differenzierbares $f : S^1 \rightarrow S^1$ gilt

$$\deg(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \omega_1} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial s} f(e^{2\pi i s})}{f(e^{2\pi i s})} ds.$$

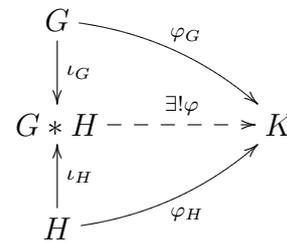
Um dies einzusehen wähle $t_0 \in \mathbb{R}$ mit $e^{2\pi i t_0} = f(1)$ und betrachte die Abbildung

$$\tilde{f} : I \rightarrow \mathbb{C}, \quad \tilde{f}(t) := t_0 + \frac{1}{2\pi i} \int_0^t \frac{\frac{\partial}{\partial s} f(e^{2\pi i s})}{f(e^{2\pi i s})} ds.$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erhalten wir sofort $\frac{\partial}{\partial t} (f(e^{2\pi i t})e^{-2\pi i \tilde{f}(t)}) = 0$, also $f(e^{2\pi i t})e^{-2\pi i \tilde{f}(t)} = f(e^{2\pi i \cdot 0})e^{-2\pi i \tilde{f}(0)} = f(1)e^{-2\pi i t_0} = 1$, und daher $f(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i \tilde{f}(t)}$. Insbesondere ist \tilde{f} reellwertig und $p \circ \tilde{f} = f \circ p$, vgl. Proposition I.4.6(i). Aus Proposition I.4.6(ii) erhalten wir $\tilde{f} \circ \tau_1 = \tau_{\deg(f)} \circ \tilde{f}$. Auswerten bei $t = 0$ liefert $\tilde{f}(1) = (\tilde{f} \circ \tau_1)(0) = (\tau_{\deg(f)} \circ \tilde{f})(0) = \deg(f) + \tilde{f}(0)$, also $\deg(f) = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial s} f(e^{2\pi i s})}{f(e^{2\pi i s})} ds$.

I.5. Der Satz von Seifert–van Kampen. Im Satz von Seifert–van Kampen, siehe Satz I.5.5 unten, tritt das freie Produkt von Gruppen in Erscheinung, wir beginnen daher mit einer Diskussion desselben. Sind G und H zwei Gruppen, dann gibt es eine Gruppe $G * H$, das sogenannte *freie Produkt* von G und H , sowie zwei Gruppenhomomorphismen $\iota_G : G \rightarrow G * H$ und $\iota_H : H \rightarrow G * H$ die folgende

universelle Eigenschaft haben. Sind $\varphi_G : G \rightarrow K$ und $\varphi_H : H \rightarrow K$ zwei Gruppenhomomorphismen, dann existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\varphi : G * H \rightarrow K$ mit $\varphi \circ \iota_G = \varphi_G$ und $\varphi \circ \iota_H = \varphi_H$. Diesen Homomorphismus bezeichnen wir mit $\varphi_G * \varphi_H := \varphi$. Wir werden die Existenz von $G * H$ in Lemma I.5.1 unten zeigen und wollen sie für den Moment als gegeben annehmen. Die universelle Eigenschaft bestimmt das Tripel $(G * H, \iota_G, \iota_H)$ bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig. Genauer, ist F eine Gruppe und sind $j_G : G \rightarrow F$ sowie $j_H : H \rightarrow F$ zwei Gruppenhomomorphismen die auch diese universelle Eigenschaft haben,¹⁰ dann gibt es genau einen Gruppenisomorphismus $\psi : G * H \rightarrow F$ mit $\psi \circ \iota_G = j_G$ und $\psi \circ \iota_H = j_H$.¹¹ Daraus folgt sofort die Existenz kanonischer Isomorphismen $G * H \cong H * G$, $(G_1 * G_2) * G_3 \cong G_1 * (G_2 * G_3)$ sowie $\{1\} * G \cong G$.



Wenden wir die universelle Eigenschaft auf $K = G$, $\varphi_G = \text{id}_G$ und den trivialen Homomorphismus $\varphi_H = 1$ an, so erhalten wir einen Homomorphismus $p_G : G * H \rightarrow G$ mit $p_G \circ \iota_G = \text{id}_G$ und $p_G \circ \iota_H = 1$. Analog lässt sich ein Homomorphismus $p_H : G * H \rightarrow H$ mit $p_H \circ \iota_H = \text{id}_H$ und $p_H \circ \iota_G = 1$ konstruieren. Insbesondere sind ι_G und ι_H beide injektiv, wir können daher G und H als Untergruppen von $G * H$ auffassen. Auch erhalten wir einen surjektiven Homomorphismus $(p_G, p_H) : G * H \rightarrow G \times H$.

Die Bilder von ι_G und ι_H erzeugen die Gruppe $G * H$. Bezeichnet nämlich K die von $\iota_G(G) \cup \iota_H(H)$ erzeugte Untergruppe von $G * H$, dann erhalten wir aus der universellen Eigenschaft einen Homomorphismus $\varphi : G * H \rightarrow K$ mit $\varphi \circ \iota_G = \iota_G$ und $\varphi \circ \iota_H = \iota_H$. Durch Komposition mit der kanonischen Inklusion $\iota : K \rightarrow G * H$ erhalten wir einen Homomorphismus $\iota \circ \varphi : G * H \rightarrow G * H$ mit $(\iota \circ \varphi) \circ \iota_G = \iota_G$ und $(\iota \circ \varphi) \circ \iota_H = \iota_H$. Aus der Eindeutigkeitsaussage der universellen Eigenschaft folgt $\iota \circ \varphi = \text{id}_{G * H}$. Also muss ι surjektiv sein, K daher mit $G * H$ übereinstimmen. Somit sehen wir, dass $G \cup H$ die Gruppe $G * H$ tatsächlich erzeugt.

Wir widmen uns nun der Konstruktion von $G * H$, bzw. etwas allgemeiner, der Konstruktion des freien Produkts $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ beliebig vieler Gruppen G_α .

I.5.1. LEMMA. *Es seien G_α Gruppen, $\alpha \in A$. Dann existiert eine Gruppe, die wir mit $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ bezeichnen und das freie Produkt der G_α nennen, sowie Homomorphismen $\iota_\alpha : G_\alpha \rightarrow *_{\alpha' \in A} G_{\alpha'}$, $\alpha \in A$, mit folgenden Eigenschaften:*

¹⁰dh. zu jedem Paar von Homomorphismen $\varphi_G : G \rightarrow K$ und $\varphi_H : H \rightarrow K$ existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\varphi : F \rightarrow K$ mit $\varphi \circ j_G = \varphi_G$ und $\varphi \circ j_H = \varphi_H$.

¹¹Dieser Isomorphismus ist durch $\psi := j_G * j_H$ gegeben. Seine Inverse erhalten wir aus der universellen Eigenschaft von F angewandt auf $\varphi_G = \iota_G$ und $\varphi_H = \iota_H$. Dass dies tatsächlich die Inverse liefert folgt dann aus den Eindeutigkeitsaussagen in den universellen Eigenschaften von $G * H$ und F .

- (i) ι_α ist injektiv, wir können daher jede der Gruppen G_α als Untergruppe von $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ auffassen und werden die Inklusionen ι_α meist unterdrücken.
- (ii) $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ erzeugt die Gruppe $*_{\alpha \in A} G_\alpha$. Jedes Element $x \neq 1 \in *_{\alpha \in A} G_\alpha$ lässt sich daher in der Form $x = g_1 \cdots g_n$ mit $g_i \in G_{\alpha_i}$ schreiben. Dabei können wir auch erreichen, dass $g_{\alpha_i} \neq 1 \in G_{\alpha_i}$ und $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$. Eine solche Darstellung von x wird reduzierte Darstellung genannt.
- (iii) Die reduzierte Darstellung von $x \neq 1 \in *_{\alpha \in A} G_\alpha$ ist eindeutig, dh. gilt $g_1 \cdots g_n = x = h_1 \cdots h_m$ und sind beide Darstellungen reduziert, $g_i \in G_{\alpha_i}$, $h_j \in G_{\beta_j}$, dann folgt $n = m$, $\alpha_i = \beta_i$ und $g_i = h_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.
- (iv) Sind $\varphi_\alpha : G_\alpha \rightarrow K$ Gruppenhomomorphismen, $\alpha \in A$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : *_{\alpha \in A} G_\alpha \rightarrow K$, sodass $\varphi \circ \iota_\alpha = \varphi_\alpha$, für alle $\alpha \in A$. Wir werden diesen Homomorphismus mit $*_{\alpha \in A} \varphi_\alpha := \varphi$ bezeichnen.

BEWEIS. Unter einem Wort verstehen wir jede endliche Folge (g_1, g_2, \dots, g_n) wobei jedes der g_i in einer der Gruppen G_{α_i} liegt. Auch die Folge der Länge 0 ist zugelassen und wird als das leere Wort bezeichnet. Ein Wort (g_1, \dots, g_n) heißt reduziert, falls $g_i \neq 1 \in G_{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, n$, und $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$ für $i = 1, \dots, n-1$. Insbesondere ist das leere Wort $()$ reduziert. Es bezeichne W die Menge aller reduzierten Worte, und $\mathfrak{S}(W)$ die Permutationsgruppe von W , dh. die Menge der Bijektionen $W \rightarrow W$. Für $\alpha \in A$ und $g \in G_\alpha$ definieren wir eine Abbildung $L_g : W \rightarrow W$ indem wir einem reduzierten Wort (g_1, \dots, g_n) mit $g_i \in G_{\alpha_i}$ ein Element in W wie folgt zuordnen:

$$L_g(g_1, \dots, g_n) := \begin{cases} (g_1, \dots, g_n) & \text{falls } g = 1, \\ (g, g_1, \dots, g_n) & \text{falls } g \neq 1 \text{ und } \alpha_1 \neq \alpha, \\ (gg_1, g_2, \dots, g_n) & \text{falls } g \neq 1, \alpha_1 = \alpha \text{ und } gg_1 \neq 1, \\ (g_2, g_3, \dots, g_n) & \text{falls } g \neq 1, \alpha_1 = \alpha \text{ und } gg_1 = 1. \end{cases}$$

Eine einfache Fallunterscheidung zeigt $L_1 = \text{id}_W$ und $L_h \circ L_g = L_{hg}$ für alle $g, h \in G_\alpha$. Insbesondere ist $L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}$, jedes L_g daher bijektiv. Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus $\iota_\alpha : G_\alpha \rightarrow \mathfrak{S}(W)$, $g \mapsto L_g$. Wenden wir L_g auf das leere Wort $() \in W$ an, erhalten wir $L_g(()) = (g)$, falls $g \neq 1$, also ist ι_α injektiv. Definieren wir nun $*_{\alpha \in A} G_\alpha$ als die von $\bigcup_{\alpha \in A} \iota_\alpha(G_\alpha)$ erzeugte Untergruppe in $\mathfrak{S}(W)$, dann sind die Behauptungen (i) und (ii) offensichtlich wahr. Nun zu (iii): Sei also $g_1 \cdots g_n = h_1 \cdots h_m \in *_{\alpha \in A} G_\alpha$ mit $g_i \in G_{\alpha_i}$ und $h_j \in G_{\beta_j}$, und so, dass beide Darstellungen reduziert sind. Nach Konstruktion ist $L_{g_1} \circ \cdots \circ L_{g_n} = L_{h_1} \circ \cdots \circ L_{h_m} \in \mathfrak{S}(W)$. Wenden wir diese Permutation auf das leere Wort $() \in W$ an, dann erhalten wir wegen der Reduziertheit der Darstellungen

$$(g_1, \dots, g_n) = (L_{g_1} \circ \cdots \circ L_{g_n})(()) = (L_{h_1} \circ \cdots \circ L_{h_m})(()) = (h_1, \dots, h_m),$$

und damit $n = m$, $\alpha_i = \beta_i$ sowie $g_i = h_i$, $i = 1 \dots, n$. Nun zu (iv): Seien also Homomorphismen $\varphi_\alpha : G_\alpha \rightarrow K$ gegeben, $\alpha \in A$. Ist $x \neq 1 \in *_{\alpha \in A} G_\alpha$ und $x = g_1 \cdots g_n$ seine reduzierte Darstellung, $g_i \in G_{\alpha_i}$, so definieren wir $\varphi(x) := \iota_{\alpha_1}(g_1) \cdots \iota_{\alpha_n}(g_n)$. Setzen wir noch $\varphi(1) := 1$, dann liefert dies nach (iii) eine wohldefinierte Abbildung $\varphi : *_{\alpha \in A} G_\alpha \rightarrow K$ für die offensichtlich $\varphi \circ \iota_\alpha = \varphi_\alpha$ gilt, $\alpha \in A$. Es bleibt noch zu zeigen, dass φ ein Gruppenhomomorphismus ist. Wir zeigen zunächst

$$\varphi(g_1 \cdots g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n), \quad \text{für beliebige } g_i \in G_{\alpha_i}. \quad (\text{I.7})$$

Wir werden (I.7) mittels Induktion nach n beweisen. Existiert ein i mit $1 \leq i \leq n$ und $g_i = 1 \in G_{\alpha_i}$, dann erhalten wir aus $\varphi_{\alpha_i}(g_i) = 1$ und der Induktionsvoraussetzung $\varphi(g_1 \cdots g_n) = \varphi(g_1 \cdots \hat{i} \cdots g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \hat{i} \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots 1 \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_i}(g_i) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$. Existiert ein i mit $1 \leq i < n$ und $\alpha_i = \alpha_{i+1}$, so folgt aus $\varphi_{\alpha_i}(g_i g_{i+1}) = \varphi_{\alpha_i}(g_i) \varphi_{\alpha_{i+1}}(g_{i+1})$ und der Induktionsvoraussetzung $\varphi(g_1 \cdots g_i g_{i+1} \cdots g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_i}(g_i g_{i+1}) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n) = \varphi_{\alpha_1}(g_1) \cdots \varphi_{\alpha_i}(g_i) \varphi_{\alpha_{i+1}}(g_{i+1}) \cdots \varphi_{\alpha_n}(g_n)$. Tritt keiner der beiden Fälle ein, dann war die Darstellung $g_1 \cdots g_n$ schon reduziert, und es bleibt nichts zu zeigen. Damit ist (I.7) bewiesen, woraus wir nun sofort die Homomorphismus Eigenschaft von φ erhalten. Die Eindeutigkeit von φ folgt aus (ii), denn φ ist auf einer die Gruppe erzeugenden Teilmenge durch die φ_α vorgegeben. \square

I.5.2. BEMERKUNG. Das freie Produkt ist weit davon entfernt eine kommutative Gruppe zu sein. Ist etwa $h \neq 1 \in H$ und $g \neq 1 \in G$, dann gilt stets $gh \neq hg$ im freien Produkt $G * H$, siehe Lemma I.5.1(iii). Ebenso sehen wir sofort, dass das Zentrum von $G * H$ trivial ist, wenn nur $G \neq \{1\}$ und $H \neq \{1\}$.

I.5.3. BEISPIEL. Ist G eine Gruppe, dann wird die von den Kommutatoren $\{ghg^{-1}h^{-1} : g, h \in G\}$ erzeugte Untergruppe die *Kommutatoruntergruppe* von G genannt und mit $[G, G]$ bezeichnet. Dies ist stets eine normale Untergruppe von G . Die Quotientengruppe $G^{\text{ab}} := G/[G, G]$ wird die *Abelisierung* von G genannt. Sie hat folgende universelle Eigenschaft. Ist A eine abelsche Gruppe und $\varphi : G \rightarrow A$ ein Homomorphismus, dann existiert genau ein Homomorphismus $\varphi^{\text{ab}} : G^{\text{ab}} \rightarrow A$ mit $\varphi^{\text{ab}} \circ p = \varphi$, wobei $p : G \rightarrow G^{\text{ab}}$ den kanonischen Homomorphismus der mit der Quotientengruppe assoziiert ist bezeichnet. Dies folgt aus $\varphi(ghg^{-1}h^{-1}) = \varphi(g)\varphi(h)\varphi(g)^{-1}\varphi(h)^{-1} = 1$, denn A ist kommutativ. Insbesondere faktorisiert jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ zu einem Homomorphismus abelscher Gruppen $\varphi^{\text{ab}} : G^{\text{ab}} \rightarrow H^{\text{ab}}$.

Die von den Inklusionen $\iota_\alpha : G_\alpha \rightarrow *_{\alpha' \in A} G_{\alpha'}$ induzierten Homomorphismen $\iota_\alpha^{\text{ab}} : G_\alpha^{\text{ab}} \rightarrow (*_{\alpha' \in A} G_{\alpha'})^{\text{ab}}$ bestimmen einen Homomorphismus

$$\bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha^{\text{ab}} \xrightarrow{\cong} \left(*_{\alpha \in A} G_\alpha \right)^{\text{ab}}. \quad (\text{I.8})$$

Es ist leicht einzusehen, dass dies ein Isomorphismus ist. Für das n -fache freie Produkt $*^n\mathbb{Z} := \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ erhalten wir daher $(\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z})^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^n$. Es folgt $*^n\mathbb{Z} \not\cong *^m\mathbb{Z}$ falls $n \neq m$, denn $\mathbb{Z}^n \not\cong \mathbb{Z}^m$.

I.5.4. BEMERKUNG. Wir wollen noch kurz auf die universelle Eigenschaft der direkte Summe abelscher Gruppen eingehen. Es seien A_α , $\alpha \in A$, abelsche Gruppen, und es bezeichnen $\iota_\alpha : A_\alpha \rightarrow \bigoplus_{\alpha' \in A} A_{\alpha'}$ die kanonischen Inklusionen. Ist B eine weitere abelsche Gruppe, und sind $\varphi_\alpha : A_\alpha \rightarrow B$ Homomorphismen, $\alpha \in A$, dann existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : \bigoplus_{\alpha \in A} A_\alpha \rightarrow B$, sodass $\varphi \circ \iota_\alpha = \varphi_\alpha$, für alle $\alpha \in A$. In Beispiel I.5.3 oben haben wir genau diese Eigenschaft verwendet um (I.8) zu konstruieren.

Es seien $U, V \subseteq X$ zwei offene Teilmengen mit $X = U \cup V$, und es sei $x_0 \in U \cap V$ ein Basispunkt. Betrachte die vier im kommutativen Diagramm links ange-

$$\begin{array}{ccc} (U \cap V, x_0) & \xrightarrow{j_U} & (U, x_0) \\ \downarrow j_V & & \downarrow \iota_U \\ (V, x_0) & \xrightarrow{\iota_V} & (X, x_0) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{deuteten kanonischen} \\ \text{Inklusionen, } \iota_U \circ j_U = \\ \iota_V \circ j_V. \text{ Gehen wir zu} \\ \text{den Fundamentalgrup-} \\ \text{pen über so erhalten} \\ \text{wir induzierte Abbil-} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{(j_U)_*} & \pi_1(U, x_0) \\ \downarrow (j_V)_* & & \downarrow (\iota_U)_* \\ \pi_1(V, x_0) & \xrightarrow{(\iota_V)_*} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

dungen wie im zweiten Diagramm. Nach Propostion I.1.13 gilt $(\iota_U)_* \circ (j_U)_* = (\iota_U \circ j_U)_* = (\iota_U \circ j_V)_* = (\iota_U)_* \circ (j_V)_*$, also kommutiert auch dieses Diagramm. Insbesondere erhalten wir einen Homomorphismus

$$\Phi := (\iota_U)_* * (\iota_V)_* : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0), \quad (\text{I.9})$$

und jedes der Elementen $((j_U)_*\sigma)((j_V)_*\sigma)^{-1}$, $\sigma \in \pi_1(U \cap V, x_0)$, liegt im Kern von Φ , denn es ist $\Phi(((j_U)_*\sigma)((j_V)_*\sigma)^{-1}) = ((\iota_U)_*(j_U)_*\sigma)((\iota_V)_*(j_V)_*\sigma)^{-1} = 1$. Damit liegt auch der von ihnen erzeugte Normalteiler

$$N := \mathcal{N}\left(\left\{((j_U)_*\sigma)((j_V)_*\sigma)^{-1} : \sigma \in \pi_1(U \cap V, x_0)\right\}\right) \quad (\text{I.10})$$

im Kern von Φ , in Zeichen $N \subseteq \ker(\Phi)$.

I.5.5. SATZ (Seifert–van Kampen). *Es sei $X = U \cup V$ wobei U und V offen in X sind. Weiters seien U, V sowie $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$. Dann ist Φ surjektiv, siehe (I.9), und es gilt $\ker(\Phi) = N$, siehe (I.10). Insbesondere ist $\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0))/N$.*

BEWEIS. Um die Notation zu vereinfachen setzen wir $U_1 := U$ und $U_2 := V$. Wir zeigen zunächst die Surjektivität von Φ . Sei dazu $f : I \rightarrow X$ eine Schleife bei x_0 . Da $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von X bildet, ist $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)\}$ eine offene Überdeckung des Intervalls I . Nach Lemma I.1.28 existieren $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \{1, 2\}$, sodass $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U_{\alpha_i}$, für jedes $i = 1, \dots, n$. Durch Weglassen gewisser Unterteilungspunkte s_i können wir erreichen, dass $f(s_i) \in U_1 \cap U_2$ für alle $i = 0, \dots, n$, denn wäre etwa $f(s_i) \in U_1 \setminus U_2$ dann gilt

sowohl $f([s_{i-1}, s_i]) \subseteq U_1$ als auch $f([s_i, s_{i+1}]) \subseteq U_1$. Betrachte die reparametrisierten Einschränkungen $f_i : I \rightarrow U_{\alpha_i} \subseteq X$, $f_i(s) := f((1-s)s_{i-1} + ss_i)$, $i = 1, \dots, n$. Es gilt $f \simeq f_1 f_2 \cdots f_n$ relativ Endpunkten in X , siehe Beispiel I.1.3. Da $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend ist, finden wir Wege $h_i : I \rightarrow U_1 \cap U_2$ von $h_i(0) = x_0$ nach $h_i(1) = f_i(1) = f(s_i)$, $i = 1, \dots, n-1$. Weiters seien $h_0 := h_n := c_{x_0}$ die konstanten Wege. Wir erhalten $f \simeq (h_0 f_1 \bar{h}_1)(h_1 f_2 \bar{h}_2)(h_2 f_3 \bar{h}_3) \cdots (h_{n-1} f_n \bar{h}_n)$ relativ Endpunkten in X , denn $\bar{h}_i h_i \simeq c_{f(s_i)}$. Jeder der Faktoren $h_{i-1} f_i \bar{h}_i$ ist eine Schleife bei x_0 in U_{α_i} und definiert daher ein Element $\sigma_i \in \pi_1(U_{\alpha_i}, x_0)$, $\sigma_i := [h_{i-1} f_i \bar{h}_i]$, $i = 1, \dots, n$. Es folgt $\Phi(\sigma_1 \cdots \sigma_n) = \Phi(\sigma_1) \cdots \Phi(\sigma_n) = [(h_0 f_1 \bar{h}_1) \cdots (h_{n-1} f_n \bar{h}_n)] = [f] \in \pi_1(X, x_0)$, also ist Φ surjektiv.

Es bleibt noch zu zeigen $\ker(\Phi) \subseteq N$. Seien also $f_k : I \rightarrow U_{\beta_k}$ Schleifen bei x_0 , $1 \leq k \leq m$, $\beta_1, \dots, \beta_m \in \{1, 2\}$, sodass $\Phi([f_1] \cdots [f_m]) = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Es ist zu zeigen, dass $[f_1] \cdots [f_m] = 1 \in (\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0))/N$. Betrachte die Schleife $f : I \rightarrow X$, $f := f_1 f_2 \cdots f_m$. Nach Voraussetzung ist $[f] = \Phi([f_1]) \cdots \Phi([f_m]) = \Phi([f_1] \cdots [f_m]) = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Daher existiert eine Homotopie von Wegen $H : I \times I \rightarrow X$ von $H_0 = c_{x_0}$ nach $H_1 = f$. Da $\{U_1, U_2\}$ eine offene Überdeckung von X ist, muss auch $\{H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)\}$ eine offene Überdeckung von $I \times I$ sein. Nach Lemma I.1.28 existieren $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ und $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ sowie $\alpha_i^j \in \{1, 2\}$, sodass $H([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_{\alpha_i^j}$, für alle $1 \leq i, j \leq n$. Betrachte die Wege

$$\begin{aligned} u_i^j : I &\rightarrow U_{\alpha_i^j} \subseteq X & u_i^j(s) &:= H((1-s)s_{i-1} + ss_i, t_j) \\ b_i^j : I &\rightarrow U_{\alpha_i^j} \subseteq X & b_i^j(s) &:= H((1-s)s_{i-1} + ss_i, t_{j-1}) \\ l_i^j : I &\rightarrow U_{\alpha_i^j} \subseteq X & l_i^j(t) &:= H(s_{j-1}, (1-t)t_{j-1} + tt_j) \\ r_i^j : I &\rightarrow U_{\alpha_i^j} \subseteq X & r_i^j(t) &:= H(s_j, (1-t)t_{j-1} + tt_j) \end{aligned}$$

Da $H_1 = f = f_1 \cdots f_m$ dürfen wir durch Übergang zu einer feineren Zerlegung von $I \times I$ o.B.d.A. annehmen, dass $0 = i_0 < i_1 < \dots < i_m = n$ existieren mit $\alpha_{i_{k-1}+1}^n = \alpha_{i_{k-1}+2}^n = \cdots = \alpha_{i_k}^n = \beta_k$ und

$$u_{i_{k-1}+1}^n u_{i_{k-1}+2}^n \cdots u_{i_k}^n \simeq f_k \quad \text{relativ Endpunkten in } U_{\beta_k}, \quad 1 \leq k \leq m. \quad (\text{I.11})$$

Da das Rechteck $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ einfach zusammenhängend ist, und weil $H([s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_{\alpha_i^j}$, folgt

$$l_i^j u_i^j \bar{r}_i^j \simeq b_i^j \quad \text{relativ Endpunkten in } U_{\alpha_i^j}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (\text{I.12})$$

Da U_1, U_2 und $U_1 \cap U_2$ wegzusammenhängend sind, existieren Wege $\beta_i^j : I \rightarrow X$, $0 \leq i, j \leq n$, mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $\beta_i^j(0) = x_0$ und $\beta_i^j(1) = H(s_i, t_j)$.
- (ii) $\beta_i^j : I \rightarrow U_{\alpha_i^j} \subseteq X$ falls $H(s_i, t_j) \in U_{\alpha_i^j}$.
- (iii) $\beta_i^j : I \rightarrow U_1 \cap U_2 \subseteq X$, falls $H(s_i, t_j) \in U_1 \cap U_2$.
- (iv) $\beta_i^j = c_{x_0}$, falls $H(s_i, t_j) = x_0$.

Betrachte nun die folgenden Schleifen bei x_0 , siehe (i) und (ii):

$$\begin{aligned}\hat{u}_i^j &:= \beta_{i-1}^j u_i^j \bar{\beta}_i^j : I \rightarrow U_{\alpha_i^j} \subseteq X, & \hat{b}_i^j &:= \beta_{i-1}^{j-1} b_i^j \bar{\beta}_i^{j-1} : I \rightarrow U_{\alpha_i^j} \subseteq X \\ \hat{l}_i^j &:= \beta_{i-1}^{j-1} l_i^j \bar{\beta}_{i-1}^j : I \rightarrow U_{\alpha_i^j} \subseteq X, & \hat{r}_i^j &:= \beta_{i-1}^{j-1} r_i^j \bar{\beta}_i^j : I \rightarrow U_{\alpha_i^j} \subseteq X\end{aligned}$$

Aus (I.12) erhalten wir $(\beta_{i-1}^{j-1} l_i^j \bar{\beta}_{i-1}^j)(\beta_{i-1}^j u_i^j \bar{\beta}_i^j)(\overline{\beta_{i-1}^{j-1} r_i^j \bar{\beta}_i^j}) \simeq \beta_{i-1}^{j-1} (l_i^j u_i^j \bar{r}_i^j) \bar{\beta}_i^{j-1} \simeq \beta_{i-1}^{j-1} b_i^j \bar{\beta}_i^{j-1}$ relativ Endpunkten in $U_{\alpha_i^j}$, und daher

$$[\hat{l}_i^j] [\hat{u}_i^j] [\hat{r}_i^j]^{-1} = [\hat{b}_i^j] \in \pi_1(U_{\alpha_i^j}, x_0), \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (\text{I.13})$$

Da H eine Homotopie relativ Endpunkten ist und wegen (iv) gilt

$$[\hat{l}_1^j] = 1 \in \pi_1(U_{\alpha_1^j}, x_0) \quad \text{und} \quad [\hat{r}_n^j] = 1 \in \pi_1(U_{\alpha_n^j}, x_0), \quad 1 \leq j \leq n. \quad (\text{I.14})$$

Da $H_0 = c_{x_0}$ und wegen (iv) gilt auch

$$[\hat{b}_i^1] = 1 \in \pi(U_{\alpha_i^1}, x_0), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (\text{I.15})$$

Aus (I.11) und (iv) erhalten wir

$$[\hat{u}_{i_{k-1}+1}^n] [\hat{u}_{i_{k-1}+2}^n] \cdots [\hat{u}_{i_k}^n] = [f_k] \in \pi_1(U_{\beta_k}, x_0), \quad 1 \leq k \leq m. \quad (\text{I.16})$$

Weiters haben wir die Relationen

$$[\hat{r}_{i-1}^j] = [\hat{l}_i^j] \in (\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0))/N, \quad 1 \leq j \leq n, 2 \leq i \leq n. \quad (\text{I.17})$$

Um dies einzusehen unterscheiden wir zwei Fälle. Ist $\alpha_{i-1}^j = \alpha_i^j$, dann gilt offensichtlich $[\hat{r}_{i-1}^j] = [\hat{l}_i^j] \in \pi_1(U_{\alpha_i^j}, x_0)$ und damit auch (I.17). Ist $\alpha_{i-1}^j \neq \alpha_i^j$, dann sind \hat{r}_{i-1}^j und \hat{l}_i^j Wege in $U_1 \cap U_2$, siehe (iii), und $[\hat{r}_{i-1}^j] = [\hat{l}_i^j] \in \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0)$, woraus nun (I.17) folgt, vgl. (I.10). Analog lässt sich zeigen

$$[\hat{u}_i^{j-1}] = [\hat{b}_i^j] \in (\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0))/N, \quad 2 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq n. \quad (\text{I.18})$$

Aus (I.13), (I.14) und (I.17) erhalten wir, in $(\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0))/N$,

$$[\hat{b}_1^j] \cdots [\hat{b}_n^j] = [\hat{l}_1^j] [\hat{u}_1^j] [\hat{r}_1^j]^{-1} \cdots [\hat{l}_n^j] [\hat{u}_n^j] [\hat{r}_n^j]^{-1} = [\hat{u}_1^j] \cdots [\hat{u}_n^j].$$

Zusammen mit (I.18) und (I.15) folgt, in $(\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0))/N$,

$$[\hat{u}_1^n] \cdots [\hat{u}_n^n] = [\hat{b}_1^n] \cdots [\hat{b}_n^n] = [\hat{u}_1^{n-1}] \cdots [\hat{u}_n^{n-1}] = \cdots = [\hat{b}_1^1] \cdots [\hat{b}_n^1] = 1.$$

Verwenden wir noch (I.16) so erhalten wir schließlich die Relation $[f_1] \cdots [f_m] = 1$ in $(\pi_1(U_1, x_0) * \pi_1(U_2, x_0))/N$. Damit ist der Beweis vollständig. \square

I.5.6. BEISPIEL. Wir wollen nun mit Hilfe von Satz I.5.5 nochmals verifizieren, dass S^n einfach zusammenhängend ist, $n \geq 2$, vgl. Satz I.1.26. Nach Beispiel I.1.25 sind $U := S^n \setminus \{N\}$ und $V := S^n \setminus \{S\}$ zwei einfach zusammenhängende offene Teilmengen von $S^n = U \cup V$. Da $n \geq 2$, ist $U \cap V \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ wegzusammenhängend. Aus Satz I.5.5 folgt daher $\pi_1(S^n) = 0$.

I.5.7. BEISPIEL (Suspension). Es sei X ein topologischer Raum, und es bezeichne \sim die von $(x, 1) \sim (y, 1)$ und $(x, -1) \sim (y, -1)$ erzeugte Äquivalenzrelation auf $X \times [-1, 1]$, $x, y \in X$. Der Quotientenraum

$$\Sigma X := (X \times [-1, 1]) / \sim$$

wird die *Suspension* oder *Einhängung* von X genannt. Die Suspension entsteht daher aus $X \times [-1, 1]$ indem wir $X \times \{1\}$ zu einem und $X \times \{-1\}$ zu einem anderen Punkt kollabieren. Etwa ist $\Sigma S^n \cong S^{n+1}$. Fassen wir X als Teilraum des Kegels CX auf, vgl. Beispiel I.3.18, dann gilt offensichtlich $\Sigma X \cong CX/X$. Ist X wegzusammenhängend, dann ist ΣX einfach zusammenhängend. Dies folgt aus Satz I.5.5 indem wir die offenen Teilmengen $U := (X \times (-1, 1]) / \sim$ und $V := (X \times [-1, 1)) / \sim$ von $\Sigma X = U \cup V$ betrachten. Beide sind kontrahierbar, vgl. Beispiel I.3.18, also einfach zusammenhängend, siehe Korollar I.3.29, und es ist $U \cap V \cong X \times (-1, 1)$ wegzusammenhängend.

Betrachte Einpunktvereinigung $\bigvee_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha)$ punktierte Räume (X_α, x_α) , $\alpha \in A$. Die kanonischen Inklusionen $\iota_\alpha : (X_\alpha, x_\alpha) \rightarrow \bigvee_{\alpha' \in A} (X_{\alpha'}, x_{\alpha'})$ induzieren Gruppenhomomorphismen $(\iota_\alpha)_* : \pi_1(X_\alpha, x_\alpha) \rightarrow \pi_1(\bigvee_{\alpha' \in A} (X_{\alpha'}, x_{\alpha'}))$. Diese definieren einen Gruppenhomomorphismus, siehe Lemma I.5.1(iv),

$$\bigoplus_{\alpha \in A} \pi_1(X_\alpha, x_\alpha) \rightarrow \pi_1\left(\bigvee_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha)\right). \quad (\text{I.19})$$

I.5.8. PROPOSITION. *Es seien (X_α, x_α) , $\alpha \in A$, punktierter Hausdorffräume. Weiters sollen offene Umgebungen $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ von x_α existieren, sodass $\{x_\alpha\}$ Deformationsretrakt von U_α ist. In dieser Situation ist (I.19) ein Gruppenisomorphismus. Insbesondere gilt $\pi_1((X, x_0) \vee (Y, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0)$.*

BEWEIS. Wir behandeln zunächst die Einpunktvereinigung zweier Räume $(X_1 \vee X_2, *) = (X_1, x_1) \vee (X_2, x_2)$. O.B.d.A. seien X_1 und X_2 wegzusammenhängend, vgl. Proposition I.1.16. Betrachte die offenen Teilmengen $U := (U_1, x_1) \vee (X_2, x_2)$ und $V := (X_1, x_1) \vee (U_2, x_2)$ von $X_1 \vee X_2 = U \cup V$. Eine retrahierende Deformation von U_1 auf $\{x_1\}$ zusammen mit der identischen Abbildung id_{X_2} liefert eine retrahierende Deformation von U auf X_2 , vgl. Lemma I.3.17. Also ist die Einbettung $(X_2, x_2) \rightarrow (U, *)$ eine Homotopieäquivalenz und induziert daher einen Isomorphismus $\pi_1(X_2, x_2) \cong \pi_1(U, *)$, siehe Proposition I.3.24. Ebenso induziert $(X_1, x_1) \rightarrow (V, *)$ einen Isomorphismus $\pi_1(X_1, x_1) \cong \pi_1(V, *)$. Eine retrahierende Deformation von U_1 auf $\{x_1\}$ zusammen mit einer retrahierenden Deformation von U_2 auf $\{x_2\}$ liefern eine retrahierende Deformation von $U \cap V = (U_1, x_1) \vee (U_2, x_2)$ auf $\{*\}$. Also ist $U \cap V$ kontrahierbar und damit einfach zusammenhängend, siehe Korollar I.3.29. Aus Satz I.5.5 folgt daher

$$\pi_1((X_1, x_1) \vee (X_2, x_2)) \cong \pi_1(X_1, x_1) * \pi_1(X_2, x_2).$$

Mittels Induktion sehen wir, dass die Aussage der Proposition auch für endliche Indexmengen A richtig bleibt.

Sei nun A beliebig. Ist $F \subseteq A$ eine Teilmenge so erhalten wir nebenstehendes kommutatives Diagram. Beachte, dass die beiden vertikalen Pfeile injektive Homomorphismen bezeichnen. Für den rechten folgt dies aus der Tatsache, dass eine stetige Abbildung $\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow \bigvee_{\alpha \in F} X_\alpha$ existiert die linksinvers zur kanonischen Inklusion $\bigvee_{\alpha \in F} X_\alpha \rightarrow \bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$ ist. Für endliches F ist der untere horizontale Pfeil ein Isomorphismus, siehe oben. Es folgt sofort, dass (I.19) injektiv ist, siehe Lemma I.5.1(ii). Nach Lemma I.5.9 unten muss jede Schleife in $\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$ schon in einer endlichen Einpunktvereinigung $\bigvee_{\alpha \in F} X_\alpha$ liegen. Aus obigem Diagramm folgt nun auch die Surjektivität von (I.19). \square

$$\begin{array}{ccc} * \pi_1(X_\alpha) & \longrightarrow & \pi_1(\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha) \\ \uparrow & & \uparrow \\ * \pi_1(X_\alpha) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(\bigvee_{\alpha \in F} X_\alpha) \end{array}$$

I.5.9. LEMMA. *Es seien (X_α, x_α) , $\alpha \in A$, punktierte Hausdorffräume und $K \subseteq \bigvee_{\alpha \in A} (X_\alpha, x_\alpha)$ eine kompakte Teilmenge der Einpunktvereinigung. Dann existiert eine endliche Teilmenge $F \subseteq A$ mit $K \subseteq \bigvee_{\alpha \in F} (X_\alpha, x_\alpha)$.*

BEWEIS. Es sei $F := \{\alpha \in A : \emptyset \neq K \cap (X_\alpha \setminus \{x_\alpha\})\}$. Dann gilt offensichtlich $K \subseteq \bigvee_{\alpha \in F} X_\alpha$. Für jedes $\alpha \in F$ wähle einen Punkt $z_\alpha \in K \cap (X_\alpha \setminus \{x_\alpha\})$. Die Menge $L := \{z_\alpha : \alpha \in F\} \subseteq K$ hat dann gleich viele Elemente wie F . Es genügt daher zu zeigen, dass L endlich ist. Wegen der Hausdorffeigenschaft von X_α ist $L \cap X_\alpha = \{z_\alpha\}$ abgeschlossen in X_α , also ist L eine abgeschlossene Teilmenge von $\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$. Folglich ist L abgeschlossen in K und damit eine kompakte Teilmenge. Weiters ist $X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}$ eine offene Teilmenge von $\bigvee_{\alpha \in A} X_\alpha$ mit $(X_\alpha \setminus \{x_\alpha\}) \cap L = \{z_\alpha\}$, daher trägt L die diskrete Topologie. Als diskreter kompakter Raum muss L endlich sein. \square

I.5.10. BEISPIEL. Für $n_i \geq 2$ ist $S^{n_1} \vee \dots \vee S^{n_k}$ einfach zusammenhängend, siehe Satz I.1.26 und Proposition I.5.8. Mit Hilfe von Satz I.2.1 erhalten wir aber auch $\pi_1(S^1 \vee \dots \vee S^1) \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$. Einpunktvereinigungen von Kreisen können also nur dann homotopieäquivalent (homöomorph) sein, wenn sie gleich viele Faktoren besitzen, siehe Beispiel I.5.3 und Satz I.3.27.

I.5.11. BEISPIEL. Es seien P_1, \dots, P_k paarweise verschiedene Punkte in \mathbb{R}^n . Der Raum $\mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ ist homotopieäquivalent zur Einpunktvereinigung $S^{n-1} \vee \dots \vee S^{n-1}$ mit k Faktoren. Für $n \geq 3$ ist daher $\mathbb{R}^n \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ einfach zusammenhängend, siehe Satz I.3.27 und Beispiel I.5.10. Im Fall $n = 2$ folgt

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\}) \cong \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}.$$

Für $l \neq k$ sind daher $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_k\}$ und $\mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_l\}$ nicht homotopieäquivalent, und daher auch nicht homöomorph.

I.5.12. BEISPIEL (Abbildungskegel). Es sei $\varphi : Y \rightarrow X$ stetig. Weiters bezeichne $CY := (Y \times I)/(Y \times \{0\})$ den Kegel über Y , $p : Y \times I \rightarrow CY$ die Quotientenabbildung, $*$:= $p(Y \times \{0\})$ die Spitze des Kegels und $\iota_Y : Y \rightarrow CY$ die Einbettung, $\iota_Y(y) = p(y, 1)$. Wir können φ als eine auf der Teilmenge

$A := \iota_Y(Y) \subseteq CY$ definierte Abbildung betrachten. Der Raum $C_\varphi := X \cup_\varphi CY$ wird der *Abbildungskegel* von φ genannt. Wir erhalten eine kanonische Einbettung $\iota_X : X \rightarrow C_\varphi$ und eine stetige Abbildung $\hat{\varphi} : CY \rightarrow C_\varphi$ mit $\iota_X \circ \varphi = \hat{\varphi} \circ \iota_Y$. Beachte, dass die Abbildung $\iota_X \circ \varphi : Y \rightarrow C_\varphi$ nullhomotop ist, denn $H : Y \times I \rightarrow C_\varphi$, $H(y, t) := \hat{\varphi}(p(y, t))$ liefert eine Homotopie von der konstanten Abbildung $H_0 = c_{\hat{\varphi}(\ast)}$ nach $H_1 = \hat{\varphi} \circ \iota_Y = \iota_X \circ \varphi$. Weiters ist $U := C_\varphi \setminus \{\hat{\varphi}(\ast)\}$ eine offene Umgebung von $\iota_X(X)$, und $\iota_X(X)$ ist Deformationsretrakt von U , denn $U \cong X \cup_\varphi (Y \times (0, 1])$ und $Y \times \{1\}$ ist Deformationsretrakt von $Y \times (0, 1]$, vgl. Lemma I.3.19. Insbesondere ist die Einbettung $\iota_X : X \rightarrow C_\varphi \setminus \{\hat{\varphi}(\ast)\}$ eine Homotopieäquivalenz. Ebenso ist $V := \hat{\varphi}(p(Y \times [0, 1))) = C_\varphi \setminus \iota_X(X)$ eine offene Umgebung von $\hat{\varphi}(\ast)$ und $\{\hat{\varphi}(\ast)\}$ ist Deformationsretrakt von V , denn $V \cong (Y \times [0, 1))/ (Y \times \{0\})$. Insbesondere ist V kontrahierbar. Schließlich ist $j_Y = H_{1/2} : Y \rightarrow U \cap V$, $j_Y(y) := \hat{\varphi}(p(y, 1/2))$, eine Einbettung und eine Homotopieäquivalenz. Fassen wir Y als Teilraum des Abbildungszyinders Z_φ wie in Beispiel I.3.20 auf, so erhalten wir einen Homöomorphismus $C_\varphi \cong Z_\varphi/Y$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\iota_X} & C_\varphi := X \cup_\varphi CY \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \hat{\varphi} \\ Y & \xrightarrow{\iota_Y} & CY \end{array}$$

I.5.13. SATZ (Fundamentalgruppe des Abbildungskegels). *Es seien X, Y zwei wegzusammenhängende topologische Räume, $\varphi : Y \rightarrow X$ stetig, $y_0 \in Y$ und $x_0 := \varphi(y_0)$. Weiters bezeichne $\iota_X : X \rightarrow C_\varphi$ die kanonische Einbettung, siehe oben. Dann ist der Homomorphismus $(\iota_X)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(C_\varphi, \iota_X(x_0))$ surjektiv, und sein Kern stimmt mit dem von $\text{img}(\varphi_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0))$ erzeugten Normalteiler überein. Insbesondere gilt*

$$\pi_1(C_\varphi, \iota_X(x_0)) \cong \pi_1(X, x_0) / \mathcal{N}(\text{img}(\pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(X, x_0))).$$

BEWEIS. Wir verwenden die Notation aus Beispiel I.5.12, $C_\varphi = U \cup V$. Die kanonische Einbettung $\iota_X : X \rightarrow U$ ist eine Homotopieäquivalenz, V ist kontrahierbar, und $j_Y : Y \rightarrow U \cap V$ ist eine Homotopieäquivalenz. Betrachte den Basispunkt $x_1 := j_Y(y_0) \in U \cap V$. Aus Satz I.5.5 folgt, dass der von der Inklusion induzierte Homomorphismus $\pi_1(U, x_1) \rightarrow \pi_1(C_\varphi, x_1)$ surjektiv ist und sein Kern mit dem von $\text{img}((j_Y)_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(U, x_1))$ erzeugten Normalteiler übereinstimmt. Betrachte die Homotopie $H : Y \times I \rightarrow U$, $H(y, t) := \hat{\varphi}(p(y, 1 - t/2))$, von $H_0 = \hat{\varphi} \circ \iota_Y = \iota_X \circ \varphi$ nach $H_1 = j_Y$, und den Weg $h : I \rightarrow U$, $h(t) := H(y_0, t)$, von $h(0) = \iota_X(x_0)$ nach $h(1) = x_1$. Nach Proposition I.3.26 kommutiert das obere Rechteck im nebenstehenden Diagramm, das untere kommutiert trivialerweise. Daher ist der Homomorphismus $(\iota_X)_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(C_\varphi, \iota_X(x_0))$ surjektiv, und sein Kern mit dem von $\text{img}(\varphi_*)$ erzeugten Normalteiler übereinstimmt. \square

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi_1(X, x_0) \\ (j_Y)_* \downarrow & & \cong \downarrow (\iota_X)_* \\ \pi_1(U, x_1) & \xrightarrow[\cong]{\beta_h} & \pi_1(U, \iota_X(x_0)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(C_\varphi, x_1) & \xrightarrow[\cong]{\beta_h} & \pi_1(C_\varphi, \iota_X(x_0)) \end{array}$$

I.5.14. KOROLLAR (Ankleben einer Zelle). *Es sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$ stetig, $y_0 \in S^{n-1}$, $x_0 := \varphi(y_0) \in X$, und es bezeichne $\iota : X \rightarrow X \cup_{\varphi} D^n$ die kanonische Einbettung. Dann gilt:*

- (i) *Für $n \geq 3$ ist $\iota_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X \cup_{\varphi} D^n, \iota(x_0))$ ein Isomorphismus.*
- (ii) *Für $n = 2$ ist $\iota_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X \cup_{\varphi} D^n, \iota(x_0))$ surjektiv, und sein Kern stimmt mit dem von $\text{img}(\varphi_*)$ erzeugten Normalteiler überein, wobei $\varphi_* : \pi_1(S^{n-1}, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$. Insbesondere ist $\pi_1(X \cup_{\varphi} D^n, \iota(x_0)) \cong \pi_1(X, x_0) / \mathcal{N}(\text{img}(\varphi_*))$.*

BEWEIS. Beachte, dass $CS^{n-1} \cong D^n$, denn die Abbildung $S^{n-1} \times I \rightarrow D^n$, $(x, t) \mapsto tx$, faktorisiert zu einem Homöomorphismus $CS^{n-1} \rightarrow D^n$. Damit gilt $X \cup_{\varphi} D^n \cong C_{\varphi}$. Für $n \geq 2$ ist S^{n-1} wegzusammenhängend, aus Satz I.5.13 folgt daher die Surjektivität von $\iota_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X \cup_{\varphi} D^n, \iota(x_0))$ und $\ker(\iota_*) = \mathcal{N}(\text{img}(\varphi_*))$. Für $n \geq 3$ ist S^{n-1} einfach zusammenhängend, siehe Satz I.1.26, also $\ker(\iota_*) = 0$. \square

I.5.15. BEISPIEL. Betrachte die Abbildung $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$, $\varphi(z) := z^k$, $k \in \mathbb{Z}$, und den Raum $X := S^1 \cup_{\varphi} D^2$. Nach Korollar I.5.14(ii) induziert die Einbettung $\iota : S^1 \rightarrow X$ einen Isomorphismus $\pi_1(S^1, 1) / \text{img}(\varphi_*) \cong \pi_1(X, \iota(1))$ wobei $\varphi_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$. Mit Hilfe von Beispiel I.2.2 sehen wir daher, dass $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}_k$. Die Schleife $f := \iota \circ \omega_1 : I \rightarrow X$, siehe (I.2), repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(X)$, und es gilt die Relation $[f]^k = 1$.

Wir erinnern uns, dass $\mathbb{C}P^n$ die Menge aller 1-dimensionalen komplexen linearen Teilräume von \mathbb{C}^{n+1} bezeichnet, $n \in \mathbb{N}_0$. Führen wir auf $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} : \lambda v = w$ ein, dann können wir $\mathbb{C}P^n$ mit $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$ identifizieren, $\mathbb{C}v \leftrightarrow [v]$. Wir versehen $\mathbb{C}P^n$ mit der Quotiententopologie,

$$\mathbb{C}P^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim.$$

Betrachten wir S^{2n+1} als Teilraum von \mathbb{C}^{n+1} , $S^{2n+1} = \{v \in \mathbb{C}^{n+1} : \|v\| = 1\}$, dann induziert die kanonische Inklusion $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ einen Homöomorphismus $S^{2n+1} / \sim \cong (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$. Seine Inverse ist die von der radialen Projektion $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^{2n+1}$, $v \mapsto \frac{1}{\|v\|}v$, induzierte stetige Abbildung $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \rightarrow S^{2n+1} / \sim$. Wir können $\mathbb{C}P^n$ daher auch als Quotient der Sphäre verstehen,

$$\mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / \sim.$$

Die kanonische Projektion $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ wird als *Hopfabbildung* bezeichnet. Da S^{2n+1} kompakt ist, und da auch die Äquivalenzklassen in S^{2n+1} abgeschlossen sind, sehen wir, dass $\mathbb{C}P^n$ ein kompakter Hausdorffraum ist. Bemerke auch, dass $\mathbb{C}P^n$ als stetiges Bild der wegzusammenhängenden Sphäre S^{2n+1} selbst wegzusammenhängend ist.

$\mathbb{C}P^0$ ist ein einpunktiger Raum. $\mathbb{C}P^1$ ist homöomorph zu S^2 und daher einfach zusammenhängend, siehe Satz I.1.26. Tatsächlich induziert die Abbildung $\varphi : S^3 \rightarrow S^2$, $\varphi(z, w) := (2\bar{z}w, |w|^2 - |z|^2)$, einen Homöomorphismus $S^3 / \sim \cong S^2$.

Die Inklusion $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ induziert eine Einbettung $\iota : \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$. Es bezeichne $p_n : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ die kanonische Projektion. Betrachte die stetige Abbildung $\Phi : D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$, $\Phi(z) := p_n(z, \sqrt{1 - \|z\|^2})$. Diese ist surjektiv und auf $B^{2n} = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ injektiv. Bezeichnet $\varphi : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ die Hopfababbildung so gilt offensichtlich $\Phi|_{S^{2n-1}} = \iota \circ \varphi$. Wir erhalten eine stetige Abbildung $\iota \cup_\varphi \Phi : \mathbb{C}P^{n-1} \cup_\varphi D^{2n} \rightarrow \mathbb{C}P^n$. Diese ist bijektiv, also ein Homöomorphismus. Wir sehen daher, dass $\mathbb{C}P^n$ aus $\mathbb{C}P^{n-1}$ durch Ankleben einer $2n$ -Zelle längs der Hopfababbildung $\varphi : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ entsteht,

$$\mathbb{C}P^n \cong \mathbb{C}P^{n-1} \cup_\varphi D^{2n}. \quad (\text{I.20})$$

Nach Korollar I.5.14 induziert die kanonische Einbettung $\iota : \mathbb{C}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ einen Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{C}P^{n-1}) \cong \pi_1(\mathbb{C}P^n)$, falls $n \geq 1$. Mittels Induktion folgt nun, dass $\mathbb{C}P^n$ einfach zusammenhängend ist, für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir haben also gezeigt:

I.5.16. PROPOSITION. $\mathbb{C}P^n$ ist einfach zusammenhängend, $n \in \mathbb{N}_0$.

Es bezeichne $\mathbb{H}P^n := (\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim = S^{4n+3}/\sim$ den quaternionischen projektiven Raum, und $\varphi : S^{4n-1} \rightarrow \mathbb{H}P^{n-1}$ die kanonische Projektion. Dann gilt

$$\mathbb{H}P^n \cong \mathbb{H}P^{n-1} \cup_\varphi D^{4n}. \quad (\text{I.21})$$

Genau wie im Fall des komplexen projektiven Raums erhalten wir daher aus Korollar I.5.14:

I.5.17. PROPOSITION. $\mathbb{H}P^n$ ist einfach zusammenhängend, $n \in \mathbb{N}_0$.

Wir wollen nun analog zum komplexen Fall auch die reellen projektiven Räume behandeln. Wir erinnern uns, dass $\mathbb{R}P^n$ die Menge aller 1-dimensionalen linearen Teilräume von \mathbb{R}^{n+1} bezeichnet, $n \in \mathbb{N}_0$. Führen wir auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda v = w$ ein, dann können wir $\mathbb{R}P^n$ mit $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ identifizieren, $\mathbb{R}v \leftrightarrow [v]$. Wir versehen $\mathbb{R}P^n$ mit der Quotiententopologie,

$$\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim.$$

Die kanonische Inklusion $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ induziert einen Homöomorphismus $S^n/\sim \cong (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$. Seine Inverse ist die von der radialen Projektion $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$, $v \mapsto \frac{1}{\|v\|}v$, induzierte stetige Abbildung $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim \rightarrow S^n/\sim$. Wir können $\mathbb{R}P^n$ daher auch als Quotient der Sphäre verstehen,

$$\mathbb{R}P^n = S^n/\sim.$$

Wie im komplexen Fall schließen wir, dass $\mathbb{R}P^n$ ein wegzusammenhängender, kompakter Hausdorffraum ist.

Die Inklusion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induziert eine Einbettung $\iota : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Es bezeichne $p_n : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ die kanonische Projektion. Betrachte die stetige Abbildung $\Phi : D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $\Phi(x) := p_n(x, \sqrt{1 - \|x\|^2})$. Diese ist surjektiv und auf $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$ injektiv. Bezeichnet $\varphi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ die kanonische Projektion, so gilt offensichtlich $\Phi|_{S^{n-1}} = \iota \circ \varphi$. Wir erhalten eine

stetige Abbildung $\iota \cup_{\varphi} \Phi : \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\varphi} D^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$. Diese ist bijektiv, also ein Homöomorphismus. Wir sehen daher, dass $\mathbb{R}P^n$ aus $\mathbb{R}P^{n-1}$ durch Ankleben einer n -Zelle längs der kanonischen Projektion $\varphi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ entsteht,

$$\mathbb{R}P^n \cong \mathbb{R}P^{n-1} \cup_{\varphi} D^n.$$

$\mathbb{R}P^0$ ist ein einpunktiger Raum, und $\mathbb{R}P^1 \cong D^1/\{-1, 1\} \cong S^1$. Insbesondere $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$. Aus Beispiel I.5.15 erhalten wir $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$. Nach Korollar I.5.14 induziert die kanonische Einbettung $\iota : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ einen Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \pi_1(\mathbb{R}P^n)$, falls $n \geq 3$. Mittels Induktion erhalten wir daher $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$. Die Schleife $f : I \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $f(s) := p_n(\cos(\pi s), \sin(\pi s), 0, \dots, 0)$, repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$, $n \geq 1$. Für $n \geq 2$ gilt die Relation $[f]^2 = 1$. Wir halten fest:

I.5.18. PROPOSITION. *Es gilt $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \cong \mathbb{Z}$ sowie $\pi_1(\mathbb{R}P^2) \cong \mathbb{Z}_2$, und der von der Inklusion $\mathbb{R}P^1 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ induzierte Homomorphismus $\pi_1(\mathbb{R}P^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^2)$ ist nicht trivial. Weiters induziert die Inklusion $\mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}P^n$ einen Isomorphismus $\mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(\mathbb{R}P^2) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbb{R}P^n)$, für $n \geq 2$.*

I.6. Die Fundamentalgruppe einiger Matrizen Gruppen. Wir wollen in diesem Kapitel damit beginnen die Topologie der Matrizen Gruppen zu studieren. Unter Anderem werden wir die Fundamentalgruppen der orthogonalen und der unitären Gruppen berechnen.

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne

$$GL_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$$

die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$ -Matrizen mit komplexen Eintragungen. Dies ist eine offene Teilmenge von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ und wir versehen $GL_n(\mathbb{C})$ mit der induzierten Teilraumtopologie. Weiters betrachten wir die Untergruppe der unitären Matrizen,

$$U_n := \{U \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \mid U^*U = I_n\}$$

wobei I_n die $(n \times n)$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Wir versehen U_n mit der Teilraumtopologie. Da durch stetige Gleichungen gegeben, ist U_n abgeschlossen in \mathbb{C}^{n^2} . Da die Spalten einer unitären Matrix Einheitsvektoren bilden, ist $U_n \subseteq \mathbb{C}^{n^2}$ auch beschränkt. Nach dem Satz von Heine–Borel ist U_n daher kompakt. Etwa ist $U_1 = S^1$. Es bezeichne

$$\Delta_n(\mathbb{C}) := \{D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) : D_{i,i} \in (0, \infty) \text{ für alle } i, \text{ und } D_{i,j} = 0 \text{ falls } i > j\}$$

die Gruppe der komplexen oberen Dreiecksmatrizen mit positiven reellen Eintragungen auf der Diagonale, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie. Die Abbildung

$$\varphi : U_n \times \Delta_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(U, D) := UD \tag{I.22}$$

ist sicherlich wohldefiniert und stetig.

I.6.1. PROPOSITION. Die Abbildung (I.22) definiert einen Homöomorphismus, $GL_n(\mathbb{C}) \cong U_n \times \Delta_n(\mathbb{C})$ und es gilt $\Delta_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{n(n-1)/2}$. Insbesondere ist U_n Deformationsretrakt von $GL_n(\mathbb{C})$, und die kanonische Inklusion $U_n \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ daher eine Homotopieäquivalenz.

BEWEIS. Zunächst ist φ injektiv, denn aus $U_1 D_1 = U_2 D_2$, $U_i \in U_n$, $D_i \in \Delta_n(\mathbb{C})$, folgt $U_2^{-1} U_1 = D_2 D_1^{-1} \in U_n \cap \Delta_n(\mathbb{C}) = \{I_n\}$, also $U_1 = U_2$ und $D_1 = D_2$. Mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren werden wir nun eine Umkehrabbildung angeben. Sei dazu $A = (v_1 | v_2 | \cdots | v_n) \in GL_n(\mathbb{C})$ mit Spalten $v_i \in \mathbb{C}^n$. Definiere rekursiv

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &:= v_1 & u_1 &:= \frac{1}{|\tilde{u}_1|} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 &:= v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 & u_2 &:= \frac{1}{|\tilde{u}_2|} \tilde{u}_2 \\ &\vdots & & \\ \tilde{u}_k &:= v_k - \langle v_k, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_k, u_{k-1} \rangle u_{k-1} & u_k &:= \frac{1}{|\tilde{u}_k|} \tilde{u}_k \\ &\vdots & & \\ \tilde{u}_n &:= v_n - \langle v_n, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1} \rangle u_{n-1} & u_n &:= \frac{1}{|\tilde{u}_n|} \tilde{u}_n \end{aligned}$$

Nach Konstruktion bildet (u_1, \dots, u_n) eine Orthonormalbasis von \mathbb{C}^n , also ist $\psi_1(A) := (u_1 | u_2 | \cdots | u_n) \in U_n$. Dies liefert eine stetige Abbildung $\psi_1 : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow U_n$, $A \mapsto \psi_1(A)$. Nach Konstruktion gilt

$$\underbrace{(u_1 | u_2 | \cdots | u_n)}_{=\psi_1(A)} = \underbrace{(v_1 | v_2 | \cdots | v_n)}_{=A} \cdot \underbrace{D_1 N_1 D_2 N_2 \cdots D_n N_n}_{\in \Delta_n(\mathbb{C})}$$

wobei $D_k, N_k \in \Delta_n(\mathbb{C})$ durch

$$D_k = \begin{pmatrix} 1 & & & -\langle v_k, u_1 \rangle & & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & & \\ & & 1 & -\langle v_k, u_{k-1} \rangle & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N_k = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \frac{1}{|\tilde{u}_k|} & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Daher ist $\psi_1(A)^{-1} A = (D_1 N_1 \cdots D_n N_n)^{-1} \in \Delta_n(\mathbb{C})$ und wir erhalten eine stetige Abbildung $\psi_2 : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow \Delta_n(\mathbb{C})$, $\psi_2(A) := \psi_1(A)^{-1} A$. Setzen wir $\psi := (\psi_1, \psi_2) : GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow U_n \times \Delta_n(\mathbb{C})$, dann gilt offensichtlich $\varphi \circ \psi = \text{id}_{GL_n(\mathbb{C})}$, also ist (I.22) surjektiv. Zusammen mit der Injektivität von (I.22) folgt, dass ψ die Umkehrabbildung von φ ist. Also ist (I.22) tatsächlich ein Homöomorphismus.

Durch Logarithmieren der Diagonaleinträge erhalten wir einen Homöomorphismus $\Delta_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{n(n-1)/2}$. Insbesondere bildet die einpunktige Teilmenge

$\{I_n\}$ einen Deformationsretrakt von $\Delta_n(\mathbb{C})$. Daher ist auch $U_n \times \{I_n\}$ Deformationsretrakt von $U_n \times \Delta_n(\mathbb{C})$. Mit Hilfe des Homöomorphismus (I.22) sehen wir, dass U_n Deformationsretrakt von $GL_n(\mathbb{C})$ ist. \square

Es bezeichne $SL_n(\mathbb{C}) := \{A \in GL_n(\mathbb{C}) : \det(A) = 1\}$ die spezielle lineare Gruppe, $SU_n(\mathbb{C}) := U_n \cap SL_n(\mathbb{C})$ die spezielle unitäre Gruppe und $S\Delta_n(\mathbb{C}) := \Delta_n(\mathbb{C}) \cap SL_n(\mathbb{C})$. Alle diese Gruppen seien mit der von $GL_n(\mathbb{C})$ induzierten Teilraumtopologie versehen. Als abgeschlossene Teilmenge von U_n ist SU_n kompakt.

I.6.2. BEISPIEL. SU_1 ist ein einpunktiger Raum. SU_2 ist homöomorph zu S^3 und daher einfach zusammenhängend, siehe Satz I.1.26. Um einen Homöomorphismus $S^3 \cong SU_2$ anzugeben betrachten wir S^3 als Teilraum von \mathbb{C}^2 , $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$. Es ist dann $\varphi : S^3 \rightarrow SU_2$, $(z, w) \mapsto \begin{pmatrix} z & -\bar{w} \\ w & \bar{z} \end{pmatrix}$, ein Homöomorphismus.

Ist $n \leq m$, dann können wir $GL_n(\mathbb{C})$ als Untergruppe von $GL_m(\mathbb{C})$ auffassen, der Homomorphismus $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}$ ist eine Einbettung. Dies liefert auch Einbettungen $U_n \subseteq U_m$, $SL_n(\mathbb{C}) \subseteq SL_m(\mathbb{C})$ und $SU_n \subseteq SU_m$.

I.6.3. PROPOSITION. *Die Einschränkung von (I.22) liefert einen Homöomorphismus $SL_n(\mathbb{C}) \cong SU_n \times S\Delta_n(\mathbb{C})$ und es gilt $S\Delta_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{C}^{n(n-1)/2}$. Insbesondere ist SU_n Deformationsretrakt von $SL_n(\mathbb{C})$, und die kanonische Inklusion $SU_n \rightarrow SL_n(\mathbb{C})$ daher eine Homotopieäquivalenz. Weiters gilt $GL_n(\mathbb{C}) \cong GL_1(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C})$ sowie $U_n \cong U_1 \times SU_n$.*

BEWEIS. Klarerweise bildet (I.22) die Teilmenge $SU_n \times S\Delta_n(\mathbb{C})$ nach $SL_n(\mathbb{C})$ ab. Sei nun $A \in SL_n(\mathbb{C})$. Nach Proposition I.6.1 existieren $U \in U_n$ und $D \in \Delta_n(\mathbb{C})$ mit $UD = A$. Es folgt $1 = \det(A) = \det(U) \det(D)$. Da $\det(U) \in S^1$ und $\det(D) \in \mathbb{R}_+$ schließen wir $\det(U) = 1 = \det(D)$, dh. $U \in SU_n$ and $D \in S\Delta_n(\mathbb{C})$. Daher schränkt sich (I.22) zu einer Bijektion $SU_n \times S\Delta_n(\mathbb{C}) \cong SL_n(\mathbb{C})$ ein, die nach Proposition I.6.1 ein Homöomorphismus sein muss. Wie im Beweis von Proposition I.6.1 folgt, dass SU_n Deformationsretrakt von $SL_n(\mathbb{C})$ ist. Matrizenmultiplikation liefert Homöomorphismen $U_1 \times SU_n \cong U_n$ und $GL_1(\mathbb{C}) \times SL_n(\mathbb{C}) \cong GL_n(\mathbb{C})$. \square

I.6.4. PROPOSITION. *SU_n und $SL_n(\mathbb{C})$ sind einfach zusammenhängend.*

Für den Beweis von Proposition I.6.4 betrachten wir die stetige Abbildung

$$p : SU_{n+1} \rightarrow S^{2n+1}, \quad p(A) := AN, \quad (\text{I.23})$$

wobei $N := (0, \dots, 0, 1) \in S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ den $(n+1)$ -ten Einheitsvektor bezeichnet, $p(A)$ ist daher die letzte Spalte von A .

I.6.5. LEMMA. *Es sei $P \in S^{2n+1}$ und es bezeichne $X := S^{2n+1} \setminus \{P\}$. Dann existiert ein Homöomorphismus $\varphi : X \times SU_n \xrightarrow{\cong} p^{-1}(X)$, sodass $p \circ \varphi = \text{pr}_1$ und $\varphi(x, AU) = \varphi(x, A)U$ für alle $A, U \in SU_n$, $x \in X$. Dabei bezeichnet $\text{pr}_1 : X \times SU_n \rightarrow X$ die Projektion auf den ersten Faktor.¹²*

¹²Es ist daher (I.23) ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe SU_n .

BEWEIS. Wir konstruieren zunächst eine stetige Abbildung $\sigma : X \rightarrow \mathrm{SU}_{n+1}$ mit $p \circ \sigma = \mathrm{id}_X$, siehe Vorlesung.

Wir definieren nun $\varphi : X \times \mathrm{SU}_n \rightarrow p^{-1}(X)$, $\varphi(x, A) := \sigma(x)A$. Offensichtlich gilt $\varphi(x, AU) = \varphi(x, A)U$, für $A, U \in \mathrm{SU}_n$. Es ist aber auch $p(\varphi(x, A)) = p(\sigma(x)A) = p(\sigma(x)) = x$, also $p \circ \varphi = \mathrm{pr}_1$. Für $B, C \in \mathrm{SU}_{n+1}$ gilt offensichtlich $p(B) = p(C)$ genau dann, wenn $C^{-1}B \in \mathrm{SU}_n$. Wegen $p(\sigma(p(B))) = p(B)$ erhalten wir insbesondere $\sigma(p(B))^{-1}B \in \mathrm{SU}_n$, für $B \in p^{-1}(X)$. Es ist daher $\psi : p^{-1}(X) \rightarrow X \times \mathrm{SU}_n$, $\psi(B) := (p(B), \sigma(p(B))^{-1}B)$, eine stetige Abbildung. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies die Umkehrabbildung von φ ist. Also ist φ ein Homöomorphismus. \square

BEWEIS VON PROPOSITION I.6.4. Nach Proposition I.6.3 ist die Inklusion $\mathrm{SU}_n \rightarrow \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ eine Homotopieäquivalenz, es genügt daher zu zeigen, dass SU_n einfach zusammenhängend ist. Wir gehen induktiv vor. Der Fall $n = 1$ ist trivial, denn SU_1 besteht aus nur einem Punkt. Nehmen wir also induktiv an, SU_n ist einfach zusammenhängend. Fixiere einen Punkt $P \in S^{2n+1}$ und betrachte die beiden offenen Teilmengen $U := p^{-1}(S^{2n+1} \setminus \{P\})$ und $V := p^{-1}(S^{2n+1} \setminus \{-P\})$ von SU_{n+1} , siehe (I.23). Es gilt dann offensichtlich $\mathrm{SU}_{n+1} = U \cup V$. Aus Lemma I.6.5 erhalten wir aber auch $U \cong (S^{2n+1} \setminus \{P\}) \times \mathrm{SU}_n$ sowie $V \cong (S^{2n+1} \setminus \{-P\}) \times \mathrm{SU}_n$. Da $S^{2n+1} \setminus \{P\} \cong \mathbb{R}^{2n+1} \cong S^{2n+1} \setminus \{-P\}$, siehe Beispiel I.1.25, schließen wir aus unserer Induktionsannahme, dass U und V beide einfach zusammenhängend sind, siehe Beispiel I.1.24. Wir sehen daraus aber auch, dass $U \cap V$ wegzusammenhängend ist, denn $U \cap V = p^{-1}(S^{2n+1} \setminus \{P, -P\}) \cong (S^{2n+1} \setminus \{P, -P\}) \times \mathrm{SU}_n \cong (\mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}) \times \mathrm{SU}_n$. Aus Satz I.5.5 folgt nun, dass $\mathrm{SU}_{n+1} = U \cup V$ einfach zusammenhängend ist. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und der Beweis vollständig. \square

I.6.6. PROPOSITION. *Die Gruppen U_n und $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sind wegzusammenhängend. Die Inklusionen $S^1 = U_1 \rightarrow U_n \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, induzieren Isomorphismen $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1) \cong \pi_1(U_1) \cong \pi_1(U_n) \cong \pi_1(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$.*

BEWEIS. Nach Proposition I.6.1 ist die kanonische Inklusion $U_n \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine Homotopieäquivalenz, es genügt daher U_n zu behandeln. Nach Proposition I.6.3 gilt $U_1 \times \mathrm{SU}_n \cong U_n$. Alle Behauptungen folgen daher sofort aus Proposition I.6.4, Proposition I.1.17 und Satz I.2.1, denn $U_1 = S^1$. \square

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Gruppe

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) := \{A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

der invertierbaren reellen $(n \times n)$ -Matrizen, und die Gruppe

$$\mathrm{O}_n := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : A^t A = I_n\}$$

der orthogonalen Matrizen. Weiters bezeichne

$$\Delta_n(\mathbb{R}) := \{D \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) : D_{i,i} \in (0, \infty) \text{ für alle } i, \text{ und } D_{i,j} = 0 \text{ falls } i > j\}$$

die Gruppe der reellen oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Eintragungen auf der Diagonale. Alle diesen Gruppen seien mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie versehen. Beachte $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ und $\mathrm{O}_n = \mathrm{U}_n \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Insbesondere ist O_n , als abgeschlossene Teilmenge von U_n , kompakt. Bemerke auch, dass $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\times$ und $\det : \mathrm{O}_n \rightarrow S^0$ surjektiv sind, die Gruppen $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und O_n daher nicht wegzusammenhängend sein können. Etwa gilt $\mathrm{O}_1 = S^0 = \{-1, 1\}$. Es bezeichne weiters $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$, und $\mathrm{SO}_n := \{A \in \mathrm{O}_n : \det(A) = 1\} = \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n$ die *spezielle orthogonale Gruppe*.

I.6.7. BEISPIEL. SO_1 ist ein einpunktiger Raum. Es gilt $\mathrm{SO}_2 \cong S^1$, also $\pi_1(\mathrm{SO}_2) \cong \mathbb{Z}$. Die Abbildung $I \rightarrow \mathrm{SO}_2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos 2\pi t & \sin 2\pi t \\ -\sin 2\pi t & \cos 2\pi t \end{pmatrix}$, faktorisiert nämlich zu einem Homöomorphismus $S^1 \cong I/\{0, 1\} \cong \mathrm{SO}_2$. Weiters gilt $\mathrm{SO}_3 \cong \mathbb{RP}^3$, und daher $\pi_1(\mathrm{SO}_3) \cong \mathbb{Z}_2$, siehe Proposition I.5.18. Um dies einzusehen, betrachte wir $S^3 \subseteq \mathbb{H}$ als Einheitssphäre in Hamiltons Quaternionen. Weiters bezeichne $\mathbb{I} := 1^\perp = \{x \in \mathbb{H} : \bar{x} = -x\} \cong \mathbb{R}^3$ die rein imaginären Quaternionen. Für $x \in \mathbb{H}$ definiert $\lambda_x : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$, $\lambda_x(y) := xy\bar{x}$, eine \mathbb{R} -lineare Abbildung. Für $x \in S^3$ ist λ_x ist eine Isometrie auf \mathbb{I} . Wir erhalten daher eine stetige Abbildung $\lambda : S^3 \rightarrow \mathrm{SO}_3$. Diese faktorisiert durch die Projektion $S^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3$ zu einem Homöomorphismus $\mathbb{RP}^3 \cong \mathrm{SO}_3$. Die Multiplikation in \mathbb{H} definiert eine Gruppenstruktur auf S^3 , und $p : S^3 \rightarrow \mathrm{SO}_3$ ist ein Homomorphismus.

Ist $n \leq m$ dann können wir $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ als Untergruppe von $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ auffassen, der Homomorphismus $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{pmatrix}$ ist eine Einbettung. Dies liefert auch Einbettungen $\mathrm{O}_n \subseteq \mathrm{O}_m$, $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_m^+(\mathbb{R})$ und $\mathrm{SO}_n \subseteq \mathrm{SO}_m$.

I.6.8. PROPOSITION. *Schränken wir (I.22) auf reelle Matrizen ein, so erhalten wir einen Homöomorphismus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{O}_n \times \Delta_n(\mathbb{R})$, und es gilt $\Delta_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Insbesondere ist O_n Deformationsretrakt von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, und die kanonische Inklusion $\mathrm{O}_n \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ daher eine Homotopieäquivalenz. Weiteres Einschränken liefert einen Homöomorphismus $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cong \mathrm{SO}_n \times \Delta_n(\mathbb{R})$. Somit ist SO_n Deformationsretrakt von $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$, und die kanonische Inklusion $\mathrm{SO}_n \rightarrow \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ daher eine Homotopieäquivalenz. Schließlich ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{O}_1 \times \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ sowie $\mathrm{O}_n \cong \mathrm{O}_1 \times \mathrm{SO}_n$.*

BEWEIS. Offensichtlich liefert die Einschränkung von (I.22) eine injektive stetige Abbildung $\mathrm{O}_n \times \Delta_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Es genügt zu zeigen, dass diese auch surjektiv ist, nach Proposition I.6.1 muss sie dann ein Homöomorphismus sein. Sei also $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Nach Proposition I.6.1 existieren $U \in \mathrm{U}_n$ und $D \in \Delta_n(\mathbb{C})$ mit $A = UD$. Es folgt $D^*D = D^*I_nD = D^*U^*UD = A^*A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Da D und D^* reelle Diagonaleinträge haben folgt mit ein wenig linearer Algebra, dass D eine reelle Matrix sein muss, dh. $D \in \Delta_n(\mathbb{C}) \cap \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \Delta_n(\mathbb{R})$. Damit ist auch U eine reelle Matrix, also $U \in \mathrm{U}_n \cap \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n$. Dies zeigt $\mathrm{O}_n \times \Delta_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Da $\det(D) > 0$ sehen wir, dass sich dies zu einem Homöomorphismus $\mathrm{SO}_n \times \Delta_n(\mathbb{R}) \cong \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ einschränkt. Durch Logarithmieren der Diagonaleinträge

erhalten wir einen Homöomorphismus $\Delta_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Wie im Beweis von Proposition I.6.1 folgt, dass O_n Deformationsretrakt von $GL_n(\mathbb{R})$, und SO_n Deformationsretrakt von $GL_n^+(\mathbb{R})$ ist. Matrizenmultiplikation liefert Homöomorphismen $O_1 \times GL_n^+(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ und $O_1 \times SO_n \cong O_n$. \square

Es bezeichne $SL_n(\mathbb{R}) := \{A \in GL_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$ die *spezielle lineare Gruppe*, und $S\Delta_n(\mathbb{R}) := \Delta_n(\mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$.

I.6.9. PROPOSITION. *Einschränken von (I.22) liefert einen Homöomorphismus $SL_n(\mathbb{R}) \cong SO_n \times S\Delta_n(\mathbb{R})$, und es gilt $S\Delta_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Insbesondere ist SO_n Deformationsretrakt von $SL_n(\mathbb{R})$, und die kanonische Inklusion $SO_n \rightarrow SL_n(\mathbb{R})$ daher eine Homotopieäquivalenz. Weiters ist $GL_n(\mathbb{R}) \cong GL_1(\mathbb{R}) \times SL_n(\mathbb{R})$ und $GL_n^+(\mathbb{R}) \cong GL_1^+(\mathbb{R}) \times SL_n(\mathbb{R})$. Somit ist $SL_n(\mathbb{R})$ Deformationsretrakt von $GL_n^+(\mathbb{R})$, und die Inklusion $SL_n(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n^+(\mathbb{R})$ daher eine Homotopieäquivalenz.*

BEWEIS. Die erste Aussage folgt sofort aus Proposition I.6.8, denn für $U \in SO_n$ und $D \in \Delta_n(\mathbb{R})$ gilt $\det(UD) = \det(D)$. Durch Logarithmieren der Diagonaleinträge erhalten wir einen Homöomorphismus $S\Delta_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$. Wie im Beweis von Proposition I.6.1 folgt nun, dass SO_n Deformationsretrakt von $SL_n(\mathbb{R})$ ist. Matrizenmultiplikation liefert Homöomorphismen $GL_1(\mathbb{R}) \times SL_n(\mathbb{R}) \cong GL_n(\mathbb{R})$ und $GL_1^+(\mathbb{R}) \times SL_n(\mathbb{R}) \cong GL_n^+(\mathbb{R})$. Da $GL_1^+(\mathbb{R})$ kontrahierbar ist, sehen wir auch, dass $SL_n(\mathbb{R})$ Deformationsretrakt von $GL_n^+(\mathbb{R})$ ist. \square

I.6.10. PROPOSITION. *Die Gruppen SO_n , $SL_n(\mathbb{R})$ und $GL_n^+(\mathbb{R})$ sind wegzusammenhängend, $n \in \mathbb{N}$. Die kanonischen Inklusionen induzieren Isomorphismen $\mathbb{Z} \cong \pi_1(SO_2) \cong \pi_1(SL_2(\mathbb{R})) \cong \pi_1(GL_2^+(\mathbb{R}))$ und $\mathbb{Z}_2 \cong \pi_1(SO_3) \cong \pi_1(SO_n) \cong \pi_1(SL_n(\mathbb{R})) \cong \pi_1(GL_n^+(\mathbb{R}))$ für $n \geq 3$.*

Für den Beweis von Proposition I.6.10 betrachten wir die stetige Abbildung

$$p : SO_{n+1} \rightarrow S^n, \quad p(A) := AN, \tag{I.24}$$

wobei $N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ den $(n+1)$ -ten Einheitsvektor bezeichnet, $p(A)$ ist daher die letzte Spalte von A .

I.6.11. LEMMA. *Es sei $P \in S^n$, $n \in \mathbb{N}$, und es bezeichne $X := S^n \setminus \{P\}$. Dann existiert ein Homöomorphismus $\varphi : X \times SO_n \xrightarrow{\cong} p^{-1}(X)$, sodass $p \circ \varphi = \text{pr}_1$ und $\varphi(x, AU) = \varphi(x, A)U$ für alle $A, U \in SO_n$, $x \in X$. Dabei bezeichnet $\text{pr}_1 : X \times SO_n \rightarrow X$ die Projektion auf den ersten Faktor.¹³*

BEWEIS. Wir konstruieren zunächst eine stetige Abbildung $\sigma : X \rightarrow SO_{n+1}$ mit $p \circ \sigma = \text{id}_X$, siehe Vorlesung.

Wir definieren nun $\varphi : X \times SO_n \rightarrow p^{-1}(X)$, $\varphi(x, A) := \sigma(x)A$. Offensichtlich gilt $\varphi(x, AU) = \varphi(x, A)U$ für alle $A, U \in SO_n$. Es ist aber auch $p(\varphi(x, A)) =$

¹³Es ist daher (I.24) ein Hauptfaserbündel mit Strukturgruppe SO_n .

$p(\sigma(x)A) = p(\sigma(x)) = x$, also $p \circ \varphi = \text{pr}_1$. Für $B, C \in \text{SO}_{n+1}$ gilt offensichtlich $p(B) = p(C)$ genau dann, wenn $C^{-1}B \in \text{SO}_n$. Wegen $p(\sigma(p(B))) = p(B)$ erhalten wir insbesondere $\sigma(p(B))^{-1}B \in \text{SO}_n$, für $B \in p^{-1}(X)$. Es ist daher $\psi : p^{-1}(X) \rightarrow X \times \text{SO}_n$, $\psi(B) := (p(B), \sigma(p(B))^{-1}B)$, eine stetige Abbildung. Eine einfache Rechnung zeigt, dass dies die Umkehrabbildung von φ ist. Also ist φ ein Homöomorphismus. \square

BEWEIS VON PROPOSITION I.6.10. In Proposition I.6.9 haben wir gesehen, dass die Inklusionen $\text{SO}_n \xrightarrow{\cong} \text{SL}_n(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ Homotopieäquivalenzen sind. Für $n \leq 3$ folgt daher alles aus Beispiel I.6.7. Es genügt daher zu zeigen, dass SO_{n+1} wegzusammenhängend ist, und dass die Inklusion $\text{SO}_n \rightarrow \text{SO}_{n+1}$ einen Isomorphismus $\pi_1(\text{SO}_n) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\text{SO}_{n+1})$ induziert, $n \geq 3$. Dabei verwenden wir den Basispunkt $I_n \in \text{SO}_n$.

Wähle einen Punkt $P \in S^n$, sodass $P \neq -P$ und $-P \neq P$. Betrachte die offenen Teilmengen $U := p^{-1}(S^n \setminus \{P\})$ und $V := p^{-1}(S^n \setminus \{-P\})$ von SO_{n+1} , siehe (I.24). Offensichtlich ist $\text{SO}_{n+1} = U \cup V$ und $\text{SO}_n \subseteq U \cap V$. Da $n \geq 3$ sind $S^n \setminus \{P\}$, $S^n \setminus \{-P\}$ und $S^n \setminus \{P, -P\}$ einfach zusammenhängend.

Wir zeigen zunächst, dass SO_{n+1} wegzusammenhängend ist. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n , und dürfen daher SO_n als wegzusammenhängend annehmen. Nach Lemma I.6.11 sind dann U und V wegzusammenhängend, also muss auch $U \cup V = \text{SO}_{n+1}$ wegzusammenhängend sein.

Aus Lemma I.6.11 folgt auch, dass die Inklusionen $\text{SO}_n \rightarrow U \cap V$, $\text{SO}_n \rightarrow U$ und $\text{SO}_n \rightarrow V$ Isomorphismen $\pi_1(\text{SO}_n) \xrightarrow{\cong} \pi_1(U \cap V)$, $\pi_1(\text{SO}_n) \xrightarrow{\cong} \pi_1(U)$ und $\pi_1(\text{SO}_n) \xrightarrow{\cong} \pi_1(V)$ induzieren. Nach Satz I.5.5 induziert daher auch die Inklusion $\text{SO}_n \rightarrow \text{SO}_{n+1}$ einen Isomorphismus $\pi_1(\text{SO}_n) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\text{SO}_{n+1})$. \square

I.6.12. PROPOSITION. *Die Gruppe O_n hat zwei Wegzusammenhangskomponenten, die eine stimmt mit SO_n überein, die andere ist homöomorph zu SO_n . Die Gruppe $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ hat zwei Wegzusammenhangskomponenten, die eine stimmt mit $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ überein, die andere ist homöomorph zu $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$.*

BEWEIS. Nach Proposition I.6.10 sind SO_n sowie $\text{GL}_n^+(\mathbb{R})$ wegzusammenhängend. Alles folgt daher aus den Homöomorphismen $\text{O}_1 \times \text{SO}_n \cong \text{O}_n$ und $\text{O}_1 \times \text{GL}_n^+(\mathbb{R}) \cong \text{GL}_n(\mathbb{R})$ aus Proposition I.6.8, denn $\text{O}_1 = \{-1, 1\}$ ist ein zweipunktiger Raum. \square

Wie wir oben gesehen haben sind die Fundamentalgruppen von S^1 , \mathbb{C}^\times , T^n , $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\text{SL}_n(\mathbb{R})$, $\text{SL}_n(\mathbb{C})$, O_n , U_n , SO_n und SU_n alle abelsch. Dies ist kein Zufall, denn die Fundamentalgruppe einer topologischen Gruppe muss abelsch sein, siehe Korollar I.6.21 unten. Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G die mit einer Topologie versehen ist, sodass *Multiplikation* $\mu : G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto \mu(g, h) := gh$ und *Inversion* $\nu : G \rightarrow G$, $g \mapsto \nu(g) := g^{-1}$ stetig sind.

I.6.13. BEISPIEL. Jede Untergruppe einer topologischen Gruppe ist bezüglich der Teilraumtopologie eine topologische Gruppe. Produkte topologischer Gruppen sind wieder topologische Gruppen.

I.6.14. BEISPIEL. Jede Gruppe, versehen mit der diskreten Topologie, ist eine topologische Gruppe.

I.6.15. BEISPIEL. \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n , versehen mit der üblichen Topologie, bilden bezüglich der Addition abelsche topologische Gruppen. Allgemeiner kann jeder topologische Vektorraum bezüglich der Addition als abelsche topologische Gruppe aufgefaßt werden.

I.6.16. BEISPIEL. $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, versehen mit der von \mathbb{C} induzierten Topologie, bildet bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine abelsche topologische Gruppen. Als Untergruppen von \mathbb{C}^\times sind auch S^1 , $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ abelsche topologische Gruppen. Der Torus $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ ist eine abelsche kompakte topologische Gruppe.

I.6.17. BEISPIEL. Die Matrizengruppen $GL_n(\mathbb{C})$ und $GL_n(\mathbb{R})$, versehen mit der von $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ bzw. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie, bilden bezüglich der Multiplikation von Matrizen topologische Gruppen. Daher bilden auch die Untergruppe O_n , U_n , SO_n , SU_n , $SL_n(\mathbb{R})$ und $SL_n(\mathbb{C})$ topologische Gruppen.

Unter einem *H-Raum*¹⁴ verstehen wir einen punktierten Raum (X, e) zusammen mit einer Abbildung punktierter Räume $\mu : (X, e) \times (X, e) \rightarrow (X, e)$, sodass $\mu \circ (\text{id}_X, c_e)$ und $\mu \circ (c_e, \text{id}_X)$ beide homotop relativ Basispunkt zu id_X sind. Dabei bezeichnet $c_e : (X, e) \rightarrow (X, e)$ die konstante Abbildung, $c_e(x) := e$. Die Abbildung μ wird auch als *Multiplikation* bezeichnet.

I.6.18. BEISPIEL. Jede topologische Gruppe ist ein *H-Raum*. In diesem Fall gilt sogar $\mu \circ (\text{id}_X \times c_e) = \text{id}_X$ und $\mu \circ (c_e \circ \text{id}_X) = \text{id}_X$, wobei μ die Gruppenmultiplikation und e das neutrale Element bezeichnen.

I.6.19. SATZ (Fundamentalgruppe von *H-Räumen*). *Es sei (X, e) ein H-Raum mit Multiplikation $\mu : (X, e) \times (X, e) \rightarrow (X, e)$. Dann stimmt der von der Multiplikation induzierte Homomorphismus*

$$\mu_* : \pi_1(X, e) \times \pi_1(X, e) = \pi_1((X, e) \times (X, e)) \rightarrow \pi_1(X, e)$$

mit der Multiplikation in $\pi_1(X, e)$ überein, dh. für $\sigma, \tau \in \pi_1(X, e)$ gilt $\mu_(\sigma, \tau) = \sigma\tau$. Insbesondere ist $\pi_1(X, e)$ abelsch.*

BEWEIS. Es seien $f, g : I \rightarrow X$ zwei Schleifen bei e . Betrachte die stetige Abbildung $H := \mu \circ (f \times g) : I \times I \rightarrow X$, $H(s, t) = \mu(f(s), g(t))$. Beachte, dass H die vier Eckpunkte von $I \times I$ auf e abbildet. Weiters seien $\iota_1 : I \rightarrow I \times I$, $\iota_1(s) := (s, 0)$, $\iota_2 : I \rightarrow I \times I$, $\iota_2(t) := (1, t)$, und $\iota_3 : I \rightarrow I \times I$, $\iota_3(t) := (t, t)$.

¹⁴*H-Raum*, nach Heinz Hopf.

Da $I \times I$ einfach zusammenhängend ist, gilt $\iota_1 \iota_2 \simeq \iota_3$ relativ Endpunkte, also auch $(H \circ \iota_1)(H \circ \iota_2) \simeq H \circ \iota_3$ relativ Endpunkte, und damit $[H \circ \iota_1][H \circ \iota_2] = [H \circ \iota_3] \in \pi_1(X, e)$. Wegen $(H \circ \iota_3)(t) = \mu(f(t), g(t))$ ist $[H \circ \iota_3] = \mu_*([f], [g]) \in \pi_1(X, e)$. Da $(H \circ \iota_1)(s) = \mu(f(s), g(0)) = \mu(f(s), e) = (\mu \circ (\text{id}_X, c_e) \circ f)(s)$ ist $H \circ \iota_1 = \mu \circ (\text{id}_X, c_e) \circ f \simeq \text{id}_X \circ f = f$ relativ Endpunkte, denn $\mu \circ (\text{id}_X, c_e) \simeq \text{id}_X$ relativ Basispunkt. Daher gilt $[H \circ \iota_1] = [f] \in \pi_1(X, e)$. Analog folgt aus $\mu \circ (c_e, \text{id}_X) \simeq \text{id}_X$, dass $[H \circ \iota_2] = [g] \in \pi_1(X, e)$. Insgesamt erhalten wir $[f][g] = [H \circ \iota_1][H \circ \iota_2] = [H \circ \iota_3] = \mu_*([f], [g])$, womit die erste Behauptung bewiesen ist. Seien nun $\iota_4 : I \rightarrow I \times I, \iota_4(t) := (0, t)$, und $\iota_5 : I \rightarrow I \times I, \iota_5(s) := (s, 1)$. Wie oben folgt $\iota_4 \iota_5 \simeq \iota_3$ relativ Endpunkte, $[H \circ \iota_4][H \circ \iota_5] = [H \circ \iota_3] = \mu_*([f], [g]) \in \pi_1(X, e)$, $[H \circ \iota_4] = [g]$, $[H \circ \iota_5] = [f]$ und damit $[g][f] = \mu_*([f], [g])$, also ist $\pi_1(X, e)$ abelsch. Der Beweis der Kommutativität von $\pi_1(X, e)$ kann durch folgendes etwas algebraischere Argument ersetzt werden. Da die Multiplikation in $\pi_1(X, e)$ von einer stetigen Abbildung induziert wird muss sie ein Homomorphismus sein, und dies ist nur für abelsche Gruppen möglich, siehe Bemerkung I.6.20 unten. \square

I.6.20. BEMERKUNG. Für eine Gruppe Γ ist die Multiplikation $\mu : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ genau dann ein Homomorphismus, wenn Γ abelsch ist, denn $\mu((g_1, h_1)(g_2, h_2)) = \mu(g_1 g_2, h_1 h_2) = g_1 g_2 h_1 h_2$ und $\mu(g_1, h_1)\mu(g_2, h_2) = g_1 h_1 g_2 h_2$.

I.6.21. KOROLLAR. *Es sei G eine topologische Gruppe mit neutralem Element e , Multiplikation $\mu : G \times G \rightarrow G$ und Inversion $\nu : G \rightarrow G$. Dann ist $\pi_1(G, e)$ abelsch. Sind $f, g : I \rightarrow G$ zwei Schleifen bei e , dann repräsentiert die Schleife $\mu \circ (f, g) : I \rightarrow G, t \mapsto f(t)g(t) = \mu(f(t), g(t))$, das Produkt von $[f]$ und $[g]$, dh. $[\mu \circ (f, g)] = [f][g] \in \pi_1(G, e)$. Weiters repräsentiert $\nu \circ f : I \rightarrow G, t \mapsto \nu(f(t)) = f(t)^{-1}$, das inverse Element von $[f]$, dh. $[\nu \circ f] = [f]^{-1} \in \pi_1(G, e)$.*

BEWEIS. Beachte, dass (G, e) durch μ zu einem H -Raum wird, siehe Beispiel I.6.18. Nach Satz I.6.19 ist daher $\pi_1(G, e)$ abelsch, und es gilt $[\mu \circ (f, g)] = [f][g] \in \pi_1(G, e)$. Es bleibt noch zu zeigen, dass der von der Inversion $\nu : G \rightarrow G$ induzierte Homomorphismus $\nu_* : \pi_1(G, e) \rightarrow \pi_1(G, e)$ mit der Inversion in $\pi_1(G, e)$ übereinstimmt. Dies folgt nun aus der Relation $c_e = \mu \circ (\nu, \text{id}_G)$, denn $1 = (c_e)_* \sigma = (\mu \circ (\nu, \text{id}_G))_* \sigma = \mu_*(\nu_* \sigma, \sigma) = (\nu_* \sigma) \sigma$, also $\nu_* \sigma = \sigma^{-1}$, für alle $\sigma \in \pi_1(G, e)$. \square

I.7. Weitere Beispiele zum Seifert–van Kampen Satz. Um die etwas komplizierteren Fundamentalgruppen einigermaßen in den Griff zu bekommen, wiederholen wir kurz die Darstellung von Gruppen durch Erzeuger und Relationen. Ist S eine Menge, dann nennen wir $F(S) := *_{s \in S} \mathbb{Z}$ die *freie Gruppe* über S . Zu jedem $s \in S$ haben wir einen kanonischen injektiven Homomorphismus $\iota_s : \mathbb{Z} \rightarrow F(S)$, siehe Lemma I.5.1. Wir bezeichnen $\iota_s(1) \in F(S)$ wieder mit s . Jedes Element in $x \neq 1 \in F(S)$ lässt sich in der Form $x = s_1^{k_1} s_2^{k_2} \cdots s_n^{k_n}$ schreiben, wobei $s_i \in S$ und $k_i \in \mathbb{Z}$. Dabei können wir auch erreichen, dass alle $k_i \neq 0$ und $s_i \neq s_{i+1}$. Unter diesen Voraussetzungen ist die Darstellung dann eindeutig, siehe Lemma I.5.1(iii). Ist K eine Gruppe und für jedes $s \in S$ ein $k_s \in K$ gegeben,

dann existiert ein eindeutiger Homomorphismus $\varphi : F(S) \rightarrow K$, sodass $\varphi(s) = k_s$ für alle $s \in S$, siehe Lemma I.5.1(iv).

Eine Gruppe G heißt *frei* falls eine Menge S existiert, sodass $G \cong F(S)$. Die Kardinalzahl $\sharp S$ wird der Rang der freien Gruppe G genannt und mit $\text{rank}(G)$ bezeichnet. Dies ist wohldefiniert, denn aus $F(S) \cong F(S')$ folgt $\bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} \cong F(S)^{\text{ab}} \cong F(S')^{\text{ab}} \cong \bigoplus_{s' \in S'} \mathbb{Z}$ und damit $\sharp S = \sharp S'$, siehe Beispiel I.5.3.

I.7.1. BEISPIEL. Für eine beliebige Menge S gilt $\pi_1(\bigvee_{s \in S} (S^1, 1)) \cong F(S)$, siehe Proposition I.5.8 und Satz I.2.1. Bezeichnet $\iota_s : (S^1, 1) \rightarrow \bigvee_{s \in S} (S^1, 1)$ die kanonische Inklusion, dann bildet der obige Isomorphismus das Bild des Standarderzeugers $(\iota_s)_*([\omega_1]) \in \pi_1(\bigvee_{s \in S} (S^1, 1))$ auf $s \in S \subseteq F(S)$ ab.

Ist $R \subseteq F(S)$ eine Teilmenge so schreiben wir $\langle S \mid R \rangle := F(S)/\mathcal{N}(R)$, wobei $\mathcal{N}(R)$ den von R erzeugten Normalteiler in $F(S)$ bezeichnet. Ist G eine Gruppe und $G \cong \langle S \mid R \rangle$ dann nennen wir $\langle S \mid R \rangle$ eine *Präsentation* von G mit Erzeugern S und Relationen R . Sei nun K eine weitere Gruppe und für jedes $s \in S$ ein $k_s \in K$ gegeben, sodass der durch $\tilde{\varphi}(s) = k_s$ bestimmte Homomorphismus $\tilde{\varphi} : F(S) \rightarrow K$ auf jedem Element von R verschwindet, dh. $\tilde{\varphi}(r) = 1 \in K$ für alle $r \in R$. Dann ist $\mathcal{N}(R) \subseteq \ker(\tilde{\varphi})$, also faktorisiert $\tilde{\varphi}$ zu einem Homomorphismus $\varphi : \langle S \mid R \rangle = F(S)/\mathcal{N}(R) \rightarrow K$ mit $\varphi(s) = k_s$.

Eine Gruppe G wird *endlich präsentierbar*, genannt, falls eine Präsentation $G \cong \langle S \mid R \rangle$ mit endlichen Mengen S und R existiert. Ist $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ und $R = \{r_1, \dots, r_m\}$ dann schreiben wir für $\langle S \mid R \rangle$ auch $\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m \rangle$ oder $\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1 = 1, \dots, r_m = 1 \rangle$.

Jede Gruppe G besitzt die Präsentation $G = \langle S \mid R \rangle$ mit $S := G$ und $R := \ker(\varphi)$, wobei $\varphi : F(S) \rightarrow G$ den durch $\varphi(g) = g$ gegebenen Homomorphismus bezeichnet. Es faktorisiert nämlich φ zu einem, offensichtlich bijektiven, Homomorphismus $\langle S \mid R \rangle = F(S)/\mathcal{N}(R) = F(S)/\ker(\varphi) \rightarrow G$.

Falls $r \in \mathcal{N}(R)$ dann ist $\mathcal{N}(R) = \mathcal{N}(R \cup \{r\})$ und daher

$$\langle S \mid R \rangle \cong \langle S \mid R \cup \{r\} \rangle. \quad (\text{I.25})$$

Ist $t \notin S$ und $\omega \in F(S)$, dann gilt

$$\langle S \mid R \rangle \cong \langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{t^{-1}\omega\} \rangle. \quad (\text{I.26})$$

Um dies einzusehen, sei $\varphi : \langle S \mid R \rangle \rightarrow \langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{t^{-1}\omega\} \rangle$ der durch $\varphi(s) = s$, $s \in S$, eindeutig bestimmte Homomorphismus. Betrachte weiters den durch $\psi(s) = s$, $s \in S$, und $\psi(t) = \omega$ eindeutig bestimmten Homomorphismus $\psi : \langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{t^{-1}\omega\} \rangle \rightarrow \langle S \mid R \rangle$. Offensichtlich ist $\psi \circ \varphi = \text{id}$. Es gilt aber auch $\varphi \circ \psi = \text{id}$, denn in $\langle S \cup \{t\} \mid R \cup \{t^{-1}\omega\} \rangle$ haben wir $\varphi(\psi(t)) = \omega = t$.

Sind $\langle S \mid R \rangle$ und $\langle S' \mid R' \rangle$ zwei endliche Präsentationen derselben Gruppe, dh. $\langle S \mid R \rangle \cong \langle S' \mid R' \rangle$, dann ist es stets möglich durch endlich viele Übergänge der Art (I.26) und (I.25), die sogenannte *Tietze-Prozesse*, von der Präsentation $\langle S \mid R \rangle$ zu der Präsentation $\langle S' \mid R' \rangle$ zu gelangen, siehe etwa [18, Satz 5.8.2].

Schließlich seien noch

$$\langle S \mid R \rangle * \langle S' \mid R' \rangle \cong \langle S \cup S' \mid R \cup R' \rangle \quad (\text{I.27})$$

und

$$\langle S \mid R \rangle^{\text{ab}} \cong \langle S \mid R \cup K \rangle \quad (\text{I.28})$$

erwähnt, wobei $K = \{sts^{-1}t^{-1} : s \neq t \in S\}$. Der durch $\tilde{\varphi}(s) = s$ bestimmte Homomorphismus $\tilde{\varphi} : \langle S \mid R \rangle \rightarrow \langle S \mid R \cup K \rangle$ faktorisiert nämlich zu einem Homomorphismus $\varphi : \langle S \mid R \rangle^{\text{ab}} \rightarrow \langle S \mid R \cup K \rangle$ der invers zu dem durch $\psi(s) = s$ bestimmten Homomorphismus $\langle S \mid R \cup K \rangle \rightarrow \langle S \mid R \rangle^{\text{ab}}$ ist, $\varphi \circ \psi = \text{id}$, $\psi \circ \varphi = \text{id}$.

I.7.2. BEISPIEL. Es gilt:

- (i) $\langle s \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}$.
- (ii) $\langle s, t \mid - \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.
- (iii) $\langle s, t \mid sts^{-1}t^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- (iv) $\langle s \mid s^n \rangle \cong \mathbb{Z}_n$, für $n \in \mathbb{Z}$.
- (v) $\langle s, t \mid s^m, t^n \rangle \cong \mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n$, für $m, n \in \mathbb{Z}$.
- (vi) $\langle s, t \mid s^m, t^n, sts^{-1}t^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$, für $m, n \in \mathbb{Z}$.
- (vii) $\langle s, t \mid s^2t^3, s^3t^4 \rangle = 0$.

I.7.3. BEISPIEL (Kleinsche Flasche). Auf $S^1 \times I$ betrachte die von $(z, 0) \sim (z^{-1}, 1)$ erzeugte Äquivalenzrelation. Der Quotientenraum $K := (S^1 \times I)/\sim$ wird als *Kleinsche Flasche* bezeichnet. Es sei $p : S^1 \times I \rightarrow K$ die Quotientenabbildung. Betrachte nun die offenen Teilmengen $U := p((S^1 \setminus \{-1\}) \times I)$ sowie $V := p((S^1 \setminus \{1\}) \times I)$ von $K = U \cup V$. Die Räume U und V sind Möbiusbänder, vgl. Beispiel I.3.30, die Schleife $a : I \rightarrow U$, $a(s) := p(1, s)$, repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(U, a(0)) \cong \mathbb{Z}$, und $b : I \rightarrow V$, $b(s) := p(-1, s)$, repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(V, b(0)) \cong \mathbb{Z}$. Für den Durchschnitt gilt $U \cap V \cong (0, \pi) \times S^1$, die Schleife $r := r_1 r_2$ repräsentiert einen Erzeuger in $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$, wobei $r_1 : I \rightarrow U \cap V$, $r_1(s) = p(\mathbf{i}, s)$, und $r_2 : I \rightarrow U \cap V$, $r_2(s) := p(-\mathbf{i}, s)$, und $x_0 := r(0) \in U \cap V$. Weiters seien $h_a : I \rightarrow U$, $h_a(s) := p(\mathbf{i}e^{-\pi i s/2}, 0)$, und $h_b : I \rightarrow V$, $h_b(s) := p(\mathbf{i}e^{\pi i s/2}, 0)$, also $h_a(0) = h_b(0) = x_0$, $h_a(1) = a(0) = a(1)$ und $h_b(1) = b(0) = b(1)$. Wir erhalten Erzeuger $\alpha := [h_a a \bar{h}_a] \in \pi_1(U, x_0)$, $\beta := [h_b b \bar{h}_b] \in \pi_1(V, x_0)$ und $\rho := [r] \in \pi_1(U \cap V, x_0)$. Der von der Inklusion induzierte Homomorphismus $\pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(U, x_0)$ bildet ρ auf α^2 ab, und der Homomorphismus $\pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \pi_1(V, x_0)$ bildet ρ auf β^2 ab. Aus Satz I.5.5 folgt daher $\pi_1(K, x_0) \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 \beta^{-2} \rangle$. Eine nützlichere Darstellung erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \pi_1(K) &\cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 \beta^{-2} \rangle \cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \gamma^{-1} \alpha \beta^{-1}, \alpha^2 \beta^{-2} \rangle && \text{nach (I.26)} \\ &\cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha \gamma \alpha^{-1} \gamma, \gamma^{-1} \alpha \beta^{-1}, \alpha^2 \beta^{-2} \rangle && \text{nach (I.25)} \\ &\cong \langle \alpha, \beta, \gamma \mid \alpha \gamma \alpha^{-1} \gamma, \gamma^{-1} \alpha \beta^{-1} \rangle && \text{nach (I.25)} \\ &\cong \langle \alpha, \gamma \mid \alpha \gamma \alpha^{-1} \gamma \rangle && \text{nach (I.26)} \end{aligned}$$

Wir wollen noch zeigen, dass $\pi_1(K)$ isomorph zu $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ ist, wobei $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ die Menge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit der Gruppenstruktur $(k_1, l_1)(k_2, l_2) = (k_1 + (-1)^{l_1}k_2, l_1 + l_2)$ bezeichnet.¹⁵ In $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ gilt die Relation $(0, 1)(1, 0)(0, 1)^{-1}(1, 0) = (0, 0)$ also bestimmt $\varphi(\alpha) = (0, 1)$ und $\varphi(\gamma) = (1, 0)$ einen Homomorphismus $\varphi : \langle \alpha, \gamma \mid \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma \rangle \rightarrow \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$. Wegen $\varphi(\gamma^k\alpha^l) = (1, 0)^k(0, 1)^l = (k, l)$ ist φ surjektiv. Aus der Relation $\alpha\gamma = \gamma^{-1}\alpha$ folgt, dass sich jedes Element in $x \in \langle \alpha, \gamma \mid \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma \rangle$ in der Form $x = \gamma^k\alpha^l$ schreiben lässt, $k, l \in \mathbb{Z}$. Daraus sehen wir sofort, dass $\ker(\varphi) = 0$, also ist φ auch injektiv. Insgesamt folgt

$$\pi_1(K) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}.$$

Für die Abelsierung erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi_1(K)^{\text{ab}} &\cong \langle \alpha, \gamma \mid \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma \rangle^{\text{ab}} \cong \langle \alpha, \gamma \mid \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \rangle && \text{nach (I.28)} \\ &\cong \langle \alpha, \gamma \mid \gamma^2, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \rangle && \text{nach (I.25)} \\ &\cong \langle \alpha, \gamma \mid \gamma^2, \alpha\gamma\alpha^{-1}\gamma^{-1} \rangle && \text{nach (I.25)} \\ &\cong \langle \alpha, \gamma \mid \gamma^2 \rangle^{\text{ab}} && \text{nach (I.28)} \\ &\cong (\langle \alpha \mid - \rangle * \langle \gamma \mid \gamma^2 \rangle)^{\text{ab}} && \text{nach (I.27)} \\ &\cong (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

Die Kleinsche Flasche ist daher weder zur Sphäre S^2 noch zum Torus T^2 homotopieäquivalent (homöomorph), denn $\pi_1(S^2) = 0$ und $\pi_1(T^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Unter einer *geschlossenen Fläche* verstehen wir einen kompakten, (weg)zusammenhängenden Hausdorffraum der lokal zu \mathbb{R}^2 homöomorph ist, dh. jeder Punkt besitzt eine zu \mathbb{R}^2 homöomorphe Umgebung.¹⁶ Die Sphäre S^2 , der Torus T^2 , die projektive Ebene $\mathbb{R}P^2$ und die Kleinsche Flasche K aus Beispiel I.7.3 sind geschlossene Flächen.

Für $g \in \mathbb{N}$ betrachte die Einpunktvereinigung von $2g$ Kreisen $\bigvee^{2g}(S^1, 1)$ und bezeichne mit $\iota_k : (S^1, 1) \rightarrow \bigvee^{2g}(S^1, 1)$ die kanonische Inklusion der k -ten Komponente, $1 \leq k \leq 2g$. Für $1 \leq j \leq g$ definiere Schleifen $a_j : I \rightarrow \bigvee^{2g}(S^1, 1)$, $a_j := \iota_j \circ \omega_1$, und $b_j : I \rightarrow \bigvee^{2g}(S^1, 1)$, $b_j := \iota_{g+j} \circ \omega_1$. Betrachte schließlich die Schleife $\varphi := a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_g b_g \bar{a}_g \bar{b}_g$ und fasse sie als Abbildung $S^1 \cong I/\{0, 1\} \rightarrow$

¹⁵Sind G und H zwei Gruppen, bezeichnet $\text{Aut}(H)$ die Gruppe der Automorphismen von H , und ist $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(H)$ ein Homomorphismus, dann definiert die Multiplikation $(h_1, g_1) \cdot (h_2, g_2) := (h_1 \varphi_{g_1}(h_2), g_1 g_2)$ auf der Menge $H \times G$ eine Gruppenstruktur. Diese Gruppe wird mit $H \rtimes_{\varphi} G$ bezeichnet und ein *semidirektes Produkt* von H und G genannt. Ihr neutrales Element ist $(1, 1)$, das Inverse von (g, h) ist durch $(g, h)^{-1} = (\varphi_{g^{-1}}(h^{-1}), g^{-1})$ gegeben. Wir haben einen injektiven Homomorphismus $\iota : H \rightarrow H \rtimes_{\varphi} G$, $\iota(h) := (h, 1)$, und einen surjektiven Homomorphismus $p : H \rtimes_{\varphi} G \rightarrow G$, $p(h, g) := g$. Weiters ist $\ker(p) = \text{img}(\iota)$, und daher H ein Normalteiler von $H \rtimes_{\varphi} G$. Für den trivialen Homomorphismus $\varphi = 1$ erhalten wir $H \rtimes_{\varphi} G = H \times G$. Das Beispiel im Text oben kommt von $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}) = \{\pm 1\}$, $\varphi_l(k) = (-1)^l k$.

¹⁶Die geschlossenen Flächen sind daher genau die zusammenhängenden, kompakten 2-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten ohne Rand.

$\bigvee^{2g}(S^1, 1)$ auf. Der Raum $M_g := (\bigvee^{2g}(S^1, 1)) \cup_{\varphi} D^2$ wird die *orientierbare Fläche vom Geschlecht g* genannt. Wir setzen noch $M_0 := S^2$. Es ist leicht einzusehen, dass jedes M_g tatsächlich eine geschlossene Fläche ist, $g \in \mathbb{N}_0$. Etwa gilt $M_1 \cong T^2$. Aus Korollar I.5.14 erhalten wir folgende Darstellung ihrer Fundamentalgruppe,

$$\pi_1(M_g) \cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g] \rangle$$

wobei wir die übliche Notation $[\alpha, \beta] := \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ für den Kommutator von α und β verwenden. Mittels (I.28) und (I.25) berechnen wir die Abelsierung,

$$\begin{aligned} \pi_1(M_g)^{\text{ab}} &\cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g], [\alpha_i, \alpha_j], [\beta_i, \beta_j], [\alpha_i, \beta_j] \rangle \\ &\cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid [\alpha_i, \alpha_j], [\beta_i, \beta_j], [\alpha_i, \beta_j] \rangle \\ &\cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid - \rangle^{\text{ab}} \\ &\cong (\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z})^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{2g}. \end{aligned}$$

Für $g \in \mathbb{N}$ betrachte die Einpunktvereinigung von g Kreisen $\bigvee^g(S^1, 1)$ und bezeichne die kanonische Inklusion der k -ten Komponente mit $\iota_k : (S^1, 1) \rightarrow \bigvee^g(S^1, 1)$, $1 \leq k \leq g$. Für $1 \leq k \leq g$ definiere Schleifen $a_k : I \rightarrow \bigvee^g(S^1, 1)$, $a_k := \iota_k \circ \omega_1$. Fasse die Schleife $\varphi := a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_g a_g$ als Abbildung $S^1 \cong I/\{0, 1\} \rightarrow \bigvee^g(S^1, 1)$ auf. Der Raum $N_g := (\bigvee^g(S^1, 1)) \cup_{\varphi} D^2$ wird als die *nicht orientierbare Fläche mit Geschlecht g* bezeichnet. Jedes N_g ist eine geschlossene Fläche, $g \in \mathbb{N}$. Etwa gilt $N_1 \cong \mathbb{RP}^2$ und $N_2 \cong K$, siehe Beispiel I.7.3. Aus Korollar I.5.14 erhalten wir für die Fundamentalgruppe

$$\pi_1(N_g) \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_g^2 \rangle,$$

und für ihre Abelsierung

$$\begin{aligned} \pi_1(N_g)^{\text{ab}} &\cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_g^2, [\alpha_i, \alpha_j] \rangle \\ &\cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \mid \gamma^{-1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_g, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_g^2, [\alpha_i, \alpha_j] \rangle \\ &\cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \mid \gamma^2, \gamma^{-1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_g, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_g^2, [\alpha_i, \alpha_j] \rangle \\ &\cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \mid \gamma^2, \gamma^{-1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_g, [\alpha_i, \alpha_j] \rangle \\ &\cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g, \gamma \mid \gamma^2, \gamma^{-1} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_g \rangle^{\text{ab}} \\ &\cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_{g-1}, \gamma \mid \gamma^2 \rangle^{\text{ab}} \\ &\cong \left(\langle \alpha_1 \mid - \rangle * \cdots * \langle \alpha_{g-1} \mid - \rangle * \langle \gamma \mid \gamma^2 \rangle \right)^{\text{ab}} \\ &\cong (\mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2)^{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

Wir halten diese Resultate in folgendem Korollar fest.

I.7.4. KOROLLAR. *Für die geschlossenen Flächen gilt:*

$$\begin{aligned} \pi_1(M_g) &\cong \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_g, \beta_g] \rangle, & \pi_1(M_g)^{\text{ab}} &\cong \mathbb{Z}^{2g}, \\ \pi_1(N_g) &\cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_g \mid \alpha_1^2 \alpha_2^2 \cdots \alpha_g^2 \rangle, & \pi_1(N_g)^{\text{ab}} &\cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Inbesondere sind die Flächen $M_0, N_1, M_1, N_2, M_2, N_3, \dots$ paarweise nicht homotopieäquivalent (homöomorph).

I.7.5. BEMERKUNG. Die geschlossenen Flächen sind vollständig klassifiziert, jede geschlossene Fläche ist zu genau einer der Flächen $M_0, N_1, M_1, N_2, M_2, \dots$ homöomorph. Die Berechnung der Fundamentalgruppen oben hat gezeigt, dass eine geschlossene Fläche zu höchstens einer solchen Fläche homöomorph sein kann. Um zu zeigen, dass sie tatsächlich zu einer Fläche dieser Liste homöomorph ist sind völlig andere Methoden nötig.

Unter einem *Knoten* verstehen wir eine Teilmannigfaltigkeit $K \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei $K \cong S^1$. Zwei Knoten K_1 und K_2 heißen äquivalent, falls ein Homöomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(K_1) = K_2$ existiert. Sind zwei Knoten äquivalent, dann müssen die Fundamentalgruppen der Knotenkomplemente isomorph sein, $(\varphi|_{\mathbb{R}^3 \setminus K_1})_* : \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_2)$. Dies ermöglicht es, zwei Knoten als nicht äquivalent zu erkennen. Für Torusknoten sind diese Berechnungen in [18, Beispiel 5.7.11] bzw. [4, Example 1.24] ausgeführt. Ist ein Knoten gegeben, dann lässt sich stets eine Präsentation, die sogenannte *Wirtinger Präsentation*, der Gruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ durch Erzeuger und Relationen angeben, siehe etwa [4, Exercise 22 in Section 1.2] oder [10, Chapter 11]. Wir begnügen uns hier mit der Berechnung der Fundamentalgruppe des Komplements des trivialen Knoten, siehe Beispiel I.7.6 unten.

Oft ist es bequem Knoten als Teilmannigfaltigkeiten von S^3 aufzufassen. Dazu wählen wir einen Punkt $\infty \in S^3$ und identifizieren $\mathbb{R}^3 = S^3 \setminus \{\infty\}$, vgl. Beispiel I.1.25. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass zwei Knoten K_1 und K_2 in \mathbb{R}^3 genau dann äquivalent sind, wenn ein Homöomorphismus $\hat{\varphi} : S^3 \rightarrow S^3$ mit $\hat{\varphi}(K_1) = K_2$ existiert. Auch induziert die Inklusion $\mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow S^3 \setminus K$ einen Isomorphismus $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(S^3 \setminus K)$. Dies folgt aus Satz I.5.5 mit $U := \mathbb{R}^3 \setminus K \subseteq S^3 \setminus K$ und einer geeigneten offenen Umgebung V von $\infty \in S^3 \setminus K$, sodass $V \cong B^3$ und $V \cap U \cong B^3 \setminus \{0\}$.

I.7.6. BEISPIEL (Triviales Knotenkomplement). Betrachte $X := S^3 \setminus S^1$, wobei $S^1 \subseteq \mathbb{C}$, $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ und $S^1 \subseteq S^3$ via $z \mapsto (z, 0)$. Die Abbildung $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C} \times S^1$, $\varphi(z, w) := (\frac{z}{w}, \frac{w}{|w|})$ ist ein Homöomorphismus, es gilt daher $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z}$. Genauer, die Inklusion $f : S^1 \rightarrow X$, $f(w) := (0, w)$, induziert einen Isomorphismus $f_* : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(X)$. Die Schleife $I \rightarrow X$, $s \mapsto (0, e^{2\pi i s})$, repräsentiert daher einen Erzeuger in $\pi_1(X)$.

I.7.7. SATZ. Zu jeder Gruppe G existiert ein wegzusammenhängender Hausdorffraum X mit $\pi_1(X) \cong G$. Ist G endlich präsentierbar, dann kann X kompakt gewählt werden.

BEWEIS. Sei $G \cong \langle S \mid R \rangle = F(S)/\mathcal{N}(R)$ eine Präsentation von G mit Erzeugern S und Relationen $R \subseteq F(S)$. Betrachte die Einpunktvereinigung von Kreisen $\bigvee_{s \in S} (S^1, 1)$. Nach Beispiel I.7.1 ist $\pi_1(\bigvee_{s \in S} (S^1, 1)) \cong F(S)$. Jede Relation

$r \in R \subseteq F(S)$ kann daher als Element in $\pi_1(\bigvee_{s \in S}(S^1, 1)) \cong [(S^1, 1), \bigvee_{s \in S}(S^1, 1)]$ aufgefasst werden, siehe Proposition I.3.32. Für jedes $r \in R$ sei $\varphi_r : (S^1, 1) \rightarrow \bigvee_{s \in S}(S^1, 1)$ eine stetige Abbildung die r repräsentiert. Es bildet dann $(\varphi_r)_* : \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(\bigvee_{s \in S}(S^1, 1))$ den Erzeuger $[\omega_1] \in \pi_1(S^1, 1)$ auf r ab. Die Abbildungen φ_r liefern eine stetige Abbildung

$$\varphi : \bigvee_{r \in R}(S^1, 1) \rightarrow \bigvee_{s \in S}(S^1, 1).$$

Das Bild von $\varphi_* : \pi_1(\bigvee_{r \in R}(S^1, 1)) \rightarrow \pi_1(\bigvee_{s \in S}(S^1, 1))$ stimmt dann mit der von R erzeugten Untergruppe von $F(S)$ überein, also ist $\mathcal{N}(\text{img}(\varphi_*)) = \mathcal{N}(R)$.

Bezeichnet nun $X := C_\varphi$ den Abbildungskegel von φ , dann folgt $\pi_1(X) \cong \pi_1(\bigvee_{s \in S}(S^1, 1))/\mathcal{N}(\text{img}(\varphi_*)) \cong F(S)/\mathcal{N}(R) \cong G$, siehe Satz I.5.13. Ist G endlich präsentierbar, dann können wir S und R endlich wählen, und der eben konstruierte Raum X ist dann kompakt. \square

II. Überlagerungen

Jeder hinreichend zusammenhängende topologische Raum besitzt eine einfach zusammenhängende, die sogenannte universelle Überlagerung. Geometrische Strukturen der Basis lassen sich oft in kanonischer Weise auf diese universelle Überlagerung liften. Die Fundamentalgruppe der Basis wirkt frei auf der universellen Überlagerung und lässt üblicherweise die gelifteten geometrischen Strukturen invariant. Die Überlagerungstheorie liefert daher ein Werkzeug mit dem das Studium geometrischer Objekte auf die einfach zusammenhängende Situation zurückgeführt werden kann. Als Beispiele seien hier nur die Theorie der Lie-Gruppen, die Riemannschen Flächen und die vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung erwähnt.

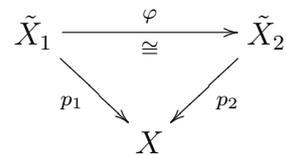
Unter schwachen Zusammenhangsvoraussetzungen ist eine vollständige Klassifikation der Überlagerungen eines Raumes mit Hilfe seiner Fundamentalgruppe möglich. Auch das Liftungsproblem lässt sich mittels der Fundamentalgruppe lösen. Schließlich können Überlagerungen dazu verwendet werden die Fundamentalgruppen mancher Räume zu bestimmen.

Einführungen in die Überlagerungstheorie finden sich etwa in [8, Kapitel IX], [4, Chapter 1.3], [18, Kapitel II.6], [14, Kapitel III.6] oder [15, Chapter 2]. Für eine kurze Darstellung mittels Gruppoiden siehe [13, Chapter 3].

II.1. Elementare Eigenschaften von Überlagerungen. Eine surjektive stetige Abbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ wird eine *Überlagerung* genannt, falls jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U mit folgender Eigenschaft besitzt: Es existieren eine Indexmenge Λ und disjunkte offene Teilmengen $\tilde{U}_\lambda \subseteq \tilde{X}$, $\lambda \in \Lambda$, mit $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{U}_\lambda$, sodass $p|_{\tilde{U}_\lambda} : \tilde{U}_\lambda \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $\lambda \in \Lambda$. In diesem Fall sagen wir U wird gleichmäßig von p überlagert. In diesem Zusammenhang werden X als *Basis*, \tilde{X} als *Total- oder Überlagerungsraum* und p als *Überlagerungsabbildung* bezeichnet. Wir sagen auch \tilde{X} ist eine Überlagerung von X , wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht welche Abbildung p gemeint ist.

II.1.1. BEISPIEL. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $p(t) := e^{2\pi it}$, ist eine Überlagerung, die offenen Teilmengen $S^1 \setminus \{1\}$ und $S^1 \setminus \{-1\}$ werden von p gleichmäßig überlagert, siehe Lemma I.2.9.

Unter einem *Isomorphismus* zwischen zwei Überlagerungen $p_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ und $p_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ verstehen wir einen Homöomorphismus $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ für den $p_2 \circ \varphi = p_1$ gilt. Zwei Überlagerungen desselben Raumes werden *isomorph* genannt, falls ein Isomorphismus zwischen ihnen existiert. Ein Isomorphismus von Überlagerungen $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ wird *Automorphismus* oder *Decktransformation* von \tilde{X} genannt. Die Menge der Decktransformationen einer Überlagerung bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe die mit $\text{Deck}(p)$ oder $\text{Deck}(\tilde{X})$ bezeichnet wird.



II.1.2. BEMERKUNG. Jede Überlagerung ist ein lokaler Homöomorphismus und daher insbesondere eine offene Abbildung.¹⁷ Auch ist jede Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Quotientenabbildung, dh. eine Teilmenge $U \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn ihr Urbild $p^{-1}(U)$ offen in \tilde{X} ist. Ein surjektiver lokaler Homöomorphismus muss i.A. keine Überlagerung sein, etwa ist $p : (0, 3\pi) \rightarrow S^1, p(t) := e^{2\pi it}$, keine Überlagerung. Weder $1 \in S^1$ noch $-1 \in S^1$ besitzen offene Umgebungen die von p gleichmäßig überlagert werden.

II.1.3. BEISPIEL. Ist F ein nicht leerer diskreter topologischer Raum, dann ist die kanonische Projektion $p_X : X \times F \rightarrow X$ eine Überlagerung. Jede Bijektion $\pi : F \rightarrow F$ liefert eine Decktransformation $X \times F \rightarrow X \times F, (x, f) \mapsto (x, \pi(f))$. Wir erhalten einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathfrak{S}(F) \rightarrow \text{Deck}(p_X)$.

II.1.4. BEISPIEL. Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $A \subseteq X$ ein Teilraum, dann ist die Einschränkung $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$ eine Überlagerung. Für diese eingeschränkte Überlagerung wird auch die Notation $\tilde{X}|_A$ verwendet.

Eine Überlagerung wird *trivial* genannt, wenn sie zu einer Überlagerung $p_X : X \times F \rightarrow X$ isomorph ist, siehe Beispiel II.1.3. Die nächste Proposition zeigt, dass Überlagerungen stets lokal trivial sind.

II.1.5. PROPOSITION. *Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge die von p gleichmäßig überlagert wird. Dann existiert ein diskreter Raum F und ein Homöomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, sodass $p_U \circ \varphi = p|_{p^{-1}(U)}$, wobei $p_U : U \times F \rightarrow U$ die kanonische Projektion bezeichnet. Die eingeschränkte Überlagerung $\tilde{X}|_U$ ist daher trivial.*

BEWEIS. Da U von p gleichmäßig überlagert wird existieren eine Indexmenge Λ und disjunkte offene Teilmengen $\tilde{U}_\lambda \subseteq \tilde{X}, \lambda \in \Lambda$, mit $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \tilde{U}_\lambda$ und so, dass $p|_{\tilde{U}_\lambda} : \tilde{U}_\lambda \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $\lambda \in \Lambda$. Wir versehen Λ mit der diskreten Topologie und betrachten die Abbildung $\psi : U \times \Lambda \rightarrow p^{-1}(U)$, $\psi(x, \lambda) := (p|_{\tilde{U}_\lambda})^{-1}(x)$. Offensichtlich ist ψ bijektiv, und es gilt $p \circ \psi = p_U$. Da ψ die offenen Mengen $U \times \{\lambda\}$ homöomorph auf die offenen Mengen \tilde{U}_λ abbildet, ist ψ ein Homöomorphismus. Setzen wir $F := \Lambda$ und $\varphi := \psi^{-1}$, dann haben diese die in der Proposition formulierten Eigenschaften. \square

$$\begin{array}{ccc} U \times \Lambda & \xrightarrow[\cong]{\psi} & p^{-1}(U) \\ & \searrow p_U & \swarrow p \\ & & U \end{array}$$

II.1.6. BEMERKUNG. Offensichtlich gilt auch die folgende Umkehrung von Proposition II.1.5. Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung und existieren zu jedem

¹⁷Eine Abbildung $f : Y \rightarrow Z$ wird *lokaler Homöomorphismus* genannt, falls jeder Punkt $y \in Y$ eine offene Umgebung U besitzt die durch f homöomorph auf eine offene Umgebung von $f(y)$ abgebildet wird. Diese Eigenschaft bleibt dann für jede in U enthaltene offene Teilmenge richtig. Lokale Homöomorphismen sind stetig und offen. Dabei heißt eine Abbildung $f : Y \rightarrow Z$ *offen*, falls sie offene Teilmengen von Y auf offene Teilmengen in Z abbildet.

Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U von x , ein diskreter Raum F und ein Homöomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ mit $p_U \circ \varphi = p|_{p^{-1}(U)}$, dann muss p schon eine Überlagerung sein.

Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $x \in X$, dann wird $F_x := p^{-1}(x)$ die *Faser* über x genannt. Aus der Definition einer Überlagerung folgt sofort, dass ihre Fasern diskrete topologische Räume sind. Die Kardinalität der Faser über x wird die *Blätterzahl* der Überlagerung an der Stelle x genannt. Die Blätterzahl einer Überlagerung definiert eine lokal konstante Funktion auf X . Für zusammenhängendes X muss daher die Blätterzahl konstant sein. Wir sprechen von einer *n-blättrigen* oder *n-fachen* Überlagerung, falls jede Faser aus genau n Punkten besteht.

II.1.7. BEISPIEL. Jeder Homöomorphismus $p : \tilde{X} \rightarrow X$ ist eine ein-blättrige Überlagerung. Umgekehrt muss jede ein-blättrige Überlagerung ein Homöomorphismus sein, siehe Bemerkung II.1.2.

II.1.8. BEISPIEL. Die Abbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ aus Beispiel II.1.1 ist eine unendlich-blättrige Überlagerung. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist die Translation $\tau_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau_n(t) := t + n$, eine Decktransformation. Wir erhalten einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Deck}(p)$, $n \mapsto \tau_n$.

II.1.9. BEISPIEL. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $p_n : S^1 \rightarrow S^1$, $p_n(z) := z^n$, eine n -blättrige Überlagerung. Dabei ist $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Es bezeichne $G_n := \{\zeta \in \mathbb{C} : \zeta^n = 1\} \subseteq S^1 \subseteq \mathbb{C}$ die Menge der n -ten Einheitswurzeln. Diese bilden bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine zu \mathbb{Z}_n isomorphe Gruppe, ein Isomorphismus ist durch $\mathbb{Z}_n \xrightarrow{\cong} G_n$, $[k] \mapsto e^{2\pi i k/n}$, gegeben. Jedes $\zeta \in G_n$ definiert eine Decktransformation $\rho_\zeta : S^1 \rightarrow S^1$, $\rho_\zeta(z) := \zeta z$. Wegen $p_{\zeta_1 \zeta_2} = p_{\zeta_1} \circ p_{\zeta_2}$, $\zeta_1, \zeta_2 \in G_n$, erhalten wir einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}_n \cong G_n \rightarrow \text{Deck}(p_n)$, $\zeta \mapsto \rho_\zeta$.

II.1.10. BEISPIEL. Die Abbildung $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $p(z) := e^{2\pi i z}$, liefert eine unendlich-blättrige Überlagerung. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $\tau_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\tau_n(z) := z + n$, eine Decktransformation. Wir erhalten einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \text{Deck}(p)$, $n \mapsto \tau_n$. Schränken wir diese Überlagerung auf den Teilraum $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein, so erhalten wir die Überlagerung aus Beispiel II.1.8.

II.1.11. BEISPIEL. Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung $p_n : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $p_n(z) := z^n$, eine n -blättrige Überlagerung. Jede n -te Einheitswurzel $\zeta \in G_n$, siehe Beispiel II.1.9, definiert eine Decktransformation $\rho_\zeta : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $\rho_\zeta(z) := \zeta z$. Wieder haben wir einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}_n \cong G_n \rightarrow \text{Deck}(p_n)$. Schränken wir diese Überlagerung auf den Teilraum $S^1 \subseteq \mathbb{C}^\times$ ein, so erhalten wir die Überlagerung aus Beispiel II.1.9.

II.1.12. BEISPIEL. Die Quotientenabbildung $p : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ ist eine zweiblättrige Überlagerung. Die sogenannte *Antipodalabbildung* $A : S^n \rightarrow S^n$, $A(x) := -x$,

ist eine Decktransformation. Wegen $A^2 = \text{id}_{S^n}$ erhalten wir einen injektiven Homomorphismus $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Deck}(p)$, $[0] \mapsto \text{id}_{S^n}$, $[1] \mapsto A$.

II.1.13. BEISPIEL. Sind $p : \tilde{X} \rightarrow X$ und $q : \tilde{Y} \rightarrow Y$ zwei Überlagerungen, dann ist auch $p \times q : \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$ eine Überlagerung. Mittels Induktion folgt, dass endliche Produkte von Überlagerungen wieder Überlagerungen sind. Für unendlich viele Faktoren bleibt dies jedoch nicht richtig, siehe etwa [15, Example 2.2.9].

II.1.14. BEISPIEL. Sind $p_j : \tilde{X}_j \rightarrow X$ Überlagerungen, $j \in J$, dann ist auch $\bigsqcup_{j \in J} p_j : \bigsqcup_{j \in J} \tilde{X}_j \rightarrow X$ eine Überlagerung.

II.1.15. BEMERKUNG. Die Komposition zweier Überlagerungen ist i.A. keine Überlagerung, siehe etwa [15, Example 2.2.8].

Der Totalraum einer Überlagerung erbt viele topologische Eigenschaften der Basis. Auch lassen sich geometrische Strukturen der Basis oft in kanonischer Weise auf die Überlagerung liften. Der Rest dieses Abschnitts sei einigen einfachen Beispielen dazu gewidmet. Ein weniger triviales Beispiel werden wir in Abschnitt II.8 diskutieren.

II.1.16. BEISPIEL. Ist X ein Hausdorffraum und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, dann ist auch \tilde{X} Hausdorffsch. Liegen zwei Punkte von \tilde{X} nicht in der selben Faser so können sie auf Grund der Hausdorff Eigenschaft von X durch disjunkte offene Umgebungen der Form $p^{-1}(U)$ und $p^{-1}(V)$ getrennt werden. Liegen sie in der gleichen Faser, dann folgt direkt aus der Überlagerungseigenschaft von p , dass sie durch disjunkte offene Mengen der Form \tilde{U}_{λ_1} und \tilde{U}_{λ_2} getrennt werden können.

II.1.17. BEISPIEL. Ist X ein parakompakter Hausdorffraum und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, dann ist auch \tilde{X} ein parakompakter Hausdorffraum.¹⁸ Um dies einzusehen sei $\tilde{\mathcal{U}}$ eine offene Überdeckung von \tilde{X} . Da die Basis X parakompakt ist finden wir eine lokal endliche offene Überdeckung $\{U_j\}_{j \in J}$ von X , sodass jedes U_j gleichmäßig von p überlagert wird. Es gibt daher diskrete Räume F_j mit $p^{-1}(U_j) \cong U_j \times F_j$, siehe Proposition II.1.5. Es existiert dann auch eine offene Überdeckung $\{V_j\}_{j \in J}$ von X mit $\bar{V}_j \subseteq U_j$ für jedes $j \in J$. Ist nämlich $f_j : X \rightarrow [0, 1]$, $j \in J$, eine Zerlegung der Eins mit $\text{supp}(f_j) \subseteq U_j$, dann können wir $V_j := \{x \in X : f_j(x) \neq 0\}$ verwenden. Beachte, dass \bar{V}_j als abgeschlossene

¹⁸Wir erinnern uns, dass ein topologischer Raum X parakompakt heißt, falls jede offene Überdeckung eine lokal endliche offene Verfeinerung besitzt. Genauer, ist \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X , dann existiert eine offene Überdeckung \mathcal{V} von X die \mathcal{U} verfeinert (dh. zu jedem $V \in \mathcal{V}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$) und lokal endlich ist (dh. jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine Umgebung die nur endlich viele der offenen Mengen $V \in \mathcal{V}$ schneidet.) Ein Hausdorffraum ist genau dann parakompakt, wenn jede offene Überdeckung eine untergeordnete Zerlegung der Eins besitzt, siehe etwa [8, Kapitel VIII§5] oder [14, Kapitel I.8.6]. Nach einem Satz von Stone ist jeder metrisierbare Raum parakompakt, siehe [14, Kapitel I.8.7].

Teilmenge eines parakompakten Raums selbst parakompakt ist. Damit sind auch $p^{-1}(\bar{V}_j) \cong \bar{V}_j \times F_j$ parakompakt. Für jedes $j \in J$ existiert daher eine lokal endliche offene Überdeckung $\tilde{\mathcal{V}}_j$ von $p^{-1}(\bar{V}_j)$, die die Überdeckung $\{\tilde{U} \cap p^{-1}(\bar{V}_j) : \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}\}$ verfeinert. Für jedes $j \in J$ ist dann $\tilde{\mathcal{W}}_j := \{\tilde{V} \cap p^{-1}(V_j) : \tilde{V} \in \tilde{\mathcal{V}}_j\}$ eine offene Überdeckung von $p^{-1}(V_j)$ die die Überdeckung $\{\tilde{U} \cap p^{-1}(V_j) : \tilde{U} \in \tilde{\mathcal{U}}\}$ verfeinert. Da $\bigcup_{j \in J} V_j = X$ bildet $\tilde{\mathcal{W}} := \bigcup_{j \in J} \tilde{\mathcal{W}}_j$ eine offene Überdeckung von \tilde{X} die $\tilde{\mathcal{U}}$ verfeinert. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\tilde{\mathcal{W}}$ lokal endlich ist. Mit $\{U_j\}_{j \in J}$ ist auch $\{p^{-1}(\bar{V}_j)\}_{j \in J}$ eine lokal endliche Überdeckung. Es genügt daher zu zeigen, dass zu fixem $j \in J$ und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ eine Umgebung von \tilde{x} existiert die nur endlich viele der Überdeckungsmengen in $\tilde{\mathcal{V}}_j$ trifft. Liegt \tilde{x} nicht in $p^{-1}(\bar{V}_j)$ ist dies offensichtlich, denn $p^{-1}(\bar{V}_j)$ ist abgeschlossen in \tilde{X} . Im Fall $\tilde{x} \in p^{-1}(\bar{V}_j)$ folgt dies aus der lokalen Endlichkeit von $\tilde{\mathcal{V}}_j$. Damit ist $\tilde{\mathcal{W}}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung von $\tilde{\mathcal{U}}$, und \tilde{X} daher parakompakt.

II.1.18. BEISPIEL. Ist X eine topologische Mannigfaltigkeit¹⁹ und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, dann ist auch \tilde{X} eine topologische Mannigfaltigkeit. Dies folgt aus Beispiel II.1.17 und der Tatsache, dass p ein lokaler Homöomorphismus ist.

II.1.19. BEISPIEL. Ist X eine glatte Mannigfaltigkeit und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf \tilde{X} genau eine glatte Struktur die p zu einem lokalen Diffeomorphismus macht. Jede Decktransformation ist dann ein Diffeomorphismus von \tilde{X} .

II.1.20. BEISPIEL. Ist X eine Riemannmannigfaltigkeit und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf \tilde{X} genau eine Riemannmetrik die p zu einer lokalen Isometrie macht. Jede Decktransformation ist dann eine Isometrie von \tilde{X} .

II.1.21. BEISPIEL. Ist X eine symplektische Mannigfaltigkeit und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf \tilde{X} genau eine symplektische Struktur die p zu einem lokalen Symplektomorphismus macht. Jede Decktransformation ist dann ein Symplektomorphismus von \tilde{X} .

II.1.22. BEISPIEL. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit und $\tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, dann gibt es auf \tilde{X} genau eine komplexe Struktur die p zu einem lokalen Biholomorphismus macht. Jede Decktransformation ist dann ein Biholomorphismus von \tilde{X} .

¹⁹Unter einer *topologischen Mannigfaltigkeit* verstehen wir einen lokal euklidischen parakompakten Hausdorffraum. Dabei wird ein topologischer Raum *lokal euklidisch* genannt, falls jeder Punkt eine zu \mathbb{R}^n homöomorphe offene Umgebung besitzt. Mit Hilfe eines Satzes von Stone lässt sich zeigen, dass ein lokal euklidischer Hausdorffraum genau dann parakompakt ist, wenn er metrisierbar ist. Wir können topologische Mannigfaltigkeiten daher äquivalent als metrisierbare lokal euklidische Räume definieren.

II.2. Strikt diskontinuierliche Gruppenwirkungen. Unter einer *Linkswirkung* einer Gruppe G auf einer Menge X verstehen wir eine Abbildung (die Wirkung) $\lambda : G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto gx := g \cdot x := \lambda_g(x) := \lambda^x(g) := \lambda(g, x)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

- (i) Für $g, h \in G$ und $x \in X$ gilt $g(hx) = (gh)x$, dh. $\lambda(g, \lambda(h, x)) = \lambda(gh, x)$.
- (ii) Für das neutrale Element $1 \in G$ und $x \in X$ gilt $1x = x$, dh. $\lambda(1, x) = x$.

In dieser Situation sagen wir auch die Gruppe G wirkt von links auf der Menge X . Aus (i) und (ii) folgt $x = 1x = (g^{-1}g)x = g^{-1}(gx)$, also $\lambda_{g^{-1}} \circ \lambda_g = \text{id}_X$, oder $\lambda_{g^{-1}} = (\lambda_g)^{-1}$. Daher ist jedes λ_g bijektiv, also eine Permutation von X . Wegen (i) ist die Abbildung

$$G \rightarrow \mathfrak{S}(X), \quad g \mapsto \lambda_g \tag{II.1}$$

ein Gruppenhomomorphismus, wobei $\mathfrak{S}(X)$ die Gruppe der Permutationen von X bezeichnet. Umgekehrt definiert jeder Homomorphismus $G \rightarrow \mathfrak{S}(X)$ in offensichtlicher Weise eine Linkswirkung von G auf X .

Eine Gruppenwirkung λ heißt *treu* wenn der Homomorphismus (II.1) injektiv ist, wenn also nur das neutrale Element von G trivial, dh. durch die Identität, wirkt. I.A. ist der Kern von (II.1) ein Normalteiler N in G und die Wirkung (II.1) faktorisiert zu einer treuen Wirkung $G/N \rightarrow \mathfrak{S}(X)$ der Gruppe G/N auf X .

Eine Gruppenwirkung heißt *transitiv* falls zu je zwei Punkten $x, y \in X$ ein $g \in G$ mit $gx = y$ existiert. Ist $x \in X$, dann nennt man $Gx := \{gx : g \in G\}$ den *Orbit* von x . Die Wirkung ist daher transitiv genau dann wenn für einen (und dann jeden) Punkt $x \in X$ gilt $Gx = X$. Für $g \in G$ ist $\lambda_g(Gx) = Gx$, also erhalten wir eine Gruppenwirkung $G \rightarrow \mathfrak{S}(Gx)$ der Gruppe G auf dem Orbit Gx . Die Wirkung von G auf Gx ist stets transitiv. Unter der *Isotropiegruppe* eines Punktes $x \in X$ verstehen wir die Untergruppe $G^x := \{g \in G : gx = x\}$ von G . Diese besteht daher aus allen Gruppenelementen die den Punkt x stabilisieren und wird auch *Stabilisatoruntergruppe* genannt. Wir erhalten eine Bijektion $G/G^x \cong Gx$, $gG^x \mapsto gx$, zwischen den Linksnebenklassen²⁰ von G^x und dem Orbit Gx .

Eine Gruppenwirkung heißt *frei* wenn folgendes gilt: Ist $g \in G$ und $x \in X$ mit $gx = x$, dann folgt schon $g = 1$. In anderen Worten, für $g \neq 1$ hat $\lambda_g \in \mathfrak{S}(X)$ keinen Fixpunkt. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Isotropiegruppen trivial sind, dh. $G^x = \{1\}$ für alle $x \in X$. In diesem Fall erhalten wir für jedes $x \in X$ eine Bijektion $G \cong Gx$, $g \mapsto gx$, zwischen G und dem Orbit durch x .

Unter einer *Rechtswirkung* von G auf X verstehen wir eine Abbildung $\rho : X \times G \rightarrow X$, $(x, g) \mapsto xg := x \cdot g := \rho^g(x) := \rho_x(g) := \rho(x, g)$, mit $x1 = x$ und $(xg)h = x(gh)$ für alle $g, h \in G$. Ist $\rho : X \times G \rightarrow X$ eine Rechtswirkung, dann definiert $\lambda : G \times X \rightarrow X$, $\lambda(g, x) := \rho(x, g^{-1})$, eine Linkswirkung von G auf X . Alle mit einer Linkswirkung assoziierten Begriffe besitzen daher ein offensichtliches

²⁰Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, dann definiert $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1 \in H$ eine Äquivalenzrelation auf G . Ihre Äquivalenzklassen sind von der Form $gH = \{gh : h \in H\}$ und werden Linksnebenklassen von H genannt. Für die Menge der Linksnebenklassen schreiben wir G/H .

Analogon für Rechtswirkungen. Etwa ist eine Rechtswirkung nichts anderes als ein Anti-Homomorphismus $G \rightarrow \mathfrak{S}(X)$.

Unter einer *stetigen Linkswirkung* einer diskreten Gruppe G auf einem topologischen Raum X verstehen wir eine Linkswirkung $\lambda : G \times X \rightarrow X$ die stetig ist, wobei G mit der diskreten Topologie versehen ist. Jedes $\lambda_g : X \rightarrow X$ ist dann stetig, und wegen $(\lambda_g)^{-1} = \lambda_{g^{-1}}$ ein Homöomorphismus. Eine stetige Linkswirkung liefert daher einen Gruppenhomomorphismus $G \rightarrow \text{Homeo}(X)$, $g \mapsto \lambda_g$, wobei $\text{Homeo}(X)$ die Gruppe der Homöomorphismen von X bezeichnet. Umgekehrt definiert jeder solche Gruppenhomomorphismus eine stetige Linkswirkung der diskreten Gruppe G auf X . Analog sprechen wir von einer stetigen Rechtswirkung, falls die Wirkung $\rho : X \times G \rightarrow X$ stetig ist.

Eine stetige Wirkung einer diskreten Gruppe G auf einem topologischen Raum X wird *strikt diskontinuierlich* genannt, wenn jeder Punkt in $x \in X$ eine Umgebung U besitzt für die gilt $gU \cap U = \emptyset$, für alle $g \neq 1 \in G$. Offensichtlich muss eine strikt diskontinuierliche Gruppenwirkung frei sein, die Umkehrung gilt i.A. jedoch nicht. Aus $gU \cap U = \emptyset$ folgt $gU \cap hU = \emptyset$ für alle $g \neq h \in G$. Insbesondere ist die von X auf dem Orbit Gx induzierte Topologie diskret, die Bijektion $G \cong Gx$ also ein Homöomorphismus diskreter Räume. Für Wirkungen endlicher Gruppen ist folgende Beobachtung oft hilfreich.

II.2.1. PROPOSITION. *Jede stetige freie Wirkung einer endlichen diskreten Gruppe auf einem Hausdorffraum ist strikt diskontinuierlich.*

BEWEIS. Sei also G eine endliche Gruppe die frei und stetig auf einem Hausdorffraum X wirkt. Sei nun $x \in X$. Da die Wirkung frei ist, sind die Punkte gx , $g \in G$, alle verschieden. Wegen der Hausdorffeigenschaft von X finden wir zu jedem $g \neq 1 \in G$ eine Umgebung V_g^1 von x und eine Umgebung V_g^2 von gx mit $V_g^1 \cap V_g^2 = \emptyset$. Auf Grund der Stetigkeit der Wirkung ist dann $V_g := V_g^1 \cap g^{-1}V_g^2$ eine Umgebung von x für die $gV_g \cap V_g = \emptyset$ gilt. Wegen der Endlichkeit von G ist auch $U := \bigcap_{g \neq 1} V_g$ eine Umgebung von x . Nach Konstruktion gilt $gU \cap U = \emptyset$, für alle $g \neq 1 \in G$. Also ist die Wirkung strikt diskontinuierlich. \square

Eine Linkswirkung von G auf X definiert eine Äquivalenzrelation auf X durch $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : gx = y$. Ihre Äquivalenzklassen stimmen mit den Orbits überein, es ist also $x \sim y$ genau dann wenn $Gx = Gy$. Die Menge der Äquivalenzklassen wird als *Orbitraum* der Wirkung bezeichnet und mit $X/G := X/\sim$ bezeichnet. Wir versehen X/G mit der Quotiententopologie, dh. mit der feinsten Topologie, sodass die kanonische Projektion $p : X \rightarrow X/G$ stetig ist. Eine Teilmenge V von X/G ist genau dann offen, wenn $p^{-1}(V)$ offen in X ist.

II.2.2. BEISPIEL. Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, dann definiert $G \times H \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$, eine Rechtswirkung von H auf G . Ihre Orbits stimmen mit den Linksnebenklassen von H überein, siehe oben.

II.2.3. PROPOSITION. *Wirkt die Gruppe G strikt diskontinuierlich auf dem topologischen Raum X , dann ist die kanonische Projektion $p : X \rightarrow X/G$ eine*

Überlagerung. Ihre Blätterzahl stimmt mit der Ordnung von G überein. Jedes Element von G liefert eine Decktransformation, und wir erhalten einen injektiven Homomorphismus von Gruppen $G \rightarrow \text{Deck}(p)$.

BEWEIS. Offensichtlich ist p stetig und surjektiv. Weiters ist p eine offene Abbildung, denn für offenes $U \subseteq X$ ist auf Grund der Stetigkeit der Wirkung auch $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} gU$ offen in X , also $p(U)$ offen in X/G . Sei nun $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x , sodass $gU \cap hU = \emptyset$ für alle $g \neq h \in G$. Dann sind $\{gU\}_{g \in G}$, disjunkte offene Teilmengen in X , und für die offene Menge $V := p(U) \subseteq X/G$ gilt $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{g \in G} gU$. Schließlich ist für jedes $g \in G$ die Einschränkung $p|_{gU} : gU \rightarrow V$ eine stetige Bijektion, und wegen der Offenheit von p daher ein Homöomorphismus. Also ist $p : X \rightarrow X/G$ eine Überlagerung. Für $g \in G$ liefert $\lambda_g : X \rightarrow X$, $\lambda_g(x) := gx$, einen Homöomorphismus, und da offensichtlich auch $p \circ \lambda_g = p$ gilt, ist λ_g eine Decktransformation. Die Relation $\lambda_{gh} = \lambda_g \circ \lambda_h$ besagt gerade, dass $G \rightarrow \text{Deck}(X)$, $g \mapsto \lambda_g$, ein Homomorphismus ist. Dieser Homomorphismus ist injektiv, denn strikt diskontinuierliche Wirkungen sind stets treu. \square

II.2.4. BEISPIEL. Die Abbildung $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(n, t) \mapsto n + t$, definiert eine stetige Linkswirkung der diskreten Gruppe \mathbb{Z} auf dem topologischen Raum \mathbb{R} . Diese Wirkung ist strikt diskontinuierlich, denn für $t \in \mathbb{R}$ und $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ gilt $(n + U) \cap U = \emptyset$, wobei $U = (t - \frac{1}{2}, t + \frac{1}{2})$. Daher ist die Orbitprojektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ eine Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Bis auf den Homöomorphismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ ist dies die Überlagerung aus Beispiel II.1.8 oben.

II.2.5. BEISPIEL. Die Abbildung $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(k, x) \mapsto k + x$, ist eine strikt diskontinuierliche Linkswirkung von \mathbb{Z}^n auf \mathbb{R}^n . Nach Proposition II.2.3 ist die Orbitprojektion $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ eine unendlich-blättrige Überlagerung. Beachte, dass $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong S^1 \times \dots \times S^1 = T^n$, vgl. Beispiel I.2.17.

II.2.6. BEISPIEL. Es bezeichne wieder G_n die Gruppe der n -ten Einheitswurzeln, $n \in \mathbb{N}$, siehe Beispiel II.1.9 oben. Die Abbildung $G_n \times S^1 \rightarrow S^1$, $(\zeta, z) \mapsto \zeta z$, ist eine freie und daher strikt diskontinuierliche Linkswirkung, siehe Proposition II.2.1. Nach Proposition II.2.3 ist die Orbitprojektion $p_n : S^1 \rightarrow S^1/G_n$ eine n -blättrige Überlagerung. Für den Quotientenraum gilt $S^1/G_n \cong S^1$, wir erhalten daher wieder die Überlagerung aus Beispiel II.1.9.

II.2.7. BEISPIEL. Die Gruppe $\{-1, 1\} \cong \mathbb{Z}_2$ wirkt auf der Sphäre S^n durch $(\pm 1)x := \pm x$ in strikt diskontinuierlicher Weise, siehe Proposition II.2.1. Nach Proposition II.2.3 ist die Orbitprojektion $S^n \rightarrow S^n/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{RP}^n$ eine zwei-blättrige Überlagerung, vgl. Beispiel II.1.12 oben.

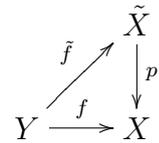
II.2.8. BEISPIEL (Linsenräume). Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Sphäre $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$. Weiters seien $p \in \mathbb{N}$ und $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Z}$, sodass p teilerfremd zu q_j ist, für jedes $1 \leq j \leq n$. Es bezeichne $G_p \cong \mathbb{Z}_p$ die Gruppe der p -ten Einheitswurzeln.

Eine elementare Rechnung zeigt, dass $G_p \times S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$, $\zeta \cdot (z_1, \dots, z_n) := (\zeta^{q_1} z_1, \dots, \zeta^{q_n} z_n)$, eine stetige Linkswirkung von G_p auf S^{2n-1} definiert. Diese Wirkung ist frei. Um dies einzusehen sei $k \in \mathbb{Z}$, $\zeta = e^{2\pi i k/p} \in G_p$ und $(z_1, \dots, z_n) \in S^{2n-1}$ mit $\zeta \cdot (z_1, \dots, z_n) = (z_1, \dots, z_n)$. Wähle j , sodass $z_j \neq 0$. Aus $\zeta^{q_j} z_j = z_j$ erhalten wir dann $e^{2\pi i k q_j/p} = 1$, also muss p die Zahl $k q_j$ teilen. Da p und q_j teilerfremd sind, ist p ein Teiler von k , also $\zeta = 1$ und die Wirkung tatsächlich frei. Nach Proposition II.2.1 ist sie daher strikt diskontinuierlich. Ihr Orbitraum wird als *Linsenraum* $L(p; q_1, \dots, q_n) := S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$ bezeichnet. Etwa gilt $L(2; 1, \dots, 1) \cong \mathbb{R}P^{2n-1}$. Die Orbitprojektion $S^{2n-1} \rightarrow L(p; q_1, \dots, q_n)$ ist eine p -blättrige Überlagerung, siehe Proposition II.2.3.

II.2.9. BEISPIEL (Kleinsche Flasche). Betrachte die Gruppe $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ mit Multiplikation $(k_1, l_1)(k_2, l_2) = (k_1 + (-1)^{l_1} k_2, l_1 + l_2)$, vgl. Beispiel I.7.3. Eine einfache Rechnung zeigt, dass $(k, l) \cdot (x, y) := (k + (-1)^l x, l + y)$ eine Linkswirkung von $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ auf \mathbb{R}^2 definiert. Diese Wirkung ist strikt diskontinuierlich, die Quotientenabbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ daher eine unendlich-blättrige Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ ist zur Kleinschen Flasche aus Beispiel I.7.3 homöomorph.

II.2.10. BEISPIEL. Die Abbildung $A : T^2 \rightarrow T^2$, $A(z, w) := (-z, \bar{w})$, erfüllt $A^2 = \text{id}_{T^2}$ und definiert eine freie Wirkung der Gruppe \mathbb{Z}_2 auf $T^2 = S^1 \times S^1$. Nach Proposition II.2.1 ist dies eine strikt diskontinuierliche Wirkung, die Quotientenabbildung $T^2 \rightarrow T^2/\mathbb{Z}_2$ daher eine zwei-blättrige Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Der Quotientenraum T^2/\mathbb{Z}_2 ist zur Kleinschen Flasche homöomorph, siehe Beispiel I.7.3.

II.3. Homotopieliftungseigenschaft. Sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Jede stetige Abbildung $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ wird ein *Lift* oder eine *Hochhebung* von f über p genannt. Es stellt sich nun die Frage unter welchen Umständen so ein Lift von f existiert. Dieses Problem lässt sich elegant mit Hilfe des induzierten Homomorphismus $f_* : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ lösen, siehe Satz II.4.5 unten. Wir beginnen zunächst damit die Eindeutigkeit eines solchen Lifts zu besprechen. Die nächste Proposition besagt, dass für zusammenhängendes Y ein Lift von f schon durch den Wert bei einem einzigen Punkt vollständig festgelegt ist.



II.3.1. PROPOSITION. *Es seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, Y zusammenhängend und $\tilde{f}, \tilde{g} : Y \rightarrow \tilde{X}$ stetig mit $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$. Existiert ein Punkt $y_0 \in Y$ mit $\tilde{f}(y_0) = \tilde{g}(y_0)$, dann gilt schon $\tilde{f} = \tilde{g}$.*

BEWEIS. Betrachte die Teilmenge $A := \{y \in Y : \tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)\}$. Da $y_0 \in A$ ist $A \neq \emptyset$. Wir zeigen zunächst, dass A offen ist. Sei dazu $y \in A$. Wegen der Überlagerungseigenschaft von p , existiert eine Umgebung \tilde{U} von $\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y)$, sodass $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow X$ injektiv ist. Wegen der Stetigkeit von \tilde{f} und \tilde{g} ist $W :=$

$\tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{g}^{-1}(\tilde{U})$ eine Umgebung von y in Y . Aus $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$ und der Injektivität von $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow X$ folgt $\tilde{f}|_W = \tilde{g}|_W$. Daher ist $W \subseteq A$ und A also offen. Schließlich zeigen wir, dass A auch abgeschlossen ist. Sei dazu $y \notin A$, also $\tilde{f}(y) \neq \tilde{g}(y)$. Da $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$ gilt jedenfalls $p(\tilde{f}(y)) = p(\tilde{g}(y))$. Aus der Überlagerungseigenschaft von p erhalten wir disjunkte Umgebung \tilde{U} von $\tilde{f}(y)$ und \tilde{V} von $\tilde{g}(y)$. Wegen der Stetigkeit von \tilde{f} und \tilde{g} ist $W := \tilde{f}^{-1}(\tilde{U}) \cap \tilde{g}^{-1}(\tilde{V})$ eine Umgebung von y in Y . Aus $\tilde{U} \cap \tilde{V} = \emptyset$ erhalten wir $W \subseteq Y \setminus A$, also ist A abgeschlossen. Aus dem Zusammenhang von Y folgt nun $A = Y$ und daher $\tilde{f} = \tilde{g}$. \square

II.3.2. PROPOSITION. *Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und \tilde{X} zusammenhängend. Dann wirkt die Gruppe der Decktransformationen strikt diskontinuierlich auf \tilde{X} . Insbesondere ist diese Wirkung frei.*

BEWEIS. Es sei $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Wegen der Überlagerungseigenschaft von p existiert eine offene Umgebung \tilde{U} von \tilde{x} , sodass $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow X$ injektiv ist. Sei nun φ eine Decktransformation mit $\varphi(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$. Wir finden daher $\tilde{y} \in \tilde{U}$ mit $\varphi(\tilde{y}) \in \tilde{U}$. Da $p \circ \varphi = p$ folgt aus der Injektivität von $p|_{\tilde{U}}$, dass $\varphi(\tilde{y}) = \tilde{y}$. Aus Proposition II.3.1 erhalten wir daher $\varphi = \text{id}_{\tilde{X}}$. Also ist die Wirkung von $\text{Deck}(\tilde{X})$ strikt diskontinuierlich. \square

Jede Überlagerung hat die Homotopieliftungseigenschaft, siehe Satz II.3.3 unten. Der Beweis ist völlig analog zu dem Beweis von Proposition I.2.3.

II.3.3. SATZ (Homotopieliftungseigenschaft). *Es seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, $H : Y \times I \rightarrow X$ eine Homotopie und $\tilde{h} : Y \rightarrow \tilde{X}$ stetig, sodass $p \circ \tilde{h} = H_0$. Dann existiert genau eine Homotopie $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$.*

BEWEIS. Die Eindeutigkeit von \tilde{H} folgt aus Proposition II.3.1 und dem Zusammenhang von I , denn für fixes $y \in Y$ ist $I \rightarrow \tilde{X}$, $t \mapsto \tilde{H}_t(y)$ ein stetiger Lift des Weges $I \rightarrow X$, $t \mapsto H_t(y)$, mit Anfangspunkt $\tilde{H}_0(y) = \tilde{h}(y)$. Nun zur Konstruktion von \tilde{H} . Aus der Überlagerungseigenschaft von p erhalten wir eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ von X , sodass jedes U_α von p gleichmäßig überlagert wird. Die Beweise von Lemma I.2.10 und I.2.11 lassen sich mühelos auf die vorliegende Situation verallgemeinern.

II.3.4. LEMMA. *Zu jedem Punkt $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung N von y , $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$, sodass für jedes $i = 1, \dots, n$ gilt $H(N \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_{\alpha_i}$.*

BEWEIS. Da $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Überdeckung von X bildet, existiert zu jedem $s \in I$ ein $\alpha_s \in A$ mit $H(y, s) \in U_{\alpha_s}$. Da H stetig ist, finden wir zu jedem $s \in I$ eine offene Umgebung N_s von y und eine offene Umgebung J_s von s mit $H(N_s \times J_s) \subseteq U_{\alpha_s}$. Klarerweise bildet $\{J_s\}_{s \in I}$ eine offene Überdeckung von I . Da I kompakt ist, existieren $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und $s_1, \dots, s_n \in I$ mit $[t_{i-1}, t_i] \subseteq J_{s_i}$, $1 \leq i \leq n$, siehe Lemma I.1.28. Betrachte nun die offene

Umgebung $N := \bigcap_{i=1}^n N_{s_i}$ von y . Für $1 \leq i \leq n$ gilt dann $H(N \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq H(N_{s_i} \times J_{s_i}) \subseteq U_{\alpha_{s_i}}$. Mit $\alpha_i := \alpha_{s_i}$ folgt daher die Behauptung. \square

II.3.5. LEMMA. *Zu jedem $y \in Y$ existieren eine offene Umgebung V von y und eine stetige Abbildung $\tilde{G} : V \times I \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{G} = H|_{V \times I}$ und $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_V$.*

BEWEIS. Nach Lemma II.3.4 existieren eine offene Umgebung N von y , $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$, sodass

$$H(N \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_{\alpha_i}, \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{II.2})$$

Da U_α von p gleichmäßig überlagert wird, existiert eine Indexmenge Λ_α , disjunkte offene Teilmengen \tilde{U}_α^λ , $\lambda \in \Lambda_\alpha$, mit $p^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_\alpha} \tilde{U}_\alpha^\lambda$ und so, dass $p|_{\tilde{U}_\alpha^\lambda} : \tilde{U}_\alpha^\lambda \rightarrow U_\alpha$ ein Homöomorphismus ist, für jedes $\lambda \in \Lambda_\alpha$. Wegen (II.2) und $p \circ \tilde{h} = H_0$ ist $p(\tilde{h}(y)) = H_{t_0}(y) \in U_{\alpha_1}$, also existiert $\lambda_1 \in \Lambda_{\alpha_1}$ mit $\tilde{h}(y) \in \tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1}$. Betrachte die offene Umgebung $V^1 := N \cap \tilde{h}^{-1}(\tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1})$ von y und die stetige Abbildung

$$\tilde{G}^1 : V^1 \times [t_0, t_1] \rightarrow \tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1} \subseteq \tilde{X}, \quad \tilde{G}^1 := (p|_{\tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1}})^{-1} \circ H|_{V^1 \times [t_0, t_1]}.$$

Offensichtlich gilt $p \circ \tilde{G}^1 = H|_{V^1 \times [t_0, t_1]}$. Aus $H_0 = p \circ \tilde{h}$ erhalten wir $p \circ \tilde{G}_{t_0}^1 = H_{t_0}|_{V^1} = p \circ \tilde{h}|_{V^1}$, und da p auf $\tilde{U}_{\alpha_1}^{\lambda_1}$ injektiv ist folgt $\tilde{G}_{t_0}^1 = \tilde{h}|_{V^1}$.

Induktiv fortfahrend erhalten wir offene Umgebungen $V^1 \supseteq V^2 \supseteq \dots \supseteq V^n$ von y , und $\lambda_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, sowie stetige Abbildungen $\tilde{G}^i : V^i \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow \subseteq \tilde{U}_{\alpha_i}^{\lambda_i} \subseteq \tilde{X}$, $1 \leq i \leq n$, sodass

$$p \circ \tilde{G}^i = H|_{V^i \times [t_{i-1}, t_i]}, \quad \tilde{G}_{t_0}^1 = \tilde{h}|_{V^1} \quad \text{und} \quad \tilde{G}_{t_{i-1}}^i = \tilde{G}_{t_{i-1}}^{i-1}|_{V^i} \quad \text{für } i = 2, \dots, n.$$

Betrachte nun die offene Umgebung $V := V^n$ von y und definiere eine Abbildung $\tilde{G} : V \times I \rightarrow \tilde{X}$ durch $\tilde{G}|_{V \times [t_{i-1}, t_i]} := \tilde{G}^i|_{V \times [t_{i-1}, t_i]}$. Da $\tilde{G}_{t_{i-1}}^i|_V = \tilde{G}_{t_{i-1}}^{i-1}|_V$ ist dies wohldefiniert. Aus der Stetigkeit von $\tilde{G}^i|_{V \times [t_{i-1}, t_i]}$ und Lemma I.1.2 folgt, dass \tilde{G} stetig ist. Aus $p \circ \tilde{G}^i = H|_{V^i \times [t_{i-1}, t_i]}$ erhalten wir $p \circ \tilde{G} = H|_{V \times I}$. Schließlich folgt aus $\tilde{G}_{t_0}^1 = \tilde{h}|_{V^1}$ auch $\tilde{G}_0 = \tilde{h}|_V$. Also hat \tilde{G} alle gewünschten Eigenschaften. \square

Nach Lemma II.3.5 existiert zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung V^y von y und eine stetige Abbildung $\tilde{G}^y : V^y \times I \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{G}^y = H|_{V^y \times I}$ und $\tilde{G}_0^y = \tilde{h}|_{V^y}$. Wie im Beweis der Eindeutigkeit von \tilde{H} , erhalten wir aus Proposition II.3.1 und dem Zusammenhang von I , dass die Abbildungen \tilde{G}^{y_1} und \tilde{G}^{y_2} auf $(V^{y_1} \cap V^{y_2}) \times I$ übereinstimmen müssen, $y_1, y_2 \in Y$. Es existiert daher eine Abbildung $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow \tilde{X}$, sodass $\tilde{H}|_{V^y \times I} = \tilde{G}^y$, für jedes $y \in Y$. Aus den entsprechenden Eigenschaften von \tilde{G}^y folgt sofort $p \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}_0 = \tilde{h}$. Auch die Stetigkeit von \tilde{H} ist offensichtlich, denn die Einschränkungen von \tilde{H} auf die offenen Teilmengen $V^y \times I$ sind stetig. Damit ist der Beweis von Satz II.3.3 vollständig. \square

II.3.6. KOROLLAR (Liften von Wegen). *Es seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, $f : I \rightarrow X$ ein Weg in X und $\tilde{x} \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}) = f(0)$. Dann existiert genau ein Weg $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$.*

BEWEIS. Die folgt aus Satz II.3.3 mit $Y = \{*\}$, vgl. Proposition I.2.6. \square

II.3.7. KOROLLAR. *Es seien $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, und $f, g : I \rightarrow X$ zwei Wege die homotop relativ Endpunkten sind. Weiters seien $\tilde{f}, \tilde{g} : I \rightarrow \tilde{X}$ Lifts von f und g mit gleichem Anfangspunkt $\tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$. Dann sind auch \tilde{f} und \tilde{g} homotop relative Endpunkten in \tilde{X} . Insbesondere haben \tilde{f} und \tilde{g} denselben Endpunkt, $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$.*

BEWEIS. Es bezeichne $H : I \times I \rightarrow X$ eine Homotopie relativ Endpunkten von $H_0 = f$ nach $H_1 = g$. Nach Satz II.3.3 existiert eine Homotopie $\tilde{H} : I \times I \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ und $p \circ \tilde{H} = H$. Da für $i = 0, 1$ der Weg $t \mapsto p(\tilde{H}(i, t)) = H(i, t)$ konstant ist, muss nach der Eindeutigkeitsaussage in Korollar II.3.6 auch $t \mapsto \tilde{H}(i, t)$ konstant in t sein. Also ist \tilde{H} eine Homotopie relativ Endpunkten. Insbesondere gilt $\tilde{H}_1(0) = \tilde{H}_0(0) = \tilde{f}(0) = \tilde{g}(0)$. Also ist $s \mapsto \tilde{H}_1(s)$ ein Lift von g mit Anfangspunkt $\tilde{H}_1(0) = \tilde{g}(0)$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Korollar II.3.6 schließen wir $\tilde{H}_1 = \tilde{g}$. Also ist \tilde{H} eine Homotopie relativ Endpunkten von $\tilde{H}_0 = \tilde{f}$ nach $\tilde{H}_1 = \tilde{g}$. \square

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung, $x_0 \in X$ und es bezeichne $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$ die Faser über x_0 . Wir erhalten eine Abbildung

$$F_{x_0} \times \pi_1(X, x_0) \rightarrow F_{x_0}, \quad (\tilde{x}, [f]) \mapsto \tilde{x} \cdot [f] := \tilde{f}_{\tilde{x}}(1) \quad (\text{II.3})$$

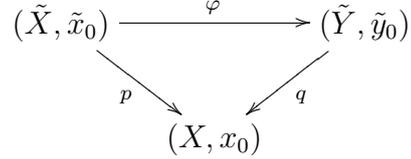
wobei $\tilde{f}_{\tilde{x}} : I \rightarrow \tilde{X}$ den eindeutigen Lift von f mit Anfangspunkt $\tilde{f}_{\tilde{x}}(0) = \tilde{x}$ bezeichnet, vgl. Korollar II.3.6. Beachte, dass dies nach Korollar II.3.7 tatsächlich wohldefiniert ist, denn der Endpunkt $\tilde{f}_{\tilde{x}}(1)$ hängt nur von der Homotopieklasse von f ab.

II.3.8. PROPOSITION. *Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $x_0 \in X$, dann definiert die Abbildung (II.3) eine Rechtswirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$. Diese Wirkung kommutiert mit der Linkswirkung der Gruppe der Decktransformationen $\text{Deck}(\tilde{X})$, dh. $\varphi(\tilde{x} \cdot \sigma) = \varphi(\tilde{x}) \cdot \sigma$ für alle $\varphi \in \text{Deck}(\tilde{X})$, $\tilde{x} \in F_{x_0}$ und $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Für wegzusammenhängendes \tilde{X} ist die Rechtswirkung (II.3) transitiv.*

BEWEIS. Da das neutrale Element $1 \in \pi_1(X, x_0)$ durch die konstante Schleife c_{x_0} repräsentiert wird, gilt offensichtlich $\tilde{x} \cdot 1 = \tilde{x}$ für jedes $\tilde{x} \in F_{x_0}$. Sind f und g zwei Schleifen bei x_0 und $\tilde{x} \in F_{x_0}$, so folgt $(\tilde{f}\tilde{g})_{\tilde{x}} = \tilde{f}_{\tilde{x}}\tilde{g}_{\tilde{f}_{\tilde{x}}(1)} = \tilde{f}_{\tilde{x}}\tilde{g}_{\tilde{x} \cdot [f]}$, und daher $\tilde{x} \cdot ([f][g]) = \tilde{x} \cdot [fg] = (\tilde{f}\tilde{g})_{\tilde{x}}(1) = (\tilde{f}_{\tilde{x}}\tilde{g}_{\tilde{x} \cdot [f]})_{\tilde{x}}(1) = \tilde{g}_{\tilde{x} \cdot [f]}(1) = (\tilde{x} \cdot [f]) \cdot [g]$. Dies zeigt, dass (II.3) tatsächlich eine Rechtswirkung auf F_{x_0} definiert. Ist $\varphi \in \text{Deck}(\tilde{X})$ eine Decktransformation so gilt $\varphi \circ \tilde{f}_{\tilde{x}} = \tilde{f}_{\varphi(\tilde{x})}$ und wir erhalten $\varphi(\tilde{x} \cdot [f]) = \varphi(\tilde{f}_{\tilde{x}}(1)) = (\varphi \circ \tilde{f}_{\tilde{x}})(1) = \tilde{f}_{\varphi(\tilde{x})}(1) = \varphi(\tilde{x}) \cdot [f]$, also kommutiert die Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ mit der Linkswirkung der Decktransformationen. *Zur Transitivität:* Ist \tilde{X} wegzusammenhängend, so finden wir zu zwei gegebenen Punkten $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0}$ einen Weg \tilde{f} mit $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{f}(1) = \tilde{x}_1$. Da $p(\tilde{x}_0) = x_0 = p(\tilde{x}_1)$ ist

$f := p \circ \tilde{f}$ eine Schleife bei x_0 und definiert daher ein Element $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. Nach Konstruktion ist $\tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{x}_1$, die Wirkung also transitiv. \square

Unter einer *punktierte Überlagerung* verstehen wir eine Abbildung punktierter Räume $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ deren zugrundeliegende Abbildung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung ist. Punktierte Überlagerungen werden auch *Überlagerung mit Basispunkt* genannt. Unter einem Isomorphismus zwischen zwei punktierten Überlagerungen $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ und $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (X, x_0)$ verstehen wir einen Homöomorphismus punktierter Räume $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit $q \circ \varphi = p$. Existiert so ein Isomorphismus, dann nennen wir die beiden punktierten Überlagerungen isomorph.



II.3.9. DEFINITION (Charakteristische Untergruppe). Unter der *charakteristische Untergruppe* einer punktierten Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ verstehen wir die Untergruppe $\text{img}(p_*) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ von $\pi_1(X, x_0)$.

II.3.10. BEMERKUNG. Sind $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ und $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (X, x_0)$ zwei isomorphe punktierte Überlagerungen, dann stimmen ihre charakteristischen Untergruppen überein, denn ist $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ ein Isomorphismus punktierter Überlagerungen, dann folgt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = (q \circ \varphi)_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = q_*(\varphi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) = q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$, siehe Proposition I.1.14.

II.3.11. PROPOSITION. *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung und es bezeichne $F_{x_0} := p^{-1}(x_0)$ die Faser über x_0 . Dann gilt:*

- (i) *Der Homomorphismus $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ ist injektiv, die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ daher zu $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ isomorph.*
- (ii) *Für eine Schleife f bei x_0 gilt $[f] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ genau dann, wenn sie sich zu einer Schleife bei \tilde{x}_0 liften lässt, dh. $\tilde{f}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$.*
- (iii) *Die Isotropiegruppe von \tilde{x}_0 bezüglich der Rechtswirkung (II.3) stimmt mit der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ überein. Wir erhalten daher eine injektive Abbildung*

$$\pi_1(X, x_0) / p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \rightarrow F_{x_0}, \quad \sigma \mapsto \tilde{x}_0 \cdot \sigma, \tag{II.4}$$

wobei $\pi_1(X, x_0) / p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ die Menge der Rechtsnebenklassen bezeichnet.

- (iv) *Für $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ gilt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0 \cdot \sigma)) = \sigma^{-1}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))\sigma$.*

Ist darüberhinaus \tilde{X} wegzusammenhängend, dann gilt weiters:

- (v) Die Abbildung (II.4) ist eine Bijektion. Die Blätterzahl von p stimmt daher mit dem Index²¹ der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ in $\pi_1(X, x_0)$ überein.
- (vi) Für $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0}$ sind die charakteristischen Untergruppen $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ und $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ konjugiert²² in $\pi_1(X, x_0)$.
- (vii) Jede zu $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ konjugierte Untergruppe in $\pi_1(X, x_0)$ ist von der Form $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ für einen geeigneten Punkt $\tilde{x}_1 \in F_{x_0}$.
- (viii) Die Gleichung $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi)$, $\varphi \in \text{Deck}(\tilde{X})$, definiert einen injektiven Gruppenhomomorphismus²³

$$\Phi : \text{Deck}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{N}_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) / p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)). \quad (\text{II.5})$$

BEWEIS. Die Aussagen (i) und (ii) folgen sofort aus Korollar II.3.7. Ad (iii): Aus (ii) sehen wir, dass die Isotropiegruppe von \tilde{x}_0 mit der charakteristischen Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ übereinstimmt. Es folgt daher $\tilde{x}_0 \cdot \sigma_1 = \tilde{x}_0 \cdot \sigma_2 \Leftrightarrow \tilde{x}_0 \cdot (\sigma_1 \sigma_2^{-1}) = \tilde{x}_0 \Leftrightarrow \sigma_1 \sigma_2^{-1} \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \Leftrightarrow p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \sigma_1 = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \sigma_2$. Dies zeigt, dass (II.4) wohldefiniert und injektiv ist. Ad (iv): Sei f eine Schleife bei x_0 die σ repräsentiert, und $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ ihr Lift mit Anfangspunkt $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Nach Definition ist dann $\tilde{x}_0 \cdot \sigma = \tilde{f}(1)$. Nach Proposition I.1.18 gilt $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \beta_{\tilde{f}}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0 \cdot \sigma))$. Es folgt $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = p_*(\beta_{\tilde{f}}(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0 \cdot \sigma))) = \sigma(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0 \cdot \sigma)))\sigma^{-1}$ und damit die Behauptung. Sei nun \tilde{X} wegzusammenhängend. Nach Proposition II.3.8 ist dann die Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf F_{x_0} transitiv, daher (II.4) surjektiv, woraus nun (v) folgt. Aus der Transitivität der Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf F_{x_0} zusammen mit (iv) folgt (vi). Auch (vii) folgt sofort aus (iv). Wenden wir uns schließlich (viii) zu. Sei $\varphi \in \text{Deck}(\tilde{X})$. Wegen der Transitivität der Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf F_{x_0} existiert $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \sigma$. Aus (iv) erhalten wir $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \varphi(\tilde{x}_0))) = \sigma^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \sigma$, nach Bemerkung II.3.10 gilt aber auch $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \varphi(\tilde{x}_0))) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Es folgt $\sigma^{-1} p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \sigma = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, also $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$. Zusammen mit (v) sehen wir daher, dass $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi)$ tatsächlich eine Abbildung $\Phi : \text{Deck}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{N}_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) / p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ definiert. Diese ist injektiv, denn die Wirkung von $\text{Deck}(\tilde{X})$ auf F_{x_0} ist frei, siehe Proposition II.3.2. Nach Proposition II.3.8 kommutieren die Wirkungen von $\text{Deck}(\tilde{X})$ und $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser F_{x_0} . Daher ist $\tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi \circ \psi) = (\varphi \circ \psi)(\tilde{x}_0) = \varphi(\tilde{x}_0 \cdot \Phi(\psi)) = \varphi(\tilde{x}_0) \cdot \Phi(\psi) =$

²¹Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, dann wird die Kardinalzahl $\sharp(G/H)$ der Index von H in G genannt. Der Index einer Untergruppe ist daher die Anzahl der Linksnebenklassen von H , und dies stimmt mit der Anzahl ihrer Rechtsnebenklassen überein.

²²Zwei Untergruppen H_1 und H_2 einer Gruppe G werden *konjugiert* genannt, falls $g \in G$ mit $gH_1g^{-1} = H_2$ existiert. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Untergruppen von G .

²³Ist G eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe, dann heißt $\mathcal{N}_G(H) := \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ der *Normalisator* von H in G . Dies ist die größte Untergruppe von G , die H als Normalteiler enthält.

$(\tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi)) \cdot \Phi(\psi) = \tilde{x}_0 \cdot (\Phi(\varphi)\Phi(\psi))$, also $\Phi(\varphi \circ \psi) = \Phi(\varphi)\Phi(\psi)$. Damit ist auch die Homomorphieeigenschaft von Φ gezeigt. \square

II.4. Liften von Abbildungen. Unter schwachen Zusammenhangsvoraussetzungen erlaubt die charakteristische Untergruppe eine vollständige Lösung des Liftungsproblems. Wir benötigen hierfür den folgenden Zusammenhangsbegriff. Ein topologischer Raum X heißt *lokal wegzusammenhängend*, falls zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung U von x , eine wegzusammenhängende Umgebung V von x mit $V \subseteq U$ existiert. In anderen Worten, jeder Punkt in $x \in X$ besitzt eine Umgebungsbasis aus wegzusammenhängenden Umgebungen. Ist X lokal wegzusammenhängend und U eine offene Umgebung von $x \in X$, dann bilden die Punkte in U die sich durch einen Weg in U mit x verbinden lassen eine *offene* wegzusammenhängende Umgebung von x . In einem lokal wegzusammenhängenden Raum besitzt daher jeder Punkt sogar eine Umgebungsbasis aus offenen wegzusammenhängenden Umgebungen.

II.4.1. BEMERKUNG. Ein lokal wegzusammenhängender Raum ist genau dann wegzusammenhängend wenn er zusammenhängend ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass in einem lokal wegzusammenhängenden Raum die Wegzusammenhangskomponenten offen und daher auch abgeschlossen sind.

II.4.2. BEMERKUNG. Für eine Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ gilt: X ist genau dann lokal wegzusammenhängend wenn \tilde{X} lokal wegzusammenhängend ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass p ein lokaler Homöomorphismus ist.

II.4.3. BEISPIEL. Jeder lokal kontrahierbare Raum ist lokal wegzusammenhängend. Dabei heißt ein topologischer Raum *lokal kontrahierbar*, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis kontrahierbarer Umgebungen besitzt, dh. zu jedem Punkt x und jeder Umgebung U von x existiert eine kontrahierbare Umgebung V von x mit $V \subseteq U$. Etwa sind topologische Mannigfaltigkeiten offensichtlich lokal kontrahierbar und damit auch lokal wegzusammenhängend.

II.4.4. BEISPIEL. Bezeichne $Z := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ und betrachte $X := (I \times \{0\}) \cup (Z \times I)$. Der Raum X ist wegzusammenhängend, aber nicht lokal wegzusammenhängend. Keiner der Punkte $(0, y) \in X$, $y \in (0, 1]$, besitzt eine Basis aus wegzusammenhängenden Umgebungen.

II.4.5. SATZ (Liftungskriterium). *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung und (Y, y_0) ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender punktierter Raum. Eine Abbildung punktierter Räume $f : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ lässt sich genau dann zu einer Abbildung punktierter Räume $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ liften, wenn $f_*(\pi_1(Y, y_0))$ in der charakteristischen Untergruppe von p enthalten ist, dh. wenn gilt $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. In diesem Fall ist der Lift \tilde{f} eindeutig.*

BEWEIS. Die Bedingung ist offensichtlich notwendig, denn ist $\tilde{f} : (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ein Lift von f , dann erhalten wir $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = (p \circ \tilde{f})_*(\pi_1(Y, y_0)) = p_*(f_*(\pi_1(Y, y_0))) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Die Eindeutigkeit des Lifts folgt aus Proposition II.3.1. Nun zur Konstruktion von \tilde{f} . Da Y wegzusammenhängend ist, siehe Bemerkung II.4.1, existiert zu jedem Punkt $y \in Y$ ein Weg $\sigma : I \rightarrow Y$ von $\sigma(0) = y_0$ nach $\sigma(1) = y$. Es ist dann $f \circ \sigma$ ein Weg in X mit Anfangspunkt $(f \circ \sigma)(0) = x_0$. Nach Korollar II.3.6 lässt sich dieser Weg über p zu einem Weg $\tilde{f} \circ \sigma$ mit Anfangspunkt $(\tilde{f} \circ \sigma)(0) = \tilde{x}_0$ liften. Wir setzen $\tilde{f}(y) := (\tilde{f} \circ \sigma)(1)$ und überzeugen uns zunächst davon, dass dies wohldefiniert, dh. unabhängig von der Wahl von σ ist. Ist τ ein weiterer Weg von y_0 nach y , dann ist $f \circ (\sigma\bar{\tau}) = (f \circ \sigma)(f \circ \tau)$ eine Schleife bei x_0 , die sich wegen $f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subseteq p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ und Proposition II.3.11(ii) zu einer Schleife bei \tilde{x}_0 liften lässt. Es müssen daher die Endpunkte von $\tilde{f} \circ \sigma$ und $\tilde{f} \circ \tau$ übereinstimmen, $(\tilde{f} \circ \sigma)(1) = (\tilde{f} \circ \tau)(1)$, und damit ist \tilde{f} wohldefiniert. Offensichtlich gilt $p \circ \tilde{f} = f$ und $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$. Es bleibt noch die Stetigkeit von \tilde{f} zu verifizieren. Sei dazu $y \in Y$ und \tilde{U} eine offene Umgebung von $\tilde{f}(y)$, sodass $U := \pi(\tilde{U})$ offen und $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Da f stetig und Y lokal wegzusammenhängend ist, existiert eine wegzusammenhängende Umgebung V von y mit $f(V) \subseteq U$. Es genügt zu zeigen $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$. Sei dazu $v \in V$ und α ein Weg in V von y nach v . Dann ist $\sigma\alpha$ ein Weg von y_0 nach v , und $(\tilde{f} \circ \sigma)((p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ f \circ \alpha)$ der Lift des Weges $f \circ (\sigma\alpha)$ mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 . Nach Definition von \tilde{f} gilt daher $\tilde{f}(v) = ((\tilde{f} \circ \sigma)((p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ f \circ \alpha))(1) = (p|_{\tilde{U}})^{-1}(f(v)) \in \tilde{U}$. Dies zeigt $\tilde{f}(V) \subseteq \tilde{U}$, also ist \tilde{f} stetig. \square

II.4.6. BEMERKUNG. Da $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ injektiv ist, siehe Proposition II.3.11(i), ist die Bedingung in Satz II.4.5 äquivalent zu der Forderung, dass sich der Homomorphismus $f_* : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ über p_* zu einem Homomorphismus $\lambda : \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ liften lässt, dh. $p_* \circ \lambda = f_*$. Das geometrische Liftungsproblem lässt sich daher genau dann lösen, wenn das entsprechende algebraische Problem lösbar ist:

$$\begin{array}{ccc}
 & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \\
 \exists \tilde{f} \nearrow & \downarrow p & \\
 (Y, y_0) & \xrightarrow{f} & (X, x_0)
 \end{array}
 \iff
 \begin{array}{ccc}
 & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \\
 \exists \lambda \nearrow & \downarrow p_* & \\
 \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x_0)
 \end{array}$$

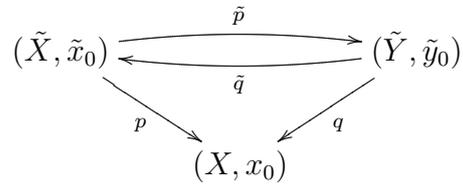
II.4.7. BEISPIEL. Für $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $[S^n, T^k] = 0$, dh. je zwei stetige Abbildung $S^n \rightarrow T^k$ sind homotop. Seien dazu $f, g : S^n \rightarrow T^k$ stetig. Betrachte die Überlagerung $p : \mathbb{R}^k \rightarrow T^k$ aus Beispiel II.2.5. Da S^n einfach zusammenhängend ist, folgt aus Satz II.4.5 die Existenz stetiger Abbildungen $\tilde{f}, \tilde{g} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $p \circ \tilde{g} = g$. Da \mathbb{R}^k kontrahierbar ist, sind \tilde{f} und \tilde{g} homotop. Damit müssen auch f und g homotop sein.

II.4.8. BEISPIEL. Für $n \geq 2$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $[\mathbb{R}P^n, T^k] = 0$, dh. je zwei stetige Abbildungen $\mathbb{R}P^n \rightarrow T^k$ sind homotop. Wir betrachten wieder die Überlagerung $p : \mathbb{R}^k \rightarrow T^k$. Da $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}_2$, siehe Proposition I.5.18, und $\pi_1(T^k) \cong \mathbb{Z}^k$, siehe Beispiel I.2.16, ist jeder Homomorphismus $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \pi_1(T^k)$ trivial. Sind also $f, g : \mathbb{R}P^n \rightarrow T^k$ stetig, dann existieren $\tilde{f}, \tilde{g} : \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $p \circ \tilde{f} = f$ und $p \circ \tilde{g} = g$, siehe Satz II.4.5. Da \mathbb{R}^k kontrahierbar ist, sind \tilde{f} und \tilde{g} homotop, also müssen auch f und g homotop sein.

Wir nennen eine Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ (weg)zusammenhängend, falls \tilde{X} (weg)zusammenhängend ist. Als stetiges Bild von \tilde{X} muss dann auch X (weg)zusammenhängend sein. Wenn wir im Folgenden von einer zusammenhängenden Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X sprechen dann impliziert dies, dass X und \tilde{X} beide wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend sind, siehe die Bemerkungen II.4.1 und II.4.2.

II.4.9. KOROLLAR. *Zwei zusammenhängende punktierte Überlagerungen eines lokal wegzusammenhängenden punktierten Raums sind genau dann isomorph, wenn ihre charakteristischen Untergruppen übereinstimmen. In diesem Fall gibt es genau einen Isomorphismus punktierter Überlagerungen zwischen ihnen.*

BEWEIS. Seien $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (X, x_0)$ und $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ zwei zusammenhängende Überlagerungen von X . Existiert ein Isomorphismus punktierter Überlagerungen $\varphi : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, dann müssen die charakteristischen Untergruppen übereinstimmen, siehe Bemerkung II.3.10. Da der Isomorphismus φ als Lift der Abbildung q über p interpretiert werden kann, folgt die Eindeutigkeit des Isomorphismus aus Proposition II.3.1. Ist andererseits $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0))$ dann folgt aus Satz II.4.5, dass p und q zu Abbildungen punktierter Räume $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ und $\tilde{q} : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ geliftet werden können: Es ist dann $\tilde{q}^{-1} \circ \tilde{p}$ ein Automorphismus der punktierten Überlagerung p , und wegen der Eindeutigkeit solcher Automorphismen, siehe Proposition II.3.1, muss $\tilde{q}^{-1} \circ \tilde{p} = \text{id}_{\tilde{X}}$ gelten. Ebenso folgt $\tilde{p}^{-1} \circ \tilde{q} = \text{id}_{\tilde{Y}}$. Also ist \tilde{p} ein Homöomorphismus und damit der gesuchte Isomorphismus punktierter Überlagerungen. \square



II.4.10. KOROLLAR. *Es sei X ein einfach zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum. Dann ist jede zusammenhängende Überlagerung von X zu der trivialen ein-blättrigen Überlagerung $\text{id}_X : X \rightarrow X$ isomorph. Weiters ist jede Überlagerung von X trivial.*

BEWEIS. Die erste Aussage folgt sofort aus Korollar II.4.9. Sei nun $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine nicht notwendigerweise zusammenhängende Überlagerung. Es bezeichnen \tilde{X}_λ , $\lambda \in \Lambda$, die Wegzusammenhangskomponenten von \tilde{X} und $p_\lambda := p|_{\tilde{X}_\lambda} : \tilde{X}_\lambda \rightarrow X$. Aus dem Wegzusammenhang von X und Korollar II.3.6 folgt, dass jedes

$p_\lambda : \tilde{X}_\lambda \rightarrow X$ surjektiv ist. Ist U eine wegzusammenhängende offene Teilmenge die von p gleichmäßig überlagert wird, dann wird diese auch von p_λ gleichmäßig überlagert. Also ist jedes $p_\lambda : \tilde{X}_\lambda \rightarrow X$ eine zusammenhängende Überlagerung, und daher ein Homöomorphismus. Es folgt $\tilde{X} \cong X \times \Lambda$, also ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine triviale Überlagerung. \square

II.4.11. KOROLLAR. *Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine zusammenhängende Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X . Weiters seien $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) *Es existiert eine Decktransformation $\varphi \in \text{Deck}(\tilde{X})$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$.*
- (ii) *Die Untergruppen $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ und $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ stimmen überein.*
- (iii) *Für ein (und dann jedes) $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 \cdot \sigma = \tilde{x}_1$ gilt $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$.*
- (iv) *Für einen (und dann jeden) Weg $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ von \tilde{x}_0 nach \tilde{x}_1 liegt $[p \circ \tilde{f}]$ im Normalisator $\mathcal{N}_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$.*
- (v) *Zu jeder Schleife \tilde{f} bei \tilde{x}_0 existiert eine Schleife \tilde{g} bei \tilde{x}_1 mit $p \circ \tilde{f} = p \circ \tilde{g}$.*

BEWEIS. Die Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (ii) folgt aus Korollar II.4.9, denn eine Decktransformation mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ ist ein Isomorphismus punktierter Überlagerungen $\varphi : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_1)$. Die Äquivalenz (ii) \Leftrightarrow (iii) folgt aus Proposition II.3.11(iv). Die Äquivalenz (iii) \Leftrightarrow (iv) ist offensichtlich. Die Äquivalenz (ii) \Leftrightarrow (v) folgt aus Proposition II.3.11(ii). \square

II.4.12. KOROLLAR. *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine zusammenhängende punktierte Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X . Dann ist (II.5) ein Isomorphismus von Gruppen,*

$$\text{Deck}(\tilde{X}) \cong \mathcal{N}_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) / p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

BEWEIS. Nach Proposition II.3.11(viii) bleibt nur die Surjektivität des Homomorphismus $\Phi : \text{Deck}(\tilde{X}) \rightarrow \mathcal{N}_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) / p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ zu zeigen. Sei also $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$. Nach Korollar II.4.11 existiert eine Decktransformation φ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \sigma$. Es folgt $\Phi(\varphi) = \sigma$, also ist Φ surjektiv. \square

II.5. Normale Überlagerungen. Normale Überlagerungen sind Überlagerungen mit maximaler Symmetrie. Genauer haben wir folgende Definition. Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ heißt *normal*, wenn für je zwei Punkte $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ eine Decktransformation $\varphi \in \text{Deck}(\tilde{X})$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ existiert. Eine Überlagerung ist also genau dann normal, wenn die Gruppe der Decktransformationen auf jeder Faser transitiv wirkt. Normale Überlagerungen werden manchmal auch als *reguläre* Überlagerungen bezeichnet.

II.5.1. PROPOSITION. *Für eine zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eines lokal wegzusammenhängenden Raumes X sind äquivalent:*

- (i) *$p : \tilde{X} \rightarrow X$ ist eine normale Überlagerung.*

- (ii) Für einen (und dann jeden) Punkt $x_0 \in X$ wirkt die Gruppe der Decktransformationen $\text{Deck}(\tilde{X})$ transitiv auf der Faser $F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$.
- (iii) Für einen (und dann jeden) Punkt $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ist die charakteristische Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$.
- (iv) Zu jeder Schleife \tilde{f} in \tilde{X} und jedem Punkt $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_1) = p(\tilde{f}(0))$ existiert eine Schleife \tilde{g} bei \tilde{x}_1 mit $p \circ \tilde{g} = p \circ \tilde{f}$.

In diesem Fall gilt weiters $\text{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, für jedes $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, und die Blätterzahl von p stimmt mit der Ordnung von $\text{Deck}(\tilde{X})$ überein.

BEWEIS. In der Äquivalenz (i) \Leftrightarrow (ii) ist nur zu zeigen, dass wenn $\text{Deck}(\tilde{X})$ auf der Faser F_{x_0} transitiv wirkt dies dann auch für jede andere Faser gilt. Seien dazu \tilde{y}_0 und \tilde{y}_1 mit $p(\tilde{y}_0) = p(\tilde{y}_1)$ und $\tilde{x}_0 \in F_{x_0}$ beliebig. Wähle einen Weg $\tilde{f}_0 : I \rightarrow \tilde{X}$ von $\tilde{f}_0(0) = \tilde{y}_0$ nach $\tilde{f}_0(1) = \tilde{x}_0$. Weiters bezeichne $\tilde{f}_1 : I \rightarrow \tilde{X}$ den eindeutigen Weg mit $p \circ \tilde{f}_1 = p \circ \tilde{f}_0$ und $\tilde{f}_1(0) = \tilde{y}_1$, siehe Korollar II.3.6. Es ist dann auch $\tilde{x}_1 := \tilde{f}_1(1) \in F_{x_0}$, nach Voraussetzung existiert daher eine Decktransformation φ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition II.3.1 folgt $\varphi \circ \tilde{f}_0 = \tilde{f}_1$, denn beide Wege liften den Weg $p \circ \tilde{f}_0$ und sie haben denselben Endpunkt $(\varphi \circ \tilde{f}_0)(1) = \tilde{x}_1 = \tilde{f}_1(1)$. Dann gilt aber auch $\varphi(\tilde{y}_0) = (\varphi \circ \tilde{f}_0)(0) = \tilde{f}_1(0) = \tilde{y}_1$. Nun zur Implikation (ii) \Rightarrow (iii): Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 := p(\tilde{x}_0)$ und $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Da die Wirkung der Decktransformationen auf F_{x_0} transitiv ist, existiert $\varphi \in \text{Deck}(\tilde{X})$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \sigma$. Nach Korollar II.4.11 ist daher $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$. Da dies für alle $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ gilt muss $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ sein. Ad (iii) \Rightarrow (ii): Seien also $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in F_{x_0}$. Nach Proposition II.3.8 existiert $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ mit $\tilde{x}_0 \cdot \sigma = \tilde{x}_1$. Da $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ ein Normalteiler von $\pi_1(X, x_0)$ ist, gilt insbesondere $\sigma \in \mathcal{N}_{\pi_1(X, x_0)}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$. Nach Korollar II.4.11 existiert daher $\varphi \in \text{Deck}(\tilde{X})$ mit $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$. Also wirkt $\text{Deck}(\tilde{X})$ transitiv auf F_{x_0} . Schließlich folgt die Äquivalenz (iv) \Leftrightarrow (ii) aus Korollar II.4.11. Ist nun p normal und $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, dann folgt aus Korollar II.4.12 $\text{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))/p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, denn $\mathcal{N}_{\pi_1(X, p(\tilde{x}_0))}(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) = \pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$ da die charakteristische Untergruppe ein Normalteiler ist. Schließlich ist $\text{Deck}(\tilde{X}) \rightarrow F_{p(\tilde{x}_0)}$, $\varphi \mapsto \varphi(\tilde{x}_0)$, bijektiv, denn $\text{Deck}(\tilde{X})$ wirkt frei und transitiv auf $F_{p(\tilde{x}_0)}$. Also stimmt die Blätterzahl mit der Ordnung von $\text{Deck}(\tilde{X})$ überein. \square

II.5.2. BEISPIEL. Jede zusammenhängende Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raums mit abelscher Fundamentalgruppe ist eine normale Überlagerung, siehe Proposition II.5.1, denn Untergruppen abelscher Gruppen sind stets Normalteiler.

II.5.3. BEISPIEL. Betrachte die normale Überlagerung $p : S^1 \rightarrow S^1$, $p(z) := z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ihre charakteristische Untergruppe ist $n\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1)$. Aus Proposition II.5.1 folgt daher $\text{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$.

II.5.4. BEISPIEL. Jede einfach zusammenhängende Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eines lokal wegzusammenhängenden Raums X ist normal, denn die triviale Untergruppe ist stets ein Normalteiler. In diesem Fall gilt weiters $\text{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$, siehe Proposition II.5.1.

II.5.5. BEISPIEL. Wirkt eine diskrete Gruppe G strikt diskontinuierlich von links auf einem topologischen Raum X , dann ist die Orbitprojektion $p : X \rightarrow X/G$ eine normale Überlagerung, siehe Proposition II.2.3. Ist X zusammenhängend, dann ist der Homomorphismus $G \rightarrow \text{Deck}(p)$, $g \mapsto \lambda_g$, ein Isomorphismus. Ist nämlich φ eine Decktransformation, $x \in X$ beliebig und $g \in G$ mit $\varphi(x) = gx$, dann folgt aus Proposition II.3.2 schon $\varphi = \lambda_g$. Ist darüberhinaus X lokal wegzusammenhängend, dann gilt $G \cong \text{Deck}(p) \cong \pi_1(X/G, p(x_0))/p_*(\pi_1(X, x_0))$ für jedes $x_0 \in X$, siehe Proposition II.5.1. Ist schließlich X einfach zusammenhängend, dann folgt $G \cong \text{Deck}(p) \cong \pi_1(X/G)$.

II.5.6. BEISPIEL. Betrachten wir die Überlagerung $p : S^n \rightarrow S^n/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{RP}^n$, $n \geq 2$, aus Beispiel II.2.7, so erhalten wir $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \text{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}_2$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.7. BEISPIEL. Betrachte wir die Überlagerung $p : S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p = L(p; q_1, \dots, q_n)$, $n \geq 2$, aus Beispiel II.2.8, dann erhalten wir $\pi_1(L(p; q_1, \dots, q_n)) \cong \text{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}_p$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.8. BEISPIEL. Betrachte wir die Überlagerung $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong T^n$ aus siehe Beispiel II.2.5, so erhalten wir $\pi_1(T^n) \cong \text{Deck}(p) \cong \mathbb{Z}^n$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.9. BEISPIEL. Betrachten wir die Überlagerung $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}) \cong K$ aus Beispiel II.2.9, so erhalten wir $\pi_1(K) \cong \text{Deck}(p) \cong \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$, siehe Beispiel II.5.5.

II.5.10. BEISPIEL. Es bezeichne $A : S^3 \rightarrow S^3$ die Antipodalabbildung, $A(x) := -x$. Die Abbildung $A \times A : S^3 \times S^3 \rightarrow S^3 \times S^3$ definiert eine freie \mathbb{Z}_2 -Wirkung auf $S^3 \times S^3$. Es gilt $(S^3 \times S^3)/\mathbb{Z}_2 \cong \text{SO}_4$. Mit Hilfe von Beispiel II.5.5 erhalten wir daher $\pi_1(\text{SO}_4) \cong \mathbb{Z}_2$, vgl. Proposition I.6.10.

II.5.11. BEISPIEL (Poincarés Homologie Sphäre). Es bezeichne $K \subseteq \mathbb{R}^3$ einen Ikosaeder mit Mittelpunkt $0 \in \mathbb{R}^3$. Weiters bezeichne $G \subseteq \text{SO}_3$ die Gruppe der Orientierungs bewahrenden Symmetrien von K , dh. jene $A \in \text{SO}_3$ mit $A(K) = K$. Diese Gruppe wird als *Ikosaeder Gruppe* bezeichnet und ist zur Alternierenden Gruppe $A_5 = \{\sigma \in \mathfrak{S}_5 : \text{sign}(\sigma) = 1\}$ isomorph, $G \cong A_5$. Gruppenmultiplikation liefert eine strikt diskontinuierliche Linkswirkung von G auf SO_3 . Unter der Poincaré Homologie Sphäre verstehen wir den Raum (Mannigfaltigkeit) $M := \text{SO}_3/A_5$. Es bezeichne nun $p : S^3 \rightarrow \text{SO}_3$ die universelle Überlagerung aus Beispiel I.6.7. Es ist dann $\tilde{G} := p^{-1}(G)$ eine Untergruppe von S^3 , denn p ist ein Gruppenhomomorphismus. Die Gruppe \tilde{G} wird die *binäre Ikosaeder Gruppe* genannt. Da p eine zwei-blättrige Überlagerung ist, gilt $\sharp \tilde{G} = 2\sharp G = 2\sharp A_5 = 120$, \tilde{G} ist jedoch nicht zur symmetrischen Gruppe isomorph, $\tilde{G} \not\cong \mathfrak{S}_5$. Multiplikation

liefert eine strikt diskontinuierliche Linkswirkung von \tilde{G} auf S^3 . Offensichtlich induziert p einen Homöomorphismus $S^3/\tilde{G} \cong \text{SO}_3/G = M$. Aus Beispiel II.5.5 folgt daher $\pi_1(M) \cong \tilde{G}$, insbesondere kann M nicht homöomorph zu S^3 sein. Weiters haben wir $\pi_1(M) \cong \tilde{G} \cong \langle s, t \mid (st)^2, s^3, t^5 \rangle$, für die Abelisierung folgt daher $\pi_1(M)_{\text{ab}} \cong \langle s, t \mid (st)^2, s^3, t^5, sts^{-1}t^{-1} \rangle = 0 = \pi_1(S^3)_{\text{ab}}$.

II.6. Konstruktion von Überlagerungen. Sei (X, x_0) ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender punktierter Raum. Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass zusammenhängende punktierte Überlagerungen von (X, x_0) , bis auf Isomorphie, durch ihre charakteristische Untergruppe bestimmt sind, siehe Korollar II.4.9. Es stellt sich nun die Frage, ob jede Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ als charakteristische Untergruppe einer punktierten Überlagerung von (X, x_0) auftritt. Beispielsweise ist $\pi_1(X, x_0)$ die charakteristische Untergruppe der trivialen Überlagerung $\text{id}_X : (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$. Das andere Extrem wäre eine Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit trivialer charakteristischer Untergruppe. Da $p_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ stets injektiv ist, siehe Proposition II.3.11(i), ist dies genau dann der Fall wenn \tilde{X} einfach zusammenhängend ist. Eine solche Überlagerung wird *universell* genannt.

II.6.1. DEFINITION (Universelle Überlagerung). Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eines zusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden Raums X wird *universell* genannt, falls \tilde{X} einfach zusammenhängend ist.

II.6.2. BEMERKUNG. Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender Raum besitzt, bis auf Isomorphie, höchstens eine universelle Überlagerung $\tilde{X} \rightarrow X$, siehe Korollar II.4.9. Wir sprechen daher von *der* universellen Überlagerung. Eine weitere schwache Zusammenhangseigenschaft der Basis stellt die Existenz einer universellen Überlagerungen sicher, siehe Satz II.6.9 unten. Universelle Überlagerungen sind stets normal, und es gilt $\text{Deck}(\tilde{X}) \cong \pi_1(X)$, siehe Beispiel II.5.4.

II.6.3. BEISPIEL. Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ aus Beispiel II.2.4 ist die universelle Überlagerung des Kreises. Ebenso ist $\mathbb{R}^n \rightarrow T^n$, siehe Beispiel II.2.5, die universelle Überlagerung des Torus. Die Quotientenabbildung $S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$ aus Beispiel II.2.7, ist die universelle Überlagerung des projektiven Raums, $n \geq 2$. Ebenso ist die Quotientenabbildung $S^{2n-1} \rightarrow L(p; q_1, \dots, q_n)$, siehe Beispiel II.2.8, die universelle Überlagerung des Linsenraums, $n \geq 2$. Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \cong K$ aus Beispiel II.2.9 ist die universelle Überlagerung der Kleinschen Flasche. Die Abbildung $S^3 \rightarrow \text{SO}_3$ aus Beispiel I.6.7 ist die universelle Überlagerung von SO_3 . Die Abbildung $S^3 \times S^3 \rightarrow \text{SO}_4$ aus Beispiel II.5.10 ist die universelle Überlagerung von SO_4 .

II.6.4. BEMERKUNG. Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine punktierte universelle Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden Raums X . Weiters sei $H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Es bezeichne $\Phi : \text{Deck}(\tilde{X}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ den

durch $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0 \cdot \Phi(\varphi)$ gegebenen Isomorphismus. Dann definiert $h \cdot \tilde{x} := \Phi^{-1}(h)(\tilde{x})$ eine strikt diskontinuierlich Linkswirkung von H auf \tilde{X} , siehe Proposition II.3.2. Also ist die Orbitprojektion $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{X}/H, \tilde{y}_0)$ eine (universelle) Überlagerung, wobei $\tilde{y}_0 := \tilde{p}(\tilde{x}_0)$, siehe Proposition II.2.3. Die Abbildung p faktorisiert zu einer surjektiven stetigen Abbildung $q : (\tilde{X}/H, \tilde{y}_0) \rightarrow (X, x_0)$, dh. $q \circ \tilde{p} = p$. Dieses q ist eine Überlagerung, denn jede wegzusammenhängende offene Teilmenge $U \subseteq X$ die von p gleichmäßig überlagert wird, wird auch von q gleichmäßig überlagert. Für die charakteristische Untergruppe von q gilt $q_*(\pi_1(\tilde{X}/H, \tilde{y}_0)) = H$. Betrachte dazu eine Schleife $f : I \rightarrow X$ bei x_0 und ihren Lift $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$. Dann ist $\tilde{p} \circ \tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}/H$ der Lift von f über q mit Anfangspunkt $(\tilde{p} \circ \tilde{f})(0) = \tilde{y}_0$. Dieser Lift ist genau dann geschlossen, wenn $\tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{f}(1) \in \tilde{p}^{-1}(\tilde{y}_0) = H \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \cdot H$ liegt, und dies ist genau dann der Fall wenn $[f] \in H$, denn die Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf F_{x_0} ist frei wegen des einfachen Zusammenhangs von \tilde{X} . Aus Proposition II.3.11(ii) folgt daher die Behauptung über die charakteristische Untergruppe von q .

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{X}, \tilde{x}_0) & & \\
 \downarrow p & \searrow \tilde{p} & \\
 & & (\tilde{X}/H, \tilde{y}_0) \\
 & \swarrow q & \\
 (X, x_0) & &
 \end{array}$$

II.6.5. PROPOSITION (Universalität der universellen Überlagerung). *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine punktierte universelle Überlagerung des lokal wegzusammenhängenden Raumes X , und es sei $q : (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine weitere zusammenhängende Überlagerung. Dann existiert genau eine Abbildung punktierter Räume $\tilde{p} : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ mit $q \circ \tilde{p} = p$, und diese ist eine Überlagerung.*

BEWEIS. Es bezeichne $H := q_*(\pi_1(\tilde{Y}, \tilde{y}_0)) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ die charakteristische Untergruppe von q . Nach Korollar II.4.9 ist q zu der punktierten Überlagerung $(\tilde{X}/H, \tilde{y}_0) \rightarrow (X, x_0)$ aus Bemerkung II.6.4 isomorph. O.B.d.A. dürfen wir daher $Y = \tilde{X}/H$ annehmen. Die Orbitprojektion $\tilde{p} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/H$ ist dann die gesuchte Überlagerung. \square

Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine universelle Überlagerung und $x_0 \in X$. Dann existieren $\tilde{x}_0 \in F_{x_0}$, offene Umgebungen \tilde{U} von \tilde{x}_0 und U von x_0 , sodass $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist. Die kanonische Inklusion $\iota : U \rightarrow X$ lässt sich dann als Komposition $\iota = p \circ (p|_{\tilde{U}})^{-1}$ schreiben. Aus $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$ folgt nun, dass $\iota_* = p_* \circ ((p|_{\tilde{U}})^{-1})_*$ der triviale Homomorphismus sein muss. Ein Raum kann daher nur dann eine universelle Überlagerung besitzen wenn er folgende Eigenschaft hat:

II.6.6. DEFINITION (Semilokal einfach zusammenhängend). Ein topologischer Raum X heißt *semilokal einfach zusammenhängend*, falls jeder Punkt $x_0 \in X$ eine Umgebung U besitzt, sodass jede Schleife in U bei x_0 , in X nullhomotop ist. In anderen Worten, die kanonische Inklusion $U \rightarrow X$ induziert den trivialen Homomorphismus $\pi_1(U, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$.

II.6.7. BEMERKUNG. Jeder lokal kontrahierbare Raum ist semilokal einfach zusammenhängend, vgl. Bemerkung II.4.3. Insbesondere sind topologische Mannigfaltigkeiten semilokal einfach zusammenhängend. Allgemeiner ist jeder lokal einfach zusammenhängende Raum auch semilokal einfach zusammenhängend. Dabei heißt ein Raum lokal einfach zusammenhängend falls jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus einfach zusammenhängenden Umgebungen besitzt. Natürlich ist auch jeder einfach zusammenhängende Raum semilokal einfach zusammenhängend.

II.6.8. BEISPIEL. Der Teilraum $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x - \frac{1}{n}\| = \frac{1}{n}\}$ von \mathbb{R}^2 ist nicht semilokal einfach zusammenhängend, der Punkt $0 \in X$ besitzt keine Umgebung U deren induzierter Homomorphismus $\pi_1(U) \rightarrow \pi_1(X)$ trivial ist. Der Kegel CX ist kontrahierbar, also einfach zusammenhängend und damit auch semilokal einfach zusammenhängend, er ist aber nicht lokal einfach zusammenhängend.

II.6.9. SATZ (Universelle Überlagerung). *Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum. Dann existiert eine universelle Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$.*

BEWEIS. Wir fixieren einen Basispunkt $x_0 \in X$, und definieren \tilde{X} als die Menge der Homotopieklassen relativ Endpunkten von Wegen in X mit Anfangspunkt x_0 ,

$$\tilde{X} := \{\text{Wege } \sigma : I \rightarrow X \text{ mit Anfangspunkt } \sigma(0) = x_0\} / \simeq .$$

Ist σ ein Weg mit $\sigma(0) = x_0$, dann schreiben wir $[\sigma] \in \tilde{X}$ für die von ihm repräsentierte Äquivalenzklasse. Offensichtlich ist

$$p : \tilde{X} \rightarrow X, \quad p([\sigma]) := \sigma(1) \tag{II.6}$$

eine wohldefinierte Abbildung, die wegen des Wegzusammenhangs von X auch surjektiv ist. Als Basispunkt in \tilde{X} wählen wir die Homotopieklasse des konstanten Weges, $\tilde{x}_0 := [c_{x_0}]$. Dann gilt $p(\tilde{x}_0) = x_0$.

Ist $[\sigma] \in \tilde{X}$ und $U \subseteq X$ offen, dann definieren wir eine Teilmenge $\tilde{U}_{[\sigma]} \subseteq \tilde{X}$ durch

$$\tilde{U}_{[\sigma]} := \{[\sigma\tau] \in \tilde{X} : \tau \text{ ein Weg in } U \text{ mit } \sigma(1) = \tau(0)\}.$$

Wir versehen \tilde{X} mit der größten Topologie, sodass alle diese Mengen $\tilde{U}_{[\sigma]}$ offen sind. Eine Abbildung $f : Z \rightarrow \tilde{X}$ ist also genau dann stetig, wenn für jede der Mengen $\tilde{U}_{[\sigma]}$ das Urbild $f^{-1}(\tilde{U}_{[\sigma]})$ offen in Z ist. Für $[\sigma] \in \tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{V}_{[\sigma_2]}$ gilt $[\sigma] \in \tilde{W}_{[\sigma]} \subseteq \tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{V}_{[\sigma_2]}$, wobei $W := U \cap V$, daher bilden die Mengen $\tilde{U}_{[\sigma]}$ sogar eine Basis der Topologie auf \tilde{X} .

Ist γ ein Weg in X mit Anfangspunkt $\gamma(0) = x_0$, dann definiert

$$\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{X}, \quad \tilde{\gamma}(t) := [s \mapsto \gamma(ts)], \tag{II.7}$$

einen Weg in \tilde{X} mit Anfangspunkt $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}_0$ und Endpunkt $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]$. Die Stetigkeit von $\tilde{\gamma}$ lässt sich leicht mit Hilfe der obigen Beschreibung stetiger Abbildungen nach \tilde{X} verifizieren. Weiters gilt offensichtlich $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$, also ist $\tilde{\gamma}$ ein Lift von γ . Daraus folgt nun insbesondere, dass der Raum \tilde{X} wegzusammenhängend ist, denn $\tilde{\gamma}$ verbindet den Basispunkt \tilde{x}_0 mit $[\gamma]$.

Die Abbildung (II.6) ist stetig, denn ist $[\sigma] \in \tilde{X}$ und $U \subseteq X$ offen mit $p([\sigma]) \in U$, dann ist $[\sigma] \in \tilde{U}_{[\sigma]}$ und $\tilde{U}_{[\sigma]} \subseteq p^{-1}(U)$.

Wir zeigen als nächstes, dass $p : \tilde{X} \rightarrow X$ tatsächlich eine Überlagerung ist. Sei dazu $x \in X$. Da X lokal wegzusammenhängend und semilokal einfach zusammenhängend ist, existiert eine wegzusammenhängende offene Umgebung U von x mit der Eigenschaft, dass die Inklusion $U \rightarrow X$ den trivialen Homomorphismus $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ induziert. Es bezeichne $F_x = p^{-1}(x) \subseteq \tilde{X}$, die Menge der Homotopieklassen von Wegen von x_0 nach x . Dann gilt zunächst

$$\tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{U}_{[\sigma_2]} = \emptyset \quad \text{falls } [\sigma_1] \neq [\sigma_2] \in F_x. \quad (\text{II.8})$$

Um dies einzusehen nehmen wir an es gilt $\tilde{U}_{[\sigma_1]} \cap \tilde{U}_{[\sigma_2]} \neq \emptyset$. Dann existieren zwei Wege τ_1 und τ_2 in U mit Anfangspunkt $\tau_1(0) = x = \tau_2(0)$, sodass $\sigma_1\tau_1 \simeq \sigma_2\tau_2$ relative Endpunkten in X . Da $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$ trivial ist, gilt $\tau_1\bar{\tau}_2 \simeq c_x$ relativ Endpunkten in X . Es folgt $\sigma_1 \simeq \sigma_1\tau_1\bar{\tau}_2 \simeq \sigma_2$ relative Endpunkten in X , also $[\sigma_1] = [\sigma_2] \in \tilde{X}$. Dies zeigt (II.8). Da U wegzusammenhängend ist, folgt sofort $p^{-1}(U) = \bigsqcup_{[\sigma] \in F_x} \tilde{U}_{[\sigma]}$. Es bleibt noch zu zeigen, dass für jedes $[\sigma] \in F_x$

$$p|_{\tilde{U}_{[\sigma]}} : \tilde{U}_{[\sigma]} \rightarrow U \quad (\text{II.9})$$

ein Homöomorphismus ist. Wegen des Wegzusammenhangs von U ist (II.9) surjektiv. Aus der Trivialität von $\pi_1(U, x) \rightarrow \pi_1(X, x)$, folgt die Injektivität von (II.9). Da p stetig ist, bleibt bloß noch zu zeigen, dass (II.9) eine offene Abbildung ist. Sei dazu $[\gamma] \in \tilde{U}_{[\sigma]}$ und $\tilde{W} \subseteq \tilde{U}_{[\sigma]}$ offen mit $[\gamma] \in \tilde{W}$. Dann existiert eine wegzusammenhängende offene Umgebung V von $\gamma(1)$ mit $\tilde{V}_{[\gamma]} \subseteq \tilde{W}$. Für diese gilt $p(\tilde{V}_{[\gamma]}) = V$, also ist $p(\tilde{W}) \supseteq V$ eine Umgebung von $p([\gamma])$. Dies zeigt, dass (II.9) eine offene Abbildung, und damit ein Homöomorphismus ist. Daher ist (II.6) tatsächlich eine zusammenhängende Überlagerung.

Schließlich ist noch $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$ zu verifizieren. Nach Proposition II.3.11(i) genügt es $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = 0$ zu überprüfen. Sei also γ eine Schleife bei x_0 mit $[\gamma] \in p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Nach Proposition II.3.11(ii) ist der Lift $\tilde{\gamma}$, siehe (II.7), ein geschlossener Weg, dh. $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}_0$. Da $\tilde{\gamma}(1) = [\gamma]$, bedeutet dies aber gerade, dass $[\gamma] = 1 \in \pi_1(X, x_0)$. Also ist jedes Element in $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ trivial und daher $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = 0$. Damit ist der Beweis des Satzes vollständig. \square

II.6.10. KOROLLAR. *Es sei (X, x_0) ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender punktierter Raum, und*

$H \subseteq \pi_1(X, x_0)$ eine Untergruppe. Dann existiert eine zusammenhängende punktierte Überlagerung $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit charakteristischer Untergruppe $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = H$.

BEWEIS. Dies folgt aus Satz II.6.9 und Bemerkung II.6.4. \square

Aus Korollar II.4.9 und Korollar II.6.10 erhalten wir nun folgende vollständige Klassifikation der zusammenhängenden punktierten Überlagerungen eines hinreichend zusammenhängenden punktierten Raums.

II.6.11. KOROLLAR (Klassifikation punktierter Überlagerungen). *Sei (X, x_0) ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender punktierter Raum. Die Korrespondenz die jeder zusammenhängenden punktierten Überlagerung von (X, x_0) ihre charakteristische Untergruppe zuordnet, definiert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen zusammenhängender punktierter Überlagerungen von (X, x_0) und den Untergruppen von $\pi_1(X, x_0)$.*

Ist $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine wegzusammenhängende Überlagerung und $x_0 \in X$, dann sind die charakteristischen Untergruppen $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, $\tilde{x}_0 \in F_{x_0} = p^{-1}(x_0)$, alle konjugiert in $\pi_1(X, x_0)$, siehe Proposition II.3.11(vi). Die *Konjugationsklasse der charakteristischen Untergruppe* ist daher auch ohne Basispunkt in \tilde{X} wohldefiniert. Aus Korollar II.6.11 und Proposition II.3.11(vii) erhalten wir folgende vollständige Klassifikation der zusammenhängenden Überlagerungen eines hinreichend zusammenhängenden Raums.

II.6.12. KOROLLAR (Klassifikation von Überlagerungen). *Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semilokal einfach zusammenhängender Raum, und $x_0 \in X$. Die Korrespondenz die jeder zusammenhängenden Überlagerung von X die Konjugationsklasse ihrer charakteristische Untergruppe zuordnet, definiert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen zusammenhängender Überlagerungen von X und den Konjugationsklassen von Untergruppen in $\pi_1(X, x_0)$.*

II.7. Darstellungen der Fundamentalgruppe. Wir wollen in diesem Abschnitt eine etwas andere Klassifikation der Überlagerungen diskutieren. Diese liefert eine genaue Beschreibung aller, nicht notwendigerweise zusammenhängenden, Überlagerungen eines hinreichend zusammenhängenden Raums.

Wir erinnern uns, siehe Proposition II.3.8, dass jede Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Rechtswirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser $p^{-1}(x_0)$ definiert, wobei $x_0 \in X$ ein beliebiger Basispunkt ist. Ist $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ ein Isomorphismus von Überlagerungen, $q : \tilde{Y} \rightarrow X$, dann liefert die Einschränkung von φ eine äquivariante Bijektion $\varphi_0 := \varphi|_{p^{-1}(x_0)} : p^{-1}(x_0) \rightarrow q^{-1}(x_0)$, dh. $\varphi_0(\tilde{x}_0 \cdot \sigma) = \varphi_0(\tilde{x}_0) \cdot \sigma$, für alle $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ und alle $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Ist nämlich

$f : I \rightarrow X$ eine Schleife bei x_0 und $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ der Lift über p mit Anfangspunkt $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$, dann ist $\varphi \circ \tilde{f} : I \rightarrow \tilde{Y}$ der Lift von f über q mit Anfangspunkt $(\varphi \circ \tilde{f})(0) = \varphi_0(\tilde{x}_0)$ woraus sofort die Äquivarianz von φ_0 folgt, denn $\varphi_0(\tilde{x}_0) \cdot [f] = (\varphi \circ \tilde{f})(1) = \varphi_0(\tilde{f}(1)) = \varphi_0(\tilde{x}_0 \cdot [f])$.

Wir nennen zwei Rechtswirkungen $\rho_i : S_i \times G \rightarrow S_i$, $i = 1, 2$, einer Gruppe G äquivalent falls eine äquivariante Bijektion $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ existiert, dh. $\varphi(s \cdot g) = \varphi(s) \cdot g$, für alle $s \in S_1$ und alle $g \in G$. Isomorphe Überlagerungen liefern daher äquivalenten Rechtswirkungen der Fundamentalgruppe.

II.7.1. SATZ. *Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum und $x_0 \in X$. Ordnen wir einer Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ die Rechtswirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Faser $p^{-1}(x_0)$ zu, so erhalten wir eine bijektive Korrespondenz zwischen der Menge der Isomorphieklassen von Überlagerungen von X und den Äquivalenzklassen von Rechtswirkungen von $\pi_1(X, x_0)$.*

BEWEIS. Zu einer gegebenen Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf einer Menge S konstruieren wir zunächst eine Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$, sodass die auf $p^{-1}(x_0)$ induzierte Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ äquivalent zu der gegebenen Wirkung auf S ist. Es bezeichne dazu $q : \tilde{Y} \rightarrow X$ die universelle Überlagerung von X , siehe Satz II.6.9. Wähle $\tilde{y}_0 \in \tilde{Y}$ mit $q(\tilde{y}_0) = x_0$, und bezeichne mit $\Phi : \text{Deck}(\tilde{Y}) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ den durch $\varphi(\tilde{y}_0) = \tilde{y}_0 \cdot \Phi(\varphi)$ gegebenen Isomorphismus. Auf $\tilde{Y} \times S$ betrachten wir die Linkswirkung $\sigma \cdot (\tilde{y}, s) := (\Phi^{-1}(\sigma)(\tilde{y}), s \cdot (\sigma^{-1}))$, $(\tilde{y}, s) \in \tilde{Y} \times S$, $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Es bezeichne $\tilde{X} := (\tilde{Y} \times S)/\pi_1(X, x_0)$ den Orbitraum, und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ die durch $p([\tilde{y}, s]) := q(\tilde{y})$ definierte Abbildung. Beachte, dass p wohldefiniert, stetig und surjektiv ist. Tatsächlich ist p eine Überlagerung, denn jede wegzusammenhängende offene Teilmenge in X die von q gleichmäßig überlagert wird, wird auch von p gleichmäßig überlagert, siehe Proposition II.1.5. Die Abbildung $\varphi : S \rightarrow p^{-1}(x_0)$, $\varphi(s) := [\tilde{y}_0, s]$ ist eine Bijektion, denn die Wirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf $q^{-1}(x_0)$ ist frei und transitiv. Sei nun $f : I \rightarrow X$ eine Schleife bei x_0 , und $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{Y}$ der Lift mit Anfangspunkt $\tilde{f}(0) = \tilde{y}_0$. Zu gegebenem $s \in S$ ist dann $I \rightarrow \tilde{X}$, $t \mapsto [\tilde{f}(t), s]$, ein Lift von f über p mit Anfangspunkt $\varphi(s)$. Es folgt $\varphi(s) \cdot [f] = [\tilde{f}(1), s] = [\tilde{y}_0 \cdot [f], s] = [\Phi^{-1}([f])(\tilde{y}_0), s] = [\tilde{y}_0, s \cdot [f]] = \varphi(s \cdot [f])$. Also ist $\varphi : S \rightarrow p^{-1}(x_0)$ eine äquivariante Bijektion. Bis auf Äquivalenz erhalten wir also jede Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ aus einer Überlagerung von X , dh. die Korrespondenz ist surjektiv.

Nun zur Injektivität der Korrespondenz: Es sei $p : \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und es bezeichnen $F := p^{-1}(x_0)$ die Faser über x_0 versehen mit der üblichen Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$. Es genügt zu zeigen, dass die oben konstruierte Überlagerung $(\tilde{Y} \times F)/\pi_1(X, x_0) \rightarrow X$ isomorph zu der Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ ist. Wir definieren eine Abbildung $\tilde{\varphi} : \tilde{Y} \times F \rightarrow \tilde{X}$ wie folgt. Sind $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, und $\tilde{x}_0 \in F$, dann wählen wir einen Weg $f : I \rightarrow \tilde{Y}$ von $f(0) = \tilde{y}_0$ nach $f(1) = \tilde{y}$

und bezeichnen mit $\widetilde{(q \circ f)}_{\tilde{x}_0}$ den eindeutigen Lift des Weges $q \circ f : I \rightarrow X$ mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 . Auf Grund des einfachen Zusammenhangs von \tilde{Y} ist der Endpunkt $\tilde{\varphi}(\tilde{y}, \tilde{x}_0) := \widetilde{(q \circ f)}_{\tilde{x}_0}(1)$ unabhängig von der Wahl von f . Ist $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$ dann gilt $\tilde{\varphi}(\Phi^{-1}(\sigma)\tilde{y}, \tilde{x}_0 \cdot (\sigma^{-1})) = \tilde{\varphi}(\tilde{y}, \tilde{x}_0)$, also faktorisiert $\tilde{\varphi}$ zu einer Abbildung $\varphi : (\tilde{Y} \times F)/\pi_1(X, x_0) \rightarrow \tilde{X}$. Es lässt sich nun leicht verifizieren, dass φ ein Isomorphismus von Überlagerungen ist. \square

II.7.2. BEMERKUNG. Es sei X ein zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semilokal einfach zusammenhängender Raum, $x_0 \in X$, ρ eine Rechtswirkung von $\pi_1(X, x_0)$ auf einer Menge S und $p : \tilde{X} \rightarrow X$ die entsprechende Überlagerung, siehe Satz II.7.1. Es ist dann \tilde{X} zusammenhängend genau dann, wenn ρ transitiv ist. In diesem Fall stimmt die Konjugationsklasse der Charakteristischen Untergruppe von p mit der Konjugationsklasse der Isotropiegruppe $\{\sigma \in \pi_1(X, x_0) : s \cdot \sigma = s\}$ überein, wobei $s \in S$ beliebig ist.²⁴ Insbesondere ist p genau dann universell, wenn die Wirkung ρ transitiv und frei ist. Im transitiven (zusammenhängenden) Fall ist p genau dann eine normale Überlagerung, wenn eine (und dann jede) Isotropiegruppe $\{\sigma \in \pi_1(X, x_0) : s \cdot \sigma = s\}$ einen Normalteiler in $\pi_1(X, x_0)$ bildet.

II.7.3. BEMERKUNG. Es sei G eine Gruppe und S eine Menge. Jeder Rechtswirkung ρ von G auf S können wir eine Linkswirkung λ von G auf S zuordnen, $\lambda(g, s) := \rho(s, g^{-1})$. Offensichtlich liefert dies eine Bijektion zwischen den Linkswirkungen von G auf S und den Rechtswirkungen von G auf S . Eine Linkswirkung von G auf S ist aber nichts anderes als ein Homomorphismus $G \rightarrow \mathfrak{S}(S)$. Aus Satz II.7.1 erhalten wir daher eine bijektive Korrespondenz zwischen Isomorphieklassen von Überlagerungen eines Raums (X, x_0) und Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathfrak{S}(S)$. Dabei sind zwei Homomorphismen $\lambda_i : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathfrak{S}(S_i)$, $i = 1, 2$, äquivalent, wenn eine Bijektion $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$ existiert, sodass $\varphi \circ \lambda_1(\sigma) \circ \varphi^{-1} = \lambda_2(\sigma)$, für alle $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$. Wollen wir alle Überlagerungen von (X, x_0) mit vorgegebener Blätterzahl bestimmen, genügt es daher eine Menge S gegebener Kardinalität zu wählen und alle Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathfrak{S}(S)$ zu bestimmen. Dabei sind zwei Homomorphismen $\lambda_1, \lambda_2 : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \mathfrak{S}(S)$ äquivalent, falls $\tau \in \mathfrak{S}(S)$ existiert, sodass $\tau \circ \lambda_1(\sigma) \circ \tau^{-1} = \lambda_2(\sigma)$, für alle $\sigma \in \pi_1(X, x_0)$.

II.7.4. BEISPIEL. Wir wollen alle zwei-fachen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ bestimmen. Diese stehen in bijektiver Korrespondenz mit Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(S^1 \vee S^1) \rightarrow \mathfrak{S}_2 := \mathfrak{S}(\{1, 2\})$, siehe Bemerkung II.7.3. Da $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}_2$ abelsch ist, sind zwei solche Homomorphismen nur dann äquivalent wenn sie übereinstimmen. Da $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \langle a, b \mid - \rangle$ stehen diese Homomorphismen in bijektiver Korrespondenz mit $\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$, dabei entspricht einem Homomorphismus

²⁴In diesem Fall sind die Isotropiegruppen von $s \in S$ alle konjugiert.

$\varphi : \langle a, b \mid - \rangle \rightarrow \mathfrak{S}_2$ das Paar $(\varphi(a), \varphi(b)) \in \mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2$.²⁵ Es gibt daher genau vier (Äquivalenzklassen von) Homomorphismen $\pi_1(S^1 \vee S^1) \rightarrow \mathfrak{S}_2$, und damit genau vier Isomorphieklassen zwei-blättriger Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$. Bis auf eine sind sie alle zusammenhängend.

II.7.5. BEISPIEL. Wir wollen alle drei-fachen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ bestimmen. Diese stehen in bijektiver Korrespondenz mit Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\pi_1(S^1 \vee S^1) \rightarrow \mathfrak{S}_3 := \mathfrak{S}(\{1, 2, 3\})$. Da $\pi_1(S^1 \vee S^1) \cong \langle a, b \mid - \rangle$, stehen diese Homomorphismen in bijektiver Korrespondenz mit $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$, einem Homomorphismus φ entspricht dabei das Paar $(\varphi(a), \varphi(b))$. Mit wenig Aufwand lässt sich folgende Liste verifizieren, sie enthält aus jeder Äquivalenzklasse von Homomorphismen (Paaren) genau einen Repräsentanten.²⁶

$\varphi(a)$	$()$	$()$	$()$	(12)	(12)	(12)	(12)	(123)	(123)	(123)	(123)
$\varphi(b)$	$()$	(12)	(123)	$()$	(12)	(13)	(123)	$()$	(12)	(123)	(132)
zush.	nein	nein	ja	nein	nein	ja	ja	ja	ja	ja	ja

Es gibt daher genau 11 drei-fache Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$, und 7 davon sind zusammenhängend.

II.7.6. BEISPIEL. Wir wollen alle drei-fachen Überlagerungen der Kleinschen Flasche K bestimmen. Wir erinnern uns, dass $\pi_1(K) \cong \langle a, b \mid a^2b^{-2} \rangle$, siehe Beispiel I.7.3. Wieder genügt es die Äquivalenzklassen von Homomorphismen $\langle ab \mid a^2b^{-2} \rangle \rightarrow \mathfrak{S}_3$ zu bestimmen. Die Zuordnung $\varphi \mapsto (\varphi(a), \varphi(b))$ liefert eine Bijektion von der Menge der Homomorphismen $\langle ab \mid a^2b^{-2} \rangle \rightarrow \mathfrak{S}_3$ auf die Menge der Paare $(\sigma, \tau) \in \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_3$ mit $\sigma^2 = \tau^2$. Folgende Liste enthält aus jeder Äquivalenzklasse von Homomorphismen (Paaren) genau einen Repräsentanten.

$\varphi(a)$	$()$	$()$	(12)	(12)	(12)	(123)
$\varphi(b)$	$()$	(12)	$()$	(12)	(13)	(123)
zush.	nein	nein	nein	nein	ja	ja

Es gibt daher, bis auf Isomorphie, genau sechs drei-blättrige Überlagerungen der Kleinschen Flasche, und zwei davon sind zusammenhängend.

II.8. Überlagerungen topologischer Gruppen. Wir wollen diesen Abschnitt mit zwei Anwendungen des Liftungskriteriums abschließen, siehe Proposition II.8.1 und Proposition II.8.2. In beiden Fällen werden topologische bzw. geometrische Strukturen von der Basis auf den Totalraum geliftet.

II.8.1. PROPOSITION (Überlagerungen von H -Räumen). *Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{e}) \rightarrow (X, e)$ eine zusammenhängende punktierte Überlagerung eines lokal wegzusammenhängenden H -Raums mit Multiplikation $\mu : (X, e) \times (X, e) \rightarrow (X, e)$. Dann*

²⁵Dies folgt aus der Tatsache, dass wir einen Homomorphismus $\langle a, b \mid - \rangle$ auf den Erzeugern a und b beliebig vorgeben können und er dadurch schon vollständig festgelegt ist.

²⁶Wir verwenden hier die übliche Zykelschreibweise für Elemente in \mathfrak{S}_3 . Etwa bezeichnet (12) die Transposition von 1 und 2, (123) bezeichnet eine zyklische Permutation, und $()$ bezeichnet die identische Permutation.

existiert genau eine Abbildung punktierter Räume $\tilde{\mu} : (\tilde{X}, \tilde{e}) \times (\tilde{X}, \tilde{e}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{e})$ mit $p \circ \tilde{\mu} = \mu \circ (p \times p)$, und diese macht (\tilde{X}, \tilde{e}) zu einem H -Raum.

BEWEIS. Für den von $\mu \circ (p \times p) : (\tilde{X}, \tilde{e}) \times (\tilde{X}, \tilde{e}) \rightarrow (X, e)$ induzierten Homomorphismus gilt $(\mu \circ (p \times p))_*(\pi_1((\tilde{X}, \tilde{e}) \times (\tilde{X}, \tilde{e}))) = \mu_*(p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{e})) \times p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{e}))) = p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{e}))$, denn μ_* ist die Multiplikation in $\pi_1(X, e)$, siehe Satz I.6.19, und $p_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{e}))$ ist eine Untergruppe. Nach Satz II.4.5 existiert daher eine eindeutige Abbildung punktierter Räume $\tilde{\mu} : (\tilde{X}, \tilde{e}) \times (\tilde{X}, \tilde{e}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{e})$ mit $p \circ \tilde{\mu} = \mu \circ (p \times p)$. Sei nun $H : X \times I \rightarrow X$ eine Homotopie relativ Basispunkt e von $H_0 = \text{id}_X$ nach $H_1 = \mu \circ (\text{id}_X, c_e)$.

Dann ist $G := H \circ (p \times \text{id}_I) : \tilde{X} \times I \rightarrow X$ eine Homotopie relativ Basispunkt \tilde{e} von $G_0 = p$ nach $G_1 = \mu \circ (\text{id}_X, c_e) \circ p$. Nach Satz II.3.3 existiert eine Homotopie $\tilde{G} : \tilde{X} \times I \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{G} = G$ und $\tilde{G}_0 = \text{id}_{\tilde{X}}$. Da $t \mapsto p(\tilde{G}(\tilde{e}, t)) = G(\tilde{e}, t) = \tilde{e}$ muss auch $t \mapsto \tilde{G}(\tilde{e}, t)$ konstant in t sein, also ist \tilde{G} eine Homotopie relativ Basispunkt \tilde{e} . Da $p \circ \tilde{\mu} \circ (\text{id}_{\tilde{X}}, c_{\tilde{e}}) = \mu \circ (p \times p) \circ (\text{id}_{\tilde{X}}, c_{\tilde{e}}) = \mu \circ (p, p \circ c_{\tilde{e}}) = \mu \circ (\text{id}_X, c_e) \circ p = p \circ \tilde{G}_1$ folgt $\tilde{\mu} \circ (\text{id}_{\tilde{X}}, c_{\tilde{e}}) = \tilde{G}_1$, denn die beiden Abbildungen stimmen bei \tilde{e} überein, siehe Proposition II.3.1. Damit ist \tilde{G} eine Homotopie relativ Basispunkt von $\text{id}_{\tilde{X}}$ nach $\tilde{\mu} \circ (\text{id}_{\tilde{X}}, c_{\tilde{e}})$. Ebenso lässt sich $\text{id}_{\tilde{X}} \simeq \tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}}, \text{id}_{\tilde{X}})$ zeigen. Also ist (\tilde{X}, \tilde{e}) ein H -Raum. \square

II.8.2. PROPOSITION (Überlagerungen topologischer Gruppen). *Es sei $p : \tilde{G} \rightarrow G$ eine zusammenhängende Überlagerung einer lokal wegzusammenhängenden topologischen Gruppe G mit neutralem Element e . Weiters sei $\tilde{e} \in \tilde{G}$ mit $p(\tilde{e}) = e$. Dann gibt es auf \tilde{G} genau eine Gruppenstruktur mit neutralem Element \tilde{e} , die \tilde{G} zu einer topologischen Gruppe und $p : \tilde{G} \rightarrow G$ zu einem Homomorphismus macht. Ist G abelsch, dann auch \tilde{G} .*

BEWEIS. Nach Proposition II.8.1 gibt es genau eine stetige Abbildung $\tilde{\mu} : \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ mit $p \circ \tilde{\mu} = \mu \circ (p \times p)$ und $\tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$, wobei $\mu : G \times G \rightarrow G$ die Multiplikation in G bezeichnet. Insbesondere ist damit die Eindeutigkeitsaussage gezeigt.

Da die Multiplikation μ assoziativ ist, dh. $\mu \circ (\mu \times \text{id}_G) = \mu \circ (\text{id}_G \times \mu)$, folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ (\tilde{\mu} \times \text{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \times p) \circ (\tilde{\mu} \times \text{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ ((p \circ \tilde{\mu}) \times p) = \mu \circ ((\mu \circ (p \times p)) \times p) = \mu \circ (\mu \times \text{id}_G) \circ (p \times p \times p) = \mu \circ (\text{id}_G \times \mu) \circ (p \times p \times p) = \mu \circ (p \times (\mu \circ (p \times p))) = \mu \circ (p \times (p \circ \tilde{\mu})) = \mu \circ (p \times p) \circ (\text{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu}) = p \circ \tilde{\mu} \circ (\text{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu})$ also liften $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\mu} \times \text{id}_{\tilde{G}})$ und $\tilde{\mu} \circ (\text{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu})$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\mu} \times \text{id}_{\tilde{G}}) = \tilde{\mu} \circ (\text{id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\mu})$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e})$ überein, siehe Proposition II.3.1. Damit ist $\tilde{\mu}$ eine assoziative Multiplikation.

Da e neutrales Element von G , dh. $\mu \circ (c_e, \text{id}_G) = \text{id}_G$, folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}}, \text{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \times p) \circ (c_{\tilde{e}}, \text{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \circ c_{\tilde{e}}, p) = \mu \circ (c_e, \text{id}_G) \circ p = \text{id}_G \circ p = p \circ \text{id}_{\tilde{G}}$, also liften

$\tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}}, \text{id}_{\tilde{G}})$ und $\text{id}_{\tilde{G}}$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \rightarrow G$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}}, \text{id}_{\tilde{G}}) = \text{id}_{\tilde{G}}$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt \tilde{e} überein. Damit ist \tilde{e} links-neutrales Element der Multiplikation $\tilde{\mu}$. Analog lässt sich zeigen, dass \tilde{e} auch rechts-neutrales Element von $\tilde{\mu}$ ist.

Es bezeichne $\kappa : G \times G \rightarrow G \times G$, $\kappa(g, h) := (h, g)$, und $\tilde{\kappa} : \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G} \times \tilde{G}$, $\tilde{\kappa}(\tilde{g}, \tilde{h}) = (\tilde{h}, \tilde{g})$. Ist G kommutativ, dann gilt $\mu \circ \kappa = \mu$ und es folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ \tilde{\kappa} = \mu \circ (p \times p) \circ \tilde{\kappa} = \mu \circ \kappa \circ (p \times p) = \mu \circ (p \times p) = p \circ \tilde{\mu}$, also liften $\tilde{\mu} \circ \tilde{\kappa}$ und $\tilde{\mu}$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ \tilde{\kappa} = \tilde{\mu}$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt (\tilde{e}, \tilde{e}) überein. Damit ist auch \tilde{G} kommutativ.

Es bezeichne nun $\nu : G \rightarrow G$ die Inversion, $\nu(g) = g^{-1}$. Für den von $\nu \circ p : (\tilde{G}, \tilde{e}) \rightarrow (G, e)$ induzierten Homomorphismus gilt $(\nu \circ p)_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})) = \nu_*(p_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))) = p_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))$, denn $p_*(\pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))$ ist eine Untergruppe und ν_* ist die Inversion in $\pi_1(G, e)$, siehe Korollar I.6.21. Nach Satz II.4.5 existiert daher eine stetige Abbildung $\tilde{\nu} : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ mit $p \circ \tilde{\nu} = \nu \circ p$ und $\tilde{\nu}(\tilde{e}) = \tilde{e}$. Aus $\mu \circ (\nu, \text{id}_G) = c_e$ folgt $p \circ \tilde{\mu} \circ (\tilde{\nu}, \text{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \times p) \circ (\tilde{\nu}, \text{id}_{\tilde{G}}) = \mu \circ (p \circ \tilde{\nu}, p) = \mu \circ (\nu, \text{id}_G) \circ p = c_e \circ p = p \circ c_{\tilde{e}}$, also liften $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\nu}, \text{id}_{\tilde{G}})$ und $c_{\tilde{e}}$ dieselbe Abbildung $\tilde{G} \rightarrow G$. Wir erhalten $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\nu}, \text{id}_{\tilde{G}}) = c_{\tilde{e}}$, denn die beiden Abbildungen stimmen beim Punkt \tilde{e} überein. Damit ist $\tilde{\nu}(\tilde{g})$ das Linksinverse von $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Ebenso folgt $\tilde{\mu} \circ (\text{id}_{\tilde{G}}, \tilde{\nu}) = c_{\tilde{e}}$, also ist $\tilde{\nu}(\tilde{g})$ auch Rechtsinverses von $\tilde{g} \in \tilde{G}$. Damit ist \tilde{G} eine topologische Gruppe. \square

II.8.3. BEMERKUNG. Es seien G und \tilde{G} zwei zusammenhängende topologische Gruppen und $p : \tilde{G} \rightarrow G$ ein Homomorphismus der eine Überlagerung ist. Es bezeichnen $e \in G$ und $\tilde{e} \in \tilde{G}$ die neutralen Elemente. Jedes $\tilde{g} \in \ker(p) = F_e$ definiert Decktransformationen $\lambda_{\tilde{g}} \in \text{Deck}(\tilde{G})$, $\lambda_{\tilde{g}}(\tilde{h}) := \tilde{g}\tilde{h}$, und $\rho^{\tilde{g}} \in \text{Deck}(\tilde{G})$, $\rho^{\tilde{g}}(\tilde{h}) := \tilde{h}\tilde{g}$. Wegen $\lambda_{\tilde{g}}(\tilde{e}) = \tilde{g} = \rho^{\tilde{g}}(\tilde{e})$ muss $\lambda_{\tilde{g}} = \rho^{\tilde{g}}$ gelten, siehe Proposition II.3.2. Es folgt $\tilde{g}\tilde{h} = \tilde{h}\tilde{g}$ für alle $\tilde{g} \in \ker(p)$ und $\tilde{h} \in \tilde{G}$. Also liegt $\ker(p)$ im Zentrum $C(\tilde{G})$ von \tilde{G} . Auch folgt, dass die Decktransformationen transitiv auf den Fasern von p wirken, also ist p eine normale Überlagerung. Schließlich ist $\ker(p) \rightarrow \text{Deck}(\tilde{G})$, $\tilde{g} \mapsto \lambda_{\tilde{g}}$, ein Isomorphismus von Gruppen mit Inversem $\text{Deck}(\tilde{G}) \rightarrow \ker(p)$, $\varphi \mapsto \varphi(\tilde{e})$. Für einfach zusammenhängendes \tilde{G} erhalten wir insbesondere $\pi_1(G) \cong \text{Deck}(\tilde{G}) \cong \ker(p)$.

III. Kategorien und Funktoren

Die Kategorientheorie bietet eine Sprache die sich gut eignet Gemeinsamkeiten in unterschiedlichen Disziplinen der Mathematik herauszuarbeiten und zu formalisieren. Sie liefert auch eine Möglichkeit verschiedene Gebiete in transparenter Weise miteinander in Beziehung zu setzen. Gerade in der algebraischen Topologie wo wir topologischen Räumen algebraische Gebilde zuordnen ist dies die Sprache der Wahl, und dort wurden die grundlegenden Begriffe der Kategorientheorie auch erfunden.

Wir orientieren uns hier an [6, Chapter II]. Sehr knappe Einführungen finden sich auch in [4, Chapter 2.3] und [18, Kapitel 8.4]. Eine ausführliche Darstellung bietet [11].

III.1. Kategorien. Eine *Kategorie* \mathcal{C} besteht aus:

- (i) Einer Klasse von Objekten.
- (ii) Zu je zwei Objekten X und Y von \mathcal{C} , eine Menge $\mathcal{C}(X, Y)$. Die Elemente von $\mathcal{C}(X, Y)$ werden *Morphismen* von X nach Y genannt. Ist $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ so deuten wir dies auch durch $f : X \rightarrow Y$ an.
- (iii) Zu je drei Objekten X, Y und Z von \mathcal{C} eine Abbildung, die sogenannte *Komposition* auch *Verknüpfung*, $\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z)$. Sind $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$ dann schreiben wir $g \circ f$ oder gf für den entsprechenden Morphismus in $\mathcal{C}(X, Z)$.

Diese Daten müssen den folgenden beiden Axiomen genügen:

- (A1) Zu jedem Objekt X von \mathcal{C} existiert ein Morphismus $\text{id}_X \in \mathcal{C}(X, X)$, sodass für alle Objekte Y, Z von \mathcal{C} und alle Morphismen $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $g \in \mathcal{C}(Z, X)$ stets $f \circ \text{id}_X = f$ und $\text{id}_X \circ g = g$ gilt. (neutrale Elemente, identische Morphismen)
- (A2) Für Objekte X, Y, Z und W von \mathcal{C} und Morphismen $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$, $h \in \mathcal{C}(Z, W)$ gilt stets $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. (Assoziativität der Verknüpfung)

III.1.1. BEMERKUNG. Ist \mathcal{C} eine Kategorie, dann sind die neutralen Elemente id_X durch die Eigenschaft $f \circ \text{id}_X = f$ und $\text{id}_X \circ g = g$ eindeutig bestimmt. Ist nämlich $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ ein weiterer Morphismus, sodass für alle Objekte Y, Z von \mathcal{C} und alle $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, $g \in \mathcal{C}(Z, X)$ die Relationen $f \circ 1_X = f$ und $1_X \circ g = g$ gelten, dann folgt $1_X = 1_X \circ \text{id}_X = \text{id}_X$.

Ein Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ einer Kategorie \mathcal{C} wird ein *Isomorphismus* genannt, falls ein Morphismus $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ mit $f \circ g = \text{id}_Y$ und $g \circ f = \text{id}_X$ existiert. Im Existenzfall ist so ein Morphismus g eindeutig bestimmt. Ist nämlich $h \in \mathcal{C}(Y, X)$ ein weiterer Morphismus mit $f \circ h = \text{id}_Y$ und $h \circ f = \text{id}_X$, dann folgt $g = g \circ \text{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_X \circ h = h$. Wir bezeichnen den Morphismus g daher mit $f^{-1} \in \mathcal{C}(Y, X)$. Mit f ist natürlich auch f^{-1} ein Isomorphismus, und

es gilt $(f^{-1})^{-1} = f$. Sind $f_1 \in \mathcal{C}(X, Y)$ und $f_2 \in \mathcal{C}(Y, Z)$ zwei Isomorphismen, dann ist auch $f_2 \circ f_1 \in \mathcal{C}(X, Z)$ ein Isomorphismus mit $(f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$.

III.1.2. **BEMERKUNG.** Es sei $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ein Morphismus einer Kategorie \mathcal{C} . Weiters seien $g \in \mathcal{C}(Y, X)$ ein Linksinverses von f , dh. $g \circ f = \text{id}_X$, und $h \in \mathcal{C}(Y, X)$ sei ein Rechtsinverses von f , dh. $f \circ h = \text{id}_Y$. Dann stimmen g und h überein und f ist ein Isomorphismus mit $f^{-1} = g = h$. Dies folgt wieder aus $g = g \circ \text{id}_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = \text{id}_X \circ h = h$.

III.1.3. **BEISPIEL** (Kategorie der Mengen). Wir definieren eine Kategorie **Set** wie folgt. Als Objekte nehmen wir alle Mengen. Für zwei Objekte, dh. Mengen, X und Y bestehe die Menge der Morphismen $\mathbf{Set}(X, Y)$ aus allen Abbildungen von X nach Y . Schließlich ist die Verknüpfung von Morphismen durch die übliche Komposition von Abbildungen gegeben. Offensichtlich bildet **Set** eine Kategorie, die *Kategorie der Mengen und Abbildungen*. Die Isomorphismen in **Set** sind genau die Bijektionen.

III.1.4. **BEISPIEL** (Kategorie der punktierten Mengen). Ist X eine Menge und $x_0 \in X$ so bezeichnen wir das Paar (X, x_0) als punktierte Menge. Unter einer Abbildung punktierter Mengen $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ verstehen wir eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ für die $f(x_0) = y_0$ gilt. Die Klasse der Objekte der Kategorie \mathbf{Set}_* besteht aus allen punktierten Mengen. Die Menge der Morphismen $\mathbf{Set}_*((X, x_0), (Y, y_0))$ zwischen zwei Objekten, dh. punktierten Mengen, (X, x_0) und (Y, y_0) besteht aus allen Abbildungen punktierter Mengen von (X, x_0) nach (Y, y_0) . Bezüglich der üblichen Komposition bildet \mathbf{Set}_* eine Kategorie, die *Kategorie der punktierten Mengen*. Die Isomorphismen in \mathbf{Set}_* sind genau die Basispunkt bewahrenden Bijektionen.

III.1.5. **BEISPIEL** (Kategorie der Gruppen). Die Klasse der Objekte der Kategorie **Grp** besteht aus allen Gruppen. Für zwei Objekte, dh. Gruppen, G und H besteht die Menge der Morphismen $\mathbf{Grp}(G, H) := \text{Hom}(G, H)$ aus allen Gruppenhomomorphismen von G nach H . Die Verknüpfung von Morphismen ist durch die übliche Komposition von Homomorphismen gegeben. Beachte, dass die Komposition von Homomorphismen wieder ein Homomorphismen ist. Offensichtlich bildet **Grp** eine Kategorie, die *Kategorie der Gruppen und Homomorphismen*. Die Isomorphismen in **Grp** sind genau die Gruppenisomorphismen.

III.1.6. **BEISPIEL** (Kategorie der abelschen Gruppen). Die Klasse der Objekte der Kategorie **aGrp** besteht aus allen abelschen Gruppen. Die Menge der Morphismen $\mathbf{aGrp}(A, B) := \text{Hom}(A, B)$ zwischen zwei Objekten, dh. abelschen Gruppen, A und B besteht aus allen Gruppenhomomorphismen von A nach B . Bezüglich der üblichen Komposition von Homomorphismen bildet **aGrp** eine Kategorie, die *Kategorie der abelschen Gruppen und Homomorphismen*. Die Isomorphismen in **aGrp** sind genau die Isomorphismen abelscher Gruppen.

III.1.7. BEISPIEL (Kategorie der \mathbb{K} -Vektorräume). Es sei \mathbb{K} ein Körper. Die Klasse der Objekte der Kategorie $\mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}}$ besteht aus allen \mathbb{K} -Vektorräumen. Die Menge der Morphismen $\mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}}(V, W) := L_{\mathbb{K}}(V, W)$ zwischen zwei Objekten, dh. \mathbb{K} -Vektorräumen, V und W besteht aus allen \mathbb{K} -linearen Abbildungen von V nach W . Bezüglich der üblichen Komposition linearer Abbildungen bildet $\mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}}$ eine Kategorie, die *Kategorie der \mathbb{K} -Vektorräume und linearen Abbildungen*. Die Isomorphismen in $\mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}}$ sind genau die Isomorphismen von \mathbb{K} -Vektorräumen.

III.1.8. BEISPIEL (Kategorie der topologischen Räume). Die Klasse der Objekte der Kategorie \mathbf{Top} besteht aus allen topologischen Räumen. Die Menge der Morphismen $\mathbf{Top}(X, Y) := C(X, Y)$ zwischen zwei Objekten, dh. topologischen Räumen, X und Y besteht aus allen stetigen Abbildungen von X nach Y . Bezüglich der üblichen Komposition von Abbildungen bildet \mathbf{Top} eine Kategorie, die *Kategorie der topologischen Räume und stetigen Abbildungen*. Beachte hier, dass die Komposition stetiger Abbildungen wieder stetig ist. Die Isomorphismen in \mathbf{Top} sind genau die Homöomorphismen. Ebenso können wir die Kategorie der Hausdorffräume, die Kategorie der kompakten Räume usw. betrachten.

III.1.9. BEISPIEL (Kategorie der punktierten Räume). Die Klasse der Objekte der Kategorie \mathbf{Top}_* besteht aus allen punktierten Räumen. Die Menge der Morphismen zwischen zwei Objekten, dh. punktierten Räumen, (X, x_0) und (Y, y_0) besteht aus allen Abbildungen punktierter Räume $(X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Bezüglich der üblichen Komposition von Abbildungen bildet \mathbf{Top}_* eine Kategorie, die *Kategorie der punktierten Räume*. Die Isomorphismen in \mathbf{Top}_* sind genau die Homöomorphismen punktierter Räume.

In allen bisher besprochenen Kategorien waren die Objekte Mengen mit gewissen Strukturen (Basispunkt, Gruppenstruktur, Vektorraumstruktur, Topologie, ...) und die Morphismen waren Abbildungen die diese Struktur bewahren (Basispunkt erhaltend, mit Gruppenmultiplikation verträglich, linear, stetig, ...) In den folgenden Beispielen sind die Morphismen keine Abbildungen.

III.1.10. BEISPIEL. Die Klasse der Objekte der Kategorie \mathbf{hTop} besteht aus allen topologischen Räumen. Für zwei Objekte, dh. topologische Räume, X und Y besteht die Menge der Morphismen von X nach Y aus allen Homotopieklassen stetiger Abbildungen von X nach Y , dh. $\mathbf{hTop}(X, Y) = [X, Y]$, siehe Abschnitt I.3. Die Verknüpfung von Morphismen ist durch Komposition von Repräsentanten definiert, dh. $[f] \circ [g] := [f \circ g]$. Beachte, dass dies nach Lemma I.3.4 tatsächlich wohldefiniert ist. Mit dieser Komposition bildet \mathbf{hTop} eine Kategorie, die *Kategorie der topologischen Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen*. Die Isomorphismen in \mathbf{hTop} sind genau die Homotopieäquivalenzen.

III.1.11. BEISPIEL. Die Klasse der Objekte der Kategorie \mathbf{hTop}_* besteht aus allen punktierten Räumen. Für zwei Objekte, dh. punktierte Räume, (X, x_0) und (Y, y_0) besteht die Menge der Morphismen von (X, x_0) nach (Y, y_0) aus allen Homotopieklassen (relativ Basispunkt) punktierter Abbildungen von (X, x_0) nach

(Y, y_0) , dh. $\mathbf{hTop}_*((X, x_0), (Y, y_0)) = [(X, x_0), (Y, y_0)]$, siehe Abschnitt I.3. Die Verknüpfung von Morphismen ist durch Komposition von Repräsentanten definiert, dh. $[f] \circ [g] := [f \circ g]$. Mit dieser Komposition bildet \mathbf{hTop}_* eine Kategorie, die *Kategorie der punktierten Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen*. Die Isomorphismen in \mathbf{hTop}_* sind genau die Homotopieäquivalenzen punktierter Räume.

III.1.12. BEISPIEL. Wir können eine Gruppe G auch als Kategorie \mathcal{C}_G auffassen. Diese besitzt nur ein einziges Objekt $*$ und die Menge der Morphismen ist durch $\mathcal{C}_G(*, *) := G$ festgelegt. Definieren wir die Verknüpfung von Morphismen durch die Gruppenmultiplikation in G so bildet dies eine Kategorie. Jeder Morphismus ist ein Isomorphismus, denn jedes Element in G besitzt ein Inverses.

III.1.13. BEISPIEL (Duale Kategorie). Zu jeder Kategorie \mathcal{C} kann eine *dual Kategorie* \mathcal{C}^{op} wie folgt definiert werden. Die Klasse der Objekte von \mathcal{C}^{op} stimmt mit der Klasse der Objekte von \mathcal{C} überein. Sind X und Y Objekte von \mathcal{C}^{op} dann ist die Menge der Morphismen durch $\mathcal{C}^{\text{op}}(X, Y) := \mathcal{C}(Y, X)$ definiert. Die Verknüpfung von $f \in \mathcal{C}^{\text{op}}(X, Y)$ mit $g \in \mathcal{C}^{\text{op}}(Y, Z)$ ist durch $g \circ_{\mathcal{C}^{\text{op}}} f := f \circ_{\mathcal{C}} g$ definiert, wobei $\circ_{\mathcal{C}}$ die Verknüpfung in \mathcal{C} bezeichnet. Offensichtlich bildet \mathcal{C}^{op} wieder eine Kategorie. Sie wird die zu \mathcal{C} *duale Kategorie* genannt.

III.1.14. BEISPIEL (Produktkategorie). Sind \mathcal{C} und \mathcal{D} zwei Kategorien, dann lässt sich eine Produktkategorie $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ wie folgt definieren. Die Objekte von $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ sind Paare (X, Y) wobei X ein Objekt von \mathcal{C} , und Y ein Objekt von \mathcal{D} ist. Auch die Morphismen $(\mathcal{C} \times \mathcal{D})((X_1, Y_1), (X_2, Y_2))$ sind Paare (f, g) wobei $f \in \mathcal{C}(X_1, X_2)$ und $g \in \mathcal{D}(Y_1, Y_2)$. Die Verknüpfung wird Komponentenweise definiert.

III.2. Funktoren. Unter einem (*kovarianten*) *Funktor* F von einer Kategorie \mathcal{C} in eine Kategorie \mathcal{D} verstehen wir eine Zuordnung die jedem Objekt X von \mathcal{C} ein Objekt $F(X)$ aus \mathcal{D} und jedem Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ einen Morphismus $F(f) \in \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ zuordnet, sodass

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad \text{und} \quad F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

für beliebige Objekte X, Y, Z von \mathcal{C} und beliebige Morphismen $g \in \mathcal{C}(X, Y)$, $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$ gilt. In diesem Fall schreiben wir auch $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$.

III.2.1. BEMERKUNG. Ist $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor und $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ ein Isomorphismus, dann ist auch $F(f) \in \mathcal{D}(F(X), F(Y))$ ein Isomorphismus mit $F(f)^{-1} = F(f^{-1})$, denn $F(f^{-1}) \circ F(f) = F(f^{-1} \circ f) = F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)}$ und $F(f) \circ F(f^{-1}) = F(f \circ f^{-1}) = F(\text{id}_Y) = \text{id}_{F(Y)}$.

III.2.2. BEMERKUNG. Sind $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ zwei Funktoren, dann ist offensichtlich auch $GF : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$, $(GF)(X) := G(F(X))$, $(GF)(f) := G(F(f))$ ein Funktor. Auch haben wir stets einen identischen Funktor $\text{id}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $\text{id}_{\mathcal{C}}(X) := X$, $\text{id}_{\mathcal{C}}(f) := f$.

Unter einem *kontravarianten Funktor* F von einer Kategorie \mathcal{C} in eine Kategorie \mathcal{D} verstehen wir eine Zuordnung die jedem Objekt X von \mathcal{C} ein Objekt $F(X)$ aus \mathcal{D} und jedem Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ einen Morphismus $F(f) \in \mathcal{D}(F(Y), F(X))$ zuordnet, sodass

$$F(\text{id}_X) = \text{id}_{F(X)} \quad \text{und} \quad F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$$

für beliebige Objekte X, Y, Z von \mathcal{C} und beliebige Morphismen $g \in \mathcal{C}(X, Y)$, $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$ gilt. Ein kontravarianter Funktor von \mathcal{C} nach \mathcal{D} ist dasselbe wie ein kovarianter Funktor von \mathcal{C}^{op} nach \mathcal{D} , siehe Beispiel III.1.13. Mit Hilfe der dualen Kategorie lassen sich daher kontravariante Funktoren als kovariante auffassen.

III.2.3. BEISPIEL (Vergissfunktoren). Eine Reihe kovarianter Funktoren erhalten wir indem wir gewisse Strukturen vergessen. Ordnen wir etwa einem topologischen Raum die zugrundeliegende Menge zu so erhalten wir einen Funktor $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$. Vergessen wir den Basispunkt eines punktierten Raums so erhalten wir einen Funktor $\mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}$. Ordnen wir einem Vektorraum die zugrundeliegende abelsche Gruppe zu so liefert dies einen Funktor $\mathbf{Vsp} \rightarrow \mathbf{aGrp}$. Ebenso erhalten wir einen Funktor $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}_*$ indem wir einer Gruppe die zugrundeliegende Menge mit dem neutralen Element als Basispunkt zuordnen. Schließlich sei noch der Funktor $\mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{hTop}$ erwähnt, der einer Homotopieklasse relative Basispunkt die entsprechende freie Homotopieklasse zuordnet.

III.2.4. BEISPIEL. Fassen wir eine abelsche Gruppe als allgemeine Gruppe auf, so erhalten wir einen kovarianten Funktor $\mathbf{aGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$. Ordnen wir einer beliebigen Gruppe ihre Abelisierung zu, so erhalten wir einen kovarianten Funktor $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{aGrp}$. Beachte, dass jeder Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ zu einem Homomorphismus abelscher Gruppen $\varphi_{\text{ab}} : G_{\text{ab}} \rightarrow H_{\text{ab}}$ faktorisiert und offensichtlich $(\psi \circ \varphi)_{\text{ab}} = \psi_{\text{ab}} \circ \varphi_{\text{ab}}$ gilt.

III.2.5. BEISPIEL. Ordnen wir einer stetigen Abbildung die von ihr repräsentierte Homotopieklasse zu so erhalten wir kovariante Funktoren $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{hTop}$ und $\mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{hTop}_*$.

III.2.6. BEISPIEL (Kegel). Wir können die Kegelkonstruktion als kovarianten Funktor $C : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ auffassen. Einem topologischen Raum wird dabei der Kegel $CX := (X \times I)/(X \times \{0\})$ zugeordnet, siehe Beispiel I.3.18. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, dann faktorisiert $f \times \text{id}_I : X \times I \rightarrow Y \times I$ zu einer stetigen Abbildung $Cf : CX \rightarrow CY$. Eine einfache Rechnung zeigt $C(f \circ g) = Cf \circ Cg$ sowie $C \text{id}_X = \text{id}_{CX}$, also ist dies tatsächlich ein Funktor. Sind $f, g : X \rightarrow Y$ homotop, dann gilt auch $Cf \simeq Cg$, wir können die Kegelkonstruktion daher auch als Funktor $C : \mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{hTop}$ auffassen. Die Spitze des Kegels $* \in CX$ ist ein ausgezeichnete Punkt, der von den Abbildungen Cf respektiert wird. Die Kegelkonstruktion liefert daher auch Funktoren $\mathbf{Top}' \rightarrow \mathbf{Top}'_*$ bzw. $\mathbf{hTop}' \rightarrow \mathbf{hTop}'_*$, wobei \mathbf{Top}' die Kategorie der nicht-leeren topologischen Räume bezeichnet und \mathbf{hTop}' sowie \mathbf{hTop}'_* analog definiert sind.

III.2.7. BEISPIEL (Suspension). Wir können die Suspension als kovarianten Funktor $\Sigma : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Top}$ auffassen. Einem topologischen Raum X wird dabei die Einhängung $\Sigma X := (X \times [-1, 1])/\sim$ zugeordnet, siehe Beispiel I.5.7. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig dann faktorisiert $f \times \text{id}_{[-1,1]} : X \times [-1, 1] \rightarrow Y \times [-1, 1]$ zu einer stetigen Abbildung $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$. Eine einfache Rechnung zeigt nun $\Sigma(f \circ g) = (\Sigma f) \circ (\Sigma g)$ und $\Sigma(\text{id}_X) = \text{id}_{\Sigma X}$, also ist Σ tatsächlich ein Funktor. Sind $f, g : X \rightarrow Y$ homotop, dann gilt auch $\Sigma f \simeq \Sigma g$, die Suspension liefert daher auch einen Funktor $\Sigma : \mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{hTop}$.

III.2.8. BEISPIEL (Fundamentalgruppe). Die Fundamentalgruppe definiert einen kovarianten Funktor $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$. Einem punktierten topologischen Raum (X, x_0) wird dabei die Gruppe $\pi_1(X, x_0)$, und einer Abbildung punktierter Räume $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ der Gruppenhomomorphismus $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ zugeordnet, siehe Proposition I.1.13. Die Relationen $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$ und $(\text{id}_{(X, x_0)})_* = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ besagen gerade, dass dies ein kovarianter Funktor ist. Auf Grund der Homotopieinvarianz, siehe Proposition I.3.24, können wir die Fundamentalgruppe auch als kovarianten Funktor $\pi_1 : \mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ auffassen. Die Isomorphismen in der Kategorie \mathbf{hTop}_* sind genau die Homotopieäquivalenzen punktierter Räume und diese müssen durch den Funktor π_1 auf Isomorphismen in der Kategorie \mathbf{Grp} , dh. Gruppenisomorphismen, abgebildet werden, siehe Bemerkung III.2.1. Wir erhalten so genau die Aussage von Proposition I.3.25.

III.2.9. BEISPIEL. Ist S eine Menge dann bezeichnet $\text{FA}(S) := \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z}$ die freie abelsche Gruppe über S . Wir können S als Teilmenge (Basis) von $\text{FA}(S)$ auffassen. Ist A eine weitere abelsche Gruppe und $\lambda : S \rightarrow A$ eine Abbildung, dann existiert genau ein Homomorphismus abelscher Gruppen $\varphi : \text{FA}(S) \rightarrow A$, sodass $\varphi(s) = \lambda(s)$ für alle $s \in S$. Dies wird als die universelle Eigenschaft von $\text{FA}(S)$ bezeichnet. Ist nun T eine weitere Menge und $f : S \rightarrow T$ eine Abbildung, dann existiert also genau ein Homomorphismus $\text{FA}(f) : \text{FA}(S) \rightarrow \text{FA}(T)$, sodass $\text{FA}(f)(s) = f(s)$, für alle $s \in S$. Dies definiert eine Funktor $\text{FA} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{aGrp}$.

III.2.10. BEISPIEL. Ist S eine Menge dann bezeichnet $F(S) := *_{s \in S} \mathbb{Z}$ die freie Gruppe über S . Wir können S als Teilmenge von $F(S)$ auffassen. Ist G eine weitere abelsche Gruppe und $\lambda : S \rightarrow G$ eine Abbildung, dann existiert genau ein Homomorphismus Gruppen $\varphi : F(S) \rightarrow G$, sodass $\varphi(s) = \lambda(s)$ für alle $s \in S$. Dies wird als die universelle Eigenschaft von $F(S)$ bezeichnet. Ist nun T eine weitere Menge und $f : S \rightarrow T$ eine Abbildung, dann existiert also genau ein Homomorphismus $F(f) : F(S) \rightarrow F(T)$, sodass $F(f)(s) = f(s)$, für alle $s \in S$. Dies definiert eine Funktor $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$.

III.2.11. BEISPIEL. Ordnen wir einem topologischer Raum X , die Algebra der stetigen Funktionen $C(X, \mathbb{C})$ und einer stetigen Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ den Algebrhomomorphismus $\varphi^* : C(Y, \mathbb{C}) \rightarrow C(X, \mathbb{C})$, $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$, zu so erhalten wir einen kontravarianten Funktor $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Alg}$, denn offensichtlich gilt

$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$. Dabei bezeichnet **Alg** die Kategorie der \mathbb{C} -Algebren und Algebromorphismen.

III.2.12. BEISPIEL. Ordnen wir einem \mathbb{K} -Vektorraum V seinen Dualraum $V^* = L(V, \mathbb{K})$ und einer linearen Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ die lineare Abbildung $\varphi^* : W^* \rightarrow V^*$ zu, $\varphi^*(\lambda) := \lambda \circ \varphi$, so erhalten wir einen kontravarianten Funktor $\mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}}$, denn $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$.

III.2.13. BEISPIEL. Für eine Gruppe G bezeichne $C(G)$ die Menge der Konjugationsklassen in G . Da jeder Homomorphismus $\varphi : G \rightarrow H$ Konjugationsklassen von G in Konjugationsklassen von H abbildet, induziert er eine Abbildung $C(\varphi) : C(G) \rightarrow C(H)$. Offensichtlich gilt $C(\psi \circ \varphi) = C(\psi) \circ C(\varphi)$, also liefert dies einen kovarianten Funktor $C : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$. In jeder Gruppe gibt es eine ausgezeichnete Konjugationsklasse die nur aus dem neutralen Element besteht. Wir können diese Konjugationsklasse als Basispunkt in $C(G)$ verwenden. Offensichtlich bildet $C(\varphi)$ das ausgezeichnete Element in $C(G)$ auf das ausgezeichnete Element in $C(H)$ ab. Also erhalten wir auch einen Funktor $C : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}_*$, vgl. Beispiel III.1.4.

III.2.14. BEISPIEL. Es sei \mathcal{C} eine Kategorie und X ein Objekt von \mathcal{C} . Wir definieren einen Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ indem wir einem Objekt Y von \mathcal{C} die Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ und einem Morphismus $f \in \mathcal{C}(Y_1, Y_2)$ die Abbildung $f_* : \mathcal{C}(X, Y_1) \rightarrow \mathcal{C}(X, Y_2)$, $f_*(\varphi) := f \circ \varphi$, zuordnen. Dieser Funktor wird üblicherweise mit $\mathcal{C}(X, \cdot)$ bezeichnet, für die Abbildung f_* schreiben wir auch $\mathcal{C}(X, f)$. Wegen $(f \circ g)_*(\varphi) = (f \circ g) \circ \varphi = f \circ (g \circ \varphi) = f_*(g_*(\varphi)) = (f_* \circ g_*)(\varphi)$ gilt $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, also ist dies ein kovarianter Funktor, vgl. Bemerkung I.3.6. Wenden wir dies etwa auf $\mathcal{C} = \mathbf{hTop}$ und $X = S^1$ an, so erhalten wir einen Funktor $\mathbf{hTop} \rightarrow \mathbf{Set}$ der einem topologischen Raum Y die Menge der freien Homotopieklassen $[S^1, Y]$ und einem stetigen $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ die Abbildung $f_* : [S^1, Y_1] \rightarrow [S^1, Y_2]$ zuordnet. Wenden wir die Konstruktion auf $\mathcal{C} = \mathbf{hTop}_*$ und $X = (S^1, 1)$ an so erhalten wir einen Funktor $\mathbf{hTop}_* \rightarrow \mathbf{Set}$ der einem punktierten Raum (Y, y_0) die der Fundamentalgruppe zugrundeliegende Menge $[(S^1, 1), (Y, y_0)]$ zuordnet, vgl. Proposition I.3.32.

III.2.15. BEISPIEL. Es sei \mathcal{C} eine Kategorie und Y ein Objekt von \mathcal{C} . Wir definieren einen kontravarianten Funktor $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ indem wir einem Objekt X von \mathcal{C} die Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ und einem Morphismus $f \in \mathcal{C}(X_1, X_2)$ die Abbildung $f^* : \mathcal{C}(X_2, Y) \rightarrow \mathcal{C}(X_1, Y)$ zuordnen, $f^*(\varphi) := \varphi \circ f$. Wegen $(f \circ g)^*(\varphi) = \varphi \circ (f \circ g) = (\varphi \circ f) \circ g = g^*(f^*(\varphi)) = (g^* \circ f^*)(\varphi)$ gilt $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, also ist dies ein kontravarianter Funktor, vgl. Bemerkung I.3.7. Dieser Funktor wird üblicherweise mit $\mathcal{C}(\cdot, Y)$ bezeichnet. Für die Abbildung f^* schreiben wir auch $\mathcal{C}(f, Y)$.

III.2.16. BEISPIEL. Ist \mathcal{C} eine Kategorie, dann lässt sich ein Funktor $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ wie folgt definieren. Einem Objekt (X, Y) von $\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C}$ ordnen wir die Menge $\mathcal{C}(X, Y)$ zu, und einem Morphismus $(f, g) \in (\mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C})((X_1, Y_1), (X_2, Y_2)) =$

$\mathcal{C}(X_2, X_1) \times \mathcal{C}(Y_1, Y_2)$ ordnen wir die Abbildung $f^* \circ g_* = g_* \circ f^* : \mathcal{C}(X_1, Y_1) \rightarrow \mathcal{C}(X_2, Y_2)$ zu. Dieser Funktor wird üblicherweise mit $\mathcal{C}(\cdot, \cdot)$ bezeichnet, für die Abbildung $f^* \circ g_*$ schreiben wir auch $\mathcal{C}(f, g)$.

III.3. Natürliche Transformationen. Es seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ und $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ zwei Funktoren. Eine *natürliche Transformation* φ von F nach G besteht aus einem Morphismus $\varphi_X \in \mathcal{D}(F(X), G(X))$ für jedes Objekt X von \mathcal{C} , sodass für jeden Morphismus $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ nebenstehendes Diagramm kommutiert, dh. es gilt $G(f) \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ F(f)$. Ist $\varphi_X \in \mathcal{D}(F(X), G(X))$ für jedes Objekt X von \mathcal{C} ein Isomorphismus, dann wird φ ein *natürlicher Isomorphismus* oder eine *natürliche Äquivalenz* zwischen F und G genannt. In diesem Fall definiert $\psi_X := (\varphi_X)^{-1}$ eine natürliche Transformation von G nach F .

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\varphi_Y} & G(Y) \end{array}$$

III.3.1. BEISPIEL. Betrachte den Funktor $G : \mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}}$ der einem Vektorraum V seinen Bidual $G(V) := (V^*)^*$ und einer linearen Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$ ihre Biduale $G(\varphi) := (\varphi^*)^*$ zuordnet. Dies stimmt mit dem Quadrat des kontravarianten Funktors in Beispiel III.2.12 überein. Weiters bezeichne $F := \text{id}$ den identischen Funktor $\mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}}$. Zu einem Vektorraum V betrachte nun die lineare Abbildung $\varphi_V : V \rightarrow (V^*)^*$, $\varphi_V(v)(\lambda) := \lambda(v)$, $v \in V$, $\lambda \in V^*$. Eine einfache Rechnung zeigt, dass φ eine natürliche Transformation von F nach G liefert. In der Kategorie der endlich dimensionalen Vektorräume ist φ ein natürlicher Isomorphismus zwischen F und G .

III.3.2. BEISPIEL. Die kanonische Projektion $p : G \rightarrow G_{\text{ab}}$ auf die Abelsierung einer Gruppe, kann als natürliche Transformation vom identischen Funktor $\text{id} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ zum Abelsierungsfunktor $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{aGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ aus Beispiel III.2.4 aufgefasst werden.

III.3.3. BEISPIEL. Betrachte den Fundamentalgruppenfunktor $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$, siehe Beispiel III.2.8 sowie den Funktor $F : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$, der einem punktierten Raum (X, x_0) die in Proposition I.3.32 besprochene Gruppe $F(X, x_0) := [(S^1, 1), (X, x_0)]$, und einer Abbildung punktierter Räume $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ den Homomorphismus $F(f) := f_*$ zuordnet. Die in Proposition I.3.32 beschriebene Abbildung $\Psi_{(X, x_0)} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [(S^1, 1), (X, x_0)]$ definiert einen natürlichen Isomorphismus zwischen π_1 und F .

III.3.4. BEISPIEL. Wir betrachten den Funktor $G : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Set}$, $G(X, x_0) := [S^1, X]$, $G(f) := f_*$. Weiters sei $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ der Fundamentalgruppenfunktor und $C : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ der Funktor aus Beispiel III.2.13. Ihre Komposition liefert einen Funktor $F := C \circ \pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Set}$. Die in Satz I.3.33 besprochene Abbildung definiert eine natürliche Transformation von F nach G . Auf der Kategorie der wegzusammenhängenden punktierten Räume ist dies ein natürlicher Isomorphismus zwischen F und G , siehe Satz I.3.33.

III.3.5. BEISPIEL. Es bezeichne $FA : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{aGrp}$ den Funktor aus Beispiel III.2.9, und $V : \mathbf{aGrp} \rightarrow \mathbf{Set}$ den Vergissfunktor. Wir betrachten nun zwei Funktoren $\mathbf{Set}^{\text{op}} \times \mathbf{aGrp} \rightarrow \mathbf{Set}$, nämlich $\mathbf{Set}(\cdot, V(\cdot))$ und $\mathbf{aGrp}(FA(\cdot), \cdot)$. Der erste ordnet einer Menge S und einer abelschen Gruppe A die Menge $\mathbf{Set}(S, V(A))$ zu, dh. die Menge der Abbildungen von S in die der abelschen Gruppe A zugrundeliegende Menge $V(A)$. Der zweite ordnet einer Menge S und einer abelschen Gruppe A die Menge $\mathbf{aGrp}(FA(S), A)$ zu, dh. die Menge der Gruppenhomomorphismen von der freien abelschen Gruppe $FA(S)$ in die abelsche Gruppe A . Die universelle Eigenschaft von $FA(S)$ liefert eine Bijektion

$$\varphi_{(S,A)} : \mathbf{Set}(S, V(A)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{aGrp}(FA(S), A),$$

sodass für $(f, \varphi) \in (\mathbf{Set}^{\text{op}} \times \mathbf{aGrp})((S, A), (T, B)) = \mathbf{Set}(T, S) \times \mathbf{aGrp}(A, B)$ das folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}(S, V(A)) & \xrightarrow[\cong]{\varphi_{(S,A)}} & \mathbf{aGrp}(FA(S), A) \\ \downarrow \mathbf{Set}(f, V(\varphi)) & & \downarrow \mathbf{aGrp}(FA(f), \varphi) \\ \mathbf{Set}(T, V(B)) & \xrightarrow[\cong]{\varphi_{(T,B)}} & \mathbf{aGrp}(FA(T), B) \end{array}$$

Daher liefert φ einen natürlichen Isomorphismus zwischen den beiden Funktoren $\mathbf{Set}(\cdot, V(\cdot))$ und $\mathbf{aGrp}(FA(\cdot), \cdot)$. Wir sagen der Funktor FA ist *linksadjungiert* zu V , bzw. V ist *rechtsadjungiert* zu FA .

III.3.6. BEISPIEL. Es sei $F : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Grp}$ der Funktor aus Beispiel III.2.10, und $V : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ der Vergissfunktor. Wir betrachten nun zwei Funktoren $\mathbf{Set}^{\text{op}} \times \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, nämlich $\mathbf{Set}(\cdot, V(\cdot))$ und $\mathbf{Grp}(F(\cdot), \cdot)$. Der erste ordnet einer Menge S und einer Gruppe G die Menge $\mathbf{Set}(S, V(G))$ zu, dh. die Menge der Abbildungen von S in die der Gruppe G zugrundeliegende Menge $V(G)$. Der zweite ordnet einer Menge S und einer Gruppe G die Menge $\mathbf{Grp}(F(S), G)$ zu, dh. die Menge der Gruppenhomomorphismen von der freien Gruppe $F(S)$ in die Gruppe G . Die universelle Eigenschaft von $F(S)$ liefert eine Bijektion

$$\varphi_{(S,G)} : \mathbf{Set}(S, V(G)) \xrightarrow{\cong} \mathbf{Grp}(F(S), G),$$

sodass für $(f, \varphi) \in (\mathbf{Set}^{\text{op}} \times \mathbf{Grp})((S, G), (T, H)) = \mathbf{Set}(T, S) \times \mathbf{Grp}(G, H)$ das folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}(S, V(G)) & \xrightarrow[\cong]{\varphi_{(S,G)}} & \mathbf{Grp}(F(S), G) \\ \downarrow \mathbf{Set}(f, V(\varphi)) & & \downarrow \mathbf{Grp}(F(f), \varphi) \\ \mathbf{Set}(T, V(H)) & \xrightarrow[\cong]{\varphi_{(T,H)}} & \mathbf{Grp}(F(T), H) \end{array}$$

Daher liefert φ einen natürlichen Isomorphismus zwischen den beiden Funktoren $\mathbf{Set}(\cdot, V(\cdot))$ und $\mathbf{Grp}(F(\cdot), \cdot)$. Wir sagen der Funktor F ist *linksadjungiert* zu V , bzw. V ist *rechtsadjungiert* zu F .

III.4. Produkte und Koproducte. Es sei \mathcal{C} eine Kategorie und X_α , $\alpha \in A$, eine Menge von Objekten in \mathcal{C} . Unter einem *Produkt* der X_α verstehen wir ein Objekt X von \mathcal{C} zusammen mit Morphismen $p_\alpha : X \rightarrow X_\alpha$ die folgende universelle Eigenschaft besitzen. Sind $f_\alpha : Y \rightarrow X_\alpha$, $\alpha \in A$, Morphismen von \mathcal{C} , dann existiert ein eindeutiger Morphismus $f : Y \rightarrow X$ mit $p_\alpha \circ f = f_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Im Existenzfall ist das Objekt X und die sogenannten Projektionen p_α bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt, dh. ist \tilde{X} ein Objekt von \mathcal{C} und sind $\tilde{p}_\alpha : \tilde{X} \rightarrow X_\alpha$ Morphismen die ebenfalls obige universelle Eigenschaft besitzen, dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $f : X \rightarrow \tilde{X}$, sodass $\tilde{p}_\alpha \circ f = p_\alpha$, für alle $\alpha \in A$. Aus der universellen Eigenschaft von \tilde{X} folgt nämlich, dass es genau einen Morphismus $f : X \rightarrow \tilde{X}$ mit $\tilde{p}_\alpha \circ f = p_\alpha$ gibt. Ebenso folgt aus der universellen Eigenschaft von X , dass es einen Morphismus $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow X$ mit $p_\alpha \circ \tilde{f} = \tilde{p}_\alpha$ gibt. Die Komposition $\tilde{f} \circ f : X \rightarrow X$ erfüllt dann $p_\alpha \circ (\tilde{f} \circ f) = p_\alpha$, wegen der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von X folgt $\tilde{f} \circ f = \text{id}_X$. Ebenso lässt sich $f \circ \tilde{f} = \text{id}_{\tilde{X}}$ zeigen. Also ist f ein Isomorphismus mit Inverser \tilde{f} . Da Produkte bis auf kanonische Isomorphie eindeutig sind, sprechen wir auch von *dem* Produkt der X_α , und schreiben dafür meist $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Es gibt Kategorien in denen gewisse Produkte nicht existieren.

III.4.1. BEISPIEL (Produkte in **Set**). Sind X_α Mengen, dh. Objekte von **Set**, so bildet $\prod_{\alpha} X_\alpha$ zusammen mit den kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_{\alpha'} X_{\alpha'} \rightarrow X_\alpha$ das Produkt in der Kategorie **Set**.

III.4.2. BEISPIEL (Produkte in **Top**). Sind X_α topologische Räume, dh. Objekte von **Top**, so bildet $\prod_{\alpha} X_\alpha$, versehen mit der Produkttopologie, zusammen mit den kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_{\alpha'} X_{\alpha'} \rightarrow X_\alpha$ das Produkt in der Kategorie **Top**.

III.4.3. BEISPIEL (Produkte in **Top***). Sind (X_α, x_α) punktierte Räume, dh. Objekte von **Top***, so bildet $\prod_{\alpha} (X_\alpha, x_\alpha)$, versehen mit der Produkttopologie, zusammen mit den kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_{\alpha'} (X_{\alpha'}, x_{\alpha'}) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$ das Produkt in der Kategorie **Top***.

III.4.4. BEISPIEL (Produkte in **Vsp \mathbb{K}**). Sind V_α \mathbb{K} -Vektorräume, dh. Objekte von **Vsp \mathbb{K}** , so bildet $\prod_{\alpha} V_\alpha$ zusammen mit den kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_{\alpha'} V_{\alpha'} \rightarrow V_\alpha$ das Produkt in der Kategorie **Vsp \mathbb{K}** .

III.4.5. BEISPIEL (Produkte in **Grp**). Sind G_α Gruppen, dh. Objekte von **Grp**, so bildet $\prod_{\alpha} G_\alpha$, versehen mit der üblichen komponentenweisen Multiplikation, zusammen mit den kanonischen Projektionen $p_\alpha : \prod_{\alpha'} G_{\alpha'} \rightarrow G_\alpha$ das Produkt in der Kategorie **Grp**.

Es seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor, und X_α Objekte in \mathcal{C} . Weiters existiere das Produkt $\prod_{\alpha}^{\mathcal{C}} X_\alpha$ in \mathcal{C} , und es bezeichnen $p_\alpha^{\mathcal{C}} : \prod_{\alpha'}^{\mathcal{C}} X_{\alpha'} \rightarrow X_\alpha$ die damit assoziierten Projektionen. Durch Anwenden des Funktors F erhalten wir Morphismen $F(p_\alpha^{\mathcal{C}}) : F(\prod_{\alpha'}^{\mathcal{C}} X_{\alpha'}) \rightarrow F(X_\alpha)$. Ist dies stets ein Produkt der $F(X_\alpha)$ in \mathcal{D} , dann sagen wir

der Funktor F erhält Produkte. In dieser Situation erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $\Phi : F(\prod_{\alpha}^{\mathcal{C}} X_{\alpha}) \cong \prod_{\alpha}^{\mathcal{D}} F(X_{\alpha})$, sodass $p_{\alpha}^{\mathcal{D}} \circ \Phi = F(p_{\alpha}^{\mathcal{C}})$, wobei $p_{\alpha}^{\mathcal{D}} : \prod_{\alpha' \in A}^{\mathcal{D}} F(X_{\alpha'}) \rightarrow F(X_{\alpha})$ die Projektionen bezeichnen.

III.4.6. BEISPIEL. Der Fundamentalgruppenfunktor $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ erhält Produkte, dies ist die Aussage von Proposition I.1.17.

III.4.7. BEISPIEL. Der Abelisierungsfunktor $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{aGrp}$ erhält Produkte.

Es sei \mathcal{C} eine Kategorie und X_{α} , $\alpha \in A$, eine Menge von Objekten in \mathcal{C} . Unter einem *Koprodukt* der X_{α} verstehen wir ein Objekt X von \mathcal{C} zusammen mit Morphismen $\iota_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow X$ die folgende universelle Eigenschaft haben: Sind $f_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow Y$, $\alpha \in A$, Morphismen von \mathcal{C} , dann existiert ein eindeutiger Morphismus $f : X \rightarrow Y$ mit $f \circ \iota_{\alpha} = f_{\alpha}$ für alle $\alpha \in A$. Im Existenzfall ist das Objekt X und die Morphismen ι_{α} bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt, dh. ist \tilde{X} ein Objekt von \mathcal{C} und sind $\tilde{\iota}_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow \tilde{X}$ Morphismen die ebenfalls obige universelle Eigenschaft besitzen, dann existiert ein eindeutiger Isomorphismus $f : X \rightarrow \tilde{X}$, sodass $f \circ \tilde{\iota}_{\alpha} = \iota_{\alpha}$, für alle $\alpha \in A$. Wir sprechen daher auch von *dem* Koprodukt der X_{α} und schreiben meist $\coprod_{\alpha \in A} X_{\alpha}$. In vielen Kategorien wird das Koprodukt jedoch anders bezeichnet, siehe unten. Es gibt Kategorien in denen gewisse Koprodukte nicht existieren.

III.4.8. BEISPIEL (Koprodukte in \mathbf{Set}). Sind X_{α} Mengen, dh. Objekte von \mathbf{Set} , dann bildet die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow \bigsqcup_{\alpha'} X_{\alpha'}$ das Koprodukt in der Kategorie \mathbf{Set} .

III.4.9. BEISPIEL (Koprodukte in \mathbf{Top}). Sind X_{α} topologische Räume, dh. Objekte von \mathbf{Top} , so bildet die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_{\alpha} X_{\alpha}$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_{\alpha} : X_{\alpha} \rightarrow \bigsqcup_{\alpha'} X_{\alpha'}$ das Koprodukt in der Kategorie \mathbf{Top} .

III.4.10. BEISPIEL (Koprodukte in \mathbf{Top}_*). Sind (X_{α}, x_{α}) punktierte Räume, dh. Objekte von \mathbf{Top}_* , so bildet die Einpunktvereinigung $\bigvee_{\alpha} (X_{\alpha}, x_{\alpha})$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_{\alpha} : (X_{\alpha}, x_{\alpha}) \rightarrow \bigvee_{\alpha'} (X_{\alpha'}, x_{\alpha'})$ das Koprodukt in der Kategorie \mathbf{Top}_* .

III.4.11. BEISPIEL (Koprodukte in $\mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}}$). Sind V_{α} \mathbb{K} -Vektorräume, dh. Objekte von $\mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}}$, dann bildet $\bigoplus_{\alpha} V_{\alpha}$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_{\alpha} : V_{\alpha} \rightarrow \bigoplus_{\alpha'} V_{\alpha'}$ das Koprodukt in der Kategorie $\mathbf{Vsp}_{\mathbb{K}}$.

III.4.12. BEISPIEL (Koprodukte in \mathbf{aGrp}). Sind A_{α} abelsche Gruppen, dh. Objekte von \mathbf{aGrp} , dann bildet $\bigoplus_{\alpha} A_{\alpha}$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_{\alpha} : A_{\alpha} \rightarrow \bigoplus_{\alpha'} A_{\alpha'}$ das Koprodukt in der Kategorie \mathbf{aGrp} .

III.4.13. BEISPIEL (Koprodukte in \mathbf{Grp}). Sind G_{α} Gruppen, dh. Objekte von \mathbf{Grp} , so bildet $*_{\alpha} G_{\alpha}$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_{\alpha} : G_{\alpha} \rightarrow *_{\alpha'} G_{\alpha'}$ das Koprodukt in der Kategorie \mathbf{Grp} .

Es seien $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ein Funktor, und X_α Objekte in \mathcal{C} . Weiters existiere das Koprodukt $\coprod_\alpha X_\alpha$ in \mathcal{C} , und es bezeichnen $\iota_\alpha^{\mathcal{C}} : X_\alpha \rightarrow \coprod_{\alpha'} X_{\alpha'}$ die damit assoziierten Inklusionen. Durch Anwenden des Funktors F erhalten wir Morphismen $F(\iota_\alpha^{\mathcal{C}}) : F(X_\alpha) \rightarrow F(\coprod_{\alpha'} X_{\alpha'})$. Ist dies stets ein Koprodukt der $F(X_\alpha)$ in \mathcal{D} , dann sagen wir der Funktor F *erhält Koprodukte*. In dieser Situation erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $\Phi : \coprod_\alpha^{\mathcal{D}} F(X_\alpha) \xrightarrow{\cong} F(\coprod_\alpha X_\alpha)$, sodass $\Phi \circ \iota_\alpha^{\mathcal{D}} = F(\iota_\alpha^{\mathcal{C}})$, wobei $\iota_\alpha^{\mathcal{D}} : F(X_\alpha) \rightarrow \coprod_{\alpha'}^{\mathcal{D}} F(X_{\alpha'})$ die Inklusionen bezeichnen.

III.4.14. BEISPIEL. Schränken wir den Funktor $\pi_1 : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Grp}$ auf die Kategorie jener punktierten Räume ein deren Basispunkt Deformationeretrakt einer offenen Umgebung ist, dann erhält dieser Funktor Koprodukte. Dies ist die Aussage von Proposition I.5.8.

III.4.15. BEISPIEL. Der Abelisierungsfunktor $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{aGrp}$ erhält Koprodukte, siehe Beispiel I.5.3.

IV. Homologie

Jedem topologischen Raum X kann eine Folge von abelschen Gruppen $H_q(X)$, die sogenannten Homologiegruppen von X , zugeordnet werden. Stetige Abbildungen induzieren Homomorphismen zwischen den Homologiegruppen und dies liefert kovariante Funktoren von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der abelschen Gruppen. Diese Funktoren sind homotopieinvariant, homotopieäquivalente Räume müssen daher isomorphe Homologiegruppen haben. Die Homologiegruppe $H_0(X)$ misst die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von X . Für wegzusammenhängende Räume liefert der Hurewicz-Homomorphismus einen Isomorphismus $H_1(X) \cong \pi_1(X)_{\text{ab}}$. Die Berechnung der Homologiegruppen der Sphären ermöglicht u.A. die Beantwortung einiger grundlegenden jedoch subtilen Fragen über Teilmengen des \mathbb{R}^n . Als Beispiel sei hier nur der Jordanschen Kurvensatz erwähnt, siehe Satz IV.12.25 unten. Einige Lehrbücher die Einführungen in die Homologietheorie bieten sind [2, 3, 4, 12, 13, 14, 15, 18].

Die Definition der Homologiegruppen erfordert einige algebraische Vorbereitungen denen wir uns in den Abschnitten IV.1 bis IV.4 widmen werden. Weiterführendes zu dieser sogenannten homologischen Algebra findet sich etwa in [6]. In Abschnitt IV.5 kehren wir dann zur Topologie zurück und geben eine Definition der Homologiegruppen eines Raums. In den folgenden Abschnitte IV.7 bis IV.10 leiten wir die wesentlichen Eigenschaften des Homologiefunktors her. Abschnitt IV.11 ist dem Hurewicz-Homomorphismus gewidmet. In Abschnitt IV.12 werden wir einige erste Anwendungen besprechen.

IV.1. Kettenkomplexe und Homologie. Unter einer *graduerten abelschen Gruppe* verstehen wir ein System abelscher Gruppen A_q , $q \in \mathbb{Z}$. Wir schreiben dafür oft A_* oder bloß A . Seien nun A und B zwei graduierte abelsche Gruppen und $k \in \mathbb{Z}$. Unter einem Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$ vom Grad k verstehen wir ein System von Homomorphismen $\varphi_q : A_q \rightarrow B_{q+k}$, $q \in \mathbb{Z}$. Wir werden dies oft durch die Notation $\varphi : A_* \rightarrow B_{*+k}$ andeuten. Die Menge aller Homomorphismen vom Grad k bezeichnen wir mit $\text{Hom}_k(A, B)$. Für $\varphi, \psi \in \text{Hom}_k(A, B)$, definieren wir $\varphi + \psi \in \text{Hom}_k(A, B)$ durch $(\varphi + \psi)_q(a) := \varphi_q(a) + \psi_q(a)$, $a \in A_q$. Dadurch wird $\text{Hom}_k(A, B)$ zu einer abelschen Gruppe. Sind A, B, C gradueierte abelsche Gruppen und $\varphi \in \text{Hom}_k(A, B)$, $\psi \in \text{Hom}_l(B, C)$, dann definiert $\psi \circ \varphi \in \text{Hom}_{k+l}(A, C)$, $(\psi \circ \varphi)_q(a) := \psi_{q+k}(\varphi_q(a))$, $a \in A_q$, einen Homomorphismus vom Grad $k + l$. Beachte, dass diese Komposition bilinear ist, dh. es gilt $(\psi_1 + \psi_2) \circ \varphi = \psi_1 \circ \varphi + \psi_2 \circ \varphi$ sowie $\psi \circ (\varphi_1 + \varphi_2) = \psi \circ \varphi_1 + \psi \circ \varphi_2$, für $\varphi, \varphi_i \in \text{Hom}_k(A, B)$ und $\psi, \psi_i \in \text{Hom}_l(B, C)$.

Unter einem *Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen* verstehen wir einen Homomorphismus vom Grad 0. Wir werden die Menge dieser Homomorphismen mit $\text{Hom}(A, B)$ bezeichnen. Die graduierten abelschen Gruppen zusammen mit diesen Homomorphismen bilden offensichtlich eine Kategorie. Die Isomorphismen dieser Kategorie sind genau jene Homomorphismen graduerter abelscher

Gruppen $\varphi : A \rightarrow B$, sodass $\varphi_q : A_q \rightarrow B_q$ für jedes $q \in \mathbb{Z}$ ein Gruppenisomorphismus ist. Bezüglich obiger Addition bildet $\text{Hom}(A, B)$ eine abelsche Gruppe, ihr neutrales Element ist durch den triviale Homomorphismus $0 : A \rightarrow B$ gegeben.

Sind A und B zwei graduierte abelsche Gruppen und gilt $A_q \subseteq B_q$ für alle $q \in \mathbb{Z}$, dann nennen wir A eine *graduierte Untergruppe* von B und schreiben $A \subseteq B$. Die Inklusionen $\iota_q : A_q \rightarrow B_q$ definieren einen Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen $\iota : A \rightarrow B$ den wir als die *kanonische Inklusion* bezeichnen. Unter dem *Quotienten* B/A verstehen wir die graduierte abelsche Gruppe $(B/A)_q := B_q/A_q$, $q \in \mathbb{Z}$. Die Projektionen $p_q : B_q \rightarrow B_q/A_q$ liefern einen Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen $p : B \rightarrow B/A$, den wir als die *kanonische Projektion* bezeichnen. Ist $\varphi : B \rightarrow C$ ein Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen mit $\varphi \circ \iota = 0$, dann existiert genau ein Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen $\bar{\varphi} : B/A \rightarrow C$ mit $\bar{\varphi} \circ p = \varphi$.

Ist $\varphi : A \rightarrow B$ ein Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen dann definieren wir seinen *Kern* $\ker(\varphi)$ als die graduierte abelsche Gruppe $(\ker(\varphi))_q := \ker(\varphi_q : A_q \rightarrow B_q)$. Dies ist offensichtlich eine graduierte Untergruppe von A , dh. $\ker(\varphi) \subseteq A$. Analog definieren wir sein *Bild* $\text{img}(\varphi)$ als die graduierte abelsche Gruppe $(\text{img}(\varphi))_q := \text{img}(\varphi_q : A_q \rightarrow B_q)$, $q \in \mathbb{Z}$, eine graduierte Untergruppe von B , dh. $\text{img}(\varphi) \subseteq B$. Wir können den Homomorphismus φ als Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow \text{img}(\varphi)$ betrachten und es gilt $\varphi \circ \iota = 0$, wobei $\iota : \ker(\varphi) \rightarrow A$ die kanonische Inklusion bezeichnet. Daher faktorisiert φ zu einem Homomorphismus $\bar{\varphi} : A/\ker(\varphi) \rightarrow \text{img}(\varphi)$. Nach dem Homomorphiesatz der Algebra ist $\bar{\varphi}_q : A_q/\ker(\varphi_q) \rightarrow \text{img}(\varphi_q)$ ein Gruppenisomorphismus, daher ist $\bar{\varphi} : A/\ker(\varphi) \xrightarrow{\cong} \text{img}(\varphi)$ ein Isomorphismus graduerter abelscher Gruppen.

Die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen besitzt *Koprodukte*. Sind A^λ , $\lambda \in \Lambda$, graduierte abelsche Gruppen dann definieren wir eine graduierte Abelsche Gruppe $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A^\lambda$ durch $(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A^\lambda)_q := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A_q^\lambda$ und *kanonische Inklusionen* $\iota^\lambda : A^\lambda \rightarrow \bigoplus_{\lambda' \in \Lambda} A^{\lambda'}$ durch die Inklusionen $\iota_q^\lambda : A_q^\lambda \rightarrow \bigoplus_{\lambda' \in \Lambda} A_q^{\lambda'}$. Eine einfache Überlegung zeigt, dass dies tatsächlich die universelle Eigenschaft des Koprodukts hat. Genauer, für eine weitere graduierte abelsche Gruppe B und Homomorphismen graduerter abelscher Gruppen $\varphi^\lambda : A^\lambda \rightarrow B$ existiert genau ein Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen $\varphi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} A^\lambda \rightarrow B$, sodass $\varphi \circ \iota^\lambda = \varphi^\lambda$, für alle $\lambda \in \Lambda$.

Die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen besitzt auch *Produkte*. Diese sind durch $(\prod_{\lambda \in \Lambda} A^\lambda)_q := \prod_{\lambda \in \Lambda} A_q^\lambda$ gegeben, die *kanonischen Projektionen* $p^\lambda : \prod_{\lambda' \in \Lambda} A^{\lambda'} \rightarrow A^\lambda$ durch die Projektionen $p_q^\lambda : \prod_{\lambda' \in \Lambda} A_q^{\lambda'} \rightarrow A_q^\lambda$ definiert. Wieder lässt sich leicht zeigen, dass dies die universelle Eigenschaft des Produktes besitzt, dh. für Homomorphismen graduerter abelscher Gruppen $\varphi^\lambda : B \rightarrow A^\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, existiert genau ein Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen $\varphi : B \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} A^\lambda$, sodass $p^\lambda \circ \varphi = \varphi^\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$.

Unter einem *Kettenkomplex* verstehen wir eine graduierte abelsche Gruppe C zusammen mit einem Homomorphismus vom $\partial \in \text{Hom}_{-1}(C, C)$ vom Grad -1 , der $\partial^2 = 0$, dh. $\partial \circ \partial = 0$, erfüllt. Ein Kettenkomplex ist daher ein System abelscher Gruppen C_q , $q \in \mathbb{Z}$, zusammen mit einem System von Homomorphismen $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$, $q \in \mathbb{Z}$, sodass $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$, für alle $q \in \mathbb{Z}$. Wir werden Kettenkomplexe meist mit C , C_* , (C, ∂) oder (C_*, ∂) bezeichnen. Die abelsche Gruppe C_q

$$\dots \xleftarrow{\partial_{q-2}} C_{q-2} \xleftarrow{\partial_{q-1}} C_{q-1} \xleftarrow{\partial_q} C_q \xleftarrow{\partial_{q+1}} \dots$$

wird die Gruppe der q -Ketten genannt. Der Homomorphismus ∂ heißt *Randoperator* oder *Differential* des Kettenkomplexes. Die abelsche Gruppe $Z_q := Z_q(C) := \{c \in C_q : \partial_q c = 0\}$ wird die Gruppe der q -Zyklen genannt. Die abelsche Gruppe $B_q := B_q(C) := \{\partial_{q+1} c : c \in C_{q+1}\}$ wird die Gruppe der q -Ränder bezeichnet. Aus $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ folgt $B_q \subseteq Z_q \subseteq C_q$. Unter der q -ten *Homologiegruppe* des Kettenkomplexes verstehen wir die abelsche Gruppe $H_q := H_q(C) := H_q(C, \partial) := Z_q/B_q$. Elemente von H_q werden als *Homologieklassen* bezeichnet. Ist $c \in Z_q$ so schreiben wir $[c] \in H_q$ für die von c repräsentierte Homologiekategorie. Zwei Zyklen $c, c' \in Z_q$ definieren genau dann die selbe Homologiekategorie, wenn sie sich um einen Rand unterscheiden, dh. wenn $z \in C_{q+1}$ mit $c' - c = \partial_{q+1} z$ existiert. Wir können die Systeme Z_q, B_q, H_q , $q \in \mathbb{Z}$, als graduierte abelsche Gruppen auffassen, und schreiben dafür meist $Z_*(C)$, $B_*(C)$ und $H_*(C)$, oder bloß B_* , Z_* sowie H_* wenn aus dem Zusammenhang hervorgeht welcher Kettenkomplex gemeint ist. Wir haben kanonische Inklusionen graduierter Untergruppen $B_* \subseteq Z_* \subseteq C_*$, und es gilt $H_* = Z_*/B_*$. Ein Kettenkomplex C heißt *azyklisch* falls $H_*(C) = 0$, dh. wenn alle Homologiegruppen trivial sind. Offensichtlich ist dies genau dann der Fall, wenn $B_*(C) = Z_*(C)$, dh. wenn jeder Zykel Rand ist, es daher keine essentiellen Zykel gibt.

IV.1.1. BEISPIEL. Betrachte den Kettenkomplex

$$\dots \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{2} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xleftarrow{(0,3)} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$

dh. die einzigen nicht-trivialen Kettengruppen sind $C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = \mathbb{Z}$. Dann gilt $H_0(C) = \mathbb{Z}$, $H_1(C) = \mathbb{Z}_2$, $H_3(C) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_3$, und alle anderen Homologiegruppen verschwinden.

Eine Sequenz von Gruppen $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ heißt exakt falls $\ker(\psi) = \text{img}(\varphi)$. Insbesondere muss daher $\psi \circ \varphi = 0$ gelten, denn dies ist zur Inklusion $\text{img}(\varphi) \subseteq \ker(\psi)$ äquivalent. Etwa ist die Sequenz $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{0} C$ genau dann exakt, wenn φ surjektiv ist. Die Sequenz $A \xrightarrow{0} B \xrightarrow{\psi} C$ ist genau dann exakt wenn ψ injektiv ist. Eine Sequenz $A \xrightarrow{0} B \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{0} D$ ist genau dann exakt wenn φ ein Isomorphismus ist. Unter einer kurzen exakten Sequenz verstehen wir eine exakte Sequenz der Form $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \rightarrow 0$, dh. φ ist injektiv, ψ ist surjektiv und $\ker(\psi) = \text{img}(\varphi)$. In diesem Fall können wir daher A als Untergruppe von B auffassen und ψ induziert einen Isomorphismus $C \cong B/A$. Die Homologiegruppe $H_q(C)$ eines

Kettenkomplexes C misst daher wie weit die Sequenz $C_{q-1} \xleftarrow{\partial_q} C_q \xleftarrow{\partial_{q+1}} C_{q+1}$ davon entfernt ist bei C_q exakt zu sein. Ein Kettenkomplex C ist genau dann azyklisch wenn die Sequenz $\cdots \leftarrow C_{q-1} \xleftarrow{\partial_q} C_q \xleftarrow{\partial_{q+1}} C_{q+1} \leftarrow \cdots$ bei jedem C_q exakt ist.

Seien nun (C, ∂) und (C', ∂') zwei Kettenkomplexe. Unter einer *Kettenabbildung* $\varphi : C \rightarrow C'$ verstehen wir einen Homomorphismus graduierter abelscher Gruppen $\varphi \in \text{Hom}(C, C')$, sodass gilt $\partial' \circ \varphi = \varphi \circ \partial$. Kettenabbildungen werden auch als *Homomorphismen von Kettenkomplexen* oder *Komplexabbildungen* bezeichnet. Eine Kettenabbildung ist daher ein System von Homomorphismen $\varphi_q : C_q \rightarrow C'_q$, $q \in \mathbb{Z}$, sodass $\partial'_q \circ \varphi_q = \varphi_{q-1} \circ \partial_q$, für alle $q \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & C_{q-1} & \xleftarrow{\partial_q} & C_q & \longleftarrow & \cdots \\ & & \downarrow \varphi_{q-1} & & \downarrow \varphi_q & & \\ \cdots & \longleftarrow & C'_{q-1} & \xleftarrow{\partial'_q} & C'_q & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

Die Komposition zweier Komplexabbildungen ist wieder eine Komplexabbildung. Kettenkomplexe und Komplexabbildungen bilden daher eine Kategorie, die *Kategorie der Kettenkomplexe*. Die Isomorphismen dieser Kategorie sind genau jene Kettenabbildungen $\varphi : C \rightarrow C'$, sodass $\varphi_q : C_q \rightarrow C'_q$ für jedes $q \in \mathbb{Z}$ ein Gruppenisomorphismus ist. Sind $\varphi, \psi : C \rightarrow C'$ zwei Komplexabbildungen, dann ist auch $\varphi + \psi : C \rightarrow C'$ eine Komplexabbildung. Die Menge der Kettenabbildungen von C nach C' bildet daher eine abelsche Gruppe.

Ist $\varphi : C \rightarrow C'$ eine Kettenabbildung, dann folgt aus der Relation $\partial' \circ \varphi = \varphi \circ \partial$ sofort $\varphi_q(Z_q) \subseteq Z'_q$ und $\varphi_q(B_q) \subseteq B'_q$. Eine Kettenabbildung induziert daher Homomorphismen zwischen den Homologiegruppen, $\varphi_* : H_q(C) \rightarrow H_q(C')$, $\varphi_*([c]) := [\varphi_q(c)]$, $c \in Z_q(C)$. Statt $\varphi_* : H_q(C) \rightarrow H_q(C')$ werden wir gelegentlich auch $H_q(\varphi) : H_q(C) \rightarrow H_q(C')$ schreiben.

IV.1.2. PROPOSITION (Homologiefunktor). *Ordnen wir einem Kettenkomplex C die graduerte abelsche Gruppe $H_*(C)$ und einer Kettenabbildung $\varphi : C \rightarrow C'$ den Homomorphismus $\varphi_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$ zu, so erhalten wir einen kovarianten Funktor von der Kategorie der Kettenkomplexe in die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen. Dh. für je zwei Kettenabbildungen $\varphi : C \rightarrow C'$ und $\varphi' : C' \rightarrow C''$ gilt $(\varphi' \circ \varphi)_* = \varphi'_* \circ \varphi_*$, sowie $(\text{id}_C)_* = \text{id}_{H_*(C)}$. Weiters ist $(\varphi + \psi)_* = \varphi_* + \psi_*$, für je zwei Kettenabbildungen $\varphi, \psi : C \rightarrow C'$.*

BEWEIS. Seien $\varphi : C \rightarrow C'$ und $\varphi' : C' \rightarrow C''$ zwei Kettenabbildungen und $c \in Z_q(C)$. Dann gilt $(\varphi'_* \circ \varphi_*)([c]) = \varphi'_*(\varphi_*([c])) = \varphi'_*([\varphi_q(c)]) = [\varphi'_q(\varphi_q(c))] = (\varphi' \circ \varphi)_*([c])$, also $\varphi'_* \circ \varphi_* = (\varphi' \circ \varphi)_* : H_q(C) \rightarrow H_q(C'')$. Die übrigen Aussagen sind ebenso trivial. \square

Ist C' ein Kettenkomplex und $C \subseteq C'$ eine graduierte Untergruppe die invariant unter dem Differential von C' ist, dh. $\partial'(C_q) \subseteq C_{q-1}$ für alle $q \in \mathbb{Z}$, dann nennen wir C einen *Teilkomplex* von C' . Offensichtlich bildet C zusammen mit der Einschränkung von ∂' wieder einen Kettenkomplex, und die kanonische Inklusion $\iota : C \rightarrow C'$ ist eine Kettenabbildung. In dieser Situation induziert das

Differential ∂' ein Differential auf der graduierten Quotientengruppe C'/C , denn $\partial'_q : C'_q \rightarrow C'_{q-1}$ faktorisiert zu einem Homomorphismus $C'_q/C_q \rightarrow C'_{q-1}/C_{q-1}$. Dadurch wird C'/C zu einem Kettenkomplex, den wir als den *Quotientenkomplex* von C' nach C bezeichnen. Nach Konstruktion ist die kanonische Projektion $p : C' \rightarrow C'/C$ eine Kettenabbildung.

Ist $\varphi : C \rightarrow C'$ eine Kettenabbildung, dann bildet $\ker(\varphi)$ einen Teilkomplex von C , und $\text{img}(\varphi)$ ist ein Teilkomplex von C' . Weiters ist der kanonische Isomorphismus $C/\ker(\varphi) \cong \text{img}(\varphi)$ ein Isomorphismus von Kettenkomplexen.

IV.1.3. BEISPIEL. Ist $C \subseteq C'$ ein Teilkomplex dann ist die kanonische Inklusion $C_q \rightarrow C'_q$ injektiv, die induzierten Homomorphismen $\iota_* : H_q(C) \rightarrow H_q(C')$ müssen aber keineswegs injektiv sein. Ebenso werden die von der kanonischen Projektion $p : C' \rightarrow C'/C$ induzierten Homomorphismen $p_* : H_q(C') \rightarrow H_q(C'/C)$ i.A. nicht surjektiv sein. Dies lässt sich schon an einfachen Beispielen beobachten, betrachte etwa den azyklischen Kettenkomplex $\cdots \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \mathbb{Z} \leftarrow 0 \leftarrow \cdots$, dh. $C'_0 = C'_1 = \mathbb{Z}$, und den Teilkomplex der durch $C_0 = \mathbb{Z}$ und $C_1 = 0$ gegeben ist. Trotzdem gibt es einen engen Zusammenhang zwischen den Homologiegruppen von C , C' und C'/C , dieser ist jedoch ein wenig subtiler, vgl. Satz IV.3.1 unten.

Die Kategorie der Kettenkomplexe besitzt Koprodukte. Sind $(C^\lambda, \partial^\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, Kettenkomplexe dann induzieren die Differentiale ∂^λ einen Homomorphismus $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \partial^\lambda : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda$ vom Grad -1 . Offensichtlich wird $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda$ dadurch zu einem Kettenkomplex, und die kanonischen Inklusionen $\iota^\lambda : C^\lambda \rightarrow \bigoplus_{\lambda' \in \Lambda} C^{\lambda'}$ sind Kettenabbildungen. Eine einfache Überlegung zeigt, dass diese die universelle Eigenschaft des Koprodukts haben, dh. sind $\varphi^\lambda : C^\lambda \rightarrow C'$ Kettenabbildungen, dann existiert genau eine Kettenabbildung $\varphi : \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda \rightarrow C'$, sodass $\varphi \circ \iota^\lambda = \varphi^\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$ gilt. Die kanonischen Inklusionen $\iota^\lambda : C^\lambda \rightarrow \bigoplus_{\lambda' \in \Lambda} C^{\lambda'}$ induzieren Homomorphismen $(\iota^\lambda)_* : H_*(C^\lambda) \rightarrow H_*(\bigoplus_{\lambda' \in \Lambda} C^{\lambda'})$, und diese definieren einen Homomorphismus graduiert abelscher Gruppen

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(C^\lambda) \rightarrow H_*(\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda). \quad (\text{IV.1})$$

Der Homologiefunktor vertauscht in folgendem Sinn mit Koprodukten.

IV.1.4. PROPOSITION. *Der Homomorphismus (IV.1) ist ein Isomorphismus graduiert abelscher Gruppen.*

BEWEIS. Setze $C := \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda$. Da die Inklusionen $\iota^\lambda : C^\lambda \rightarrow C$ Kettenabbildungen sind, liefern sie Inklusionen $Z_q(C^\lambda) \rightarrow Z_q(C)$ sowie $B_q(C^\lambda) \rightarrow B_q(C)$, und diese induzieren Isomorphismen $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Z_q(C^\lambda) \cong Z_q(C)$, sowie $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_q(C^\lambda) \cong B_q(C)$. Wir erhalten daher

$$H_q(C) = \frac{Z_q(C)}{B_q(C)} \cong \frac{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} Z_q(C^\lambda)}{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B_q(C^\lambda)} \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \frac{Z_q(C^\lambda)}{B_q(C^\lambda)} = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_q(C^\lambda). \quad \square$$

Die Kategorie der Kettenkomplexe besitzt auch Produkte, diese werden im Folgenden aber nicht wichtig sein. Sind $(C^\lambda, \partial^\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, Kettenkomplexe dann

induzieren die Differentiale ∂^λ einen Homomorphismus $\times_{\lambda \in \Lambda} \partial^\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda$ vom Grad -1 . Offensichtlich wird $\prod_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda$ dadurch zu einem Kettenkomplex, und die kanonischen Projektionen $p^\lambda : \prod_{\lambda' \in \Lambda} C^{\lambda'} \rightarrow C^\lambda$ sind Kettenabbildungen. Eine einfache Überlegung zeigt, dass diese die universelle Eigenschaft des Produkts haben, dh. sind $\varphi^\lambda : C' \rightarrow C^\lambda$ Kettenabbildungen, dann existiert genau eine Kettenabbildung $\varphi : C' \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda$, sodass $p^\lambda \circ \varphi = \varphi^\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Die kanonischen Projektionen $p^\lambda : \prod_{\lambda' \in \Lambda} C^{\lambda'} \rightarrow C^\lambda$ induzieren Homomorphismen $(p^\lambda)_* : H_*(\prod_{\lambda' \in \Lambda} C^{\lambda'}) \rightarrow H_*(C^\lambda)$, und diese definieren einen Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen

$$H_*(\prod_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda) \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} H_*(C^\lambda). \quad (\text{IV.2})$$

Der Homologiefunktor vertauscht in folgendem Sinn mit Produkten.

IV.1.5. PROPOSITION. *Der Homomorphismus (IV.2) ist ein Isomorphismus graduerter abelscher Gruppen.*

BEWEIS. Analog zum Beweis von Proposition IV.1.4. \square

IV.2. Kettenhomotopie. Zwei Kettenabbildungen $\varphi, \psi : C \rightarrow C'$ heißen (*ketten*)*homotop* falls ein Homomorphismus $h : C \rightarrow C'$ vom Grad 1 existiert, sodass $\partial' \circ h + h \circ \partial = \psi - \varphi$ gilt. Jeder solche Homomorphismus h wird eine (*Ketten*)*homotopie* von φ nach ψ genannt. Eine Kettenhomotopie wie oben ist daher ein System von Homomorphismen $h_q : C_q \rightarrow C'_{q+1}$, sodass für jedes $q \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $\partial'_{q+1} \circ h_q + h_{q-1} \circ \partial_q = \psi_q - \varphi_q$ gilt.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & C_{q-1} & \xleftarrow{\partial_q} & C_q & \xleftarrow{\partial_q} & C_{q+1} & \longleftarrow \cdots \\ & & \downarrow & \searrow^{h_{q-1}} & \downarrow & \searrow^{h_q} & \downarrow & \\ \cdots & \longleftarrow & C'_{q-1} & \xleftarrow{\partial'_{q-1}} & C'_q & \xleftarrow{\partial'_{q+1}} & C'_{q+1} & \longleftarrow \cdots \end{array}$$

Existiert eine Kettenhomotopie von φ nach ψ so schreiben wir $\varphi \simeq \psi$.

IV.2.1. LEMMA. *Kettenhomotop zu sein ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Kettenabbildungen zwischen zwei Kettenkomplexen.*

BEWEIS. Ist $\varphi : C \rightarrow C'$ eine Kettenabbildung, dann definiert $h := 0$ eine Kettenhomotopie von φ nach φ , also ist die Relation reflexiv. Nun zur Symmetrie: Es sei also $h : C_* \rightarrow C'_{*+1}$ eine Kettenhomotopie von φ nach ψ , dh. $\psi - \varphi = \partial' \circ h + h \circ \partial$. Es gilt dann auch $\varphi - \psi = \partial' \circ (-h) + (-h) \circ \partial$, also ist $-h$ eine Kettenhomotopie von ψ nach φ . Damit ist die Relation auch symmetrisch. Kommen wir schließlich zur Transitivität. Seien dazu $h_1 : C_* \rightarrow C'_{*+1}$ eine Kettenhomotopie von φ_1 nach φ_2 , und $h_2 : C_* \rightarrow C'_{*+1}$ eine Kettenhomotopie von φ_2 nach φ_3 . Es gilt daher $\varphi_2 - \varphi_1 = \partial' \circ h_1 + h_1 \circ \partial$ sowie $\varphi_3 - \varphi_2 = \partial' \circ h_2 + h_2 \circ \partial$. Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhalten wir $\varphi_3 - \varphi_1 = \partial' \circ (h_1 + h_2) + (h_1 + h_2) \circ \partial$, also ist $h_1 + h_2$ eine Kettenhomotopie von φ_1 nach φ_3 . \square

IV.2.2. LEMMA. *Kettenhomotop zu sein ist mit der Komposition von Kettenabbildungen verträglich, dh. aus $\varphi \simeq \psi : C \rightarrow C'$ und $\varphi' \simeq \psi' : C' \rightarrow C''$ folgt $\varphi' \circ \varphi \simeq \psi' \circ \psi : C \rightarrow C''$.*

BEWEIS. Seien also $h : C_* \rightarrow C'_{*+1}$ eine Kettenhomotopie von φ nach ψ , und $h' : C'_* \rightarrow C''_{*+1}$ eine Kettenhomotopie von φ' nach ψ' . Es gilt daher $\psi - \varphi = \partial' \circ h + h \circ \partial$ sowie $\psi' - \varphi' = \partial'' \circ h' + h' \circ \partial'$. Aus der ersten Gleichung und $\psi' \circ \partial' = \partial'' \circ \psi'$ folgt

$$\psi' \circ \psi - \psi' \circ \varphi = \psi' \circ \partial' \circ h + \psi' \circ h \circ \partial = \partial'' \circ \psi' \circ h + \psi' \circ h \circ \partial.$$

Ebenso erhalten wir aus der zweiten Gleichung und $\partial' \circ \varphi = \varphi \circ \partial$ die Relation

$$\psi' \circ \varphi - \varphi' \circ \varphi = \partial'' \circ h' \circ \varphi + h' \circ \partial' \circ \varphi = \partial'' \circ h' \circ \varphi + h' \circ \varphi \circ \partial.$$

Addition der letzten beiden Gleichungen liefert nun

$$\psi' \circ \psi - \varphi' \circ \varphi = \partial'' \circ (\psi' \circ h + h' \circ \varphi) + (\psi' \circ h + h' \circ \varphi) \circ \partial,$$

also ist $\psi' \circ h + h' \circ \varphi : C_* \rightarrow C''_{*+1}$ eine Kettenhomotopie von $\varphi' \circ \varphi$ nach $\psi' \circ \psi$. \square

IV.2.3. LEMMA. *Kettenhomotop zu sein ist mit der Gruppenstruktur auf der Menge der Kettenabbildungen verträglich, dh. aus $\varphi_1 \simeq \psi_1 : C \rightarrow C'$ und $\varphi_2 \simeq \psi_2 : C \rightarrow C'$ folgt $\varphi_1 + \varphi_2 \simeq \psi_1 + \psi_2 : C \rightarrow C'$.*

BEWEIS. Seien also $h_1 : C_* \rightarrow C'_{*+1}$ eine Kettenhomotopie von φ_1 nach ψ_1 , und $h_2 : C_* \rightarrow C'_{*+1}$ eine Kettenhomotopie von φ_2 nach ψ_2 . Es gilt daher $\psi_1 - \varphi_1 = \partial' \circ h_1 + h_1 \circ \partial$ sowie $\psi_2 - \varphi_2 = \partial' \circ h_2 + h_2 \circ \partial$. Addition dieser Gleichungen liefert

$$(\psi_1 + \psi_2) - (\varphi_1 + \varphi_2) = \partial' \circ (h_1 + h_2) + (h_1 + h_2) \circ \partial,$$

also ist $h_1 + h_2 : C_* \rightarrow C'_{*+1}$ eine Kettenhomotopie von $\varphi_1 + \varphi_2$ nach $\psi_1 + \psi_2$. \square

IV.2.4. PROPOSITION (Homotopieinvarianz). *Sind $\varphi, \psi : C \rightarrow C'$ kettenhomotope Komplexabbildungen, dann gilt $\varphi_* = \psi_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert eine Kettenhomotopie $h : C_* \rightarrow C'_{*+1}$ mit $\psi - \varphi = \partial' \circ h + h \circ \partial$. Sei nun $c \in Z_q(C)$ ein q -Zykel und betrachte die davon repräsentierte Homologieklass $[c] \in H_q(C)$. Wegen $\partial c = 0$ erhalten wir $\psi(c) - \varphi(c) = \partial'(h(c)) + h(\partial(c)) = \partial'(h(c)) \in B_q(C')$, und damit $\psi_*([c]) - \varphi_*([c]) = [\psi(c)] - [\varphi(c)] = [\psi(c) - \varphi(c)] = 0 \in H_q(C')$. Es gilt daher $\psi_*([c]) = \varphi_*([c])$, für alle $[c] \in H_q(C)$. \square

Eine Kettenabbildung $\varphi : C \rightarrow C'$ wird *(Ketten)homotopieäquivalenz* genannt, falls eine Kettenabbildung $\psi : C' \rightarrow C$ existiert, sodass $\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_C$ und $\varphi \circ \psi \simeq \text{id}_{C'}$ gilt. Zwei Kettenkomplexe heißen *(ketten)homotopieäquivalent* falls eine Kettenhomotopieäquivalenz $C \rightarrow C'$ existiert. In diesem Fall schreiben wir $C \simeq C'$.

IV.2.5. PROPOSITION. *Ist $\varphi : C \rightarrow C'$ eine Kettenhomotopieäquivalenz, dann ist $\varphi_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$ ein Isomorphismus graduierter abelscher Gruppen. Homotopieäquivalente Kettenkomplexe haben daher isomorphe Homologiegruppen.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung existiert eine Kettenabbildung $\psi : C' \rightarrow C$ mit $\psi \circ \varphi \simeq \text{id}_C$ und $\varphi \circ \psi \simeq \text{id}_{C'}$. Aus Proposition IV.1.2 und Proposition IV.2.4 erhalten wir $\psi_* \circ \varphi_* = (\psi \circ \varphi)_* = (\text{id}_C)_* = \text{id}_{H_*(C)}$ sowie $\varphi_* \circ \psi_* = (\varphi \circ \psi)_* = (\text{id}_{C'})_* = \text{id}_{H_*(C')}$. Daher sind $\varphi_* : H_*(C) \rightarrow H_*(C')$ und $\psi_* : H_*(C') \rightarrow H_*(C)$ zueinander inverse Homomorphismen. \square

IV.2.6. BEMERKUNG. Sind C und C' zwei Kettenkomplexe, dann bezeichnen wir mit $[C, C']$ die Menge der Homotopieklassen von Kettenabbildungen. Ist $\varphi : C \rightarrow C'$ eine Kettenabbildung, dann schreiben wir $[\varphi] \in [C, C']$ für die von φ repräsentierte Homotopieklasse. Nach Lemma IV.2.2 erhalten wir eine wohldefinierte Verknüpfung $[C, C'] \times [C', C''] \rightarrow [C, C'']$, $([\varphi], [\varphi']) \mapsto [\varphi' \circ \varphi]$. Wir erhalten daher eine *Kategorie der Kettenkomplexe und Homotopieklassen von Kettenabbildungen*. Die Isomorphismen dieser Kategorie sind genau die Kettenhomotopieäquivalenzen. Nach Proposition IV.2.4 faktorisiert der Homologiefunktor durch Kategorie der Kettenkomplexe und Homotopieklassen von Kettenabbildungen.

IV.2.7. BEISPIEL (Abbildungskegel). Ist $\varphi : (C, \partial) \rightarrow (C', \partial')$ eine Kettenabbildung, dann definieren wir einen Kettenkomplex $(C_\varphi, \partial^{C_\varphi})$, den sogenannten *Abbildungskegel von φ* , wie folgt:

$$(C_\varphi)_q := C'_q \oplus C_{q-1}, \quad \partial_q^{C_\varphi}(c', c) := (\partial'_q(c') + \varphi_{q-1}(c), -\partial_{q-1}(c)).$$

Da φ eine Kettenabbildung ist gilt tatsächlich $\partial_{q-1}^{C_\varphi} \circ \partial_q^{C_\varphi} = 0$, denn

$$\begin{aligned} \partial_{q-1}^{C_\varphi}(\partial_q^{C_\varphi}(c', c)) &= \partial_{q-1}^\varphi(\partial'_q(c') + \varphi_{q-1}(c), -\partial_{q-1}(c)) \\ &= (\partial'_{q-1}(\partial'_q(c') + \varphi_{q-1}(c)) + \varphi_{q-2}(-\partial_{q-1}(c)), \partial_{q-2}(\partial_{q-1}(c))) \\ &= (\partial'_{q-1}(\varphi_{q-1}(c)) - \varphi_{q-2}(\partial_{q-1}(c)), 0) = 0. \end{aligned}$$

Wir haben zwei Kettenabbildungen

$$C' \xrightarrow{\iota} C_\varphi \xrightarrow{\pi} \Sigma C, \quad \iota(c') := (c', 0), \quad \pi(c', c) := c. \quad (\text{IV.3})$$

Dabei bezeichnet $(\Sigma C, \partial^{\Sigma C})$ den Kettenkomplex $(\Sigma C)_q := C_{q-1}$, $\partial_q^{\Sigma C} := -\partial_{q-1}$, die sogenannte *Suspension von C* .

Ein Kettenkomplex C heißt *kontrahierbar*, falls $C \simeq 0$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\text{id}_C \simeq 0$. Kontrahierbare Kettenkomplexe sind azyklisch, siehe Proposition IV.2.5.

IV.2.8. PROPOSITION. *Eine Kettenabbildung $\varphi : C \rightarrow C'$ ist genau dann eine Kettenhomotopieäquivalenz, wenn der Abbildungskegel C_φ kontrahierbar ist.*

BEWEIS. Es sei $h : (C_\varphi)_* \rightarrow (C_\varphi)_{*+1}$ ein Homomorphismus vom Grad 1. Bezüglich der Zerlegung $C_\varphi^* = C'_* \oplus C_{*-1}$ können wir h und ∂^{C_φ} als Matrizen schreiben,

$$h = \begin{pmatrix} g & X \\ \psi & k \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \partial^{C_\varphi} = \begin{pmatrix} \partial' & \varphi \\ 0 & -\partial \end{pmatrix}. \quad (\text{IV.4})$$

Dabei sind $\psi : C'_* \rightarrow C_*$, $g : C'_* \rightarrow C'_{*+1}$, $k : C_* \rightarrow C_{*+1}$ und $X : C_* \rightarrow C'_{*+2}$ Homomorphismen vom Grad 0, 1, 1 bzw. 2. Es ist nun

$$\partial^{C_\varphi} \circ h + h \circ \partial^{C_\varphi} = \begin{pmatrix} \partial' \circ g + g \circ \partial + \varphi \circ \psi & \partial' \circ X - X \circ \partial + g \circ \varphi + \varphi \circ k \\ \psi \circ \partial' - \partial \circ \psi & \psi \circ \varphi - k \circ \partial - \partial \circ k \end{pmatrix}$$

wir erhalten daher:

$$0 \stackrel{h}{\simeq} \text{id}_{C_\varphi} \iff \begin{cases} \psi : C' \rightarrow C \text{ ist eine Kettenabbildung, und} \\ \text{id}_C \stackrel{k}{\simeq} \psi \circ \varphi, \text{ und} \\ \varphi \circ \psi \stackrel{g}{\simeq} \text{id}_{C'}, \text{ und} \\ \partial' \circ X - X \circ \partial + g \circ \varphi + \varphi \circ k = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

Ist C_φ kontrahierbar, dann existiert h mit $0 \stackrel{h}{\simeq} \text{id}_{C_\varphi}$ und aus (IV.5) folgt, dass φ eine Kettenhomotopieäquivalenz mit Inverser ψ ist. Sei nun umgekehrt φ eine Kettenhomotopieäquivalenz. Dann existiert eine Kettenabbildung $\tilde{\psi} : C' \rightarrow C$ sowie Homomorphismen $\tilde{g} : C'_* \rightarrow C'_{*+1}$ und $\tilde{k} : C_* \rightarrow C_{*+1}$, sodass $\text{id}_C \stackrel{\tilde{k}}{\simeq} \tilde{\psi} \circ \varphi$ und $\varphi \circ \tilde{\psi} \stackrel{\tilde{g}}{\simeq} \text{id}_{C'}$. Durch geeignete Modifikation (siehe Vorlesung) ist es möglich ψ , g , k und X zu konstruieren, sodass alle Gleichungen auf der rechten Seite von (IV.5) erfüllt sind. Definieren wir nun $h : (C_\varphi)_* \rightarrow (C_\varphi)_{*+1}$ durch (IV.4) so erhalten wir $0 \stackrel{h}{\simeq} \text{id}_{C_\varphi}$ aus (IV.5), also ist C_φ kontrahierbar. \square

IV.3. Die lange exakte Homologiesequenz. Unter einer *kurzen exakten Sequenz von Kettenkomplexen* verstehen wir eine Sequenz von Kettenkomplexen und Komplexabbildungen

$$0 \rightarrow C \xrightarrow{\iota} C' \xrightarrow{\pi} C'' \rightarrow 0$$

sodass die Sequenz $0 \rightarrow C_q \xrightarrow{\iota_q} C'_q \xrightarrow{\pi_q} C''_q \rightarrow 0$ exakt ist, für jedes $q \in \mathbb{Z}$. Dies ist genau dann der Fall wenn $\iota_q : C_q \rightarrow C'_q$ injektiv ist, $\pi_q : C'_q \rightarrow C''_q$ surjektiv ist und $\text{img}(\iota_q) = \text{ker}(\pi_q)$ gilt. Ist etwa C ein Teilkomplex von C' , dann haben wir stets eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen $0 \rightarrow C \rightarrow C' \rightarrow C'/C \rightarrow 0$. Ein anderes Beispiel liefert die Sequenz $0 \rightarrow C \xrightarrow{\iota} C_\varphi \xrightarrow{\pi} \Sigma C \rightarrow 0$ des Abbildungskegels einer Kettenabbildung $\varphi : C \rightarrow C'$, siehe (IV.3).

IV.3.1. SATZ. *Eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow C \xrightarrow{\iota} C' \xrightarrow{\pi} C'' \rightarrow 0$ von Kettenkomplexen induziert eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen:*

$$\dots \rightarrow H_{q+1}(C'') \xrightarrow{\delta_{q+1}} H_q(C) \xrightarrow{\iota_*} H_q(C') \xrightarrow{\pi_*} H_q(C'') \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(C) \rightarrow \dots$$

Diese lange exakte Sequenz ist natürlich in folgendem Sinn. Ist

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\iota} & C' & \xrightarrow{\pi} & C'' \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi'' \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{C} & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & \tilde{C}' & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{C}'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen und Komplexabbildungen mit exakten Zeilen, dann kommutiert auch folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(C'') & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(C) & \xrightarrow{\iota_*} & H_q(C') & \xrightarrow{\pi_*} & H_q(C'') & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(C) & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow \varphi''_* & & \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi'_* & & \downarrow \varphi''_* & & \downarrow \varphi_* & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(\tilde{C}'') & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(\tilde{C}) & \xrightarrow{\tilde{\iota}_*} & H_q(\tilde{C}') & \xrightarrow{\tilde{\pi}_*} & H_q(\tilde{C}'') & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(\tilde{C}) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

BEWEIS. Wir betrachten folgendes kommutatives Diagramm. Nach Voraussetzung sind alle Zeilen exakt.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & C'_{q+1} & \xrightarrow{\pi_{q+1}} & C''_{q+1} & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow \partial'_{q+1} & & \downarrow \partial''_{q+1} & & \\
0 & \longrightarrow & C_q & \xrightarrow{\iota_q} & C'_q & \xrightarrow{\pi_q} & C''_q \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial'_q & & \downarrow \partial''_q \\
0 & \longrightarrow & C_{q-1} & \xrightarrow{\iota_{q-1}} & C'_{q-1} & \xrightarrow{\pi_{q-1}} & C''_{q-1} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \partial_{q-1} & & \downarrow \partial'_{q-1} & & \\
0 & \longrightarrow & C_{q-2} & \xrightarrow{\iota_{q-2}} & C'_{q-2} & &
\end{array} \tag{IV.6}$$

Wir widmen uns zunächst der Konstruktion von $\delta_q : H_q(C'') \rightarrow H_{q-1}(C)$. Sei also $\alpha \in H_q(C'')$. Wähle einen Zykel $c'' \in Z''_q$ der α repräsentiert, dh. $\alpha = [c'']$. Da π_q surjektiv ist, existiert $c' \in C'_q$ mit $\pi_q c' = c''$. Es folgt $\pi_{q-1} \partial'_q c' = \partial''_q \pi_q c' = \partial''_q c'' = 0$, also existiert $c \in C_{q-1}$ mit $\iota_{q-1} c = \partial'_q c'$, denn die dritte Zeile in (IV.6) ist bei C'_{q-1} exakt. Wir erhalten $\iota_{q-2} \partial_{q-1} c = \partial'_{q-1} \iota_{q-1} c = \partial'_{q-1} \partial'_q c' = 0$, denn $\partial'_{q-1} \partial'_q = 0$. Aus der Injektivität von ι_{q-2} folgt nun $\partial_{q-1} c = 0$, dh. $c \in Z_{q-1}(C)$. Also repräsentiert c eine Homologieklass $[c] \in H_{q-1}(C)$. Wir behaupten nun, dass diese Homologieklass $[c] \in H_{q-1}(C)$ nur von $\alpha \in H_q(C'')$, nicht aber von der Wahl von c'' , c' oder c abhängt. Seien dazu $\tilde{c}'' \in Z''_q$ mit $[\tilde{c}''] = \alpha$, $\tilde{c}' \in C'_q$ mit $\pi_q \tilde{c}' = \tilde{c}''$, und $\tilde{c} \in Z_q$ mit $\iota_{q-1} \tilde{c} = \partial'_q \tilde{c}'$. Zu zeigen ist $[c] = [\tilde{c}] \in H_{q-1}(C)$. Zunächst existiert $z'' \in C''_{q+1}$ mit $\tilde{c}'' = c'' + \partial''_{q+1} z''$, denn $[\tilde{c}''] = \alpha = [c'']$. Auf Grund der Surjektivität von π_{q+1} existiert $z' \in C'_{q+1}$ mit $\pi_{q+1} z' = z''$. Wir erhalten

$$\pi_q(\tilde{c}' - c' - \partial'_{q+1} z') = \tilde{c}'' - c'' - \partial''_{q+1} \pi_{q+1} z' = \tilde{c}'' - c'' - \partial''_{q+1} z'' = 0,$$

also existiert $z \in C_q$ mit $\iota_q z = \tilde{c}' - c' - \partial'_{q+1} z'$, denn die zweite Zeile von (IV.6) ist bei C'_q exakt. Es folgt $\iota_{q-1}(\tilde{c} - c - \partial_q z) = \partial'_q \tilde{c}' - \partial'_q c' - \partial'_q \iota_q z = \partial'_q \partial'_{q+1} z' = 0$, denn $\partial'_q \partial'_{q+1} = 0$. Aus der Injektivität von ι_{q-1} schließen wir daher $\tilde{c} - c - \partial_q z = 0$. Dies bedeutet aber $[c] = [\tilde{c}] \in H_{q-1}(C)$. wir können daher $\delta_q : H_q(C'') \rightarrow H_{q-1}(C)$ durch $\delta_q(\alpha) := [c]$ definieren, wobei c wie oben gewählt ist.

Wir werden als nächstes verifizieren, dass $\delta_q : H_q(C'') \rightarrow H_{q-1}(C)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. Seien also $\alpha_1, \alpha_2 \in H_q(C'')$, $c''_1, c''_2 \in Z''_q$ mit $[c''_1] = \alpha_1$

und $[c_2''] = \alpha_2$, $c_1', c_2' \in C_q'$ mit $\pi_q c_1' = c_1''$ und $\pi_q c_2' = c_2''$ sowie $c_1, c_2 \in Z_{q-1}$ mit $\iota_{q-1} c_1 = \partial_q c_1'$ und $\iota_{q-1} c_2 = \partial_q c_2'$. Nach Definition von δ_q gilt dann $\delta_q(\alpha_1) = [c_1]$ und $\delta_q(\alpha_2) = [c_2]$. Betrachte nun $c'' := c_1'' + c_2'' \in Z_q''$, $c' := c_1' + c_2' \in C_q'$ und $c := c_1 + c_2 \in Z_{q-1}$. Dann gilt $[c''] = \alpha_1 + \alpha_2$, $\pi_q c' = c''$ sowie $\iota_{q-1} c = \partial_q c'$. Wir erhalten daher $\delta_q(\alpha_1 + \alpha_2) = [c] = [c_1 + c_2] = [c_1] + [c_2] = \delta_q(\alpha_1) + \delta_q(\alpha_2)$. Also ist $\delta_q : H_q(C'') \rightarrow H_{q-1}(C)$ tatsächlich ein Homomorphismus.

Nun zur Natürlichkeitsaussage. Zunächst erhalten wir aus Proposition IV.1.2 sofort $\varphi_*' \circ \iota_* = (\varphi' \circ \iota)_* = (\tilde{\iota} \circ \varphi)_* = \tilde{\iota}_* \circ \varphi_*$ sowie $\varphi_*'' \circ \pi_* = (\varphi'' \circ \pi)_* = (\tilde{\pi} \circ \varphi')_* = \tilde{\pi}_* \circ \varphi_*'$. Es bleibt daher nur $\varphi_* \circ \delta_q = \delta_q \circ \varphi_*'' : H_q(C'') \rightarrow H_{q-1}(\tilde{C})$ zu zeigen. Sei also $\alpha \in H_q(C'')$, $c'' \in Z_q''$ mit $\alpha = [c'']$, $c' \in C_q'$ mit $\pi_q c' = c''$, und $c \in Z_{q-1}$ mit $\iota_{q-1} c = \partial_q c'$. Nach Definition von δ_q gilt dann $\delta_q(\alpha) = [c] \in H_{q-1}(C)$, also $\varphi_*'(\delta_q(\alpha)) = [\varphi_{q-1} c] \in H_{q-1}(\tilde{C})$. Betrachte nun $\tilde{c}'' := \varphi_q'' c'' \in \tilde{Z}_q''$, $\tilde{c}' := \varphi_q' c' \in \tilde{C}_q'$ und $\tilde{c} := \varphi_{q-1} c \in \tilde{Z}_{q-1}$. Dann gilt $[\tilde{c}''] = \varphi_q''(\alpha) \in H_q(\tilde{C}'')$. Weiters haben wir $\tilde{\pi}_q \tilde{c}'' = \tilde{\pi}_q \varphi_q' c' = \varphi_q'' \pi_q c' = \varphi_q'' c'' = \tilde{c}''$. Und schließlich $\tilde{\iota}_{q-1} \tilde{c} = \tilde{\iota}_{q-1} \varphi_{q-1} c = \varphi_{q-1} \iota_{q-1} c = \varphi_{q-1} \partial_q c' = \varphi_{q-1}' \partial_q c' = \partial_q' \varphi_q' c' = \partial_q' \tilde{c}'$. Nach Definition von δ_q gilt daher $\delta_q(\varphi_q''(\alpha)) = [\tilde{c}']$. Zusammen mit der obigen Relation $\varphi_*'(\delta_q(\alpha)) = [\varphi_{q-1} c] = [\tilde{c}']$ erhalten wir $\varphi_*'(\delta_q(\alpha)) = \delta_q(\varphi_q''(\alpha))$, für alle $\alpha \in H_q(C'')$.

Als nächstes werden wir zeigen, dass die lange Sequenz bei $H_q(C')$ exakt ist. Aus $\pi \circ \iota = 0$ folgt $\pi_* \circ \iota_* = (\pi \circ \iota)_* = 0$, also $\text{img}(\iota_*) \subseteq \ker(\pi_*)$. Es genügt daher $\ker(\pi_*) \subseteq \text{img}(\iota_*)$ zu verifizieren. Sei also $\alpha \in \ker(\pi_* : H_q(C') \rightarrow H_q(C''))$, und wähle einen Repräsentanten $c' \in Z_q'$ mit $[c'] = \alpha$. Nach Voraussetzung ist $[\pi_q c'] = \pi_*([c']) = \pi_*(\alpha) = 0 \in H_q(C'')$, also existiert $z'' \in C_{q+1}''$ mit $\partial_{q+1}'' z'' = \pi_q c'$. Wegen der Surjektivität von π_{q+1} finden wir $z' \in C_{q+1}'$ mit $\pi_{q+1} z' = z''$. Betrachte nun $\tilde{c}' := c' - \partial_{q+1}' z' \in Z_q'$. Offensichtlich gilt dann auch $\alpha = [\tilde{c}'] \in H_q(C')$, dieser Repräsentant von α erfüllt aber sogar $\pi_q \tilde{c}' = \pi_q c' - \pi_q \partial_{q+1}' z' = \pi_q c' - \partial_{q+1}'' \pi_{q+1} z' = \pi_q c' - \partial_{q+1}'' z'' = 0$. Da die zweite Zeile in (IV.6) bei C_q' exakt ist, finden wir $c \in C_q$ mit $\iota_q c = \tilde{c}'$. Es folgt $\iota_{q-1} \partial_q c = \partial_q' \iota_q c = \partial_q' \tilde{c}' = 0$. Aus der Injektivität von ι_{q-1} schließen wir $\partial_q c = 0$, dh. $c \in Z_q$. Also repräsentiert c eine Homologieklass $[c] \in H_q(C)$ für die $\iota_*([c]) = [\iota_q c] = [\tilde{c}'] = \alpha$ gilt. Damit liegt α im Bild des Homomorphismus $\iota_* : H_q(C) \rightarrow H_q(C')$, womit nun auch $\ker(\pi_*) \subseteq \text{img}(\iota_*)$ gezeigt wäre.

Kommen wir nun zur Exaktheit bei $H_q(C'')$. Wir zeigen zunächst $\delta_q \circ \pi_* = 0$, dh. $\text{img}(\pi_*) \subseteq \ker(\delta_q)$. Sei also $\alpha' \in H_q(C')$ und wähle einen Repräsentanten $c' \in Z_q'$ mit $\alpha' = [c']$. Dann gilt $\pi_q(\alpha') = [\pi_q c'] \in H_q(C'')$. Nun ist aber $\partial_q' c' = 0 = \iota_{q-1} 0$, also $\delta_q(\pi_q(\alpha')) = \delta_q([\pi_q c']) = [0] = 0$. Damit ist $\text{img}(\pi_*) \subseteq \ker(\delta_q)$ gezeigt. Nun zur anderen Inklusion $\ker(\delta_q) \subseteq \text{img}(\pi_*)$. Sei also $\alpha \in \ker(\delta_q)$. Wähle einen Repräsentanten $c'' \in Z_q''$ mit $\alpha = [c''] \in H_q(C'')$. Weiters seien $c' \in C_q'$ mit $\pi_q c' = c''$ und $c \in Z_{q-1}$ mit $\iota_{q-1} c = \partial_q c'$. Nach Definition von δ_q gilt $\delta_q(\alpha) = [c] \in H_{q-1}(C)$. Nach Voraussetzung ist $\delta_q(\alpha) = 0$, also existiert $z \in C_q$ mit $\partial_q z = c$. Betrachte nun $\tilde{c}' := c' - \iota_q z \in C_q'$. Dann gilt $\partial_q' \tilde{c}' = \partial_q' c' - \partial_q' \iota_q z = \partial_q' c' - \iota_{q-1} \partial_q z = \partial_q' c' - \iota_{q-1} c = 0$, also $\tilde{c}' \in Z_q'$. Wir erhalten eine Homologieklass

$[\bar{c}'] \in H_q(C')$ für die nun $\pi_*([\bar{c}']) = [\pi_q \bar{c}'] = [\pi_q c' - \pi_q \iota_q z] = [\pi_q c'] = [c''] = \alpha$ gilt. Also liegt α im Bild des Homomorphismus $\pi_* : H_q(C') \rightarrow H_q(C'')$, womit nun auch $\ker(\delta_q) \subseteq \text{img}(\pi_*)$ gezeigt wäre.

Es ist noch die Exaktheit bei $H_{q-1}(C)$ zu zeigen. Wieder folgt die Inklusion $\text{img}(\delta_q) \subseteq \ker(\iota_*)$ sofort aus der Definition von δ_q , denn offensichtlich gilt $\iota_* \circ \delta_q = 0$. Widmen wir uns nun der anderen Inklusion $\ker(\iota_*) \subseteq \text{img}(\delta_q)$. Sei also $\alpha \in \ker(\iota_* : H_{q-1}(C) \rightarrow H_{q-1}(C'))$. Wähle einen Repräsentanten $c \in Z_{q-1}$ mit $\alpha = [c]$. Nach Voraussetzung ist $[\iota_{q-1}c] = \iota_*(\alpha) = 0 \in H_{q-1}(C')$, also existiert $c' \in C'_q$ mit $\partial'_q c' = \iota_{q-1}c$. Betrachte nun $c'' := \pi_q c' \in C''_q$. Dann gilt $\partial''_q c'' = \partial''_q \pi_q c' = \pi_{q-1} \partial'_q c' = \pi_{q-1} \iota_{q-1} c = 0$, also $c'' \in Z''_q$. Wir erhalten daher eine Homologieklass $[c''] \in H_q(C'')$ für die $\delta_q([c'']) = [c] = \alpha$ gilt. Also liegt α im Bild des Homomorphismus $\delta_q : H_q(C'') \rightarrow H_{q-1}(C)$ womit nun auch $\ker(\iota_*) \subseteq \text{img}(\delta_q)$ gezeigt wäre. \square

IV.3.2. BEMERKUNG. Der Homomorphismus $\delta_q : H_q(C'') \rightarrow H_{q-1}(C)$ der in Satz IV.3.1 auftritt wird *Einhängungshomomorphismus* genannt. Im Beweis von Satz IV.3.1 haben wir gesehen, dass dieser durch die Formel

$$\delta_q(\alpha) = [\iota_{q-1}^{-1}(\partial'_q(\pi_q^{-1}(c'')))]$$

wohldefiniert ist, $\alpha \in H_q(C'')$, $c'' \in Z''_q$ mit $\alpha = [c'']$, vgl. (IV.6). Etwas genauer, die Teilmenge $\iota_{q-1}^{-1}(\partial'_q(\pi_q^{-1}(c'')))$ $\subseteq C_{q-1}$ ist nicht leer, sie besteht nur aus Zyklen, dh. $\iota_{q-1}^{-1}(\partial'_q(\pi_q^{-1}(c'')))$ $\subseteq Z_{q-1}$, alle diese Zyklen repräsentieren die selbe Homologieklass, und diese Homologieklass hängt nur von α , nicht aber vom Repräsentanten c'' ab.

IV.3.3. KOROLLAR. *Es sei $0 \rightarrow C \xrightarrow{\iota} C' \xrightarrow{\pi} C'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Sind zwei der drei Kettenkomplexe azyklisch, dann gilt dies auch für den dritten.*

BEWEIS. Wir nehmen an die Kettenkomplexe C und C'' sind azyklisch, die anderen Fälle lassen sich völlig analog zeigen. Nach Satz IV.3.1 ist die Sequenz $H_q(C) \xrightarrow{\iota_*} H_q(C') \xrightarrow{\pi_*} H_q(C'')$ exakt. Nach Voraussetzung gilt $H_q(C) = 0 = H_q(C'')$. Aus der Exaktheit folgt daher $H_q(C') = 0$. Da dies für jedes $q \in \mathbb{Z}$ gilt, ist C' azyklisch. \square

IV.3.4. KOROLLAR. *Es sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\iota} & C' & \xrightarrow{\pi} & C'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & \tilde{C} & \xrightarrow{\tilde{\iota}} & \tilde{C}' & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \tilde{C}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

eine kommutatives Diagramm von Kettenabbildungen mit exakten Zeilen. Sind zwei der drei Homomorphismen $\varphi_ : H_*(C) \rightarrow H_*(\tilde{C})$, $\varphi'_* : H_*(C') \rightarrow H_*(\tilde{C}')$ und $\varphi''_* : H_*(C'') \rightarrow H_*(\tilde{C}'')$ Isomorphismen, dann gilt dies auch für den dritten.*

BEWEIS. Wir nehmen an $\varphi_* : H_*(C) \xrightarrow{\cong} H_*(\tilde{C})$ und $\varphi''_* : H_*(C'') \xrightarrow{\cong} H_*(\tilde{C}'')$ sind Isomorphismen, die anderen Fälle lassen sich völlig analog behandeln. Nach Satz IV.3.1 haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{q+1}(C'') & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(C) & \xrightarrow{\iota_*} & H_q(C') & \xrightarrow{\pi_*} & H_q(C'') & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(C) \\ \cong \downarrow \varphi''_* & & \cong \downarrow \varphi_* & & \downarrow \varphi'_* & & \cong \downarrow \varphi''_* & & \cong \downarrow \varphi_* \\ H_{q+1}(\tilde{C}'') & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(\tilde{C}) & \xrightarrow{\tilde{\iota}_*} & H_q(\tilde{C}') & \xrightarrow{\tilde{\pi}_*} & H_q(\tilde{C}'') & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(\tilde{C}) \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Nach Voraussetzung sind die vier äußeren vertikalen Pfeile Isomorphismen. Nach Lemma IV.3.5 unten muss auch $\varphi'_* : H_q(C') \rightarrow H_q(\tilde{C}')$ ein Isomorphismus sein, für jedes $q \in \mathbb{Z}$. \square

IV.3.5. LEMMA (Fünfer-Lemma). *Es sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} G_1 & \xrightarrow{\lambda_1} & G_2 & \xrightarrow{\lambda_2} & G_3 & \xrightarrow{\lambda_3} & G_4 & \xrightarrow{\lambda_4} & G_5 \\ \cong \downarrow \varphi_1 & & \cong \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \cong \downarrow \varphi_4 & & \cong \downarrow \varphi_5 \\ H_1 & \xrightarrow{\mu_1} & H_2 & \xrightarrow{\mu_2} & H_3 & \xrightarrow{\mu_3} & H_4 & \xrightarrow{\mu_4} & H_5 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Gruppenhomomorphismen²⁷ mit exakten Zeilen. Weiters seien $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4$ und φ_5 Isomorphismen. Dann ist auch φ_3 ein Isomorphismus.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst die Injektivität von φ_3 . Sei also $g_3 \in G_3$ mit $\varphi_3(g_3) = 1$. Dann gilt $\varphi_4(\lambda_3(g_3)) = \mu_3(\varphi_3(g_3)) = \mu_3(1) = 1$ und wegen der Injektivität von φ_4 somit $\lambda_3(g_3) = 1$. Da die obere Zeile bei G_3 exakt ist, existiert $g_2 \in G_2$ mit $\lambda_2(g_2) = g_3$. Es folgt $\mu_2(\varphi_2(g_2)) = \varphi_3(\lambda_2(g_2)) = \varphi_3(g_3) = 1$. Da die zweite Zeile bei H_2 exakt ist, existiert $h_1 \in H_1$ mit $\mu_1(h_1) = \varphi_2(g_2)$. Auf Grund der Surjektivität von φ_1 finden wir $g_1 \in G_1$ mit $\varphi_1(g_1) = h_1$. Es gilt dann $\varphi_2(\lambda_1(g_1)) = \mu_1(\varphi_1(g_1)) = \mu_1(h_1) = \varphi_2(g_2)$, also $\lambda_1(g_1) = g_2$, denn φ_2 ist injektiv. Schließlich erhalten wir $g_3 = \lambda_2(g_2) = \lambda_2(\lambda_1(g_1)) = 0$, denn wegen der Exaktheit der oberen Zeile bei G_2 gilt $\lambda_2 \circ \lambda_1 = 0$. Also ist φ_3 injektiv. Nun zur Surjektivität von φ_3 . Sei dazu $h_3 \in H_3$. Da φ_4 surjektiv ist existiert $g_4 \in G_4$ mit $\varphi_4(g_4) = \mu_3(h_3)$. Es folgt $\varphi_5(\lambda_4(g_4)) = \mu_4(\varphi_4(g_4)) = \mu_4(\mu_3(h_3)) = 1$, denn $\mu_4 \circ \mu_3 = 0$ wegen der Exaktheit der unteren Zeile bei H_4 . Da φ_5 injektiv ist, schließen wir $\lambda_4(g_4) = 1$. Auf Grund der Exaktheit der oberen Zeile bei G_4 existiert $g_3 \in G_3$ mit $\lambda_3(g_3) = g_4$. Es folgt $\mu_3(\varphi_3(g_3^{-1})h_3) = \mu_3(\varphi_3(g_3^{-1}))\mu_3(h_3) = \varphi_4(\lambda_3(g_3^{-1}))\mu_3(h_3) = \varphi_4(g_4^{-1})\mu_3(h_3) = \mu_3(h_3^{-1})\mu_3(h_3) = 1$. Da die untere Zeile bei H_3 exakt ist, existiert $h_2 \in H_2$ mit $\mu_2(h_2) = \varphi_3(g_3^{-1})h_3$. Weiters finden wir $g_2 \in G_2$ mit $\varphi_2(g_2) = h_2$, denn φ_2 ist surjektiv. Wir erhalten somit $\varphi_3(g_3\lambda_2(g_2)) = \varphi_3(g_3)\varphi_3(\lambda_2(g_2)) = \varphi_3(g_3)\mu_2(\varphi_2(g_2)) = \varphi_3(g_3)\mu_2(h_2) = \varphi_3(g_3)\varphi_3(g_3^{-1})h_3 = h_3$. Also ist φ_3 surjektiv. \square

²⁷Die Gruppen müssen nicht notwendigerweise abelsch sein.

IV.3.6. BEMERKUNG. Für abelsche Gruppen lässt sich die Aussage von Lemma IV.3.5 auch aus Satz IV.3.1 wie folgt herleiten. Setzen wir $\bar{G}_2 := G_2/\ker(\lambda_2)$, $\bar{H}_2 := H_2/\ker(\mu_2)$, $\bar{G}_4 := \text{img}(\lambda_3)$ und $\bar{H}_4 := \text{img}(\mu_3)$ und bezeichnen wir mit $\bar{\lambda}_2$, $\bar{\lambda}_3$, $\bar{\mu}_2$, $\bar{\mu}_3$, $\bar{\varphi}_2$ bzw. $\bar{\varphi}_4$ die von λ_2 , λ_3 , μ_2 , μ_3 , φ_2 bzw. φ_4 induzierten Homomorphismen, so erhalten wir nebenstehendes kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Es ist auch leicht einzusehen, dass $\bar{\varphi}_2$ und $\bar{\varphi}_4$ Isomorphismen sind. Damit ist die Aussage von Lemma IV.3.5

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \bar{G}_2 & \xrightarrow{\bar{\lambda}_2} & G_3 & \xrightarrow{\bar{\lambda}_3} & \bar{G}_4 & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong \downarrow \bar{\varphi}_2 & & \downarrow \varphi_3 & & \cong \downarrow \bar{\varphi}_4 & & \\ 0 & \longrightarrow & \bar{H}_2 & \xrightarrow{\bar{\mu}_2} & H_3 & \xrightarrow{\bar{\mu}_3} & \bar{H}_4 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

auf den Fall $G_1 = H_1 = G_5 = H_5 = 0$ reduziert. Wir können dieses Diagramm als eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen auffassen, jede der drei nicht-trivialen Spalten bildet einen Kettenkomplex der in Grad 0 und 1 konzentriert ist. Die erste und dritte Spalte sind azyklisch, denn $\bar{\varphi}_2$ und $\bar{\varphi}_4$ sind Isomorphismen. Nach Korollar IV.3.3 muss daher auch die zweite Spalte azyklisch sein. Dies bedeutet aber gerade, dass φ_3 ein Isomorphismus ist.

IV.3.7. PROPOSITION. *Es sei $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen. Dann sind äquivalent:*

- (i) *Es existiert ein Homomorphismus $\sigma : C \rightarrow B$ mit $p \circ \sigma = \text{id}_C$.*
- (ii) *Es existiert ein Homomorphismus $\rho : B \rightarrow A$ mit $\rho \circ i = \text{id}_A$.*
- (iii) *Es existiert ein Isomorphismus $\varphi : B \xrightarrow{\cong} A \oplus C$ mit $\pi_2 \circ \varphi = p$ und $\varphi \circ i = \iota_1$. Dabei bezeichnen $\iota_1 : A \rightarrow A \oplus C$ und $\pi_2 : A \oplus C \rightarrow C$ die beiden Homomorphismen $\iota(a) := (a, 0)$ und $\pi_2(a, c) := c$.*

BEWEIS. Wir beginnen mit der Implikation (i) \Rightarrow (ii). Sei also $\sigma : C \rightarrow B$ ein Homomorphismus mit $p \circ \sigma = \text{id}_C$. Dann gilt $p \circ (\text{id}_B - \sigma \circ p) = p - p \circ \sigma \circ p = p - p = 0$, wir erhalten daher einen Homomorphismus $\text{id}_B - \sigma \circ p : B \rightarrow \ker(p) = \text{img}(i)$. Es ist nun $\rho := i^{-1} \circ (\text{id}_B - \sigma \circ p)$ der gesuchte Homomorphismus, denn $\rho \circ i = i^{-1} \circ (\text{id}_B - \sigma \circ p) \circ i = i^{-1} \circ (i - \sigma \circ p \circ i) = i^{-1} \circ (i - \sigma \circ 0) = i^{-1} \circ i = \text{id}_A$. Zur Implikation (ii) \Rightarrow (iii): Betrachte den Homomorphismus $\varphi : B \rightarrow A \oplus C$, $\varphi := (\rho, p)$. Dann gilt $\pi_2 \circ \varphi = p$ und $\varphi \circ i = (\rho, p) \circ i = (\rho \circ i, p \circ i) = (\text{id}_A, 0) = \iota_1$, also kommutiert nebenstehendes Diagramm. Beachte, dass auch die zweite Zeile exakt ist. Aus Lemma IV.3.5 folgt nun, dass φ ein Isomorphismus sein muss. Kommen wir schließlich zur Implikation (iii) \Rightarrow (i). Es bezeichne $\iota_2 : C \rightarrow A \oplus C$ den durch $\iota_2(c) := (0, c)$ definierten Homomorphismus. Für $\sigma := \varphi^{-1} \circ \iota_2$ gilt dann $p \circ \sigma = p \circ \varphi^{-1} \circ \iota_2 = \pi_2 \circ \iota_2 = \text{id}_C$, also hat σ die gewünschte Eigenschaft. \square

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \cong \downarrow \text{id}_A & & \downarrow \varphi & & \cong \downarrow \text{id}_C & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota_1} & A \oplus C & \xrightarrow{\pi_2} & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Wir sagen eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ splittet falls sie die äquivalenten Eigenschaften in Proposition IV.3.7 besitzt. Jeder Homomorphismus $\sigma : C \rightarrow B$ mit $p \circ \sigma = \text{id}_C$ wird ein *Splitt* der Sequenz genannt. Nicht

jede kurze exakte Sequenz splittet, etwa ist dies bei $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ nicht der Fall.

IV.3.8. PROPOSITION. *Eine Kettenabbildung $\varphi : C \rightarrow C'$ induziert eine lange exakte Sequenz*

$$\cdots \rightarrow H_q(C') \xrightarrow{\iota_*} H_q(C_\varphi) \rightarrow H_{q-1}(C) \xrightarrow{\varphi_*} H_{q-1}(C') \xrightarrow{\iota_*} H_{q-1}(C_\varphi) \rightarrow \cdots$$

Dabei bezeichnet $\iota : C' \rightarrow C_\varphi$ die Kettenabbildung aus (IV.3).

BEWEIS. In (IV.3) haben wir eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen $0 \rightarrow C' \xrightarrow{\iota} C_\varphi \xrightarrow{\pi} \Sigma C \rightarrow 0$ konstruiert. Nach Satz IV.3.1 induziert diese eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_q(C') \xrightarrow{\iota_*} H_q(C_\varphi) \xrightarrow{\pi_*} H_q(\Sigma C) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(C') \xrightarrow{\iota_*} H_{q-1}(C_\varphi) \rightarrow \cdots$$

Bis auf die offensichtliche Identifikation $H_q(\Sigma C) = H_{q-1}(C)$ stimmt der Einhängungshomomorphismus δ mit φ_* überein. Ersetzen wir in obiger langen exakten Sequenz $H_q(\Sigma C)$ durch $H_{q-1}(C)$ so erhalten wir daher die gesuchte lange exakte Sequenz. \square

IV.3.9. PROPOSITION. *Eine Kettenabbildung $\varphi : C \rightarrow C'$ induziert genau dann einen Isomorphismus $\varphi_* : H(C) \xrightarrow{\cong} H(C')$, wenn der Abbildungskegel azyklisch ist, dh. $H(C_\varphi) = 0$, vgl. Beispiel IV.2.7.*

BEWEIS. Dies folgt aus der langen exakten Sequenz in Proposition IV.3.8. \square

IV.4. Rang und Euler-Charakteristik. Jeder abelschen Gruppe kann ein Rang zugeordnet werden, analog zur Dimension eines Vektorraums. Dies ermöglicht die Definition der Bettizahlen und der Euler-Charakteristik eines Kettenkomplexes. Wir fassen in diesem Abschnitt die nötigen Grundlagen aus der Algebra zusammen. Weitergehende Informationen finden sich etwa in [9, Chapter I], siehe aber auch [14, Kapitel IV§3.6] oder [6, Chapter I.5].

Es sei A eine abelsche Gruppe. Eine Teilmenge $S \subseteq A$ wird *linear unabhängig* genannt, falls sie folgende Eigenschaft besitzt: Ist $0 = \sum_{s \in S} n_s s$ wobei $n_s \in \mathbb{Z}$ und fast alle $n_s = 0$, dann folgt $n_s = 0$, für alle $s \in S$. Eine linear unabhängige Teilmenge S einer abelschen Gruppe A heißt *maximal*, falls es keine echt größere linear unabhängige Teilmenge gibt, dh. für jedes $a \in A$ ist $S \cup \{a\}$ linear abhängig, dh. es gilt eine nicht-triviale Relation $0 = ma + \sum_{s \in S} n_s s$ wobei $m, n_s \in \mathbb{Z}$, fast alle $n_s = 0$, aber m oder ein n_s verschwinden nicht. Nach dem Lemma von Zorn besitzt jede abelsche Gruppe A eine maximale linear unabhängige Teilmenge.²⁸

²⁸Bezeichnet \mathcal{U} die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von A , dann definiert die Mengeninklusion eine Halbordnung auf \mathcal{U} . Jede totalgeordnete Teilmenge von \mathcal{U} besitzt eine obere Schranke. Ist nämlich $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{U}$ eine totalgeordnete Teilmenge, dh. für alle $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ gilt $T_1 \subseteq T_2$ oder $T_2 \subseteq T_1$, dann ist auch $S := \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$ linear unabhängig, dh. $S \in \mathcal{U}$, und nach Konstruktion ist S obere Schranke von \mathcal{T} . Nach dem Lemma von Zorn [8, Letztes Kapitel] besitzt \mathcal{U} daher ein maximales Element, dh. A besitzt eine maximale linear unabhängige Teilmenge.

Unter dem *Rang* von A verstehen wir die Kardinalzahl $\text{rank}(A) := \sharp S$, wobei S eine maximale linear unabhängige Teilmenge von A ist. Nach Satz IV.4.1 unten ist dies wohldefiniert.

IV.4.1. SATZ. *Sind S und T zwei maximale linear unabhängige Teilmengen einer abelschen Gruppe A , dann gilt $\sharp S = \sharp T$, dh. S und T haben die gleiche Kardinalität.*

BEWEIS. Für jedes $s \in S$ gilt eine Relation

$$k_s s = \sum_{t \in T} n_{s,t} t \quad (\text{IV.7})$$

mit $0 \neq k_s \in \mathbb{Z}$, $n_{s,t} \in \mathbb{Z}$ und fast alle $n_{s,t} = 0$, denn T ist maximal linear unabhängig. Ebenso haben wir für jedes $t \in T$ eine Relation

$$l_t t = \sum_{s \in S} m_{t,s} s \quad (\text{IV.8})$$

mit $0 \neq l_t \in \mathbb{Z}$, $m_{t,s} \in \mathbb{Z}$ und fast alle $m_{t,s} = 0$, denn S ist maximal linear unabhängig. Für $t \in T$ bezeichne $\mathbf{k}_t := \prod_s k_s$ wobei wir das Produkt nur über jene endlich vielen $s \in S$ bilden für die $m_{t,s} \neq 0$. Für $t \in T$ und $s \in S$ setzen wir weiters $\mathbf{k}'_{t,s} := \mathbf{k}_t / k_s$ falls $m_{t,s} \neq 0$, und $\mathbf{k}'_{t,s} := 0$ andernfalls. Offensichtlich gilt $\mathbf{k}_t, \mathbf{k}'_{t,s} \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{k}_t \neq 0$, und im Fall $m_{s,t} \neq 0$ auch $\mathbf{k}'_{s,t} k_s = \mathbf{k}_t$. Aus (IV.8) und (IV.7) erhalten wir, für jedes $t \in T$,

$$\mathbf{k}_t l_t t = \sum_{s \in S} m_{t,s} \mathbf{k}'_{t,s} k_s s = \sum_{s \in S} m_{t,s} \mathbf{k}'_{t,s} \sum_{\tilde{t} \in T} n_{s,\tilde{t}} \tilde{t} = \sum_{\tilde{t} \in T} \left(\sum_{s \in S} m_{t,s} \mathbf{k}'_{t,s} n_{s,\tilde{t}} \right) \tilde{t}.$$

Da T linear unabhängig ist, schließen wir

$$\sum_{s \in S} m_{t,s} \mathbf{k}'_{t,s} n_{s,\tilde{t}} = \mathbf{k}_t l_t \delta_{t,\tilde{t}} \quad (\text{IV.9})$$

wobei $\delta_{t,t} = 1$ und $\delta_{t,\tilde{t}} = 0$ für $t \neq \tilde{t}$. Für Betrachte nun die rationalen Zahlen $p_{s,t} := n_{s,t} / k_s \in \mathbb{Q}$ und $q_{t,s} := m_{t,s} / l_t \in \mathbb{Q}$. Mittels Division von (IV.9) durch $\mathbf{k}_t l_t$ erhalten wir sofort $\sum_{s \in S} q_{t,s} p_{s,\tilde{t}} = \delta_{t,\tilde{t}}$, für alle $t, \tilde{t} \in T$. Analog lässt sich auch $\sum_{t \in T} p_{s,t} q_{t,\tilde{s}} = \delta_{s,\tilde{s}}$ verifizieren, $s, \tilde{s} \in S$.

Die rationalen Zahlen $p_{s,t}$ und $q_{t,s}$ definieren lineare Abbildungen zwischen den freien \mathbb{Q} -Vektorräumen über S bzw. T , $\varphi : \mathbb{Q}\langle S \rangle \rightarrow \mathbb{Q}\langle T \rangle$, $\varphi(s) := \sum_{t \in T} p_{s,t} t$, und $\psi : \mathbb{Q}\langle T \rangle \rightarrow \mathbb{Q}\langle S \rangle$, $\psi(t) := \sum_{s \in S} q_{t,s} s$. Die beiden Gleichungen oben besagen gerade $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathbb{Q}\langle T \rangle}$ und $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathbb{Q}\langle S \rangle}$, also sind die Vektorräume $\mathbb{Q}\langle S \rangle$ und $\mathbb{Q}\langle T \rangle$ isomorph. Mittels linearer Algebra erhalten wir nun $\sharp S = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle S \rangle) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\langle T \rangle) = \sharp T$. \square

IV.4.2. BEMERKUNG. Es gilt $\text{rank}(A) = \dim_{\mathbb{Q}}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$, wir werden dies hier aber nicht verwenden.

IV.4.3. BEISPIEL. Für jede Menge S gilt $\text{rank}(\mathbb{Z}\langle S \rangle) = \sharp S$, denn offensichtlich ist S eine maximale linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{Z}\langle S \rangle$. Insbesondere ist $\text{rank}(\mathbb{Z}^n) = n$. Für jede endliche abelsche Gruppe A gilt $\text{rank}(A) = 0$, insbesondere ist $\text{rank}(\mathbb{Z}_n) = 0$. Weiters gilt $\text{rank}(\mathbb{Q}) = 1$ und $\text{rank}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

IV.4.4. PROPOSITION. Ist $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen dann gilt $\text{rank}(B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(C)$.

BEWEIS. Es sei S eine maximale linear unabhängige Teilmenge von A , und T eine maximale linear unabhängige Teilmenge von C . Da $p : B \rightarrow C$ surjektiv ist, existiert eine Abbildung $\sigma : C \rightarrow B$ mit $p \circ \sigma = \text{id}_T$. Die Teilmengen $i(S)$ und $\sigma(T)$ von B sind disjunkt, denn $i(S) \subseteq \ker(p)$ und $\sigma(T) \cap \ker(p) = \emptyset$. Es genügt nun zu zeigen, dass $i(S) \cup \sigma(T)$ eine maximale linear unabhängige Teilmenge von B ist, denn dann folgt $\text{rank}(B) = \sharp(i(S) \cup \sigma(T)) = \sharp(i(S)) + \sharp(\sigma(T)) = \sharp S + \sharp T = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$, wobei wir im dritten Gleichheitszeichen die Injektivität von i und σ verwendet haben.

Wir beginnen mit der linearen Unabhängigkeit. Sei also

$$0 = \sum_{s \in S} n_s i(s) + \sum_{t \in T} m_t \sigma(t) \quad (\text{IV.10})$$

mit $n_s, m_t \in \mathbb{Z}$, fast alle $n_s = 0$ und fast alle $m_t = 0$. Anwenden von p liefert $0 = \sum_{t \in T} m_t p(\sigma(t)) = \sum_{t \in T} m_t t$, denn $p \circ i = 0$. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der T schließen wir $m_t = 0$, für alle $t \in T$. Aus (IV.10) erhalten wir nun auch $i(\sum_{s \in S} n_s s) = \sum_{s \in S} n_s i(s) = 0$, also $\sum_{s \in S} n_s s = 0$, denn i ist injektiv. Wegen der linearen Unabhängigkeit von S folgt nun auch $n_s = 0$, für alle $s \in S$. Also ist $i(S) \cup \sigma(T)$ eine linear unabhängige Teilmenge von B .

Um die Maximalität einzusehen sei $b \in B$. Da die T eine maximale linear unabhängige Teilmenge von C bildet, gilt eine nicht-triviale Relation

$$0 = k p(b) + \sum_{t \in T} m_t t$$

wobei $k, m_t \in \mathbb{Z}$, fast alle $m_t = 0$, aber k oder ein m_t verschwinden nicht. Es folgt $p(kb + \sum_{t \in T} m_t \sigma(t)) = k p(b) + \sum_{t \in T} m_t t = 0$, also existiert $a \in A$ mit

$$i(a) = kb + \sum_{t \in T} m_t \sigma(t), \quad (\text{IV.11})$$

denn $\ker(p) \subseteq \text{img}(i)$. Da die S eine maximale linear unabhängige Teilmenge von A bildet, existiert eine nicht-triviale Relation

$$0 = la + \sum_{s \in S} n_s s \quad (\text{IV.12})$$

wobei $l, n_s \in \mathbb{Z}$, fast alle $n_s = 0$, aber l oder ein n_s verschwinden nicht. Wenden wir auf (IV.12) den Homomorphismus i an und kombinieren wir dies mit (IV.11),

so erhalten wir folgende Relation in B ,

$$0 = klb + \sum_{s \in S} n_s i(s) + \sum_{t \in T} lm_t \sigma(t).$$

Nach Konstruktion ist dies eine nicht-triviale Relation, dh. kl , ein n_s oder ein lm_t verschwinden nicht. Dies zeigt, dass $i(S) \cup \sigma(T)$ eine maximale linear unabhängige Teilmenge von B ist. \square

IV.4.5. BEMERKUNG. Es sei B eine abelsche Gruppe und $A \subseteq B$ eine Untergruppe. Wenden wir Proposition IV.4.4 auf die kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow B/A \rightarrow 0$ so erhalten wir insbesondere $\text{rank}(A) \leq \text{rank}(B)$ und $\text{rank}(B/A) \leq \text{rank}(B)$. Daher haben Untergruppen und Quotientengruppen abelscher Gruppen endlichen Rangs endlichen Rang.

IV.4.6. BEMERKUNG. Es seien A und B zwei abelsche Gruppen. Wenden wir Proposition IV.4.4 auf die kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus B \rightarrow B \rightarrow 0$ an, so folgt wir $\text{rank}(A \oplus B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$. Damit erhalten wir etwa $\text{rank}(\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}) = n$, siehe Beispiel IV.4.3.

Es sei A eine abelsche Gruppe. Eine Teilmenge $S \subseteq A$ wird *Erzeugendensystem* von A genannt, falls sich jedes Element $a \in A$ als endliche Linearkombination $a = \sum_{s \in S} n_s s$ schreiben lässt, wobei $n_s \in \mathbb{Z}$ und fast alle $n_s = 0$. Eine abelsche Gruppe heißt *endlich erzeugt*, falls sie ein endliches Erzeugendensystem besitzt. Eine Teilmenge $S \subseteq A$ wird *Basis* von A genannt, falls sie ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bildet. In diesem Fall lässt sich jedes Element $a \in A$ auf eindeutige Weise als $a = \sum_{s \in S} n_s s$ schreiben, wobei $n_s \in \mathbb{Z}$ und fast alle $n_s = 0$. Wir erhalten daher einen Isomorphismus $A \cong \mathbb{Z}\langle S \rangle$. Besitzt eine abelsche Gruppe eine Basis, dann wird sie eine *freie abelsche Gruppe* genannt. Ist A eine freie abelsche Gruppe mit Basis S , dann gilt $\text{rank}(A) = \#S$, denn offensichtlich ist jede Basis eine maximale linear unabhängige Teilmenge. Zwei Basen einer freien abelschen Gruppe müssen daher stets gleiche Mächtigkeit haben, vgl. Satz IV.4.1.

IV.4.7. KOROLLAR. *Zwei freie abelsche Gruppen sind genau dann isomorph, wenn sie gleichen Rank haben.*

Ist A eine freie abelsche Gruppe mit Basis S , ist B eine weitere abelsche Gruppe und sind für jedes $s \in S$ Elemente $b_s \in B$ vorgegeben, dann existiert genau ein Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$ mit $\varphi(s) = b_s$ für alle $s \in S$.

IV.4.8. PROPOSITION. *Es sei $p : A \rightarrow B$ ein surjektiver Homomorphismus abelscher Gruppen, F eine freie abelsche Gruppe und $\varphi : F \rightarrow B$ ein weiterer Homomorphismus. Dann existiert ein Homomorphismus $\tilde{\varphi} : F \rightarrow A$ mit $p \circ \tilde{\varphi} = \varphi$.*

BEWEIS. Wähle eine Basis S von F . Wegen der Surjektivität von p finden wir zu jedem $s \in S$ ein $a_s \in A$ mit $p(a_s) = \varphi(s)$. Der durch $\tilde{\varphi}(s) := a_s$, $s \in S$, wohldefinierte Homomorphismus $\tilde{\varphi} : F \rightarrow A$ hat dann die gewünschte Eigenschaft, denn auf Basiselementen $s \in S$ gilt nach Konstruktion $p(\tilde{\varphi}(s)) = p(a_s) = \varphi(s)$. \square

IV.4.9. PROPOSITION. *Ist F eine freie abelsche Gruppe, dann splittet jede kurze exakte Sequenz abelscher Gruppen $0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{p} F \rightarrow 0$. Insbesondere gilt in dieser Situation $B \cong A \oplus F$.*

BEWEIS. Wenden wir Proposition IV.4.8 mit $\varphi = \text{id}_F$ an so erhalten wir einen Homomorphismus $\sigma : F \rightarrow B$ mit $p \circ \sigma = \text{id}_F$, also einen Splitt der kurzen exakten Sequenz. Aus Proposition IV.3.7 folgt nun $B \cong A \oplus F$. \square

IV.4.10. PROPOSITION. *Ist A eine abelsche Gruppe, dann existiert eine freie abelsche Gruppe F und ein surjektiver Homomorphismus $\varphi : F \rightarrow A$. Ist A endlich erzeugt, dann kann F so gewählt werden, dass es eine endliche Basis besitzt, dh. $F \cong \mathbb{Z}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$.*

BEWEIS. Wähle ein Erzeugendensystem S von A , und betrachte die freie abelsche Gruppe $F := \mathbb{Z}\langle S \rangle$. Der durch $\varphi(s) := s$, $s \in S$, definierte Homomorphismus $\varphi : F \rightarrow A$ ist dann offensichtlich surjektiv. Ist A endlich erzeugt, dann kann S endlich gewählt werden. \square

IV.4.11. KOROLLAR. *Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe hat endlichen Rang.*

BEWEIS. Dies folgt aus Proposition IV.4.10 und Bemerkung IV.4.5. \square

IV.4.12. SATZ. *Untergruppen freier abelscher Gruppen sind frei abelsch.*

BEWEIS. Sei also B eine freie abelsche Gruppe und $A \subseteq B$ eine Untergruppe. Wähle eine Basis S von B , und fixiere eine Wohlordnung²⁹ auf S . Für $s \in S$ definieren wir eine Homomorphismus $p_s : B \rightarrow \mathbb{Z}$ auf Basiselementen durch $p_s(s) := 1$ und $p_s(t) := 0$ falls $s \neq t \in S$. Für $s \in S$ bezeichne $B_s \subseteq B$ die von $\{t \in S : t \leq s\}$ erzeugte Untergruppe. Einschränkung von p_s liefert einen Homomorphismus $q_s : A \cap B_s \rightarrow \mathbb{Z}$. Da \mathbb{Z} ein Hauptidealring ist, wird das Bild $\text{img}(q_s) \subseteq \mathbb{Z}$ von einem Element $m_s \in \mathbb{Z}$ erzeugt. Zu jedem $s \in S$ wählen wir $a_s \in A \cap B_s$, sodass $q_s(a_s) = m_s$. Weiters setzen wir $T := \{s \in S : m_s \neq 0\} = \{s \in S : \text{img}(q_s) \neq 0\}$. Wir werden nun zeigen, dass a_t , $t \in T$, eine Basis von A bildet.

Wir beginnen mit der linearen Unabhängigkeit. Sei also $\sum_{t \in T} n_t a_t = 0$, wobei $n_t \in \mathbb{Z}$ und fast alle $n_t = 0$. Wir müssen zeigen, dass alle n_t verschwinden. Wäre dies nicht der Fall, dann gäbe es ein größtes $s \in T$, sodass $n_s \neq 0$. Es folgt $0 = q_s(\sum_{t \in T} n_t a_t) = q_s(n_s a_s + \sum_{t < s} n_t a_t) = n_s q_s(a_s) = n_s m_s$. Da $s \in T$ ist $m_s \neq 0$, also muss $n_s = 0$ gelten, ein Widerspruch. Daher ist a_t , $t \in T$, linear unabhängig.

²⁹Unter einer Halbordnung auf einer Menge X verstehen wir eine reflexive, transitive und antisymmetrisch Relation. Sind darüber hinaus je zwei Elemente vergleichbar, dh. gilt stets $x \leq y$ oder $y \leq x$, dann sprechen wir von einer Totalordnung. Eine Totalordnung wird Wohlordnung genannt, falls jede nicht-leere Teilmenge ein kleinstes Element besitzt. Jede Menge lässt sich wohlordnen, siehe etwa [8, Letztes Kapitel].

Es bleibt zu zeigen, dass A von den Elementen $a_t, t \in T$, erzeugt wird. Es bezeichne dazu $A_0 \subseteq A$ die von $a_t, t \in T$, erzeugte Untergruppe. Wir gehen indirekt vor und nehmen $A_0 \neq A$ an. Da S wohlgeordnet ist, existiert ein kleinstes $s \in S$, sodass $A_0 \cap B_s \neq A \cap B_s$. Wähle nun $a \in A \cap B_s$, sodass $a \notin A_0$. Weiters sei $n \in \mathbb{Z}$ mit $q_s(a) = nm_s$. Falls $m_s = 0$ so sei auch $n = 0$. Dann gilt jedenfalls $na_s \in A_0$. Betrachte nun $a' := a - na_s \in A \cap B_s$. Nach Konstruktion ist $q_s(a') = q_s(a - na_s) = q_s(a) - nq_s(a_s) = nm_s - nm_s = 0$. Daher existiert $\tilde{s} < s$ mit $a' \in B_{\tilde{s}}$ und somit $a' \in A \cap B_{\tilde{s}}$. Andererseits gilt auch $a' \notin A_0$, denn $a \notin A_0$ und $na_s \in A_0$. Dies zeigt $A_0 \cap B_{\tilde{s}} \neq A \cap B_{\tilde{s}}$, ein Widerspruch zur Minimalität von s . Daher wird A von den Elementen $a_t, t \in T$, erzeugt. \square

IV.4.13. KOROLLAR. *Ist A eine abelsche Gruppe, dann existieren freie abelsche Gruppen F_0 und F_1 sowie eine kurze exakte Sequenz $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow A \rightarrow 0$. Ist A endlich erzeugt, dann können F_0 und F_1 so gewählt werden, dass sie endliche Basen besitzen, dh. $F_0 \cong \mathbb{Z}^{n_0}$ und $F_1 \cong \mathbb{Z}^{n_1}$ für gewisse $n_0, n_1 \in \mathbb{N}_0$ mit $n_1 \leq n_0$.*

BEWEIS. Nach Proposition IV.4.10 existiert eine freie abelsche Gruppe F_0 und ein surjektiver Homomorphismus $p : F_0 \rightarrow A$. Setzen wir $F_1 := \ker(p)$, dann ist jedenfalls $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \xrightarrow{p} A \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz. Nach Satz IV.4.12 ist F_1 eine freie abelsche Gruppe. Ist A endlich erzeugt, dann kann F_0 mit endlicher Basis gewählt werden, siehe Proposition IV.4.10, nach Bemerkung IV.4.5 hat dann auch F_1 endlichen Rang, besitzt also eine endliche Basis. \square

IV.4.14. PROPOSITION. *Ist $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz abelscher Gruppe, dann sind äquivalent:*

- (i) B ist endlich erzeugt.
- (ii) A und C sind beide endlich erzeugt.

Insbesondere sind Untergruppen und Quotientengruppen endlich erzeugter abelscher Gruppen wieder endlich erzeugt.

BEWEIS. Wir beginnen mit der Implikation (ii) \Rightarrow (i). Es sei S ein endliches Erzeugendensystem von A , und T ein endliches Erzeugendensystem von C . Da p surjektiv ist, existiert eine Abbildung $\sigma : C \rightarrow B$ mit $p \circ \sigma = \text{id}_C$. Wir werden nun zeigen, dass die endliche Menge $i(S) \cup \sigma(T)$ ein Erzeugendensystem von B bildet. Sei dazu $b \in B$. Dann existieren $m_t \in \mathbb{Z}$ mit $p(b) = \sum_{t \in T} m_t t$. Es folgt $p(b - \sum_{t \in T} m_t \sigma(t)) = p(b) - \sum_{t \in T} m_t t = 0$, also existiert $a \in A$ mit

$$i(a) = b - \sum_{t \in T} m_t \sigma(t),$$

denn $\ker(p) \subseteq \text{img}(i)$. Weiters existieren $n_s \in \mathbb{Z}$ mit $a = \sum_{s \in S} n_s s$. Wenden wir darauf den Homomorphismus i an und kombinieren dies mit der vorigen

nicht notwendigerweise verschiedene Primzahlpotenzen bezeichnen. Die Zahlen $p_1^{m_1}, \dots, p_k^{m_k}$ sind durch A , bis auf ihre Reihenfolge, eindeutig bestimmt.

Ist A eine abelsche Gruppe, dann bildet die Menge der Elemente endlicher Ordnung eine Untergruppe, die sogenannte *Torsionsuntergruppe* A_{tor} . Ein Element $a \in A$ ist genau dann in A_{tor} enthalten, wenn $na = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Beispielsweise gilt für $A = \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$ offensichtlich $A_{\text{tor}} = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$. Die abelsche Gruppe A wird *torsionsfrei* genannt, falls $A_{\text{tor}} = 0$ gilt, dh. falls jedes nicht-triviale Element von A unendliche Ordnung hat. Es ist leicht einzusehen, dass die Faktorgruppe A/A_{tor} stets torsionsfrei ist. Offensichtlich sind alle freien abelschen Gruppen torsionsfrei. Eine torsionsfreie abelsche Gruppe muss jedoch nicht frei abelsch sein.³⁰ Für endlich erzeugte abelsche Gruppen erhalten wir aus Satz IV.4.15

IV.4.17. KOROLLAR. *Jede torsionsfreie endlich erzeugte abelsche Gruppe ist frei abelsch.*

Eine graduierte abelsche Gruppe A heißt endlich erzeugt, falls jedes A_q endlich erzeugt ist, $q \in \mathbb{Z}$, und nur endlich viele $A_q \neq 0$ sind. Ein Kettenkomplex heißt endlich erzeugt wenn die zugrundeliegende graduierte abelsche Gruppe endlich erzeugt ist. Wir sagen ein Kettenkomplex C hat endlich erzeugte Homologie, falls die graduierte abelsche Gruppe $H_*(C)$ endlich erzeugt ist.

IV.4.18. DEFINITION (Euler-Charakteristik). Ist C ein Kettenkomplex, dann wird die Kardinalzahl $b_q(C) := \text{rank}(H_q(C))$ die q -te *Bettizahl* von C genannt. Hat C endlich erzeugte Homologie so definieren wir seine *Euler-Charakteristik* als

$$\chi(C) := \sum_q (-1)^q \text{rank}(H_q(C)).$$

Beachte, dass dies eine endliche Summe ist.

IV.4.19. PROPOSITION. *Jeder endlich erzeugter Kettenkomplex C hat endlich erzeugte Homologie und es gilt $\chi(C) = \sum_q (-1)^q \text{rank}(C_q)$.*

BEWEIS. Aus den kurzen exakten Sequenzen $0 \rightarrow Z_q \rightarrow C_q \xrightarrow{\delta_q} B_{q-1} \rightarrow 0$ und $0 \rightarrow B_q \rightarrow Z_q \rightarrow H_q(C) \rightarrow 0$ folgt, dass die graduierten abelschen Gruppen B_* , Z_* und $H_*(C)$ endlich erzeugt sind, siehe Proposition IV.4.14. Aus Proposition IV.4.4 erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{rank}(C_q) &= \text{rank}(Z_q) + \text{rank}(B_{q-1}) \\ \text{rank}(Z_q) &= \text{rank}(B_q) + \text{rank}(H_q(C)) \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\text{rank}(B_q) + \text{rank}(B_{q-1}) + \text{rank}(H_q(C)) = \text{rank}(C_q).$$

³⁰Etwa ist \mathbb{Q} torsionsfrei, aber nicht frei abelsch, denn $\text{rank}(\mathbb{Q}) = 1$ aber $\mathbb{Q} \not\cong \mathbb{Z}$.

Summation liefert

$$\begin{aligned} \sum_q (-1)^q \operatorname{rank}(B_q) + \sum_q (-1)^q \operatorname{rank}(B_{q-1}) + \sum_q (-1)^q \operatorname{rank}(H_q(C)) \\ = \sum_q (-1)^q \operatorname{rank}(C_q). \end{aligned}$$

Eine einfache Indexverschiebung zeigt, dass sich die ersten beiden Summen kürzen, und wir erhalten $\chi(C) = \sum_q (-1)^q \operatorname{rank}(H_q(C)) = \sum_q (-1)^q \operatorname{rank}(C_q)$. \square

IV.4.20. KOROLLAR. *Es sei $0 \rightarrow C \rightarrow C' \rightarrow C'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Haben zwei der drei Kettenkomplexe endlich erzeugte Homologie, dann hat auch der dritte endlich erzeugte Homologie und es gilt die Formel $\chi(C') = \chi(C) + \chi(C'')$.*

BEWEIS. Wir beginnen mit folgender Beobachtung. Ist $A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$ eine Sequenz abelscher Gruppen die bei B exakt ist, und sind A sowie C endlich erzeugt, dann ist auch B endlich erzeugt. Dies folgt aus Proposition IV.4.14 indem wir die kurze exakte Sequence $0 \rightarrow A/\ker(\varphi) \rightarrow B \rightarrow \operatorname{img}(\psi) \rightarrow 0$ betrachten. Wenden wir dies auf die lange exakte Sequenz

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(C'') \rightarrow H_q(C) \rightarrow H_q(C') \rightarrow H_q(C'') \rightarrow H_{q-1}(C) \rightarrow \cdots \quad (\text{IV.14})$$

aus Satz IV.3.1 an, so sehen wir, dass auch der dritte Kettenkomplex endlich erzeugte Homologie haben muss. Wir können (IV.14) daher als endlich erzeugten azyklischen Kettenkomplex L betrachten, genauer, $L_{3q} = H_q(C'')$, $L_{3q+1} = H_q(C')$, $L_{3q+2} = H_q(C)$, $q \in \mathbb{Z}$. Da L azyklisch ist, gilt $\chi(L) = 0$. Aus Proposition IV.4.19 folgt nun

$$\begin{aligned} 0 = \chi(L) &= \sum_k (-1)^k \operatorname{rank}(L_k) \\ &= \sum_q (-1)^{3q} \operatorname{rank}(L_{3q}) + \sum_q (-1)^{3q+1} \operatorname{rank}(L_{3q+1}) + \sum_q (-1)^{3q+2} \operatorname{rank}(L_{3q+2}) \\ &= \sum_q (-1)^q \operatorname{rank}(H_q(C'')) - \sum_q (-1)^q \operatorname{rank}(H_q(C')) + \sum_q (-1)^q \operatorname{rank}(H_q(C)) \\ &= \chi(C'') - \chi(C') + \chi(C), \end{aligned}$$

und damit $\chi(C') = \chi(C) + \chi(C'')$. \square

Eine graduierte abelsche Gruppe A wird frei genannt, falls A_q eine freie abelsche Gruppe ist, für jedes $q \in \mathbb{Z}$. Ein Kettenkomplex heißt frei, falls die zugrundeliegende graduierte abelsche Gruppe frei ist.

IV.4.21. PROPOSITION. *Ein freier Kettenkomplex ist genau dann azyklisch, wenn er kontrahierbar ist.*

BEWEIS. Sei also C ein Kettenkomplex. Ist $C \simeq 0$ dann folgt $H(C) = 0$ aus Proposition IV.2.5. Es genügt daher zu zeigen, dass azyklische freie Kettenkomplexe kontrahierbar sind. Sei also $H(C) = 0$, dh. $0 \rightarrow Z_q \rightarrow C_q \xrightarrow{\partial_q} Z_{q-1} \rightarrow 0$ ist eine kurze exakte Sequenz, für jedes $q \in \mathbb{Z}$. Nach Satz IV.4.12 ist Z_q eine freie abelsche Gruppe, also splitten diese kurzen exakten Sequenzen, siehe Proposition IV.4.9. Es existieren daher Homomorphismen $\sigma_q : Z_{q-1} \rightarrow C_q$ mit $\partial_q \circ \sigma_q = \text{id}_{Z_{q-1}}$. Es ist dann $\partial_q \circ (\text{id}_{C_q} - s_q \circ \partial_q) = 0$ und daher $h_q : C_q \rightarrow C_{q+1}$, $h_q := s_{q+1} \circ (\text{id}_{C_q} - s_q \circ \partial_q)$ ein wohldefinierter Homomorphismus. Eine kurze einfache Rechnung zeigt nun $\partial_{q+1} \circ h_q + h_{q-1} \circ \partial_q = \text{id}_{C_q}$, also ist $0 \xrightarrow{h} \text{id}_C$ und C daher kontrahierbar. \square

IV.4.22. KOROLLAR. Eine Kettenabbildung $\varphi : C \rightarrow C'$ zwischen freien Kettenkomplexen ist genau dann einen Kettenhomotopieäquivalenz, wenn sie einen Isomorphismus $\varphi_* : H(C) \xrightarrow{\cong} H(C')$ induziert.

BEWEIS. Dies folgt aus Proposition IV.4.21, Proposition IV.3.9 und Proposition IV.2.8. Beachte, dass der Abbildungskegel C_φ wieder ein freier Kettenkomplex ist, siehe Beispiel IV.2.7. \square

IV.5. Singuläre Homologie. Für $q \geq 0$ bezeichne

$$\Delta^q := \{(t_0, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid 0 \leq t_i \leq 1, t_0 + \dots + t_q = 1\} \subseteq \mathbb{R}^{q+1}$$

den q -dimensionalen *Standardsimplex*. Dies ist die konvexe Hülle der Einheitsvektoren e_0, \dots, e_q in \mathbb{R}^{q+1} . Sei nun X ein topologischer Raum. Unter einem *singulären q -Simplex* in X verstehen wir eine stetige Abbildung $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$. Mit $C_q(X)$ bezeichnen wir die von allen singulären q -Simplizes σ in X erzeugte freie abelsche Gruppe, sie wird die q -te singuläre *Kettengruppe* von X genannt. Elemente von $C_q(X)$ sind daher formale endliche Linearkombinationen $n_1\sigma_1 + \dots + n_k\sigma_k$, wobei $n_i \in \mathbb{Z}$ und σ_i singuläre q -Simplizes in X sind. Für $q < 0$ setzen wir $C_q(X) := 0$. Es ist dann $C_*(X)$ eine graduierte abelsche Gruppe.

IV.5.1. BEMERKUNG. Es sei X ein topologischer Raum, $q \geq 0$ und A eine weitere abelsche Gruppe. Ist zu jedem singulären q -Simplex σ in X ein Element $a_\sigma \in A$ vorgegeben, dann gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : C_q(X) \rightarrow A$, sodass $\varphi(\sigma) = a_\sigma$, für jedes singuläre q -Simplex σ . Um einen Homomorphismus $\varphi : C_q(X) \rightarrow A$ zu definieren genügt es daher seine Werte auf singulären q -Simplizes vorzugeben, er ist dadurch wohldefiniert und eindeutig bestimmt. Soll gezeigt werden, dass zwei Homomorphismen $\varphi, \psi : C_q(X) \rightarrow A$ übereinstimmen, genügt es $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma)$ für jedes q -Simplex σ zu verifizieren, denn diese erzeugen die Gruppe $C_q(X)$.

Für $q \geq 1$ und $0 \leq i \leq q$ definieren wir stetige Abbildungen

$$\delta_q^i : \Delta^{q-1} \rightarrow \Delta^q, \quad \delta_q^i(t_0, \dots, t_{q-1}) := (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{q-1}). \quad (\text{IV.15})$$

Dies ist die Einschränkung einer affinen Abbildung $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q-1}$ die die Einheitsvektoren wie folgt abbildet, $e_0 \mapsto e_0, \dots, e_{i-1} \mapsto e_{i-1}, e_i \mapsto e_{i+1}, \dots, e_{q-1} \mapsto e_q$. Die Abbildung δ_q^i parametrisiert die der Ecke $e_i \in \Delta^q$ gegenüberliegende $(q-1)$ -dimensionale Seite von Δ^q .

IV.5.2. LEMMA. Für $q \geq 2$ und $0 \leq i < j \leq q$ gilt $\delta_q^j \circ \delta_{q-1}^i = \delta_q^i \circ \delta_{q-1}^{j-1}$.

BEWEIS. Beide Seiten der zu zeigenden Gleichung sind Einschränkungen affiner Abbildungen $\mathbb{R}^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}^{q+1}$. Es genügt daher zu zeigen, dass die beiden Abbildungen auf den Einheitsvektoren e_0, \dots, e_{q-2} von \mathbb{R}^{q-1} übereinstimmen. Tatsächlich bilden beide Abbildungen diese Einheitsvektoren wie folgt ab: $e_0 \mapsto e_0, \dots, e_{i-1} \mapsto e_{i-1}, e_i \mapsto e_{i+1}, \dots, e_{j-2} \mapsto e_{j-1}, e_{j-1} \mapsto e_{j+1}, \dots, e_{q-2} \mapsto e_q$. \square

Ist X ein topologischer Raum und $q \geq 1$, dann definieren wir einen Homomorphismus $\partial_q := \partial_q^X : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ auf q -Simplizes $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$, durch

$$\partial_q(\sigma) := \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \circ \delta_q^i), \quad (\text{IV.16})$$

vgl. Bemerkung IV.5.1. Für $q \leq 0$ setzen wir $\partial_q := 0$. Die ∂_q definieren daher einen Homomorphismus $\partial = \partial^X : C_*(X) \rightarrow C_{*-1}(X)$ vom Grad -1 .

IV.5.3. LEMMA. Es gilt $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$, für alle $q \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. O.B.d.A. sei $q \geq 2$. Weiters sei $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ ein q -Simplex in X . Es genügt $\partial_{q-1}(\partial_q(\sigma)) = 0$ zu zeigen, siehe Bemerkung IV.5.1. Aus der Definition erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} \partial_{q-1}(\partial_q(\sigma)) &= \partial_{q-1} \left(\sum_{j=0}^q (-1)^j (\sigma \circ \delta_q^j) \right) = \sum_{j=0}^q (-1)^j \partial_{q-1}(\sigma \circ \delta_q^j) \\ &= \sum_{j=0}^q (-1)^j \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i (\sigma \circ \delta_q^j \circ \delta_{q-1}^i) \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \delta_q^j \circ \delta_{q-1}^i) + \sum_{0 \leq j \leq i \leq q-1} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \delta_q^j \circ \delta_{q-1}^i) \end{aligned}$$

Mittels Substitution und Lemma IV.5.2 erhalten wir für den zweiten Summanden:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j \leq i \leq q-1} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \delta_q^j \circ \delta_{q-1}^i) &= \sum_{0 \leq i \leq j \leq q-1} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \delta_q^i \circ \delta_{q-1}^j) \\ &= - \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \delta_q^i \circ \delta_{q-1}^{j-1}) \\ &= - \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \circ \delta_q^j \circ \delta_{q-1}^i) \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\partial_{q-1}(\partial_q(\sigma)) = 0$. \square

Auf Grund von Lemma IV.5.3 bildet $C_*(X)$ zusammen mit dem Randoperator $\partial : C_*(X) \rightarrow C_{*-1}(X)$ einen Kettenkomplex, er wird der *singuläre Kettenkomplex* von X genannt. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so definieren wir einen Homomorphismus $f_\# : C_q(X) \rightarrow C_q(Y)$ auf q -Simplizes $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ durch $f_\#(\sigma) := f \circ \sigma$, vgl. Bemerkung IV.5.1. Offensichtlich liefert dies einen Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen $f_\# : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$.

IV.5.4. LEMMA. *Für stetiges $f : X \rightarrow Y$ ist $f_\# : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ eine Kettenabbildung, dh. es gilt $\partial^Y \circ f_\# = f_\# \circ \partial^X$.*

BEWEIS. Wieder genügt es die Gleichung $\partial^Y \circ f_\# = f_\# \circ \partial^X$ auf q -Simplizes in X zu verifizieren, $q \geq 1$. Sei also $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ so ein q -Simplex. Dann gilt offensichtlich

$$\partial_q^Y(f_\#(\sigma)) = \partial_q^Y(f \circ \sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (f \circ \sigma \circ \delta_q^i)$$

sowie

$$f_\#(\partial_q^X(\sigma)) = f_\#\left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \circ \delta_q^i)\right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i f_\#(\sigma \circ \delta_q^i) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (f \circ \sigma \circ \delta_q^i)$$

und daher $\partial_q^Y(f_\#(\sigma)) = f_\#(\partial_q^X(\sigma))$. \square

IV.5.5. PROPOSITION. *Ordnen wir einem topologischen Raum X seinen singulären Kettenkomplex $C_*(X)$ und einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ die Kettenabbildung $f_\# : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ zu, so erhalten wir einen kovarianten Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe, dh. es gilt $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$ und $(\text{id}_X)_\# = \text{id}_{C_*(X)}$ für stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$.*

BEWEIS. Es ist bloß noch $(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#$ sowie $(\text{id}_X)_\# = \text{id}_{C_*(X)}$ zu zeigen, wobei $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen sind. Beides ist offensichtlich, etwa gilt für jeden q -Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$

$$(g_\# \circ f_\#)(\sigma) = g_\#(f_\#(\sigma)) = g_\#(f \circ \sigma) = g \circ f \circ \sigma = (g \circ f)_\#(\sigma)$$

und daher auch $g_\# \circ f_\# = (g \circ f)_\#$. \square

IV.5.6. DEFINITION (Singuläre Homologie). Es sei X ein topologischer Raum. Die Homologiegruppe $H_q(X) := H_q(C_*(X))$ wird die q -te singuläre Homologiegruppe von X genannt. Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, dann wird der von der Kettenabbildung $f_\# : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ in der Homologie induzierte Homomorphismus mit $f_* : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ bezeichnet. Auch die Bezeichnung $H_q(f) : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ ist gelegentlich anzutreffen.

Aus Proposition IV.5.5 und Proposition IV.1.2, siehe auch Bemerkung III.2.2, erhalten wir sofort

IV.5.7. PROPOSITION. Ordnen wir einem topologischen Raum seine singuläre Homologie $H_*(X)$ und einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ den induzierten Homomorphismus $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ zu, so erhalten wir einen kovarianten Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen, dh. es gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ sowie $(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_*(X)}$ für stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$.

IV.5.8. DEFINITION (Bettizahlen und Euler-Charakteristik). Es sei X ein topologischer Raum. Die Kardinalzahl

$$b_q(X) := \text{rank}(H_q(X)) = b_q(C_*(X))$$

wir die q -te Bettizahl von X genannt, siehe Definition IV.4.18. Hat X endlich erzeugte Homologie, dh. ist die graduierte abelsche Gruppe $H_*(X)$ endlich erzeugt, dann wird die Euler-Charakteristik von X durch

$$\chi(X) := \sum_{q \in \mathbb{Z}} (-1)^q b_q(X) = \chi(C_*(X))$$

definiert. Beachte, dass dies eine endliche Summe ist.

IV.5.9. BEMERKUNG. Die Homologie $H_*(X)$ ist eine topologische Invariante, dh. sind X und Y homöomorphe Räume dann sind $H_*(X)$ und $H_*(Y)$ isomorphe graduierte abelsche Gruppen. Ist nämlich $f : X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus mit Inverser $g : Y \rightarrow X$, $g \circ f = \text{id}_X$, $f \circ g = \text{id}_Y$, dann folgt aus der Funktorialität sofort $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{id}_X)_* = \text{id}_{H_*(X)}$ und $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{id}_Y)_* = \text{id}_{H_*(Y)}$. Daher sind $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ und $g_* : H_*(Y) \rightarrow H_*(X)$ zueinander inverse Isomorphismen, vgl. Bemerkung III.2.1. Daher sind auch die Bettizahlen topologische Invarianten, dh. aus $X \cong Y$ folgt $b_q(X) = b_q(Y)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$. Ebenso müssen homöomorphe Räume mit endlich erzeugter Homologie die gleiche Euler-Charakteristik haben.

IV.5.10. BEMERKUNG. Für $q < 0$ gilt stets $H_q(X) = 0$, denn $C_q(X) = 0$.

IV.5.11. BEISPIEL. Für die Homologie des leeren Raums gilt $H_*(\emptyset) = 0$, denn $C_*(\emptyset) = 0$. Daher ist $b_q(\emptyset) = 0$ für alle $q \in \mathbb{Z}$ und $\chi(\emptyset) = 0$.

IV.5.12. BEISPIEL. Für die Homologie des einpunktigen Raums gilt

$$H_q(\{*\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } q \neq 0. \end{cases}$$

Insbesondere ist $b_0(\{*\}) = 1$, $b_q(\{*\}) = 0$ für $q \neq 0$, und $\chi(\{*\}) = 1$. Um dies einzusehen beobachten wir, dass es für jedes $q \geq 0$ genau einen singulären q -Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow \{*\}$ gibt. Wir erhalten daher einen kanonischen Isomorphismus $C_q(\{*\}) \cong \mathbb{Z}$ indem wir diesen Simplex σ auf $1 \in \mathbb{Z}$ abbilden, $q \geq 0$. Ein Blick auf die Definition des Randoperators, siehe (IV.16), zeigt, dass dies einen Isomorphismus zwischen $C_*(\{*\})$ und dem Kettenkomplex

$$\cdots \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \mathbb{Z} \xleftarrow{0} \mathbb{Z} \xleftarrow{1} \mathbb{Z} \leftarrow \cdots$$

definiert. Die Homologiegruppen lassen sich nun einfach ablesen.

Es sei X ein topologischer Raum mit Wegzusammenhangskomponenten X_λ , $\lambda \in \Lambda$. Die kanonischen Inklusionen $\iota_\lambda : X_\lambda \rightarrow X$ induzieren Homomorphismen $(\iota_\lambda)_* : H_*(X_\lambda) \rightarrow H_*(X)$. Diese liefern einen Homomorphismus

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(X_\lambda) \rightarrow H_*(X). \quad (\text{IV.17})$$

Das folgende Resultat führt die Berechnung der singulären Homologie auf den Fall wegzusammenhängender Räume zurück.

IV.5.13. PROPOSITION. *Der Homomorphismus (IV.17) ist ein Isomorphismus graduierte abelscher Gruppen, dh. $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_q(X_\lambda) \cong H_q(X)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.*

BEWEIS. Die Kettenabbildungen $(\iota_\lambda)_\# : C_*(X_\lambda) \rightarrow C_*(X)$ induzieren einen Isomorphismus von Kettenkomplexen $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_*(X_\lambda) \cong C_*(X)$, denn wegen des Wegzusammenhangs von Δ^q muss jeder Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ zur Gänze in einem X_λ liegen. Die zu beweisende Aussage folgt daher aus Proposition IV.1.4. \square

IV.5.14. BEISPIEL. Es sei X ein diskreter Raum. Aus Beispiel IV.5.12 und Proposition IV.5.13 folgt nun $H_q(X) = 0$ für $q \neq 0$. Weiters ist $H_0(X)$ eine freie abelsche Gruppe deren Rang mit der Anzahl der Punkte von X übereinstimmt, $\text{rank}(H_0(X)) = \sharp X$.

Es seien X_λ , $\lambda \in \Lambda$, topologische Räume und $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ihre disjunkte Vereinigung. Die kanonischen Inklusionen $\iota_\lambda : X_\lambda \rightarrow \bigsqcup_{\lambda' \in \Lambda} X_{\lambda'}$ induzieren Homomorphismen $(\iota_\lambda)_* : H_*(X_\lambda) \rightarrow H_*(\bigsqcup_{\lambda' \in \Lambda} X_{\lambda'})$. Diese liefern einen Homomorphismus

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(X_\lambda) \rightarrow H_*(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \quad (\text{IV.18})$$

Der Homologiefunktor vertauscht in folgendem Sinn mit Koprodukten.

IV.5.15. PROPOSITION. *Der Homomorphismus (IV.18) ist ein Isomorphismus graduierte abelscher Gruppen, dh. $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_q(X_\lambda) \cong H_q(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)$ für alle $q \in \mathbb{Z}$.*

BEWEIS. Dies lässt sich genau wie Proposition IV.5.13 beweisen. Jeder singuläre q -Simplex in $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ muss zur Gänze in einem X_λ liegen, die kanonischen Inklusionen induzieren daher einen Isomorphismus von Kettenkomplexen $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C_*(X_\lambda) \cong C_*(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)$. Die zu beweisende Aussage folgt daher aus Proposition IV.1.4. \square

IV.5.16. PROPOSITION. *Für jeden nichtleeren wegzusammenhängenden Raum X induziert die konstante Abbildung $c : X \rightarrow \{*\}$ in den einpunktigen Raum einen Isomorphismus $c_* : H_0(X) \xrightarrow{\cong} H_0(\{*\})$, es gilt daher $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.*

BEWEIS. Wir fixieren eine Punkt $x_0 \in X$ und definieren eine Abbildung $\iota : \{*\} \rightarrow X$ durch $\iota(*) := x_0$. Offensichtlich gilt $c \circ \iota = \text{id}_{\{*\}}$ also $c_* \circ \iota_* = \text{id}_{H_0(\{*\})}$, siehe Proposition IV.5.7. Es genügt daher $\iota_* \circ c_* = \text{id}_{H_0(X)}$ zu zeigen, denn dann sind $c_* : H_0(X) \rightarrow H_0(\{*\})$ und $\iota_* : H_0(\{*\}) \rightarrow H_0(X)$ zueinander inverse Gruppenisomorphismen und die Proposition folgt aus Beispiel IV.5.12.

Da Δ^0 einpunktig ist, können wir singuläre 0-Simplizes mit Punkten in X identifizieren, für $x \in X$ bezeichne $\sigma_x : \Delta^0 \rightarrow X$ den 0-Simplex $\sigma_x(t) := x$. Beachte $(\iota_{\#} \circ c_{\#})(\sigma_x) = (\iota \circ c)_{\#}(\sigma_x) = \sigma_{x_0}$, für alle 0-Simplizes σ_x . Da X wegzusammenhängend ist, können wir zu jedem Punkt $x \in X$ einen Weg $\tilde{\tau}_x : I \rightarrow X$ wählen, sodass $\tilde{\tau}_x(1) = x$ und $\tilde{\tau}_x(0) = x_0$. Für die singulären 1-Simplizes $\tau_x : \Delta^1 \rightarrow X$, $\tau_x(t_0, t_1) := \tilde{\tau}_x(t_1)$, gilt dann $\partial_1(\tau_x) = \sigma_x - \sigma_{x_0}$. Wir definieren nun einen Homomorphismus $h_0 : C_0(X) \rightarrow C_1(X)$ auf 0-Simplizes durch $h_0(\sigma_x) := \tau_x$. Es folgt $\partial_1(h_0(\sigma_x)) = \partial_1(\tau_x) = \sigma_x - \sigma_{x_0} = \sigma_x - (\iota_{\#} \circ c_{\#})(\sigma_x)$, also $\partial_1 \circ h_0 = \text{id}_{C_0(X)} - \iota_{\#} \circ c_{\#}$. Gehen wir zur Homologie über, erhalten wir $0 = \text{id}_{H_0(X)} - \iota_* \circ c_* : H_0(X) \rightarrow H_0(X)$, siehe Proposition IV.1.2, es gilt daher auch $\iota_* \circ c_* = \text{id}_{H_0(X)}$. \square

Mittels Proposition IV.5.16 und Proposition IV.5.13 können wir nun die 0-ten Homologiegruppen beliebiger Räume bestimmen.

IV.5.17. PROPOSITION. *Für jeden topologischen Raum X ist $H_0(X)$ eine freie abelsche Gruppe deren Rang mit der Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von X übereinstimmt.*

Es bezeichne $\{*\}$ den einpunktigen Raum. Ist X ein topologischer Raum, dann gibt es genau eine (stetige) Abbildung $c : X \rightarrow \{*\}$. Diese induziert einen Homomorphismus $c_* : H_*(X) \rightarrow H_*(\{*\})$. Unter der *reduzierten Homologie* $\tilde{H}_*(X)$ verstehen wir den Kern dieses Homomorphismus,

$$\tilde{H}_q(X) := \ker(c_* : H_q(X) \rightarrow H_q(\{*\})).$$

Ist $f : X \rightarrow Y$ stetig, dann gilt offensichtlich $c^Y \circ f = c^X$ wobei $c^X : X \rightarrow \{*\}$ und $c^Y : Y \rightarrow \{*\}$. Wir erhalten $c_*^Y \circ f_* \rightarrow c_*^X$, also schränkt sich $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ zu einem Homomorphismus $f_* : \tilde{H}_*(X) \rightarrow \tilde{H}_*(Y)$ ein. Die reduzierte Homologie liefert daher einen Funktor von der Kategorie der topologischen Räume in die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen. Die *reduzierten Bettizahlen* sind durch $\tilde{b}_q(X) := \text{rank}(\tilde{H}_q(X))$ gegeben. Ist $\tilde{H}_*(X)$ endlich erzeugt, dann definieren wir die *reduzierte Euler-Charakteristik* durch $\tilde{\chi}(X) := \sum_q (-1)^q \tilde{b}_q(X)$. Wie aus Proposition IV.5.18 unten hervorgeht, beinhaltet die reduzierte Homologie $\tilde{H}_*(X)$ im wesentlichen die selbe Information wie die unreduzierte Homologie $H_*(X)$. Manchmal können durch Verwendung der reduzierten Homologie jedoch lästige Fallunterscheidungen vermieden werden.

IV.5.18. PROPOSITION. *Es sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum. Dann ist*

$$0 \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow H_q(X) \xrightarrow{c_*} H_q(\{*\}) \rightarrow 0$$

eine splittende kurze exakte Sequenz. Es gilt daher $H_0(X) \cong \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ sowie $\tilde{H}_q(X) = H_q(X)$ falls $q \neq 0$. Für die Bettizahlen erhalten wir $b_0(X) = \tilde{b}_0(X) + 1$ und $\tilde{b}_q(X) = b_q(X)$ falls $q \neq 0$. Weiters ist $\tilde{H}_(X)$ genau dann endlich erzeugt, wenn $H_*(X)$ endlich erzeugt ist, und in diesem Fall gilt $\chi(X) = \tilde{\chi}(X) + 1$.*

BEWEIS. Da $X \neq \emptyset$ existiert eine Abbildung $\iota : \{*\} \rightarrow X$ mit $c \circ \iota = \text{id}_{\{*\}}$. Es folgt $c_* \circ \iota_* = \text{id}_{H_0(X)}$, also ist $c_* : H_0(X) \rightarrow H_0(\{*\})$ surjektiv und $\iota_* : H_0(\{*\}) \rightarrow H_0(X)$ ist ein Splitt der kurzen exakten Sequenz. Die restlichen Aussagen folgen nun aus Beispiel IV.5.12 und Proposition IV.3.7. \square

IV.5.19. BEMERKUNG. Es ist nicht möglich einen natürlichen Isomorphismus $\varphi^X : H_0(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_0(X) \oplus \mathbb{Z}$ zu konstruieren, dh. für stetige Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ wird i.A. *nicht* $\varphi^Y \circ f_* = (f_* \oplus \text{id}_{\mathbb{Z}}) \circ \varphi^X$ gelten.

IV.5.20. BEMERKUNG. Ein topologischer Raum X ist genau dann wegzusammenhängend, wenn $\tilde{H}_0(X) = 0$, siehe Proposition IV.5.18 und Proposition IV.5.17. Für $X \neq \emptyset$ ist dies zu $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ äquivalent.

IV.5.21. BEISPIEL. Betrachte die 0-dimensionale Sphäre $S^0 = \{-1, 1\}$, ein zweipunktiger Raum. Aus Beispiel IV.5.14 und Proposition IV.5.18 folgt:

$$H_q(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0 \\ 0 & \text{falls } q \neq 0 \end{cases} \quad \text{sowie} \quad \tilde{H}_q(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0 \\ 0 & \text{falls } q \neq 0 \end{cases}$$

Insbesondere gilt $b_0(S^0) = 2$, $\tilde{b}_0(S^0) = 1$ und alle anderen (reduzierten) Bettizahlen verschwinden. Für die Euler-Charakteristik folgt $\chi(S^0) = 2$, bzw. $\tilde{\chi}(S^0) = 1$.

IV.5.22. DEFINITION. Ein topologischer Raum X wird *azyklisch* genannt, falls $\tilde{H}_*(X) = 0$ gilt.

Azyklische Räume sind insbesondere wegzusammenhängend, siehe Bemerkung IV.5.20. Ein nicht-leerer topologischer Raum X ist genau dann azyklisch, wenn $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ und $H_q(X) = 0$ für $q \neq 0$, siehe Proposition IV.5.18. Dies bedeutet gerade, dass X dieselben Homologiegruppen wie der einpunktige Raum hat.

IV.6. Relative Homologie und lange exakte Sequenzen. Unter einem *Paar von Räumen* verstehen wir ein Paar (X, A) wobei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ ein Teilraum ist. Eine *Abbildung von Paaren* $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ mit $f(A) \subseteq B$. Wir erhalten eine Kategorie, die *Kategorie der Paare topologischer Räume*. Unter einem *Homöomorphismus von Paaren* verstehen wir eine Abbildung von Paaren $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, für die $f : X \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus ist und $f(A) = B$ gilt. Dies sind genau die Isomorphismen in der Kategorie der Paare topologischer Räume.

Ist (X, A) ein Paar von Räumen dann können wir $C_*(A)$ als Teilkomplex von $C_*(X)$ auffassen. Wir definieren den singulären Kettenkomplex des Paares (X, A) durch $C_*(X, A) := C_*(X)/C_*(A)$, und erhalten eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow C_*(A) \xrightarrow{\iota_\#} C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0 \quad (\text{IV.19})$$

wobei $\iota : A \rightarrow X$ die kanonische Inklusion bezeichnet. Ist $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren dann bildet die Kettenabbildung $f_\# : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$ den

Teilkomplex $C_*(A)$ nach $C_*(B)$ ab und induziert daher eine Kettenabbildung $f_{\#} : C_*(X, A) \rightarrow C_*(Y, B)$. In anderen Worten, das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \xrightarrow{\iota_{\#}^{(X,A)}} & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X, A) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow (f|_A)_{\#} & & \downarrow f_{\#} & & \downarrow f_{\#} \\
 0 & \longrightarrow & C_*(B) & \xrightarrow{\iota_{\#}^{(Y,B)}} & C_*(Y) & \longrightarrow & C_*(Y, B) \longrightarrow 0
 \end{array} \tag{IV.20}$$

Diese Zuordnung ist offensichtlich funktoriell, dh. ist $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ eine weitere Abbildung von Paaren, dann gilt $(g \circ f)_{\#} = g_{\#} \circ f_{\#}$, sowie $(\text{id}_{(X,A)})_{\#} = \text{id}_{C_*(X,A)}$. Wir erhalten daher einen Funktor von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der Kettenkomplexe.

IV.6.1. DEFINITION (Relative Homologiegruppen). Ist (X, A) ein Paar von Räumen, dann heißt $H_q(X, A) := H_q(C_*(X, A))$ die q -te relative Homologiegruppe des Paares (X, A) . Ist $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren, dann bezeichnen wir den von der Kettenabbildung $f_{\#} : C_*(X, A) \rightarrow C_*(Y, B)$ induzierten Homomorphismus mit $f_* : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$.

In diesem Zusammenhang werden die Gruppen $H_q(X)$ manchmal als *absolute* Homologiegruppen von X bezeichnet. Aus Proposition IV.1.2 erhalten wir sofort, siehe auch Bemerkung III.2.2

IV.6.2. PROPOSITION. Ordnen wir einem Paar von Räumen seine relative Homologie $H_*(X, A)$ und einer Abbildung von Paaren $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ den induzierten Homomorphismus $f_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$ zu, so erhalten wir einen kovarianten Funktor von der Kategorie der Paare topologischer Räume in die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen, dh. es gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ sowie $(\text{id}_{(X,A)})_* = \text{id}_{H_*(X,A)}$ für Abbildungen von Paaren $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ und $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$.

IV.6.3. BEMERKUNG. Betrachten wir das Paar (X, \emptyset) dann gilt $C_*(X, \emptyset) = C_*(X)/C_*(\emptyset) = C_*(X)$ und daher $H_*(X, \emptyset) = H_*(X)$, vgl. Beispiel IV.5.11. Die relative Homologie von Paaren kann daher als Verallgemeinerung der absoluten Homologie von Räumen betrachtet werden.

IV.6.4. DEFINITION (Relative Bettizahlen und Euler-Charakteristik). Die Kardinalzahl $b_q(X, A) := \text{rank}(H_q(X, A))$ wird die q -te relative Bettizahl des Paares (X, A) genannt. Ist $H_*(X, A)$ endlich erzeugt, dann definieren wir die relative Euler-Charakteristik des Paares (X, A) durch $\chi(X, A) := \sum_q (-1)^q b_q(X, A)$.

Wenden wir Satz IV.3.1 auf die kurze exakte Sequenz (IV.19) und (IV.20) an, so erhalten wir

IV.6.5. PROPOSITION (Lange exakte Sequenz eines Paares). Ein Paar von Räumen (X, A) induziert eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen:

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\delta_{q+1}} H_q(A) \xrightarrow{\iota_*} H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(A) \rightarrow \cdots$$

Dabei bezeichnet $\iota : A \rightarrow X$ die kanonische Inklusion, und der Homomorphismus $H_q(X) \rightarrow H_q(X, A)$ ist von der kanonischen Projektion $C_*(X) \rightarrow C_*(X, A)$ induziert. Diese Sequenz ist natürlich, dh. das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(X, A) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(A) & \xrightarrow{\iota_*} & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A) & \xrightarrow{\delta_q} & \cdots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(Y, B) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(B) & \xrightarrow{\iota_*} & H_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y, B) & \xrightarrow{\delta_q} & \cdots \end{array}$$

kommutiert für jede Abbildung von Paaren $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

IV.6.6. BEISPIEL. Es sei $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren. Sind zwei der drei Homomorphismen $(f|_A)_* : H_*(A) \rightarrow H_*(B)$, $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ und $f_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$ Isomorphismen, dann gilt dies auch für den dritten. Dies folgt aus der Natürlichkeitsaussage in Proposition IV.6.5 und Lemma IV.3.5. Alternativ können wir auch direkt Korollar IV.3.4 auf (IV.20) anwenden.

IV.6.7. BEISPIEL. Es sei (X, A) ein Paar von Räumen. Sind zwei der drei graduierten abelschen Gruppen $H_*(A)$, $H_*(X)$ und $H_*(X, A)$ endlich erzeugt, so gilt dies auch für die dritte und wir haben $\chi(X) = \chi(A) + \chi(X, A)$. Dies folgt aus Korollar IV.4.20 angewandt auf die kurze exakte Sequenz (IV.19).

IV.6.8. BEISPIEL. Es sei (X, A) ein Paar von Räumen. Es gilt $H_*(X, A) = 0$ genau dann, wenn die kanonische Inklusion $\iota : A \rightarrow X$ einen Isomorphismus $\iota_* : H_*(A) \xrightarrow{\cong} H_*(X)$ induziert. Dies folgt aus der langen exakten Sequenz in Proposition IV.6.5.

IV.6.9. PROPOSITION. *Ist A ein Retrakt von X , dann zerfällt die lange exakte Sequenz des Paares (X, A) in splittende kurze exakte Sequenzen*

$$0 \rightarrow H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow 0,$$

es gilt daher $H_q(X) \cong H_q(A) \oplus H_q(X, A)$ für alle q .

BEWEIS. Es bezeichne $\iota : A \rightarrow X$ die Inklusion. Nach Voraussetzung existiert eine stetige Abbildung $r : X \rightarrow A$ mit $r \circ \iota = \text{id}_A$. Es folgt $\text{id}_{H_*(A)} = (\text{id}_A)_* = (r \circ \iota)_* = r_* \circ \iota_*$, also ist $\iota_* : H_*(A) \rightarrow H_*(X)$ injektiv. Wir sehen daher, dass der Eihängungshomomorphismus in der langen exakten Sequenz des Paares (X, A) , siehe Proposition IV.6.5, verschwinden muss, denn $\text{img}(\delta) = \ker(\iota_*) = 0$. Dann gilt aber auch $\ker(\delta) = H_*(X, A)$, also muss der Homomorphismus $H_*(X) \rightarrow H_*(X, A)$ surjektiv sein. Daher ist $0 \xrightarrow{\iota_*} H_q(A) \rightarrow H_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow 0$ für jedes q eine kurze exakte Sequenz. Aus $r_* \circ \iota_* = \text{id}_{H_q(A)}$ und Proposition IV.3.7 folgt nun auch die zweite Behauptung. \square

Wir wollen noch eine Version von Proposition IV.6.5 für reduzierten Homologiegruppen herleiten.

IV.6.10. PROPOSITION (Lange exakte Sequenz eines Paares). *Ein Paar von Räumen (X, A) mit $A \neq \emptyset$ induziert eine lange exakte Sequenz*

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\delta_{q+1}} \tilde{H}_q(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(A) \rightarrow \cdots$$

wobei $\iota : A \rightarrow X$ die kanonische Inklusion bezeichnet. Diese Sequenz ist natürlich, dh. das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(X, A) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & \tilde{H}_q(A) & \xrightarrow{\iota_*} & \tilde{H}_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A) & \xrightarrow{\delta_q} & \cdots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(Y, B) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & \tilde{H}_q(B) & \xrightarrow{\iota_*} & \tilde{H}_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y, B) & \xrightarrow{\delta_q} & \cdots \end{array}$$

kommutiert für jede Abbildung von Paaren $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

BEWEIS. Betrachte die die Abbildung von Paaren $c : (X, A) \rightarrow (\{*\}, \{*\})$. Aus der Natürlichkeitsaussage in Proposition IV.6.5 erhalten wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{cccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(\{*\}, \{*\}) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(\{*\}) & \xrightarrow[\cong]{\iota_*} & H_q(\{*\}) & \longrightarrow & H_q(\{*\}, \{*\}) & \xrightarrow{\delta_q} & \cdots \\ & & \uparrow c_* & & \uparrow c_* & & \uparrow c_* & & \uparrow c_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(X, A) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(A) & \xrightarrow{\iota_*} & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A) & \xrightarrow{\delta_q} & \cdots \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow & & \parallel & & \\ \cdots & \dashrightarrow & H_{q+1}(X, A) & \dashrightarrow & \tilde{H}_q(A) & \xrightarrow{\iota_*} & \tilde{H}_q(X) & \dashrightarrow & H_q(X, A) & \dashrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Offensichtlich ist der mittlere obere horizontale Pfeil ein Isomorphismus. Aus der Exaktheit der oberen Zeile folgt daher $H_*(\{*\}, \{*\}) = 0$. Damit sind die beiden äußeren Spalten exakt. Nach Proposition IV.5.18 sind auch die beiden mittleren Spalten exakt. Die Homomorphismen in der mittleren Zeile induzieren daher Homomorphismen in der unteren Zeile (strichlierte Pfeile), sodass das gesamte Diagramm kommutiert. Wir können dieses Diagramm als kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen auffassen. Die ersten beiden Zeilen sind azyklisch, siehe Proposition IV.6.5. Nach Korollar IV.3.3 muss daher auch die dritte Zeile azyklisch sein, also ist die fragliche Sequenz exakt. \square

IV.6.11. PROPOSITION. *Ist $P \in X$, dann gilt $\tilde{H}_*(X) \cong H_*(X, \{P\})$.*

BEWEIS. Dies folgt aus der langen exakten Sequenz des Paares $(X, \{P\})$ in Proposition IV.6.10, denn $\tilde{H}_*(\{P\}) = 0$. \square

IV.6.12. PROPOSITION. *Ist $A \neq \emptyset$ ein Retrakt von X , dann zerfällt die lange exakte Sequenz des Paares (X, A) in splittende kurze exakte Sequenzen*

$$0 \rightarrow \tilde{H}_q(A) \rightarrow \tilde{H}_q(X) \rightarrow H_q(X, A) \rightarrow 0,$$

es gilt daher $\tilde{H}_q(X) \cong \tilde{H}_q(A) \oplus H_q(X, A)$ für alle q .

BEWEIS. Wir können genau wie im Beweis von Proposition IV.6.9 vorgehen, verwenden nun aber Proposition IV.6.10 anstatt Proposition IV.6.5. \square

Unter einem *Tripel von Räumen* verstehen wir ein Tripel (X, A, B) wobei X ein topologischer Raum ist und $B \subseteq A \subseteq X$ Teilräume sind. Unter einer *Abbildung von Tripel* $f : (X_1, A_1, B_1) \rightarrow (X_2, A_2, B_2)$ verstehen wir eine stetige Abbildung $f : X_1 \rightarrow X_2$ mit $f(A_1) \subseteq A_2$ und $f(B_1) \subseteq B_2$. Wir erhalten eine Kategorie, die *Kategorie der Tripel topologischer Räume*. Ist (X, A, B) ein Tripel von Räumen, dann induzieren die kanonischen Abbildungen von Paaren $\iota : (A, B) \rightarrow (X, B)$ und $j : (X, B) \rightarrow (X, A)$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \rightarrow C_*(A, B) \xrightarrow{\iota_\#} C_*(X, B) \xrightarrow{j_\#} C_*(X, A) \rightarrow 0. \quad (\text{IV.21})$$

Ist $f : (X_1, A_1, B_1) \rightarrow (X_2, A_2, B_2)$ eine Abbildung von Tripel, dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(A_1, B_1) & \xrightarrow{\iota_\#} & C_*(X_1, B_1) & \xrightarrow{j_\#} & C_*(X_1, A_1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow f_\# \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A_2, B_2) & \xrightarrow{\iota_\#} & C_*(X_2, B_2) & \xrightarrow{j_\#} & C_*(X_2, A_2) \longrightarrow 0 \end{array} \quad (\text{IV.22})$$

Wenden wir Satz IV.3.1 auf die kurze exakte Sequenz (IV.21) und (IV.22) an, so erhalten wir

IV.6.13. PROPOSITION (Lange exakte Sequenz eines Tripels). *Ein Tripel von Räumen (X, A, B) induziert eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen:*

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\delta_{q+1}} H_q(A, B) \xrightarrow{\iota_*} H_q(X, B) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(A, B) \rightarrow \cdots$$

Dabei bezeichnen $\iota : (A, B) \rightarrow (X, B)$ und $j : (X, B) \rightarrow (X, A)$ die kanonischen Inklusionen. Diese Sequenz ist natürlich, dh. das Diagramm

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(X_1, A_1) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(A_1, B_1) & \xrightarrow{\iota_*} & H_q(X_1, B_1) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X_1, A_1) & \xrightarrow{\delta_q} & \cdots \\ & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{q+1}(X_2, A_2) & \xrightarrow{\delta_{q+1}} & H_q(A_2, B_2) & \xrightarrow{\iota_*} & H_q(X_2, B_2) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X_2, A_2) & \xrightarrow{\delta_q} & \cdots \end{array}$$

kommutiert für jede Abbildung von Tripel $f : (X_1, A_1, B_1) \rightarrow (X_2, A_2, B_2)$.

IV.6.14. **BEMERKUNG.** Die lange exakte Sequenz des Tripel (X, A, \emptyset) stimmt mit der langen exakten Sequenz des Paares (X, A) überein, in diesem Fall reduziert sich (IV.21) zu (IV.19), vgl. Bemerkung IV.6.3. Auch der Einhängungshomomorphismus des Tripels $\delta^{(X, A, \emptyset)} : H_{*+1}(X, A) \rightarrow H_*(A, \emptyset) = H_*(A)$ stimmt daher mit dem Einhängungshomomorphismus des Paares $\delta^{(X, A)} : H_{*+1}(X, A) \rightarrow H_*(A)$ überein.

IV.6.15. **BEMERKUNG.** Ist (X, A, B) ein Tripel von Räumen, dann stimmt der Einhängungshomomorphismus $\delta^{(X, A, B)} : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A, B)$ in Proposition IV.6.13 mit der Komposition

$$H_q(X, A) \xrightarrow{\delta^{(X, A)}} H_{q-1}(A) = H_{q-1}(A, \emptyset) \xrightarrow{i_*} H_{q-1}(A, B)$$

überein. Dabei bezeichnet $i : (A, \emptyset) \rightarrow (A, B)$ die kanonische Inklusion und $\delta^{(X, A)}$ den Einhängungshomomorphismus der langen exakten Sequenz des Paares (X, A) , siehe IV.6.5. Dies folgt aus der Natürlichkeitsaussage in Proposition IV.6.13 angewandt auf die kanonische Inklusion $(X, A, \emptyset) \rightarrow (X, A, B)$ und Bemerkung IV.6.14 oben.

IV.6.16. **BEISPIEL.** Es sei (X, A, B) ein Tripel von Räumen und die kanonische Inklusion $i : B \rightarrow A$ induziere einen Isomorphismus $i_* : H_*(B) \xrightarrow{\cong} H_*(A)$. Dann gilt $H_*(A, B) = 0$, siehe Beispiel IV.6.8. Aus der langen exakten Sequenz in Proposition IV.6.13 folgt nun, dass die kanonische Inklusion $j : (X, B) \rightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus $j_* : H_*(X, B) \xrightarrow{\cong} H_*(X, A)$ induziert.

IV.6.17. **BEMERKUNG.** Sind (X_λ, A_λ) Paare von Räumen, $\lambda \in \Lambda$, so definieren wir ihre disjunkte Vereinigung durch

$$\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, A_\lambda) := \left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)$$

Zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_\lambda : (X_\lambda, A_\lambda) \rightarrow \bigsqcup_{\lambda' \in \Lambda} (X_{\lambda'}, A_{\lambda'})$ ist dies das Koproduct der (X_λ, A_λ) in der Kategorie der Paare topologischer Räume. Diese Inklusionen induzieren Homomorphismen $(\iota_\lambda)_* : H_*(X_\lambda, A_\lambda) \rightarrow H_*(\bigsqcup_{\lambda' \in \Lambda} (X_{\lambda'}, A_{\lambda'}))$, und wir erhalten einen Homomorphismus

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(X_\lambda, A_\lambda) \rightarrow H_*(\bigsqcup_{\lambda' \in \Lambda} (X_{\lambda'}, A_{\lambda'})).$$

Dies ist ein Isomorphismus, der relative Homologiefunktor vertauscht daher mit Koproducten, vgl. Proposition IV.5.15.

IV.7. Homotopieinvarianz. Als ersten wesentlichen Schritt zur Berechnung der Homologiegruppen wollen wir in diesem Abschnitt zeigen, dass homotope Abbildungen $f \simeq g : X \rightarrow Y$ denselben Homomorphismus in der Homologie induzieren, $f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$, siehe Satz IV.7.4 unten. Dies erfordert wesentlich mehr Arbeit als die analoge Eigenschaft des Fundamentalgruppenfunktors, vgl. Proposition I.3.24.

Wir definieren affine Abbildungen $\varphi_q^i : \Delta^{q+1} \rightarrow \Delta^q \times I$, $0 \leq i \leq q$, durch

$$\varphi_q^i(t_0, \dots, t_{q+1}) := (t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{q+1}; t_{i+1} + \dots + t_{q+1})$$

dh. $e_0 \mapsto (e_0, 0), \dots, e_i \mapsto (e_i, 0), e_{i+1} \mapsto (e_i, 1), \dots, e_{q+1} \mapsto (e_q, 1)$.

IV.7.1. LEMMA. Für die Abbildungen φ_i^q gilt, vgl. (IV.15).

- (i) $\varphi_q^{i-1} \circ \delta_{q+1}^i = \varphi_q^i \circ \delta_{q+1}^i$, $1 \leq i \leq q$.
- (ii) $\varphi_q^0 \circ \delta_{q+1}^0 = \text{inc}_1$.
- (iii) $\varphi_q^q \circ \delta_{q+1}^{q+1} = \text{inc}_0$.
- (iv) $\varphi_q^{i-1} \circ \delta_{q+1}^j = (\delta_q^{j-1} \times \text{id}_I) \circ \varphi_{q-1}^{i-1}$, $1 \leq i < j \leq q+1$.
- (v) $\varphi_q^i \circ \delta_{q+1}^j = (\delta_q^j \times \text{id}_I) \circ \varphi_{q-1}^{i-1}$, $0 \leq j < i \leq q$.

Dabei bezeichnet $\text{inc}_s : \Delta^q \rightarrow \Delta^q \times I$, $\text{inc}_s(t) := (t, s)$.

BEWEIS. Alle auftretenden Abbildungen sind Einschränkungen affiner Abbildung $\mathbb{R}^{q+1} \rightarrow \mathbb{R}^{q+1} \times \mathbb{R}$, es genügt daher die Gleichungen auf den Ecken $e_i \in \Delta^q$ zu verifizieren. \square

Für jeden topologischen Raum X und $q \geq 0$ definieren wir Homomorphismen $P_q := P_q^X : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X \times I)$ auf q -Simplexes $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ durch

$$P_q(\sigma) := \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^i,$$

vgl. Bemerkung IV.5.1. Für $q < 0$ sei $P_q := 0$. Wir können die P_q daher als einen Homomorphismus $P := P^X : C_*(X) \rightarrow C_{*+1}(X \times I)$ vom Grad 1 betrachten.

IV.7.2. PROPOSITION. Der Homomorphismus $P : C_*(X) \rightarrow C_{*+1}(X \times I)$ ist eine natürliche Kettenhomotopie von $(\text{inc}_0)_\#$ nach $(\text{inc}_1)_\#$, wobei $\text{inc}_s : X \rightarrow X \times I$, $\text{inc}_s(x) := (x, s)$. Dh. es gilt $\partial \circ P + P \circ \partial = (\text{inc}_1)_\# - (\text{inc}_0)_\#$, und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_*(X) & \xrightarrow{P^X} & C_{*+1}(X \times I) \\ f_\# \downarrow & & \downarrow (f \times \text{id}_I)_\# \\ C_*(Y) & \xrightarrow{P^Y} & C_{*+1}(Y \times I) \end{array}$$

kommutiert für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$.

BEWEIS. Die Natürlichkeitsaussage ist trivial, denn für jeden q -Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} (f \times \text{id}_I)_\#(P_q^X(\sigma)) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i (f \times \text{id}_I) \circ (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^i \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i ((f \circ \sigma) \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^i = P_q^Y(f \circ \sigma) = P_q^Y(f_\#(\sigma)), \end{aligned}$$

woraus wir $(f \times \text{id}_I)_\# \circ P^X = P^Y \circ f_\#$ schließen, siehe Bemerkung IV.5.1.

Nun zur Gleichung $\partial \circ P + P \circ \partial = (\text{inc}_1)_\# - (\text{inc}_0)_\#$. Sei wieder $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ ein q -Simplex. Es genügt dann

$$\partial_{q+1}(P_q(\sigma)) - P_{q-1}(\partial_q(\sigma)) = \text{inc}_1 \circ \sigma - \text{inc}_0 \circ \sigma \quad (\text{IV.23})$$

zu zeigen, siehe Bemerkung IV.5.1. Einsetzen in die Definitionen, Aufspalten der Summation und die Substitution $i \mapsto i - 1$ in der ersten Summe liefern:

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}(P_q(\sigma)) &= \sum_{j=0}^{q+1} \sum_{i=0}^q (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^i \circ \delta_{q+1}^j \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^i \circ \delta_{q+1}^j + \sum_{0 \leq j \leq i \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^i \circ \delta_{q+1}^j \\ &= - \sum_{1 \leq i \leq j \leq q+1} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^{i-1} \circ \delta_{q+1}^j + \sum_{0 \leq j \leq i \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^i \circ \delta_{q+1}^j \end{aligned}$$

Aus Lemma IV.7.1(i) erhalten wir durch Kürzen der Terme mit $i = j$:

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}(P_q(\sigma)) &= (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^0 \circ \delta_{q+1}^0 - (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^q \circ \delta_{q+1}^{q+1} \\ &\quad - \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^{i-1} \circ \delta_{q+1}^j \\ &\quad + \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^i \circ \delta_{q+1}^j \quad (\text{IV.24}) \end{aligned}$$

Aus Lemma IV.7.1(ii) folgt

$$(\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^0 \circ \delta_{q+1}^0 = (\sigma \times \text{id}_I) \circ \text{inc}_1 = \text{inc}_1 \circ \sigma. \quad (\text{IV.25})$$

Ebenso folgt aus Lemma IV.7.1(iii)

$$(\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^q \circ \delta_{q+1}^{q+1} = (\sigma \times \text{id}_I) \circ \text{inc}_0 = \text{inc}_0 \circ \sigma. \quad (\text{IV.26})$$

Aus Lemma IV.7.1(iv) und der Substitution $i \mapsto i + 1, j \mapsto j + 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^{i-1} \circ \delta_{q+1}^j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ (\delta_q^{j-1} \times \text{id}_I) \circ \varphi_{q-1}^{i-1} \\ &= \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{i+j} ((\sigma \circ \delta_q^j) \times \text{id}_I) \circ \varphi_{q-1}^i \end{aligned}$$

Aus Lemma IV.7.1(v) und der Substitution $i \mapsto i + 1$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^i \circ \delta_{q+1}^j \\ = \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ (\delta_q^j \times \text{id}_I) \circ \varphi^{i-1} q - 1 \\ = - \sum_{0 \leq j \leq i \leq q-1} (-1)^{i+j} ((\sigma \circ \delta_q^j) \times \text{id}_I) \circ \varphi_{q-1}^i \end{aligned}$$

Kombination der letzten beiden Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} - \sum_{1 \leq i < j \leq q+1} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^{i-1} \circ \delta_{q+1}^j + \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (\sigma \times \text{id}_I) \circ \varphi_q^i \circ \delta_{q+1}^j \\ = - \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^q (-1)^{i+j} ((\sigma \circ \delta_q^j) \times \text{id}_I) \circ \varphi_{q-1}^i = -P_{q-1}(\partial_q(\sigma)) \end{aligned}$$

Kombinieren wir dies mit (IV.24), (IV.25) und (IV.26) so erhalten wir die zu zeigende Gleichung (IV.23). \square

Es sei (X, A) ein Paar von Räumen und es bezeichne $\iota : A \rightarrow X$ die kanonische Inklusion. Aus der Natürlichkeitsaussage in Proposition IV.7.2 folgt, dass die Kettenhomotopie $P^X : C_*(X) \rightarrow C_{*+1}(X \times I)$ zu einer Kettenhomotopie $P^{(X,A)} : C_*(X, A) \rightarrow C_{*+1}(X \times I, A \times I)$ faktorisiert und das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} C_*(A) & \xrightarrow{\iota_\#} & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X, A) \\ \downarrow P^A & & \downarrow P^X & & \downarrow P^{(X,A)} \\ C_{*+1}(A \times I) & \xrightarrow{(\iota \times \text{id}_I)_\#} & C_{*+1}(X \times I) & \longrightarrow & C_{*+1}(X \times I, A \times I) \end{array}$$

Aus Proposition IV.7.2 erhalten wir sofort folgende Version für Paare.

IV.7.3. PROPOSITION. *Es sei (X, A) ein Paar von Räumen. Dann ist $P : C_*(X, A) \rightarrow C_{*+1}(X \times I, A \times I)$ eine natürliche Kettenhomotopie von $(\text{inc}_0)_\#$ nach $(\text{inc}_1)_\#$, wobei $\text{inc}_s : (X, A) \rightarrow (X \times I, A \times I)$, $\text{inc}_s(x) := (x, s)$. Dh. es gilt $\partial \circ P + P \circ \partial = (\text{inc}_1)_\# - (\text{inc}_0)_\#$, und das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} C_*(X, A) & \xrightarrow{P^{(X,A)}} & C_{*+1}(X \times I, A \times I) \\ \downarrow f_\# & & \downarrow (f \times \text{id}_I)_\# \\ C_*(Y, B) & \xrightarrow{P^{(Y,B)}} & C_{*+1}(Y \times I, B \times I) \end{array}$$

kommutiert für jede Abbildung von Paaren $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

Zwei Abbildungen von Paaren $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ heißen homotop, falls eine Abbildung von Paaren $H : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$ existiert. In diesem Fall sagen wir f und g sind homotope Abbildungen von Paaren und schreiben $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Insbesondere liefert $H : X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von $f : X \rightarrow Y$ nach $g : X \rightarrow Y$ und diese Homotopie erfüllt $H_t(A) \subseteq B$, für alle $t \in I$. Homotopie von Paaren definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Abbildungen von Paaren die mit der Komposition verträglich ist, dh. aus $f_1 \simeq g_1 : (X_1, A_1) \rightarrow (X_2, A_2)$ und $f_2 \simeq g_2 : (X_2, A_2) \rightarrow (X_3, A_3)$ folgt $(f_2 \circ f_1) \simeq (g_2 \circ g_1) : (X_1, A_1) \rightarrow (X_3, A_3)$. Die Menge der damit assoziierten Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit $[(X, A), (Y, B)]$, für die von $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ repräsentierte Äquivalenzklassen schreiben wir $[f] \in [(X, A), (Y, B)]$. Wir erhalten eine wohldefinierte Verknüpfung $[(X_1, A_1), (X_2, A_2)] \times [(X_2, A_2), (X_3, A_3)] \rightarrow [(X_1, A_1), (X_3, A_3)]$, $([f], [g]) \mapsto [g \circ f]$. Dies führt zu einer Kategorie, deren Objekte Paare topologischer Räume, und deren Morphismen gerade die Homotopieklassen von Abbildungen von Paaren sind. Eine Abbildung von Paaren $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ wird *Homotopieäquivalenz von Paaren* genannt, falls eine Abbildung von Paaren $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$ existiert, sodass $g \circ f \simeq \text{id}_{(X, A)} : (X, A) \rightarrow (X, A)$ und $f \circ g \simeq \text{id}_{(Y, B)} : (Y, B) \rightarrow (Y, B)$. In diesem Fall sagen wir (X, A) und (Y, B) sind homotopieäquivalent und schreiben $(X, A) \simeq (Y, B)$. Dies ist genau dann der Fall wenn (X, A) und (Y, B) in der oben besprochenen Kategorie isomorph sind.

Beachte, dass zwei Abbildungen von Paaren $f, g : (X, \emptyset) \rightarrow (Y, \emptyset)$ genau dann homotop sind, wenn die Abbildungen $f : X \rightarrow Y$ und $g : X \rightarrow Y$ homotop sind. Ebenso sind die Paare (X, \emptyset) und (Y, \emptyset) genau dann homotopieäquivalent, wenn die Räume X und Y homotopieäquivalent sind.

IV.7.4. SATZ (Homotopieinvarianz). *Je zwei homotope Abbildungen von Paaren $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induzieren kettenhomotope Komplexabbildungen $f_{\#} \simeq g_{\#} : C_*(X, A) \rightarrow C_*(Y, B)$. Insbesondere stimmen die in der Homologie induzierten Homomorphismen überein, $f_* = g_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$.*

BEWEIS. Nach unserer Voraussetzung existiert eine Homotopie von Paaren $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ von $F_0 = F \circ \text{inc}_0 = f$ nach $F_1 = F \circ \text{inc}_1 = g$. Diese induziert eine Kettenabbildung $F_{\#} : C_*(X \times I, A \times I) \rightarrow C_*(Y, B)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} g_{\#} - f_{\#} &= (F \circ \text{inc}_1)_{\#} - (F \circ \text{inc}_0)_{\#} = F_{\#} \circ (\text{inc}_1)_{\#} - F_{\#} \circ (\text{inc}_0)_{\#} \\ &= F_{\#} \circ ((\text{inc}_1)_{\#} - (\text{inc}_0)_{\#}) = F_{\#} \circ (\partial \circ P + P \circ \partial) = \partial \circ F_{\#} \circ P + F_{\#} \circ P \circ \partial, \end{aligned}$$

wobei $P : C_*(X, A) \rightarrow C_{*+1}(X \times I, A \times I)$ die Kettenhomotopie aus Proposition IV.7.3 bezeichnet. Also ist $F_{\#} \circ P : C_*(X, A) \rightarrow C_{*+1}(Y, B)$ eine Kettenhomotopie von $f_{\#}$ nach $g_{\#}$. Nach Proposition IV.2.4 gilt daher auch $f_* = g_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$. \square

IV.7.5. KOROLLAR (Homotopieinvarianz). *Homotope Abbildungen $f \simeq g : X \rightarrow Y$ induzieren kettenhomotope Komplexabbildungen $f_{\#} \simeq g_{\#} : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$.*

Insbesondere stimmen die in der (reduzierten) Homologie induzierten Homomorphismen überein, dh. $f_* = g_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$ und $f_* = g_* : \tilde{H}_*(X) \rightarrow \tilde{H}_*(Y)$.

BEWEIS. Dies folgt aus Satz IV.7.4, denn wir können f und g als homotope Abbildungen von Paaren auffassen, $f \simeq g : (X, \emptyset) \rightarrow (Y, \emptyset)$. \square

IV.7.6. BEMERKUNG. Nach Korollar IV.7.7 definiert die singuläre Homologie einen Funktor von der Kategorie der topologischen Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen in die Kategorie der graduierten abelschen Gruppen. Der Homologiefunktor faktorisiert daher durch die Kategorie der topologischen Räume und Homotopieklassen stetiger Abbildungen. Analoges gilt für die reduzierte Homologie und die relative Homologie.

IV.7.7. KOROLLAR. Jede Homotopieäquivalenz von Paaren $f : (X, A) \xrightarrow{\cong} (Y, B)$ induziert einen Isomorphismus $f_* : H_*(X, A) \xrightarrow{\cong} H_*(Y, B)$. Homotopieäquivalente Paare haben daher isomorphe Homologiegruppen. Ebenso induziert eine Homotopieäquivalenz $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ Isomorphismen $f_* : H_*(X) \xrightarrow{\cong} H_*(Y)$ und $f_* : \tilde{H}_*(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_*(Y)$. Insbesondere haben homotopieäquivalente Räume isomorphe (reduzierte) Homologiegruppen.

BEWEIS. Sei also $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$, sodass $g \circ f \simeq \text{id}_{(X,A)}$ und $f \circ g \simeq \text{id}_{(Y,B)}$. Mittels Satz IV.7.4 erhalten wir $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = (\text{id}_{(X,A)})_* = \text{id}_{H_*(X,A)}$ und $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\text{id}_{(Y,B)})_* = \text{id}_{H_*(Y,B)}$. Also sind $f_* : H_*(X, A) \rightarrow H_*(Y, B)$ und $g_* : H_*(Y, B) \rightarrow H_*(X, A)$ zueinander inverse Isomorphismen. Mittels Bemerkung IV.7.6 könnten wir dies auch direkt aus Bemerkung III.2.1 folgern. Die anderen Aussagen folgen analog aus Korollar IV.7.5. \square

IV.7.8. KOROLLAR. Kontrahierbare Räume sind azyklisch.

BEWEIS. Dies folgt aus Korollar IV.7.7, denn kontrahierbare Räume sind zum einpunktigen Raum homotopieäquivalent. \square

IV.7.9. KOROLLAR. Es sei $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren, sodass $f : X \xrightarrow{\cong} Y$ und $f|_A : A \xrightarrow{\cong} B$ beides Homotopieäquivalenzen sind.³¹ Dann induziert f einen Isomorphismus $f_* : H_*(X, A) \xrightarrow{\cong} H_*(Y, B)$.

³¹Wir setzen hier nicht voraus, dass $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Homotopieäquivalenz von Paaren ist, dieser Fall wäre ja durch Korollar IV.7.7 abgedeckt. Die Abbildung $f : (I, \{0, 1\}) \rightarrow (I, I \setminus \{\frac{1}{2}\})$ erfüllt die Voraussetzungen von Korollar IV.7.9 ist jedoch keine Homotopieäquivalenz von Paaren.

BEWEIS. Nach Korollar IV.7.7 induziert f Isomorphismen $f_* : H_*(X) \xrightarrow{\cong} H_*(Y)$ und $(f|_A)_* : H_*(A) \xrightarrow{\cong} H_*(B)$. Aus der Natürlichkeitsaussage in Proposition IV.6.5 erhalten wir folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc} H_q(A) & \xrightarrow{\iota_*} & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(A) & \xrightarrow{\iota_*} & H_{q-1}(X) \\ \cong \downarrow (f|_A)_* & & \cong \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \cong \downarrow (f|_A)_* & & \cong \downarrow f_* \\ H_q(B) & \xrightarrow{\iota_*} & H_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y, B) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(B) & \longrightarrow & H_{q-1}(Y) \end{array}$$

Nach Lemma IV.3.5 muss daher auch $f_* : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$ ein Isomorphismus sein. \square

IV.7.10. BEISPIEL. Aus der langen exakten Sequenz des Paares (D^n, S^{n-1}) , siehe Proposition IV.6.10,

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(D^n) \rightarrow H_q(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{q-1}(D^n) \rightarrow \cdots$$

und $\tilde{H}_*(D^n) = 0$, siehe Korollar IV.7.8, sehen wir, dass der Einhängungshomomorphismus einen Isomorphismus $\delta : H_q(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$ liefert, $n \geq 1$.

IV.7.11. BEISPIEL. Die kanonischen Inklusionen $S^{n-1} \rightarrow D^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sind Homotopieäquivalenzen. Nach Korollar IV.7.7 induzieren sie daher Isomorphismen $H_*(S^{n-1}) \cong H_*(D^n \setminus \{0\}) \cong H_*(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

IV.7.12. BEISPIEL. Die Inklusionen $O_n \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ und $U_n \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ sind Homotopieäquivalenzen, siehe Proposition I.6.8 und Proposition I.6.1. Sie induzieren daher Isomorphismen $H_*(O_n) \cong H_*(GL_n(\mathbb{R}))$ bzw. $H_*(U_n) \cong H_*(GL_n(\mathbb{C}))$, siehe Korollar IV.7.7.

IV.7.13. BEISPIEL. Betrachte den Kegel CX über einem topologischen Raum $X \neq \emptyset$. Wir bezeichnen mit $\iota : X \rightarrow CX$ die kanonische Einbettung und fassen X als Teilraum von CX auf, siehe Beispiel I.3.18. Nach Korollar IV.7.8 gilt $\tilde{H}_*(CX) = 0$, denn der Kegel CX ist kontrahierbar. Aus der langen exakten Sequenz des Paares (CX, X) , siehe Proposition IV.6.10,

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_q(CX) \rightarrow H_q(CX, X) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{q-1}(X) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_{q-1}(CX) \rightarrow \cdots$$

sehen wir daher, dass der Einhängungshomomorphismus einen Isomorphismus $\delta : H_q(CX, X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{q-1}(X)$ liefert. Da $(CS^{n-1}, S^{n-1}) \cong (D^n, S^{n-1})$, können wir dies als Verallgemeinerung von Beispiel IV.7.10 betrachten.

IV.7.14. PROPOSITION (Homologie des Abbildungszyinders). *Es sei $\varphi : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung und $Y \neq \emptyset$. Dann existiert eine lange exakte Sequenz*

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(Z_\varphi, Y) \xrightarrow{\delta_{q+1}} \tilde{H}_q(Y) \xrightarrow{\varphi_*} \tilde{H}_q(X) \rightarrow H_q(Z_\varphi, Y) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

Dabei fassen wir Y als Teilraum des Abbildungszyinders Z_φ auf, siehe Beispiel I.3.20.

BEWEIS. Es bezeichne $j : Y \rightarrow Z_\varphi$ die kanonische Einbettung. Wir betrachten die lange exakte Sequenz des Paares (Z_φ, Y) , siehe Proposition IV.6.10,

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(Z_\varphi, Y) \xrightarrow{\delta_{q+1}} \tilde{H}_q(Y) \xrightarrow{j_*} \tilde{H}_q(Z_\varphi) \rightarrow H_q(Z_\varphi, Y) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

In Beispiel I.3.20 haben wir gesehen, dass die kanonische Einbettung $\iota : X \rightarrow Z_\varphi$ eine Homotopieäquivalenz ist, nach Korollar IV.7.7 induziert sie daher einen Isomorphismus $\iota_* : \tilde{H}_*(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_*(Z_\varphi)$. Weiters ist $\iota \circ \varphi \simeq j$ und daher $\iota_* \circ \varphi_* = j_*$, siehe Korollar IV.7.5. Ersetzen wir in obiger Sequenz $\tilde{H}_q(Z_\varphi)$ durch $\tilde{H}_q(X)$, so erhalten wir die gesuchte lange exakte Sequenz. \square

IV.8. Baryzentrische Unterteilung. Neben der Homotopieinvarianz ist der Ausschneidungssatz IV.9.1 unten die zweite wesentliche Eigenschaft des Homologiefunktors. Dieser ist ein einfaches Korollar aus Satz IV.8.9 am Ende dieses Abschnitts. Ein weiteres einfaches Korollar aus Satz IV.8.9 ist die Existenz der Mayer–Vietoris Sequenz, diese werden wir in Abschnitt IV.10 besprechen.

Ist $q \geq 0$ und $\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})$ eine Permutation, dann definieren wir affine Abbildungen $\beta_q^\pi : \Delta^q \rightarrow \Delta^q$ auf den Ecken $e_i \in \Delta^q$ durch

$$\beta_q^\pi(e_i) := \frac{1}{i+1} (e_{\pi(0)} + \cdots + e_{\pi(i)}), \quad 0 \leq i \leq q. \quad (\text{IV.27})$$

Für $(t_0, \dots, t_q) \in \Delta^q$ gilt daher $\beta_q^\pi(t_0, \dots, t_q) = \sum_{i=0}^q t_i \beta_q^\pi(e_i)$.

IV.8.1. LEMMA. Für die Abbildungen β_q^π , $q \geq 1$, gilt, vgl. (IV.15):

- (i) $\beta_q^\pi \circ \delta_q^i = \beta_q^{\pi \circ (i, i+1)} \circ \delta_q^i$, falls $0 \leq i < q$ und $\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})$.
- (ii) $\delta_q^j \circ \beta_{q-1}^\tau = \beta_q^{(j, \dots, q) \circ \hat{\tau}} \circ \delta_q^j$, falls $0 \leq j \leq q$ und $\tau \in (\{0, \dots, q-1\})$.

Wir verwenden hier die Zykelschreibweise für Permutationen, etwa bezeichnet $(i, i+1)$ die Transposition von i und $i+1$. Für $\tau \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q-1\})$ bezeichnet $\hat{\tau} \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})$ die Permutation $\hat{\tau}(q) := q$ und $\hat{\tau}(i) := \tau(i)$ für $0 \leq i < q$.

BEWEIS. Alle auftretenden Abbildungen $\Delta^{q-1} \rightarrow \Delta^q$ sind Einschränkungen affiner Abbildungen $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^{q+1}$. Es genügt daher die Gleichungen auf den Ecken $e_i \in \Delta^{q-1}$ zu verifizieren. \square

Für jeden topologischen Raum X und $q \geq 0$ definieren wir nun Homomorphismen $b_q := b_q^X : C_q(X) \rightarrow C_q(X)$ auf q -Simplizes $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ durch

$$b_q^X(\sigma) := \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi) \sigma \circ \beta_q^\pi.$$

Für $q < 0$ setzen wir $b_q^X := 0$. Wir können die b_q^X als Homomorphismus graduerter abelscher Gruppen $b = b^X : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$ auffassen. Dieser Homomorphismus wird die *baryzentrische Unterteilung* genannt.

IV.8.2. PROPOSITION. Die baryzentrische Unterteilung ist eine natürliche Kettenabbildung, dh. es gilt $\partial^X \circ b^X = b^X \circ \partial^X$ sowie $f_{\#} \circ b^X = b^Y \circ f_{\#}$ für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$. Weiters ist $b_0^X = \text{id}_{C_0(X)}$.

BEWEIS. Die Natürlichkeit ist offensichtlich, denn für eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und jeden q -Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ gilt

$$\begin{aligned} f_{\#}(b_q^X(\sigma)) &= f_{\#}\left(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi) \sigma \circ \beta_q^\pi\right) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi) f \circ \sigma \circ \beta_q^\pi = b_q^Y(f \circ \sigma) = b_q^Y(f_{\#}(\sigma)), \end{aligned}$$

also $f_{\#} \circ b_q^X = b_q^Y \circ f_{\#}$. Auch $b_0^X = \text{id}_{C_0(X)}$ ist trivialerweise wahr.

Sei nun $q \geq 1$ und $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ ein q -Simplex. Es ist noch $\partial_q(b_q(\sigma)) = b_{q-1}(\partial_q(\sigma))$ zu zeigen. Aus Lemma IV.8.1(ii) erhalten wir:

$$\begin{aligned} b_{q-1}(\partial_q(\sigma)) &= b_{q-1}\left(\sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma \circ \delta_q^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^q (-1)^j \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q-1\})} \text{sign}(\tau) \sigma \circ \delta_q^j \circ \beta_{q-1}^\tau \\ &= \sum_{j=0}^q \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q-1\})} (-1)^j \text{sign}(\tau) \sigma \circ \beta_q^{(j, \dots, q) \circ \hat{\tau}} \circ \delta_q^q \\ &= (-1)^q \sum_{j=0}^q \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q-1\})} \text{sign}((j, \dots, q) \circ \hat{\tau}) \sigma \circ \beta_q^{(j, \dots, q) \circ \hat{\tau}} \circ \delta_q^q \\ &= (-1)^q \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi) \sigma \circ \beta_q^\pi \circ \delta_q^q \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \partial_q(b_q(\sigma)) &= \partial_q\left(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi) \sigma \circ \beta_q^\pi\right) \\ &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi) \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ \beta_q^\pi \circ \delta_q^i \\ &= b_{q-1}(\partial_q(\sigma)) + \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi) \sigma \circ \beta_q^\pi \circ \delta_q^i \end{aligned}$$

Es genügt daher $\sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi) \sigma \circ \beta_q^\pi \circ \delta_q^i = 0$ für alle $0 \leq i < q$ zu zeigen. Dies folgt nun aus Lemma IV.8.1(i), denn

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi) \sigma \circ \beta_q^\pi \circ \delta_q^i &= \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi) \sigma \circ \beta_q^{\pi \circ (i, i+1)} \circ \delta_q^i \\ &= - \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi \circ (i, i+1)) \sigma \circ \beta_q^{\pi \circ (i, i+1)} \circ \delta_q^i \\ &= - \sum_{\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})} \text{sign}(\pi) \sigma \circ \beta_q^\pi \circ \delta_q^i = 0 \quad \square \end{aligned}$$

IV.8.3. LEMMA. *Es seien $\varphi^X, \psi^X : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$ zwei natürliche Kettenabbildungen, dh. φ^X und ψ^X sind für jeden topologischen Raum X definiert, und die Diagramme*

$$\begin{array}{ccc} C_*(X) & \xrightarrow{\varphi^X} & C_*(X) & & C_*(X) & \xrightarrow{\psi^X} & C_*(X) \\ & \downarrow f_\# & & & \downarrow f_\# & & \\ C_*(Y) & \xrightarrow{\varphi^Y} & C_*(Y) & & C_*(Y) & \xrightarrow{\psi^Y} & C_*(Y) \end{array}$$

kommutieren für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$. Weiters sei $\varphi_0^X = \psi_0^X : C_0(X) \rightarrow C_0(Y)$. Dann existiert eine natürliche Kettenhomotopie $h^X : C_*(X) \rightarrow C_{*+1}(X)$ von φ^X nach ψ^X , dh. es gilt $\psi^X - \varphi^X = \partial^X \circ h^X + h^X \circ \partial^X$ und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C_*(X) & \xrightarrow{h^X} & C_{*+1}(X) \\ & \downarrow f_\# & \downarrow f_\# \\ C_*(Y) & \xrightarrow{h^Y} & C_{*+1}(Y) \end{array}$$

kommutiert für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$.

BEWEIS. Wir werden $h_q^X : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$ mittels Induktion nach q für alle Räume X gleichzeitig konstruieren. Zunächst setze wir $h_q^X :=$ falls $q \leq 0$. Dann gilt jedenfalls $\psi_q^X - \varphi_q^X = \partial_{q+1}^X \circ h_q^X + h_{q-1}^X \circ \partial_q^X$ sowie $f_\# \circ h_q^X = h_q^Y \circ f_\#$ für jedes $q \leq 0$ und jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$. Dabei haben wir in der ersten Gleichung die Voraussetzung $\varphi_0^X = \psi_0^X$ verwendet.

Für den Induktionsschritt sei nun $q \geq 1$. Laut Induktionsvoraussetzung existieren Homomorphismen $h_k^X : C_k(X) \rightarrow C_{k+1}(X)$, $k < q$, sodass $\psi_k^X - \varphi_k^X = \partial_{k+1}^X \circ h_k^X + h_{k-1}^X \circ \partial_k^X$ sowie $f_\# \circ h_k^X = h_k^Y \circ f_\#$ für jedes $k < q$ und jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$. Für den Induktionsschritt sind nun Homomorphismen $h_q^X : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$ zu konstruieren, die diese Gleichungen mit $k = q$ erfüllen.

Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \partial_q^X \circ (\psi_q^X - \varphi_q^X - h_{q-1}^X \circ \partial_q^X) \\ = (\psi_{q-1}^X - \varphi_{q-1}^X - \partial_q^X \circ h_{q-1}^X) \circ \partial_q^X = h_{q-2}^X \circ \partial_{q-1}^X \circ \partial_q^X = 0. \end{aligned}$$

Im ersten Gleichheitszeichen haben wir verwendet, dass φ^X und ψ^X Kettenabbildungen sind, im zweiten ist die Induktionsvoraussetzung eingegangen, und im dritten schließlich $\partial^2 = 0$. Wenden wir dies auf $\text{id}_{\Delta^q} \in C_q(\Delta^q)$ an, so erhalten wir

$$(\psi_q^{\Delta^q} - \varphi_q^{\Delta^q} - h_{q-1}^{\Delta^q} \circ \partial_q^{\Delta^q})(\text{id}_{\Delta^q}) \in Z_q(\Delta^q).$$

Nun ist Δ^q kontrahierbar, also $H_q(\Delta^q) = 0$, siehe Korollar IV.7.8. Es existiert daher $c_{q+1} \in C_{q+1}(\Delta^q)$ mit

$$\partial_{q+1}^{\Delta^q}(c_{q+1}) = (\psi_q^{\Delta^q} - \varphi_q^{\Delta^q} - h_{q-1}^{\Delta^q} \circ \partial_q^{\Delta^q})(\text{id}_{\Delta^q}). \quad (\text{IV.28})$$

Für jeden topologischen Raum X definieren wir nun einen Homomorphismus $h_q^X : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$ auf q -Simplizes $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ durch $h_q^X(\sigma) := \sigma_{\#}(c_{q+1})$. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, gilt dann

$$f_{\#}(h_q^X(\sigma)) = f_{\#}(\sigma_{\#}(c_{q+1})) = (f \circ \sigma)_{\#}(c_{q+1}) = h_q^Y(f \circ \sigma) = h_q^Y(f_{\#}(\sigma))$$

und somit $f_{\#} \circ h_q^X = h_q^Y \circ f_{\#}$. Damit ist die Natürlichkeit von h_q^X gezeigt. Weiters haben wir für jeden q -Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ offensichtlich $\sigma = \sigma \circ \text{id}_{\Delta^q} = \sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta^q})$ und daher:

$$\begin{aligned} (\psi_q^X - \varphi_q^X - h_{q-1}^X \circ \partial_q^X)(\sigma) &= (\psi_q^X - \varphi_q^X - h_{q-1}^X \circ \partial_q^X)(\sigma_{\#}(\text{id}_{\Delta^q})) \\ &= \sigma_{\#}((\psi_q^{\Delta^q} - \varphi_q^{\Delta^q} - h_{q-1}^{\Delta^q} \circ \partial_q^{\Delta^q})(\text{id}_{\Delta^q})) \\ &= \sigma_{\#}(\partial_{q+1}^{\Delta^q}(c_{q+1})) \\ &= \partial_{q+1}^X(\sigma_{\#}(c_{q+1})) \\ &= \partial_{q+1}^X(h_q^X(\sigma)) \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Gleichheitszeichen die Natürlichkeit von φ_q^X , ψ_q^X und h_{q-1}^X verwendet, und im dritten Gleichheitszeichen ist die Definition von c_{q+1} eingegangen, siehe (IV.28). Somit gilt $\psi_q^X - \varphi_q^X - h_{q-1}^X \circ \partial_q^X = \partial_{q+1}^X \circ h_q^X$, und der Induktionsschritt ist gezeigt. \square

IV.8.4. BEMERKUNG. Die Methode im Beweis von Lemma IV.8.3 oben wird die *Methode der azyklischen Modelle* genannt.

IV.8.5. PROPOSITION. *Es existiert eine natürliche Kettenhomotopie von der baryzentrischen Unterteilung zur Identität, dh. zu jedem topologischen Raum X gibt es einen Homomorphismus $h^X : C_*(X) \rightarrow C_{*+1}(X)$, sodass $b^X - \text{id}_{C_*(X)} = \partial^X \circ h^X + h^X \circ \partial^X$ und $f_{\#} \circ h^X = h^Y \circ f_{\#}$ für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gilt. Insbesondere induziert die baryzentrische Unterteilung die Identität in der Homologie, $b_*^X = \text{id}_{H_*(X)} : H_*(X) \rightarrow H_*(X)$.*

BEWEIS. Wende Lemma IV.8.3 auf $\varphi^X := b^X$ und $\psi^X := \text{id}_{C_*(X)}$ an. Beachte, dass beides natürliche Kettenabbildungen sind, die auf $C_0(X)$ übereinstimmen, vgl. Proposition IV.8.2. \square

Ist $\sigma : \Delta^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein q -Simplex, dann definieren wir seinen *Durchmesser* als

$$\text{diam}(\sigma) := \max_{s,t \in \Delta^q} \|\sigma(s) - \sigma(t)\|.$$

Wir nennen ein Simplex $\sigma : \Delta^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ *affin* falls σ Einschränkung einer affinen Abbildung $\mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist.

IV.8.6. LEMMA. *Es sei $\sigma : \Delta^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein affiner q -Simplex, $q \geq 0$ und $\pi \in \mathfrak{S}(\{0, \dots, q\})$. Dann ist auch $\sigma \circ \beta_q^\pi : \Delta^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein affiner q -Simplex und es gilt*

$$\text{diam}(\sigma \circ \beta_q^\pi) \leq \frac{q}{q+1} \text{diam}(\sigma).$$

Insbesondere ist $(b_q)^m(\sigma)$ eine Linearkombination affiner Simplizes die alle Durchmesser kleiner oder gleich $(\frac{q}{q+1})^m$ haben.

BEWEIS. Sei also $\sigma : \Delta^q \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein affiner q -Simplex. Wir zeigen zunächst

$$\text{diam}(\sigma) = \max_{0 \leq i, j \leq q} \|\sigma(e_i) - \sigma(e_j)\|. \quad (\text{IV.29})$$

Offensichtlich ist $\text{diam}(\sigma) \geq \max_{0 \leq i, j \leq q} \|\sigma(e_i) - \sigma(e_j)\|$, es bleibt daher nur die umgekehrte Ungleichung zu zeigen. Sind $s = (s_0, \dots, s_q) = \sum_{i=0}^q s_i e_i \in \Delta^q$ und $t = (t_0, \dots, t_q) = \sum_{j=0}^q t_j e_j \in \Delta^q$ dann gilt auf Grund der Affinität von σ

$$\begin{aligned} \sigma(s) - \sigma(t) &= \sigma\left(\sum_{i=0}^q s_i e_i\right) - \sigma\left(\sum_{j=0}^q t_j e_j\right) = \sum_{i=0}^q s_i \sigma(e_i) - \sum_{j=0}^q t_j \sigma(e_j) \\ &= \sum_{0 \leq i, j \leq q} s_i t_j \sigma(e_i) - \sum_{0 \leq i, j \leq q} s_i t_j \sigma(e_j) = \sum_{0 \leq i, j \leq q} s_i t_j (\sigma(e_i) - \sigma(e_j)). \end{aligned}$$

Dabei haben wir im dritten Gleichheitszeichen $\sum_{i=0}^q s_i = 1 = \sum_{j=0}^q t_j$ verwendet. Jedenfalls folgt nun aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|\sigma(s) - \sigma(t)\| &\leq \sum_{i,j} s_i t_j \|\sigma(e_i) - \sigma(e_j)\| \leq \sum_{0 \leq i, j \leq q} s_i t_j \max_{0 \leq i, j \leq q} \|\sigma(e_i) - \sigma(e_j)\| \\ &= \left(\sum_{i=0}^q s_i\right) \left(\sum_{j=0}^q t_j\right) \max_{0 \leq i, j \leq q} \|\sigma(e_i) - \sigma(e_j)\| = \max_{0 \leq i, j \leq q} \|\sigma(e_i) - \sigma(e_j)\|. \end{aligned}$$

Es folgt daher $\text{diam}(\sigma) \leq \max_{0 \leq i, j \leq q} \|\sigma(e_i) - \sigma(e_j)\|$, womit nun (IV.29) gezeigt wäre. Mit σ ist auch $\sigma \circ \beta_q^\pi$ affin, und wir erhalten aus (IV.29)

$$\text{diam}(\sigma \circ \beta_q^\pi) = \max_{0 \leq i, j \leq q} \|\sigma(\beta_q^\pi(e_i)) - \sigma(\beta_q^\pi(e_j))\|. \quad (\text{IV.30})$$

Es ist nun, siehe (IV.27),

$$\begin{aligned}
\sigma(\beta_q^\pi(e_i)) - \sigma(\beta_q^\pi(e_j)) &= \sigma\left(\frac{1}{i+1} \sum_{l=0}^i e_{\pi(l)}\right) - \sigma\left(\frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^j e_{\pi(k)}\right) \\
&= \frac{1}{i+1} \sum_{l=0}^i \sigma(e_{\pi(l)}) - \frac{1}{j+1} \sum_{k=0}^j \sigma(e_{\pi(k)}) \\
&= \frac{1}{(i+1)(j+1)} \left(\sum_{l=0}^i \sum_{k=0}^j \sigma(e_{\pi(l)}) - \sum_{l=0}^i \sum_{k=0}^j \sigma(e_{\pi(k)}) \right) \\
&= \frac{1}{(i+1)(j+1)} \sum_{l=0}^i \sum_{0 \leq k \leq j, k \neq l} (\sigma(e_{\pi(l)}) - \sigma(e_{\pi(k)}))
\end{aligned}$$

Für $i \leq j$ folgt daher aus der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\|\sigma(\beta_q^\pi(e_i)) - \sigma(\beta_q^\pi(e_j))\| &\leq \frac{1}{(i+1)(j+1)} \sum_{l=0}^i \sum_{0 \leq k \leq j, k \neq l} \text{diam}(\sigma) \\
&= \frac{j}{j+1} \text{diam}(\sigma) \leq \frac{q}{q+1} \text{diam}(\sigma).
\end{aligned}$$

Zusammen mit (IV.30) erhalten wir $\text{diam}(\sigma \circ \beta_q^\pi) \leq \frac{q}{q+1} \text{diam}(\sigma)$. Die verbleibenden Behauptungen sind nun trivial. \square

Ist \mathcal{U} eine Familie von Teilmengen eines topologischen Raums X , dann bezeichnen wir mit $C_q^\mathcal{U}(X)$ die von $C_q(U)$, $U \in \mathcal{U}$, erzeugte Untergruppe von $C_q(X)$. Elemente von $C_q^\mathcal{U}(X)$ sind daher Linearkombinationen von q -Simplizes die jeder in einer der Mengen $U \in \mathcal{U}$ liegen. Die $C_q^\mathcal{U}(X)$ bilden offensichtlich einen Teilkomplex $C_*^\mathcal{U}(X) \subseteq C_*(X)$.

IV.8.7. PROPOSITION. *Es sei \mathcal{U} eine Familie von Teilmengen eines topologischen Raums X , sodass $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overset{\circ}{U} = X$. Weiters sei $c \in C_q(X)$. Dann existiert $m \in \mathbb{N}_0$, sodass $(b_q)^m(c) \in C_q^\mathcal{U}(X)$.*

BEWEIS. O.B.d.A. sei $c = \sigma$, wobei $\sigma : \Delta^q \rightarrow X$ ein q -Simplex ist. Betrachte die offene Überdeckung $\mathcal{V} := \{\sigma^{-1}(\overset{\circ}{U}) : U \in \mathcal{U}\}$ von Δ^q . Da Δ^q kompakt ist, existiert $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft: ist $A \subseteq \Delta^q$ und $\text{diam}(A) \leq \varepsilon$ dann existiert $V \in \mathcal{V}$ mit $A \subseteq V$, siehe Lemma I.1.28. Nach Lemma IV.8.6 existiert $m \in \mathbb{N}_0$, sodass $(b_q^{\Delta^q})^m(\text{id}_{\Delta^q})$ Linearkombination von Simplizes ist, die alle Durchmesser höchstens ε haben. Es gilt daher $(b_q^{\Delta^q})^m(\text{id}_{\Delta^q}) \in C_q^\mathcal{V}(\Delta^q)$. Wegen der Natürlichkeit der baryzentrischen Unterteilung, siehe Proposition IV.8.2, folgt

$$(b_q^X)^m(\sigma) = (b_q^X)^m(\sigma_\#(\text{id}_{\Delta^q})) = \sigma_\#((b_q^{\Delta^q})^m(\text{id}_{\Delta^q})) \in \sigma_\#(C_q^\mathcal{V}(\Delta^q)) \subseteq C_q^\mathcal{U}(X). \quad \square$$

Ist \mathcal{U} eine Familie von Teilmengen von X , dann schreiben wir $H_*^\mathcal{U}(X) := H_*(C_*^\mathcal{U}(X))$ für die Homologie des Kettenkomplexes $C_*^\mathcal{U}(X)$.

IV.8.8. PROPOSITION. *Es sei \mathcal{U} eine Familie von Teilmengen eines topologischen Raums X , sodass $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overset{\circ}{U} = X$. Dann induziert die Inklusion $C_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_*(X)$ einen Isomorphismus $H_*^{\mathcal{U}}(X) \cong H_*(X)$.*

BEWEIS. Es bezeichne $\iota : C_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_*(X)$ die Inklusion und $\iota_* : H_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow H_*(X)$ den induzierten Homomorphismus. Wir zeigen zunächst, dass ι_* surjektiv ist. Sei dazu $\alpha \in H_q(X)$ und wähle $c \in Z_q(X)$, sodass $\alpha = [c]$. Nach Proposition IV.8.7 existiert $m \in \mathbb{N}_0$, sodass $\tilde{c} := (b_q)^m(c) \in C_q^{\mathcal{U}}(X)$. Daher repräsentiert \tilde{c} eine Homologieklass $\tilde{\alpha} := [\tilde{c}] \in H_q^{\mathcal{U}}(X)$. Nach Proposition IV.8.5 gilt $\iota_*(\tilde{\alpha}) = [(b_q)^m(c)] = [c] = \alpha \in H_q(X)$, also ist ι_* surjektiv. Es bleibt noch die Injektivität von ι_* zu zeigen. Sei dazu $\alpha \in H_q^{\mathcal{U}}(X)$ mit $\iota_*(\alpha) = 0$. Wähle $c \in Z_q^{\mathcal{U}}(X)$, sodass $\alpha = [c]$. Nach Voraussetzung existiert $z \in C_{q+1}(X)$ mit $\partial z = c$. Nach Proposition IV.8.7 existiert $m \in \mathbb{N}_0$, sodass $(b_{q+1})^m(z) \in C_{q+1}^{\mathcal{U}}(X)$. Es folgt $\partial((b_{q+1})^m(z)) = (b_q)^m(\partial z) = (b_q)^m(c)$, und daher $[(b_q)^m(c)] = 0 \in H_q^{\mathcal{U}}(X)$. Nach Proposition IV.8.5 ist aber $\alpha = [c] = [(b_q)^m(c)] \in H_q^{\mathcal{U}}(X)$, es folgt daher $\alpha = 0 \in H_q^{\mathcal{U}}(X)$. Dies zeigt, dass ι_* trivialen Kern hat, also ist ι_* injektiv. \square

Sei nun (X, A) ein Paar von Räumen und \mathcal{U} eine Familie von Teilmengen von X . Wir schreiben $\mathcal{U} \cap A := \{U \cap A : U \in \mathcal{U}\}$ für die induzierte Familie von Teilmengen von A . Definiere einen Kettenkomplex $C_*^{\mathcal{U}}(X, A) := C_*^{\mathcal{U}}(X)/C_*^{\mathcal{U} \cap A}(A)$. Wir können $C_*^{\mathcal{U}}(X, A)$ als Teilkomplex von $C_*(X, A)$ auffassen, denn $C_*^{\mathcal{U} \cap A}(A) = C_*^{\mathcal{U}}(X) \cap C_*(A)$. Schließlich sei $H_*^{\mathcal{U}}(X, A) := H_*(C_*^{\mathcal{U}}(X, A))$. Im Fall $A = \emptyset$ reduziert sich dies auf $H_*^{\mathcal{U}}(X, \emptyset) = H_*^{\mathcal{U}}(X)$, denn $C_*^{\mathcal{U}}(X, \emptyset) = C_*^{\mathcal{U}}(X)$.

IV.8.9. SATZ. *Es sei (X, A) ein Paar von Räumen, und es sei \mathcal{U} eine Familie von Teilmengen von X , sodass $\overset{\circ}{A} \cup \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \overset{\circ}{U} = X$. Dann ist die Inklusion $C_*^{\mathcal{U}}(X, A) \xrightarrow{\cong} C_*(X, A)$ eine Kettenhomotopieäquivalenz und induziert daher einen Isomorphismus $H_*^{\mathcal{U}}(X, A) \cong H_*(X, A)$.*

BEWEIS. Beachte, dass $C_*^{\mathcal{U}}(X, A)$ und $C_*(X, A)$ beides freie Kettenkomplexe sind. Nach Korollar IV.4.22 genügt es daher zu zeigen, dass die Inklusion $C_*^{\mathcal{U}}(X, A) \rightarrow C_*(X, A)$ Isomorphismus $H_*^{\mathcal{U}}(X, A) \cong H_*(X, A)$ induziert.

Sei dazu $\mathcal{V} := \mathcal{U} \cup \{A\}$. Nach Proposition IV.8.8 induzieren die Inklusionen $C_*^{\mathcal{V}}(X) \rightarrow C_*(X)$ und $C_*^{\mathcal{V} \cap A}(A) \rightarrow C_*(A)$ Isomorphismen $H_*^{\mathcal{V}}(X) \cong H_*(X)$ und $H_*^{\mathcal{V} \cap A}(A) \cong H_*(A)$. Weiters haben wir ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*^{\mathcal{V} \cap A}(A) & \longrightarrow & C_*^{\mathcal{V}}(X) & \longrightarrow & C_*^{\mathcal{V}}(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen. Aus Korollar IV.3.4 folgt daher, dass auch die Inklusion $C_*^{\mathcal{V}}(X, A) \rightarrow C_*(X, A)$ einen Isomorphismus $H_*^{\mathcal{V}}(X, A) \cong H_*(X, A)$ induziert. Es ist aber $C_*^{\mathcal{V}}(X, A) = C_*^{\mathcal{U}}(X, A)$ und daher $H_*^{\mathcal{V}}(X, A) = H_*^{\mathcal{U}}(X, A)$. \square

IV.9. Der Ausschneidungssatz. Spezialisieren wir Satz IV.8.9 auf einelementige Familien \mathcal{U} so erhalten wir folgende fundamentale Eigenschaft des Homologiefunktors.

IV.9.1. SATZ (Ausschneidungssatz, Excision). *Es sei (X, A) ein Paar von Räumen und $Z \subseteq A$ eine Teilmenge, sodass $\bar{Z} \subseteq \mathring{A}$. Dann induziert die Inklusion $\iota : (X \setminus Z, A \setminus Z) \rightarrow (X, A)$ eine Kettenhomotopieäquivalenz $\iota_{\#} : C_*(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} C_*(X, A)$ und daher einen Isomorphismus $\iota_* : H_*(X \setminus Z, A \setminus Z) \xrightarrow{\cong} H_*(X, A)$.*

BEWEIS. Beachte $(X \setminus Z)^\circ = X \setminus \bar{Z} \supseteq X \setminus \mathring{A}$ und somit $\mathring{A} \cup (X \setminus Z)^\circ = X$. Die einelementige Familie $\mathcal{U} := \{X \setminus Z\}$ erfüllt daher die Voraussetzungen von Satz IV.8.9, also ist die Inklusion $C_*^{\mathcal{U}}(X, A) \xrightarrow{\cong} C_*(X, A)$ eine Kettenhomotopieäquivalenz. Nach Konstruktion von \mathcal{U} gilt $C_*^{\mathcal{U}}(X, A) = C_*(X \setminus Z, A \setminus Z)$. \square

IV.9.2. KOROLLAR. *Es sei $A \subseteq X$ eine nicht-leere abgeschlossene Teilmenge. Weiters existiere eine Umgebung U von A , sodass A Deformationsretrakt von U ist. Dann induziert die kanonische Projektion $p : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ einen Isomorphismen $p_* : H_*(X, A) \xrightarrow{\cong} H_*(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_*(X/A)$.*

BEWEIS. Bezeichne $Y := X/A, V := U/A, P := A/A$ und betrachte folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} H_*(X, A) & \xrightarrow{\cong} & H_q(X, U) & \xleftarrow{\cong} & H_*(X \setminus A, U \setminus A) \\ \downarrow p_* & & \downarrow p_* & & \cong \downarrow p_* \\ H_*(Y, P) & \xrightarrow{\cong} & H_*(Y, V) & \xleftarrow{\cong} & H_*(Y \setminus P, V \setminus P) \end{array} \quad (\text{IV.31})$$

Nach Voraussetzung existiert eine stetige Abbildung $F : U \times I \rightarrow U$ mit $F_0 = \text{id}_U, F_1(A) \subseteq A$ und $F_t(a) = a$ für alle $a \in A, t \in I$. Insbesondere ist die Inklusion $A \rightarrow U$ eine Homotopieäquivalenz, der linke obere horizontale Pfeil in (IV.31) also ein Isomorphismus, siehe Beispiel IV.6.16. Die Homotopie F faktorisiert zu einer stetigen Abbildung $\bar{F} : V \times I \rightarrow V$ mit $\bar{F}_0 = \text{id}_V, \bar{F}_1(V) \subseteq P$ und $\bar{F}_t(P) = P$ für alle $t \in I$, vgl. Lemma I.3.17. Daher ist P Deformationsretrakt von V . Insbesondere ist die Inklusion $P \rightarrow V$ eine Homotopieäquivalenz, der linke untere horizontale Pfeil (IV.31) daher ein Isomorphismus, siehe Beispiel IV.6.16. Nach Satz IV.9.1 sind auch die beiden rechten horizontalen Pfeile in (IV.31) Isomorphismen. Schließlich liefert die kanonische Projektion einen Homöomorphismus von Paaren $p : (X \setminus A, U \setminus A) \xrightarrow{\cong} (Y \setminus P, V \setminus P)$, also ist auch der rechte vertikale Pfeil in (IV.31) ein Isomorphismus. Aus der Kommutativität von (IV.31) folgt nun, dass auch der linke vertikale Pfeil dieses Diagramms ein Isomorphismus sein muss. \square

IV.9.3. KOROLLAR. *Es sei $A \subseteq X$ eine nicht-leere abgeschlossene Teilmenge. Weiters existiere eine Umgebung U von A , sodass A Deformationsretrakt von U*

ist. Dann existiert eine natürliche lange exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{p_*} \tilde{H}_q(X/A) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(A) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_{q-1}(X) \rightarrow \dots$$

Dabei bezeichnen $\iota : A \rightarrow X$ und $p : X \rightarrow X/A$ die kanonische Inklusion bzw. Projektion. Ist $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ eine Abbildung von Paaren, wobei $B \subseteq Y$ eine nicht-leere abgeschlossene Teilmenge bezeichnet, die Deformationsretrakt einer ihrer Umgebungen ist, dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_q(A) & \xrightarrow{\iota_*} & \tilde{H}_q(X) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_q(X/A) & \xrightarrow{\delta_q} & \tilde{H}_{q-1}(A) & \xrightarrow{\iota_*} & \tilde{H}_{q-1}(X) & \xrightarrow{f_*} & \dots \\ & & \downarrow (f|_A)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow \bar{f}_* & & \downarrow (f|_A)_* & & & & \\ \dots & \longrightarrow & \tilde{H}_q(B) & \xrightarrow{\iota_*} & \tilde{H}_q(Y) & \xrightarrow{p_*} & \tilde{H}_q(Y/B) & \xrightarrow{\delta_q} & \tilde{H}_{q-1}(B) & \xrightarrow{\iota_*} & \tilde{H}_{q-1}(Y) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Dabei bezeichnet $\bar{f} : X/A \rightarrow Y/B$ die von f induzierte Abbildung.

BEWEIS. Dies folgt aus der langen exakten Sequenz des Paares (X, A) , siehe Proposition IV.6.10, indem wir die auftretenden Gruppen $H_q(X, A)$ durch $\tilde{H}_q(X/A)$ ersetzen, siehe Korollar IV.9.2. Die Natürlichkeit folgt aus der Natürlichkeit der Sequenz des Paares (X, A) . \square

IV.9.4. BEISPIEL. Betrachte die Suspension $\Sigma X \cong CX/X$ eines topologischen Raums X , wobei wir wieder X als Teilraum des Kegels CX auffassen. Beachte, dass X Deformationsretrakt der Umgebung $U := CX \setminus \{*\}$ ist, wobei $*$ $\in CX$ die Spitze des Kegels bezeichnet. Da der Kegel CX kontrahierbar ist gilt $\tilde{H}_*(CX) = 0$, also liefert der Einhängungshomomorphismus der langen exakten Sequenz in Korollar IV.9.3 Isomorphismen $\delta_q : \tilde{H}_q(\Sigma X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{q-1}(X)$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_q(\Sigma X) & \xrightarrow[\cong]{\delta_q} & \tilde{H}_{q-1}(X) \\ \downarrow (\Sigma f)_* & & \downarrow f_* \\ \tilde{H}_q(\Sigma Y) & \xrightarrow[\cong]{\delta_q} & \tilde{H}_{q-1}(Y) \end{array}$$

Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ induziert eine Abbildung von Paaren $Cf : (CX, X) \rightarrow (CY, Y)$, sodass $(Cf)|_X = f$ und $\overline{Cf} = \Sigma f$. Aus der Natürlichkeit der langen exakten Sequenz folgt daher, dass nebenstehendes Diagramm für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ kommutiert.

IV.9.5. SATZ. Für die Homologiegruppen der Sphären gilt:³²

$$\tilde{H}_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n \\ 0 & \text{falls } q \neq n \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0 \text{ oder } q = n \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Für die Euler-Charakteristik folgt $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$ bzw. $\tilde{\chi}(S^n) = (-1)^n$.

BEWEIS. Beachte $S^n \cong \Sigma S^{n-1}$. Aus Beispiel IV.9.4 folgt daher $\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong \tilde{H}_{q-n}(S^0)$. Zusammen mit Beispiel IV.5.21 erhalten wir nun die Aussage über die reduzierte Homologie der Sphären. Die Homologiegruppen $H_*(S^n)$ können nun mittels Proposition IV.5.18 berechnet werden. \square

³²Im Fall $n = 0$ ist dies als $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ zu lesen, vgl. Beispiel IV.5.21

IV.9.6. BEISPIEL. Für $n \in \mathbb{N}$ und $P \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n \setminus \{P\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n - 1 \\ 0 & \text{falls } q \neq n - 1 \end{cases}$$

Dies folgt aus Satz IV.9.5, denn $S^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{P\}$.

IV.9.7. BEISPIEL. Für $n \in \mathbb{N}_0$, $P \in B^n$ und $Q \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$H_q(D^n, S^{n-1}) \cong H_q(D^n, D^n \setminus \{P\}) \cong H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{Q\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n \\ 0 & \text{falls } q \neq n \end{cases}$$

In Beispiel IV.7.10 haben wir $H_q(D^n, S^{n-1}) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$ gezeigt, zusammen mit Satz IV.9.5 erhalten wir die Homologiegruppen von (D^n, S^{n-1}) . Die verbleibenden Behauptungen folgen aus $(D^n, S^{n-1}) \simeq (D^n, D^n \setminus \{P\}) \simeq (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{Q\})$.

IV.9.8. BEISPIEL. Es bezeichne $\dot{\Delta}^n := \{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n \mid \exists j : t_j = 0\}$. Dann gilt $(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) \cong (D^n, S^{n-1})$ und wir erhalten

$$H_q(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n \\ 0 & \text{falls } q \neq n \end{cases} \quad \text{sowie} \quad \tilde{H}_q(\dot{\Delta}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n - 1 \\ 0 & \text{falls } q \neq n - 1 \end{cases}$$

aus Beispiel IV.9.7 bzw. Satz IV.9.5. In Proposition IV.9.9 unten werden wir explizite Erzeuger dieser Homologiegruppen angeben. Mit Hilfe eines Homöomorphismus $(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) \cong (D^n, S^{n-1})$ liefert dies dann auch explizite Erzeuger von $H_*(D^n, S^{n-1})$ und $\tilde{H}_*(S^{n-1})$.

IV.9.9. PROPOSITION. Für die singuläre Kette $c_n := \text{id}_{\Delta^n} \in C_n(\Delta^n)$ gilt:

- (i) $c_n \in Z_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$ und $[c_n]$ ist ein Erzeuger von $H_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$, $n \geq 0$.
- (ii) $\partial c_n \in Z_{n-1}(\dot{\Delta}^n)$ und $[\partial c_n]$ ist ein Erzeuger von $\tilde{H}_{n-1}(\dot{\Delta}^n)$, $n > 0$.

BEWEIS. Zunächst ist $c_n \in Z_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$, denn $\partial c_n \in C_{n-1}(\dot{\Delta}^n)$, siehe (IV.16), also $\partial c_n = 0 \in C_{n-1}(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$. Also repräsentiert c_n eine Homologieklass $[c_n] \in H_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$. Da Δ^n azyklisch ist, liefert der Einhängungshomomorphismus der langen exakten Sequenz des Paares $(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$, siehe Proposition IV.6.10, einen Isomorphismus $\delta : H_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n-1}(\dot{\Delta}^n)$, $n > 0$. Dieser Isomorphismus bildet $[c_n] \in H_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$ auf $[\partial c_n] \in \tilde{H}_{n-1}(\dot{\Delta}^n)$ ab, vgl. Bemerkung IV.3.2. Es genügt daher (i) zu zeigen. Wir führen den Beweis von (i) durch Induktion nach n . Der Induktionsbeginn $n = 0$ ist trivial.

Für den Induktionsschritt sei nun $n \geq 1$. Betrachte

$$\Lambda^n := \{(t_0, \dots, t_n) \in \Delta^n \mid \exists j > 0 : t_j = 0\} \subseteq \dot{\Delta}^n.$$

Die Inklusion $(\{e_0\}, \{e_0\}) \xrightarrow{\cong} (\Delta^n, \Lambda^n)$ ist eine Homotopieäquivalenz von Paaren, denn $F : (\Delta^n \times I, \Lambda^n \times I) \rightarrow (\Delta^n, \Lambda^n)$, $F(t, s) := (1-s)t + se_0$, ist eine Homotopie von Paaren von $F_0 = \text{id}_{(\Delta^n, \Lambda^n)}$ zur konstanten Abbildung $F_1(t) = e_0$. Wir erhalten daher $H_*(\Delta^n, \Lambda^n) = H_*(\{e_0\}, \{e_0\}) = 0$, siehe Korollar IV.7.7. Somit

liefert der Einhängungshomomorphismus der langen exakten Sequenz des Tripels $(\Delta^n, \dot{\Delta}^n, \Lambda^n)$ einen Isomorphismus, siehe Proposition IV.6.13,

$$\delta : H_*(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) \xrightarrow{\cong} H_{*-1}(\dot{\Delta}^n, \Lambda^n). \quad (\text{IV.32})$$

Beachte, dass (IV.32) die Klasse $[c_n] \in H_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$ auf $[\partial c_n] = [\sum_{j=0}^n (-1)^j \delta_n^j] = [\delta_n^0] \in H_{n-1}(\dot{\Delta}^n, \Lambda^n)$ abbildet, siehe (IV.16) sowie Bemerkung IV.3.2. Dabei ist $\delta_n^0 : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$, $\delta_n^0(t_0, \dots, t_{n-1}) := (0, t_0, \dots, t_{n-1})$, die Abbildung aus (IV.15), und wir haben verwendet, dass δ_n^j Werte in Λ^n hat, falls $j > 0$.

Die Abbildung $\delta_n^0 : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ definiert eine Homotopieäquivalenz von Paaren $\delta_n^0 : (\Delta^{n-1}, \dot{\Delta}^{n-1}) \xrightarrow{\cong} (\dot{\Delta}^n \setminus \{e_0\}, \Lambda^n \setminus \{e_0\})$. Um dies einzusehen betrachte die Abbildung von Paaren $g : (\dot{\Delta}^n \setminus \{e_0\}, \Lambda^n \setminus \{e_0\}) \rightarrow (\Delta^{n-1}, \dot{\Delta}^{n-1})$, $g(t_0, \dots, t_n) := \frac{1}{1-t_0}(t_1, \dots, t_n)$. Offensichtlich ist $g \circ \delta_n^0 = \text{id}_{(\Delta^{n-1}, \dot{\Delta}^{n-1})}$, es gilt aber auch $\delta_n^0 \circ g \simeq \text{id}_{(\dot{\Delta}^n \setminus \{e_0\}, \Lambda^n \setminus \{e_0\})}$, denn

$$\begin{aligned} G : ((\dot{\Delta}^n \setminus \{e_0\}) \times I, (\Lambda^n \setminus \{e_0\}) \times I) &\rightarrow (\dot{\Delta}^n \setminus \{e_0\}, \Lambda^n \setminus \{e_0\}) \\ G(t_0, \dots, t_n; s) &:= \left((1-s)t_0, \frac{1-(1-s)t_0}{1-t_0}(t_1, \dots, t_n) \right) \end{aligned}$$

ist eine Homotopie von Paaren mit $G_0 = \text{id}_{(\dot{\Delta}^n \setminus \{e_0\}, \Lambda^n \setminus \{e_0\})}$ nach $G_1 = \delta_n^0 \circ g$. Aus Korollar IV.7.7 schließen wir, dass δ_n^0 einen Isomorphismus

$$(\delta_n^0)_* : H_*(\Delta^{n-1}, \dot{\Delta}^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H_*(\dot{\Delta}^n \setminus \{e_0\}, \Lambda^n \setminus \{e_0\}). \quad (\text{IV.33})$$

induziert. Beachte, dass (IV.33) die Klasse $[c_{n-1}] \in H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \dot{\Delta}^{n-1})$ offensichtlich auf $[\delta_n^0] \in H_{n-1}(\dot{\Delta}^n \setminus \{e_0\}, \Lambda^n \setminus \{e_0\})$ abbildet.

Schließlich induziert die Inklusion $(\dot{\Delta}^n \setminus \{e_0\}, \Lambda^n \setminus \{e_0\}) \rightarrow (\dot{\Delta}^n, \Lambda^n)$ eine Isomorphismus, siehe Satz IV.9.1,

$$H_*(\dot{\Delta}^n \setminus \{e_0\}, \Lambda^n \setminus \{e_0\}) \xrightarrow{\cong} H_*(\dot{\Delta}^n, \Lambda^n). \quad (\text{IV.34})$$

Kombination von (IV.32), (IV.33) und (IV.34) liefert einen Isomorphismus

$$H_*(\Delta^n, \dot{\Delta}^n) \cong H_{*-1}(\Delta^{n-1}, \dot{\Delta}^{n-1}),$$

und dieser bildet die Klasse $[c_n] \in H_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$ auf $[c_{n-1}] \in H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \dot{\Delta}^{n-1})$ ab. Nach Induktionsvoraussetzung ist $[c_{n-1}]$ ein Erzeuger von $H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \dot{\Delta}^{n-1})$, also ist $[c_n]$ ein Erzeuger von $H_n(\Delta^n, \dot{\Delta}^n)$. \square

IV.9.10. BEISPIEL. Es sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine diskrete Teilmenge. Wir wollen die Homologiegruppen $\tilde{H}_*(\mathbb{R}^n \setminus X)$ berechnen. Da \mathbb{R}^n azyklisch ist folgt aus der langen exakten Sequenz des Paares $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus X)$, siehe Proposition IV.6.10,

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n \setminus X) \cong H_{q+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus X).$$

Wähle nun abgeschlossene euklidische Bälle $D_x^n \subseteq \mathbb{R}^n$ mit Mittelpunkt x so, dass $D_x^n \cap D_y^n = \emptyset$, für alle $x, y \in X$. Weiters betrachten wir $Z := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{x \in X} D_x^n$. Nach

Satz IV.9.1 induziert die Inklusion $(\mathbb{R}^n \setminus Z, \mathbb{R}^n \setminus (X \cup Z)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus X)$ einen Isomorphismus

$$H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus X) \cong H_*(\mathbb{R}^n \setminus Z, \mathbb{R}^n \setminus (X \cup Z))$$

Offensichtlich gilt $(\mathbb{R}^n \setminus Z, \mathbb{R}^n \setminus (X \cup Z)) \cong \bigsqcup_{x \in X} (D_x^n, D_x^n \setminus \{x\})$, aus Bemerkung IV.6.17 erhalten wir daher einen Isomorphismus

$$H_*(\mathbb{R}^n \setminus Z, \mathbb{R}^n \setminus (X \cup Z)) \cong \bigoplus_{x \in X} H_*(D_x^n, D_x^n \setminus \{x\})$$

Zusammen mit der Berechnung in Beispiel IV.9.7 erhalten wir

$$\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n \setminus X) \cong \bigoplus_{x \in X} H_{q+1}(D_x^n, D_x^n \setminus \{x\}) \cong \begin{cases} \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n - 1 \\ 0 & \text{falls } q \neq n - 1 \end{cases}$$

denn $(D_x^n, D_x^n \setminus \{x\}) \cong (D^n, D^n \setminus \{0\})$.

IV.9.11. BEISPIEL. Es seien X_λ topologische Räume und $x_\lambda \in X_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Wir fassen deren Einpunktvereinigung $\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = (\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)/A$ als topologischen Raum (ohne Basispunkt) auf, $A := \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Die kanonischen Inklusionen $\iota_\lambda : X_\lambda \rightarrow \bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ induzieren Homomorphismen $(\iota_\lambda)_* : \tilde{H}_*(X_\lambda) \rightarrow \tilde{H}_*(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda)$ und diese bestimmen einen Homomorphismus

$$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \tilde{H}_*(X_\lambda) \rightarrow \tilde{H}_*(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda). \quad (\text{IV.35})$$

Wir setzen weiters voraus, dass $\{x_\lambda\}$ abgeschlossen in X_λ ist und, dass Umgebungen U_λ von x_λ in X_λ existieren, sodass $\{x_\lambda\}$ Deformationsretrakt von U_λ ist, $\lambda \in \Lambda$. Unter diesen Voraussetzungen ist (IV.35) ein Isomorphismus. Nach Korollar IV.9.2 und Bemerkung IV.6.17 gilt nämlich

$$\tilde{H}_*(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda) \cong H_*(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, A) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} H_*(X_\lambda, \{x_\lambda\}) \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \tilde{H}_*(X_\lambda),$$

denn $(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, A) = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \{x_\lambda\})$.

IV.9.12. BEISPIEL (Orientierbare Flächen). Wir betrachten wieder die orientierbare geschlossene Fläche vom Geschlecht g . Es bezeichne dazu D_g die kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^2 die entsteht, wenn wir aus der abgeschlossenen Einheits Scheibe D^2 g kleine offene Scheiben herausnehmen deren Abschlüsse paarweise disjunkt sind und zur Gänze im Inneren B^2 liegen. Der Rand \dot{D}_g besteht dann aus $g + 1$ Kreisen, $\dot{D}_g \cong S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$. Verkleben wir nun zwei Kopien $D_g^\pm := D_g$ längs der identischen Abbildung $\varphi := \text{id} : \dot{D}_g^- \rightarrow \dot{D}_g^+$ so erhalten wir eine geschlossene Fläche, $F_g := D_g^+ \cup_\varphi D_g^-$. Wir fassen D_g^+ und D_g^- als Teilräume von F_g auf. Offensichtlich ist D_g^+ Retrakt von F_g , aus Proposition IV.6.12 folgt daher

$$\tilde{H}_*(F_g) \cong \tilde{H}_*(D_g^+) \oplus H_*(F_g, D_g^+). \quad (\text{IV.36})$$

Beachte, dass eine Umgebung U von \dot{D}_g^- in D_g^- existiert, sodass \dot{D}_g^- Deformationsretrakt von U ist. Es ist dann auch $V := D_g^+ \cup U$ eine Umgebung von D_g^+

in F_g , und D_g^+ ist Deformationsretrakt von V . Wir erhalten daher, siehe Beispiel IV.6.16,

$$H_*(F_g, D_g^+) \cong H_*(F_g, V) \cong H_*(D_g^-, U) \cong H_*(D_g^-, \dot{D}_g^-).$$

Alle Isomorphismen sind von kanonischen Inklusionen induziert, für den mittleren haben wir Satz IV.9.1 mit $Z = F_g \setminus D_g^-$ verwendet. Zusammen mit (IV.36) folgt

$$\tilde{H}_*(F_g) = \tilde{H}_*(D_g) \oplus H_*(D_g, \dot{D}_g). \quad (\text{IV.37})$$

Da $D_g \simeq \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \dots, P_g\}$, folgt aus Beispiel IV.9.10:

$$\tilde{H}_q(D_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^g & \text{falls } q = 1 \\ 0 & \text{falls } q \neq 1 \end{cases} \quad (\text{IV.38})$$

Weiters ist $\dot{D}_g \cong S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ und daher, siehe Satz IV.9.5:

$$\tilde{H}_q(\dot{D}_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^g & \text{falls } q = 0 \\ \mathbb{Z}^{g+1} & \text{falls } q = 1 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Nach den Betrachtungen in Beispiel IV.9.10 wissen wir auch, dass der von der Inklusion induzierte Homomorphismus $\tilde{H}_1(\dot{D}_g) \rightarrow \tilde{H}_1(D_g)$ surjektiv ist. Aus der langen exakten Sequenz des Paares (D_g, \dot{D}_g) , siehe Proposition IV.6.10, erhalten wir sofort $H_q(D_g, \dot{D}_g) = 0$ für $q \neq 1, 2$. Um $H_1(D_g, \dot{D}_g)$ und $H_2(D_g, \dot{D}_g)$ zu bestimmen, betrachten wir folgendes Stück dieser langen exakten Sequenz:

$$0 \rightarrow H_2(D_g, \dot{D}_g) \rightarrow \tilde{H}_1(\dot{D}_g) \rightarrow \tilde{H}_1(D_g) \xrightarrow{0} H_1(D_g, \dot{D}_g) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_0(\dot{D}_g) \rightarrow 0$$

Wegen der Surjektivität von $\tilde{H}_1(\dot{D}_g) \rightarrow \tilde{H}_1(D_g)$, verschwindet der nachfolgende Homomorphismus, und ganz rechts erhalten wir einen Isomorphismus. Daher gilt:

$$H_q(D_g, \dot{D}_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^g & \text{falls } q = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{falls } q = 2 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (\text{IV.39})$$

Es folgt $H_1(D_g, \dot{D}_g) \cong \mathbb{Z}^g$ sowie $H_2(D_g, \dot{D}_g) \cong \mathbb{Z}$. Aus (IV.37), (IV.38) und (IV.39) erhalten wir für die Homologie der orientierbaren Fläche vom Geschlecht g daher:

$$\tilde{H}_q(F_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{falls } q = 1 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad H_q(F_g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, 2 \\ \mathbb{Z}^{2g} & \text{falls } q = 1 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Inbesondere ist $b_0(F_g) = b_2(F_g) = 1$, $b_1(F_g) = 2g$ und alle anderen Bettizahlen verschwinden. Für die Euler-Charakteristik erhalten wir $\chi(F_g) = 2 - 2g$. Wir sehen daher, dass F_{g_1} und F_{g_2} für $g_1 \neq g_2$ nicht homotopieäquivalent und daher auch nicht homöomorph sein können.

IV.9.13. PROPOSITION (Homologie des Abbildungskegels). *Es sei Y ein nicht-leerer topologischer Raum, $\varphi : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung und es bezeichne $\iota : X \rightarrow C_\varphi$ die kanonische Einbettung von X in den Abbildungskegel C_φ , siehe Beispiel I.5.12. Dann existiert eine lange exakte Sequenz:*

$$\cdots \rightarrow \tilde{H}_{q+1}(C_\varphi) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_q(Y) \xrightarrow{\varphi_*} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_q(C_\varphi) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{q-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

BEWEIS. Beachte $C_\varphi = Z_\varphi/Y$, wobei wir Y als Teilraum des Abbildungszyklinders Z_φ auffassen. Aus Korollar IV.9.2 erhalten wir einen Isomorphismus $\tilde{H}_*(C_\varphi) \cong H_*(Z_\varphi, Y)$. Aus der langen exakten Sequenz in Proposition IV.7.14 erhalten wir daher unmittelbar die gewünschte Sequenz. \square

IV.9.14. BEISPIEL. Es sei $\varphi : S^{n-1} \rightarrow X$ eine stetige Abbildung, $n \geq 1$. Kleben wir D^n längs φ an X , so erhalten wir $X \cup_\varphi D^n \cong C_\varphi$. Aus Proposition IV.9.13 und Satz IV.9.5 folgt daher, dass die kanonische Inklusion $\iota : X \rightarrow X \cup_\varphi D^n$ Isomorphismen $\iota_* : \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_q(X \cup_\varphi D^n)$ induziert, falls $q \neq n-1, n$. Darüber hinaus haben wir eine exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow \tilde{H}_n(X) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_n(X \cup_\varphi D^n) \xrightarrow{\delta} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\varphi_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \xrightarrow{\iota_*} \tilde{H}_{n-1}(X \cup_\varphi D^n) \rightarrow 0$$

Es gilt daher weiters

$$\tilde{H}_{n-1}(X \cup_\varphi D^n) \cong \tilde{H}_{n-1}(X) / \text{img}(\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\varphi_*} \tilde{H}_{n-1}(X))$$

sowie

$$\tilde{H}_n(X \cup_\varphi D^n) \cong \begin{cases} \tilde{H}_n(X) & \text{falls } \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \xrightarrow{\varphi_*} \tilde{H}_{n-1}(X) \text{ injektiv} \\ \tilde{H}_n(X) \oplus \mathbb{Z} & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Dies ermöglicht oft die Berechnung aller Homologiegruppen von $X \cup_\varphi D^n$.

IV.9.15. BEISPIEL (Homologie des $\mathbb{C}P^n$). Für die Homologie des komplexen projektiven Raums gilt:

$$H_q(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, 2, 4, 6, \dots, 2n \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (\text{IV.40})$$

Wir erinnern uns, dass $\mathbb{C}P^n$ aus $\mathbb{C}P^{n-1}$ durch Ankleben von D^{2n} längs der Hopfabildung $\varphi : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$ entsteht, $\mathbb{C}P^n \cong \mathbb{C}P^{n-1} \cup_\varphi D^{2n}$, siehe (I.20). Wir können daher (IV.40) durch Induktion nach n beweisen. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial, $\mathbb{C}P^0$ ist ein einpunktiger Raum. Der Induktionsschritt folgt aus den Betrachtungen in Beispiel IV.9.14. Beachte, dass der von der Klebeabbildung induzierte Homomorphismus $\varphi_* : H_{2n-1}(S^{2n-1}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1})$ aus Dimensionsgründen trivial ist, denn nach Induktionsvoraussetzung ist $H_{2n-1}(\mathbb{C}P^{n-1}) = 0$. Insbesondere ist $b_0(\mathbb{C}P^n) = b_2(\mathbb{C}P^n) = \cdots = b_{2n}(\mathbb{C}P^n) = 1$ und alle anderen Betti-Zahlen verschwinden. Für die Euler-Charakteristik folgt $\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1$.

IV.9.16. BEISPIEL (Homologie des $\mathbb{H}P^n$). Für die Homologie des quaternionischen projektiven Raums gilt:

$$H_q(\mathbb{H}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0, 4, 8, 12, \dots, 4n \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases} \quad (\text{IV.41})$$

Wir können genau wie in Beispiel IV.9.15 vorgehen, denn $\mathbb{H}P^n \cong \mathbb{H}P^{n-1} \cup_{\varphi} D^{4n}$. Insbesondere ist $b_0(\mathbb{H}P^n) = b_4(\mathbb{H}P^n) = \dots = b_{4n}(\mathbb{H}P^n) = 1$ und alle anderen Bettizahlen verschwinden. Für die Euler-Charakteristik folgt $\chi(\mathbb{H}P^n) = n + 1$.

IV.10. Die Mayer–Vietoris Sequenz. Es sei X ein topologischer Raum der Vereinigung zweier offener Teilmengen U und V ist. Analog zum Satz von Seifert–van Kampen lassen sich die Homologiegruppen eines Raums X im Wesentlichen berechnen, wenn X als Vereinigung zweier offener Teilmengen $X = U \cup V$ vorliegt, und die Homologiegruppen von U , V und $U \cap V$, sowie die von den Inklusionen induzierten Homomorphismen, bekannt sind. Genauer existiert eine lange exakte Sequenz die diese Homologiegruppen in Beziehung bringt.

IV.10.1. SATZ (Mayer–Vietoris Sequenz). *Es seien X ein topologischer Raum und $U, V \subseteq X$ zwei Teilmengen, sodass $X = \overset{\circ}{U} \cup \overset{\circ}{V}$. Dann existiert eine lange exakte Sequenz*

$$\dots \rightarrow H_q(U \cap V) \xrightarrow{(j_*^U, -j_*^V)} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{\iota_*^U + \iota_*^V} H_q(X) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

Dabei bezeichnen $\iota^U : U \rightarrow X$, $\iota^V : V \rightarrow X$, $j^U : U \cap V \rightarrow U$ und $j^V : U \cap V \rightarrow V$ die kanonischen Inklusionen. Diese Sequenz ist natürlich in folgendem Sinn: ist $f : X \rightarrow \tilde{X}$ eine stetige Abbildung, und sind $\tilde{U}, \tilde{V} \subseteq \tilde{X}$ zwei Teilmengen, sodass $\tilde{U} \cup \tilde{V} = \tilde{X}$, $f(U) \subseteq \tilde{U}$ sowie $f(V) \subseteq \tilde{V}$, dann kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_q(U \cap V) & \xrightarrow{(j_*^U, -j_*^V)} & H_q(U) \oplus H_q(V) & \xrightarrow{\iota_*^U + \iota_*^V} & H_q(X) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(U \cap V) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow (f|_{U \cap V})_* & & \downarrow (f|_U)_* \oplus (f|_V)_* & & \downarrow f_* & & \downarrow (f|_{U \cap V})_* & & \\ \dots & \longrightarrow & H_q(\tilde{U} \cap \tilde{V}) & \xrightarrow{(j_*^{\tilde{U}}, -j_*^{\tilde{V}})} & H_q(\tilde{U}) \oplus H_q(\tilde{V}) & \xrightarrow{\iota_*^{\tilde{U}} + \iota_*^{\tilde{V}}} & H_q(\tilde{X}) & \xrightarrow{\delta_q} & H_{q-1}(\tilde{U} \cap \tilde{V}) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

BEWEIS. Betrachte $\mathcal{U} = \{U, V\}$. Dann ist

$$0 \rightarrow C_*(U \cap V) \xrightarrow{(j_{\#}^U, -j_{\#}^V)} C_*(U) \oplus C_*(V) \xrightarrow{\iota_{\#}^U + \iota_{\#}^V} C_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow 0 \quad (\text{IV.42})$$

eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen. Diese induziert eine lange exakte Sequenz von Homologiegruppen, siehe Satz IV.3.1:

$$\dots \rightarrow H_q(U \cap V) \xrightarrow{(j_*^U, -j_*^V)} H_q(U) \oplus H_q(V) \xrightarrow{\iota_*^U + \iota_*^V} H_q^{\mathcal{U}}(X) \xrightarrow{\delta_q} H_{q-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

Nach Satz IV.8.9 induziert die Inklusion $C_*^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow C_*(X)$ einen Isomorphismus $H_*^{\mathcal{U}}(X) \cong H_*(X)$. Wir können daher in obiger langen exakten Sequenz $H_q^{\mathcal{U}}(X)$

durch $H_q(X)$ ersetzen, und erhalten so die gewünschte Mayer–Vietoris Sequenz. Um die Natürlichkeit einzusehen, beobachten wir, dass

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_*(U \cap V) & \xrightarrow{(j_*^U, -j_*^V)} & C_*(U) \oplus C_*(V) & \xrightarrow{\iota_*^U + \iota_*^V} & C_*^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow (f|_{U \cap V})_\# & & \downarrow (f|_U)_\# \oplus (f|_V)_\# & & \downarrow f_\# \\
 0 & \longrightarrow & C_*(\tilde{U} \cap \tilde{V}) & \xrightarrow{(j_*^{\tilde{U}}, -j_*^{\tilde{V}})} & C_*(\tilde{U}) \oplus C_*(\tilde{V}) & \xrightarrow{\iota_*^{\tilde{U}} + \iota_*^{\tilde{V}}} & C_*^{\tilde{\mathcal{U}}}(\tilde{X}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm von Kettenkomplexen bildet. Aus der Natürlichkeitsaussage in Satz IV.3.1 folgt somit auch die Natürlichkeit der Mayer–Vietoris Sequenz. \square

IV.10.2. KOROLLAR. *Es seien $U, V \subseteq X$ zwei Teilmengen eines topologischen Raums X , sodass $X = \overset{\circ}{U} \cup \overset{\circ}{V}$. Weiters seien $H_*(U)$, $H_*(V)$ und $H_*(U \cap V)$ endlich erzeugt. Dann ist auch $H_*(X)$ endlich erzeugt, und es gilt die Formel³³ $\chi(X) = \chi(U) + \chi(V) - \chi(U \cap V)$.*

BEWEIS. Dies folgt aus Korollar IV.4.20 angewandt auf die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen (IV.42), sowie $H_*^{\mathcal{U}}(X) = H_*(X)$. \square

IV.10.3. BEMERKUNG. Der Einhängungshomomorphismus der in Satz IV.10.1 auftritt, $\delta_q : H_q(X) \rightarrow H_{q-1}(U \cap V)$, stimmt mit der Komposition

$$H_q(X) = H_q(X, \emptyset) \rightarrow H_q(X, V) \xleftarrow{\cong} H_q(U, U \cap V) \xrightarrow{\delta^{(U, U \cap V)}} H_{q-1}(U \cap V)$$

überein. Dabei ist der linke Homomorphismus von der Inklusion $(X, \emptyset) \rightarrow (X, V)$ induziert. Der mittlere von der Inklusion $(U, U \cap V) \rightarrow (X, V)$ induzierte Homomorphismus ist ein Isomorphismus nach Satz IV.9.1 mit $Z := X \setminus U$. Schließlich bezeichnet $\delta^{(U, U \cap V)}$ den Einhängungshomomorphismus der langen exakten Sequenz des Paares $(U, U \cap V)$, siehe Proposition IV.6.5. Dies folgt leicht aus der Definition des Einhängungshomomorphismus wenn wir berücksichtigen, dass jede Homologieklasse in $H_q(X)$ durch einen Zykel in $C_q^{\mathcal{U}}(X)$ repräsentiert wird, $\mathcal{U} := \{U, V\}$.

IV.10.4. KOROLLAR. *Es seien $U, V \subseteq X$ zwei Teilmengen eines topologischen Raums X , sodass $X = \overset{\circ}{U} \cup \overset{\circ}{V}$ und $U \cap V \neq \emptyset$. Dann existiert eine naturliche³⁴ lange exakte Sequenz*

$$\dots \rightarrow \tilde{H}_q(U \cap V) \xrightarrow{(j_*^U, -j_*^V)} \tilde{H}_q(U) \oplus \tilde{H}_q(V) \xrightarrow{\iota_*^U + \iota_*^V} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\delta_q} \tilde{H}_{q-1}(U \cap V) \rightarrow \dots$$

Dabei bezeichnen $\iota^U : U \rightarrow X$, $\iota^V : V \rightarrow X$, $j^U : U \cap V \rightarrow U$ und $j^V : U \cap V \rightarrow V$ die kanonischen Inklusionen.

³³Beachte, dass dies analog zur Formel für das Volumen einer Vereinigung ist.

³⁴Die Formulierung der Natürlichkeit ist analog zu der in Satz IV.10.1.

BEWEIS. Es bezeichne $c : X \rightarrow \{*\}$ die konstante Abbildung. Aus der Natürlichkeit der Mayer–Vietoris Sequenz in Satz IV.10.1 erhalten wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_q(\{*\}) & \longrightarrow & H_q(\{*\}) \oplus H_q(\{*\}) & \longrightarrow & H_q(\{*\}) & \longrightarrow & H_{q-1}(\{*\}) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow c_* & & \uparrow c_* \oplus c_* & & \uparrow c_* & & \uparrow c_* & & \\
 \cdots & \longrightarrow & H_q(U \cap V) & \longrightarrow & H_q(U) \oplus H_q(V) & \longrightarrow & H_q(X) & \xrightarrow{\delta} & H_{q-1}(U \cap V) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \cdots & \longrightarrow & \tilde{H}_q(U \cap V) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(U) \oplus \tilde{H}_q(V) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(X) & \xrightarrow{\delta} & \tilde{H}_{q-1}(U \cap V) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

Nach Proposition IV.5.18 sind alle Spalten exakt. Daher induziert der Einhängungshomomorphismus der mittleren Zeile einen Einhängungshomomorphismus der unteren Sequenz (strichlierter Pfeil). Wir können obiges Diagramm als kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen auffassen. Nach Satz IV.10.1 sind die erste und zweite Zeile azyklisch. Nach Korollar IV.3.3 muss daher auch die dritte Zeile azyklisch sein, dh. die Sequenz reduzierter Homologiegruppen ist exakt. \square

IV.10.5. BEMERKUNG. Selbsverständlich gibt es auch eine Version der Mayer–Vietoris Sequenz für relative Homologiegruppen. Diese ist auch nicht schwieriger zu beweisen als die absolute Mayer–Vietoris Sequenz in Satz IV.10.1. Wir werden diese jedoch nicht benötigen und verzichten auf eine Formulierung, siehe etwa [2, Chapter 3 §8].

IV.10.6. BEISPIEL. Wir wollen nochmals die Homologiegruppen der Sphären berechnen, diesmal mit Hilfe der Mayer–Vietoris Sequenz. Es sei dazu $N := (0, \dots, 0, 1) \in S^n$. Betrachte die offenen Teilmengen $U := S^n \setminus \{-N\}$ und $V := S^n \setminus \{N\}$ von $S^n = U \cup V$. Da U und V kontrahierbar sind, gilt $\tilde{H}_*(U) = 0 = \tilde{H}_*(V)$. Also induziert der Einhängungshomomorphismus der Mayer–Vietoris Sequenz aus Korollar IV.10.4 Isomorphismen

$$\delta_q : \tilde{H}_q(S^n) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{q-1}(U \cap V).$$

Beachte weiters, dass die Inklusion des Äquators $S^{n-1} \rightarrow U \cap V$ eine Homotopieäquivalenz ist, und daher Isomorphismen

$$\tilde{H}_*(S^{n-1}) \cong \tilde{H}_*(U \cap V)$$

induziert. Zusammenfassend erhalten wir $\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1})$, $n \geq 1$. Es folgt $\tilde{H}_q(S^n) \cong \tilde{H}_{q-1}(S^{n-1}) \cong \dots \cong \tilde{H}_{q-n}(S^0)$. Kombinieren wir dies mit Beispiel IV.5.21 erhalten wir die Homologiegruppen der Sphären, vgl. Satz IV.9.5.

IV.11. Der Hurewicz Homomorphismus. Es sei $n \geq 1$. Nach Satz IV.9.5 ist $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, die Gruppe $H_n(S^n)$ besitzt daher zwei Erzeuger. Wir fixieren einen dieser Erzeuger $\alpha_n \in H_n(S^n)$, nämlich den aus Proposition IV.9.9, und bezeichnen ihn von nun an als den *Standarderzeuger* von $H^n(S^n)$.

Ist $\sigma : S^n \rightarrow X$ eine stetige Abbildung so erhalten wir eine Homologieklass $\sigma_*(\alpha_n) \in H_n(X)$. Nach Korollar IV.7.5 hängt diese Homotopieklasse nur von der Homotopieklasse von σ ab, die Konstruktion liefert daher eine wohldefinierte Abbildung

$$\tilde{h}_n = \tilde{h}_n^X : [S^n, X] \rightarrow H_n(X), \quad \tilde{h}_n([\sigma]) := \sigma_*(\alpha_n). \quad (\text{IV.43})$$

Diese Abbildung ist natürlich, dh. für jede stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ kommutiert nebenstehendes Diagramm, wobei die Abbildung $f_* : [S^n, X] \rightarrow [S^n, Y]$ durch $f_*([\sigma]) = [f \circ \sigma]$ gegeben ist, vgl. Bemerkung I.3.6. Um dies einzusehen betrachten wir eine beliebige stetige Abbildung $\sigma : S^n \rightarrow X$. Aus der Funktorialität der Homologie erhalten wir sofort $\tilde{h}_n^Y(f_*([\sigma])) = \tilde{h}_n^Y([f \circ \sigma]) = (f \circ \sigma)_*(\alpha_n) = f_*(\sigma_*(\alpha_n)) = f_*(\tilde{h}_n^X([\sigma]))$. Wir werden uns im Folgenden auf den Fall $n = 1$ beschränken.

$$\begin{array}{ccc} [S^n, X] & \xrightarrow{\tilde{h}_n^X} & H_n(X) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ [S^n, Y] & \xrightarrow{\tilde{h}_n^Y} & H_n(Y) \end{array}$$

Es sei nun (X, x_0) ein punktierter Raum. Wir werden im Folgenden die Beschreibung der Fundamentgruppe aus Proposition I.3.32 verwenden, $\pi_1(X, x_0) = [(S^1, 1), (X, x_0)]$. Wir haben in Satz I.3.33 die Abbildung $\Phi_{(X, x_0)} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow [S^1, X]$ studiert, die einer Homotopieklasse von Schleifen bei x_0 die zugrundeliegende freie Homotopieklasse zuordnet. Setzen wir diese mit \tilde{h}_1^X zusammen, erhalten wir eine Abbildung

$$h_1 = h_1^{(X, x_0)} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X), \quad h_1([\sigma]) := \sigma_*(\alpha_1). \quad (\text{IV.44})$$

Diese Abbildung wird der (erste) *Hurewicz-Homomorphismus* genannt. In Proposition IV.11.2 unten werden wir zeigen, dass dies tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus ist. Für den Beweis dieser Tatsache ist es wesentlich den von der Abbildung $\mu : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$, siehe (I.5), induzierten Homomorphismus $\mu_* : H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^1 \vee S^1)$ zu verstehen. Dies ist Gegenstand des folgenden

IV.11.1. LEMMA. *Für $\alpha \in H_1(S^1)$ gilt $\mu_*(\alpha) = (\iota_1)_*(\alpha) + (\iota_2)_*(\alpha)$, wobei $\iota_1, \iota_2 : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ die beiden kanonischen Inklusionen bezeichnen. In anderen Worten, das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} H_1(S^1) & \xrightarrow{\mu_*} & H_1(S^1 \vee S^1) \\ & \searrow \Delta & \nearrow \cong \\ & & H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \end{array}$$

$(\iota_1)_* + (\iota_2)_*$

Dabei bezeichnet $(\iota_1)_* + (\iota_2)_* : H_1(S^1) \oplus H_1(S^1) \xrightarrow{\cong} H_1(S^1 \vee S^1)$ den von den beiden Inklusionen $\iota_1, \iota_2 : S^1 \rightarrow S^1 \vee S^1$ induzierten Isomorphismus, siehe Beispiel IV.9.11, und $\Delta : H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^1) \oplus H_1(S^1)$ bezeichnet die Diagonalabbildung, $\Delta(\alpha) := (\alpha, \alpha)$, ein Homomorphismus.

BEWEIS. Wir betrachten die beiden Abbildungen $p_1, p_2 : S^1 \vee S^1 \rightarrow S^1$, die durch $p_1 \circ \iota_1 = \text{id}_{S^1} = p_2 \circ \iota_2$ und $p_2 \circ \iota_1 = c = p_1 \circ \iota_2$ vollständig bestimmt sind. Dabei bezeichnet $c : S^1 \rightarrow S^1$, $c(z) := 1$, die konstante Abbildung. Es gilt daher $(p_1)_* \circ (\iota_1)_* = \text{id}_{H_1(S^1)} = (p_2)_* \circ (\iota_2)_*$ sowie $(p_2)_* \circ (\iota_1)_* = 0 = (p_1)_* \circ (\iota_2)_*$. Aus diesen Relationen sehen wir, dass

$$((p_1)_*, (p_2)_*) : H_1(S^1 \vee S^1) \xrightarrow{\cong} H_1(S^1) \oplus H_1(S^1)$$

invers zu dem von den Inklusionen induzierten Isomorphismus $(\iota_1)_* + (\iota_2)_*$ ist. Es genügt daher $((p_1)_*, (p_2)_*) \circ \mu_* = \Delta$ zu zeigen. Dies ist offensichtlich zu den beiden Gleichungen $(p_1)_* \circ \mu_* = \text{id}_{H_1(S^1)} = (p_2)_* \circ \mu_*$ äquivalent. Aus der expliziten Gestalt von μ , siehe (I.5), folgt $p_1 \circ \mu \simeq \text{id}_{S^1} \simeq p_2 \circ \mu$, und dies impliziert die gewünschten Relationen. \square

IV.11.2. PROPOSITION (Hurewicz-Homomorphismus). *Ist (X, x_0) ein punktierter Raum, dann definiert (IV.44) einen Gruppenhomomorphismus. Dieser Homomorphismus ist natürlich, dh. das linke Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{h_1^{(X, x_0)}} & H_1(X) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{h_1^{(Y, y_0)}} & H_1(Y) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & H_1(X) & \\ h_1^{(X, x_0)} \nearrow & & \nwarrow h_1^{(X, x_1)} \\ \pi_1(X, x_0) & \xleftarrow[\cong]{\beta_h} & \pi_1(X, x_1) \end{array}$$

kommutiert für jede Abbildung punktierter Räume $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. Für jeden Weg $h : I \rightarrow X$ von $h(0) = x_0$ nach $h(1) = x_1$ ist darüber hinaus das rechte Diagramm oben kommutativ, siehe Proposition I.1.18.

BEWEIS. Die Natürlichkeit von h_1 folgt aus der Natürlichkeit von \tilde{h}_1 oben, und der Natürlichkeit von Φ , siehe Satz I.3.33. Aus der Relation $\Phi_{(X, x_1)} = \Phi_{(X, x_0)} \circ \beta_h$, siehe Satz I.3.33, erhalten wir durch Komposition mit \tilde{h}_1^X sofort $h_1^{(X, x_1)} = h_1^{(X, x_0)} \circ \beta_h$. Es bleibt daher nur noch zu zeigen, dass (IV.44) ein Gruppenhomomorphismus ist. Seien dazu $\sigma, \tau : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$. Nach Proposition I.3.32 ist das Produkt $[\sigma][\tau] \in \pi_1(X, x_0)$ durch $(\sigma \vee \tau) \circ \mu : (S^1, 1) \rightarrow (X, x_0)$ repräsentiert, dh. $[\sigma][\tau] = [(\sigma \vee \tau) \circ \mu]$. Unter Verwendung von Lemma IV.11.1

erhalten wir nun:

$$\begin{aligned}
 h_1([\sigma][\tau]) &= h_1([\sigma \vee \tau] \circ \mu) \\
 &= ((\sigma \vee \tau) \circ \mu)_*(\alpha_1) \\
 &= (\sigma \vee \tau)_*(\mu_*(\alpha_1)) \\
 &= (\sigma \vee \tau)_*((\iota_1)_*(\alpha_1) + (\iota_2)_*(\alpha_1)) \\
 &= (\sigma \vee \tau)_*((\iota_1)_*(\alpha_1)) + (\sigma \vee \tau)_*((\iota_2)_*(\alpha_1)) \\
 &= ((\sigma \vee \tau) \circ \iota_1)_*(\alpha_1) + ((\sigma \vee \tau) \circ \iota_2)_*(\alpha_1) \\
 &= \sigma_*(\alpha_1) + \tau_*(\alpha_1) \\
 &= h_1([\sigma]) + h_1([\tau])
 \end{aligned}$$

Also ist h_1 ein Homomorphismus. \square

IV.11.3. SATZ (Hurewicz-Isomorphismus). *Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender punktierter Raum. Dann ist der Hurewicz-Homomorphismus (IV.44) surjektiv und sein Kern stimmt mit der Kommutatoruntergruppe von $\pi_1(X, x_0)$ überein. Er induziert daher einen Isomorphismus $\pi_1(X, x_0)_{\text{ab}} \cong H_1(X)$.*

BEWEIS. Siehe Vorlesung bzw. [18, Kapitel 9.8] oder [14, Kapitel IV.3.8]. \square

IV.11.4. BEISPIEL. Wir erinnern uns an Poincarés Homologie Sphäre $M = S^3/\tilde{G}$ aus Beispiel II.5.11. Dies ist eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit nicht-trivialer Fundamentalgruppe, deren Abelisierung verschwindet. Aus Satz IV.11.3 folgt daher $H_1(M) = 0 = H_1(S^3)$. Jedoch kann M nicht zu S^3 homöomorph sein, denn $\pi_1(M) \neq 0 = \pi_1(S^3)$.

IV.11.5. BEMERKUNG. Es sei $X = U \cup V$ wobei U und V zwei offene Teilmengen bezeichnen, sodass U , V und $U \cap V$ alle nicht-leer und wegzusammenhängend sind. Wir fixieren einen Basispunkt in $U \cap V$ werden den in der Notation unten aber unterdrücken. Aus der Natürlichkeit des Hurewicz-Homomorphismus erhalten wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \pi_1(U \cap V)_{\text{ab}} & \xrightarrow{(j_*^U, -j_*^V)} & \pi_1(U)_{\text{ab}} \oplus \pi_1(V)_{\text{ab}} & \xrightarrow{\iota_*^U + \iota_*^V} & \pi_1(X)_{\text{ab}} & \longrightarrow & 0 \\
 \cong \downarrow h_1^{U \cap V} & & \cong \downarrow h_1^U \oplus h_1^V & & \cong \downarrow h_1^X & & \\
 H_1(U \cap V) & \xrightarrow{(j_*^U, -j_*^V)} & H_1(U) \oplus H_1(V) & \xrightarrow{\iota_*^U + \iota_*^V} & H_1(X) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Aus dem Satz von Seifert–van Kampen, siehe Satz I.5.5, folgt, dass die erste Zeile exakt ist. Die untere Zeile ist ein Stück der Mayer–Vietors Sequenz, da $\tilde{H}_0(U \cap V) = 0$ ist sie auch bei $H_1(X)$ exakt. Nach Satz IV.11.3 sind alle vertikalen Pfeile Isomorphismen. Wir können die Exaktheit dieses Stücks der Mayer–Vietoris Sequenz daher als Abelisierte Version des van Kampen Satzes verstehen.

IV.12. Anwendungen. Die Berechnung der Homologiegruppen der Sphären ermöglicht die Klärung einiger fundamentaler jedoch subtiler Fragen zu Teilmengen des \mathbb{R}^n , siehe etwa den Jordanschen Kurvensatz IV.12.25 unten. Auch können wir nun stetigen Abbildungen $S^n \rightarrow S^n$ einen Abbildungsgrad zuordnen, der den in Abschnitt I.4 verallgemeinert. Auch werden wir sehen, dass die Dimension topologischer Mannigfaltigkeiten, sowie der Rand topologischer Mannigfaltigkeiten mit Rand, sinnvolle Konzepte darstellen. Schließlich werden wir auch auf den Begriff der Orientierung topologischer Mannigfaltigkeiten zu sprechen kommen.

Aus Satz IV.9.5 und Korollar IV.7.7 erhalten wir sofort

IV.12.1. SATZ. *Die Sphären S^n und S^m sind nicht homotopieäquivalent und daher auch nicht homöomorph, $n \neq m$.*

Auch können wir nun folgende Verallgemeinerung von Satz I.2.19 zeigen.

IV.12.2. SATZ. *Die Sphäre S^{n-1} ist nicht Retrakt von D^n , dh. es gibt keine stetige Abbildung $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ mit $r(x) = x$ für alle $x \in S^{n-1}$.*

BEWEIS. Wir nehmen indirekt an es ist $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ eine stetige Abbildung mit $r \circ \iota = \text{id}_{S^{n-1}}$, wobei $\iota : S^{n-1} \rightarrow D^n$ die kanonische Inklusion bezeichnet. Nach Korollar IV.7.8 gilt $\tilde{H}_*(D^n) = 0$. Wie erhalten daher $\text{id}_{\tilde{H}_*(S^{n-1})} = (\text{id}_{S^{n-1}})_* = (r \circ \iota)_* = r_* \circ \iota_* = 0$. Dies steht aber im Widerspruch zu $\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \neq 0$, siehe Satz IV.9.5. Daher kann es keine solche Retraktion geben. \square

Wir können nun auch Satz I.2.21 auf beliebige Dimensionen verallgemeinern.

IV.12.3. SATZ (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $f : D^n \rightarrow D^n$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

BEWEIS. Wäre $f : D^n \rightarrow D^n$ eine stetige Abbildung ohne Fixpunkt, dann könnten wir, genau wie im Beweis von Satz I.2.21, eine Retraktion $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ konstruieren und würden einen Widerspruch zu Satz IV.12.2 erhalten. \square

Ist X ein topologischer Raum und $x \in X$, dann wird $H_*(X, X \setminus \{x\})$ die *lokale Homologie von X bei x* genannt. Lemma IV.12.4 unten rechtfertigt den Namen *lokale Homologie*.

IV.12.4. LEMMA. *Ist X ein T_1 -Raum³⁵ und U eine Umgebung von x dann induziert die Inklusion $(U, U \setminus \{x\}) \rightarrow (X, X \setminus \{x\})$ einen Isomorphismus lokaler Homologiegruppen $H_*(U, U \setminus \{x\}) \cong H_*(X, X \setminus \{x\})$.*

BEWEIS. Dies folgt aus Satz IV.9.1 mit $Z := X \setminus U$. Beachte, dass $\bar{Z} \subseteq X \setminus \{x\}$, denn U ist eine Umgebung von x . Nach Voraussetzung ist $\{x\}$ abgeschlossen in X , und daher $X \setminus \{x\}$ eine offene Teilmenge von X . Also sind tatsächlich alle Voraussetzungen von Satz IV.9.1 erfüllt. \square

³⁵Ein topologischer Raum X erfüllt das Trennungsaxiom T_1 falls zu je zwei Punkten $x \neq y \in X$ eine Umgebungen U von y mit $x \notin U$ existiert. Dies bedeutet gerade, dass die einpunktigen Teilmengen $\{x\}$ abgeschlossen in X sind. Jeder Hausdorffraum erfüllt das Trennungsaxiom T_1 .

IV.12.5. PROPOSITION. *Es bezeichne $\mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0\}$ und $\dot{\mathbb{R}}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$. Dann gilt:*

(i) *Für $x \in \mathbb{R}^n$ bzw. $y \in \mathbb{R}_+^n \setminus \dot{\mathbb{R}}_+^n$ ist*

$$H_q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong H_q(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n \setminus \{y\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n \\ 0 & \text{falls } q \neq n \end{cases}$$

(ii) *Für $x \in \dot{\mathbb{R}}_+^n$ ist $H_*(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n \setminus \{x\}) = 0$.*

BEWEIS. Die lokalen Homologiegruppen von \mathbb{R}^n haben wir bereits in Beispiel IV.9.7 berechnet. Die zweite Behauptung in (i) folgt nun aus Lemma IV.12.4, denn \mathbb{R}_+^n ist eine Umgebung von y in \mathbb{R}^n . Um (ii) zu zeigen, wählen wir einen Punkt $P \in \mathbb{R}_+^n \setminus \dot{\mathbb{R}}_+^n$. Da $x \in \dot{\mathbb{R}}_+^n$ ist

$$G : (\mathbb{R}_+^n \times I, (\mathbb{R}_+^n \setminus \{x\}) \times I) \rightarrow (\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n \setminus \{x\}), \quad G(z, t) := tP + (1-t)z,$$

eine wohldefinierte Homotopie von Paaren von $G_0 = \text{id}_{(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n \setminus \{x\})}$ zur konstanten Abbildung $G_1 : (\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n \setminus \{x\}) \rightarrow (\{P\}, \{P\})$. Also ist die Inklusion $(\{P\}, \{P\}) \rightarrow (\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n \setminus \{x\})$ eine Homotopieäquivalenz von Paaren. Da $H_*(\{P\}, \{P\}) = 0$ erhalten wir nun $H_*(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n \setminus \{x\}) = 0$, siehe Korollar IV.7.7. \square

IV.12.6. SATZ (Brouwer, Invarianz der Dimension). *Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ zwei nicht-leere offenen Teilmengen. Gilt weiters $U \cong V$, dann auch $n = m$. Insbesondere sind \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m nicht homöomorph, $n \neq m$.*

BEWEIS. Sei also $\varphi : U \xrightarrow{\cong} V$ ein Homöomorphismus. Wähle $x \in U$. Dann ist $\varphi : (U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} (V, V \setminus \{\varphi(x)\})$ ein Homöomorphismus von Paaren und induziert daher einen Isomorphismus zwischen den lokalen Homologiegruppen, $H_*(U, U \setminus \{x\}) \cong H_*(V, V \setminus \{\varphi(x)\})$. Zusammen mit Lemma IV.12.4 erhalten wir $H_*(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \cong H_*(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{\varphi(x)\})$. Mittels Proposition IV.12.5(i) folgt nun $m = n$. \square

IV.12.7. BEMERKUNG. Nach Satz IV.12.6 ist die Dimension einer topologischen Mannigfaltigkeit ein wohldefiniertes Konzept. Eine topologische Mannigfaltigkeit ist ein parakompakter Hausdorffraum M , sodass jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt, die zu einer offenen Teilmenge V eines \mathbb{R}^n homöomorph ist. Jeder solche Homöomorphismus $U \cong V$ wird eine Karte von M um x genannt. Unter der *Dimension von M bei x* verstehen wir die Zahl $\dim_x(M) := n$. Nach Satz IV.12.6 ist dies wohldefiniert, dh. jede andere Karte um x muss auch Werte in \mathbb{R}^n haben. Die Dimension liefert eine lokal konstante (stetige) Abbildung $\dim : M \rightarrow \mathbb{Z}$, für zusammenhängendes M muss diese also konstant sein. Unter einer n -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeit verstehen wir eine topologische Mannigfaltigkeit, sodass $\dim_x(M) = n$ für alle $x \in M$. In diesem Fall sprechen wir auch von einer topologischen n -Mannigfaltigkeit und schreiben $\dim(M) = n$.

IV.12.8. BEMERKUNG. Es sei M eine topologische n -Mannigfaltigkeit. Für jedes $x \in M$ gilt $\tilde{H}_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$. Betrachte nun die Menge

$$\tilde{M}_{\mathbb{Z}} := \bigsqcup_{x \in X} \tilde{H}_n(M, M \setminus \{x\}) \xrightarrow{p} M$$

und die kanonische Projektion $p : \tilde{M}_{\mathbb{Z}} \rightarrow M$. Wir wollen nun $\tilde{M}_{\mathbb{Z}}$ mit einer Topologie versehen, sodass $p : \tilde{M}_{\mathbb{Z}} \rightarrow M$ eine Überlagerungsabbildung wird. Unter einem eingebetteten Ball wollen wir jede Teilmenge $D \subseteq M$ verstehen, für die eine offene Umgebung U von D und eine Karte $\varphi : U \xrightarrow{\cong} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert, sodass $\varphi(D) = D^n$. Die Einschränkung von φ liefert dann Homöomorphismen $\dot{D} \cong B^n$, $\dot{D} \cong S^{n-1}$ sowie $(D, \dot{D}) \cong (D^n, S^{n-1})$. Ist D ein eingebetteter Ball und $x \in D$, dann ist $M \setminus \dot{D}$ Deformationsretrakt von $M \setminus \{x\}$, denn für jedes $z \in B^n$ ist $\mathbb{R}^n \setminus B^n$ Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{z\}$, und diese Deformationsretraktion lässt mit Hilfe einer Karte auf M übertragen. Also induziert die Inklusion $\psi_D^x : (M, M \setminus \dot{D}) \rightarrow (M, M \setminus \{x\})$ einen Isomorphismus $(\psi_D^x)_* : \tilde{H}_n(M, M \setminus \dot{D}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(M, M \setminus \{x\})$. Die $(\psi_D^x)_*$, für $x \in \dot{D}$, definieren daher eine Bijektion

$$\Psi_D : \dot{D} \times \tilde{H}_n(M, M \setminus \dot{D}) \xrightarrow{\cong} p^{-1}(\dot{D}) \subseteq \tilde{M}_{\mathbb{Z}} \quad (\text{IV.45})$$

und es gilt $p \circ \Psi_D = \text{pr}_1$, wobei $\text{pr}_1 : \dot{D} \times \tilde{H}_n(M, M \setminus \dot{D}) \rightarrow \dot{D}$ die Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet. Wir versehen nun $\tilde{M}_{\mathbb{Z}}$ mit der feinsten Topologie, sodass für jeden eingebetteten Ball D die Abbildung Ψ_D , siehe (IV.45), stetig ist. Dabei betrachten wir $\tilde{H}_n(M, M \setminus \dot{D}) \cong \mathbb{Z}$ als diskreten Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq \tilde{M}_{\mathbb{Z}}$ ist also genau dann offen, wenn $(\Psi_D)^{-1}(U)$ offen in $\dot{D} \times \tilde{H}_n(M, M \setminus \dot{D})$ ist, für jeden eingebetteten Ball D . Es folgt sofort, dass $p : \tilde{M}_{\mathbb{Z}} \rightarrow M$ stetig ist. Eine einfache Überlegung zeigt, dass für jeden eingebetteten Ball $\Psi_D : \dot{D} \times \tilde{H}_n(M, M \setminus \dot{D}) \xrightarrow{\cong} p^{-1}(\dot{D})$ ein Homöomorphismus ist. Daher ist $p : \tilde{M}_{\mathbb{Z}} \rightarrow M$ eine Überlagerung mit Fasern $p^{-1}(x) = \tilde{H}_n(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$.

Wir bezeichnen mit \tilde{M} die Teilmenge von $\tilde{M}_{\mathbb{Z}}$ die nur aus Erzeugern von $\tilde{H}_n(M, M \setminus \{x\})$ besteht. Die Einschränkung von p liefert dann offensichtlich eine zwei-blättrige Überlagerung $p : \tilde{M} \rightarrow M$, deren Faser über $x \in M$ gerade aus den beiden Erzeugern von $\tilde{H}_n(M, M \setminus \{x\})$ besteht. Diese Überlagerung $p : \tilde{M} \rightarrow M$ wird die *Orientierungsüberlagerung* von M genannt. Unter einer *Orientierung* von M verstehen wir einen Schnitt dieser Überlagerung, dh. eine stetige Abbildung³⁶ $\mathfrak{o} : M \rightarrow \tilde{M}$ mit $p \circ \mathfrak{o} = \text{id}_M$. Besitzt \tilde{M} so einen Schnitt, dann nennen wir M *orientierbar*. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Überlagerung $p : \tilde{M} \rightarrow M$ trivial ist. Etwa ist jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit orientierbar,

³⁶So ein Schnitt \mathfrak{o} ordnet daher jedem Punkt $x \in M$ einen Erzeuger $\mathfrak{o}_x \in \tilde{H}_n(M, M \setminus \{x\})$ zu. Die Stetigkeit bedeutet gerade, dass diese sogenannten *lokalen Orientierungen* \mathfrak{o}_x *kohärent* in folgendem Sinn sind. Ist D ein eingebetteter Ball und sind $x, y \in \dot{D}$, dann werden \mathfrak{o}_x und \mathfrak{o}_y durch die Isomorphismen $\psi_x^D : \tilde{H}_n(M, M \setminus \dot{D}) \cong \tilde{H}_n(M, M \setminus \{x\})$ bzw. $\psi_y^D : \tilde{H}_n(M, M \setminus \dot{D}) \cong \tilde{H}_n(M, M \setminus \{y\})$ auf dasselbe Element in $\tilde{H}_n(M, M \setminus \dot{D})$ abgebildet.

siehe Korollar II.4.10. Ist \mathfrak{o} eine Orientierung von M , dann ist auch $-\mathfrak{o}$ eine Orientierung von M . Stimmen zwei Orientierungen einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit in einem Punkt überein, dann müssen sie schon gleich sein, siehe Proposition II.3.1. Eine zusammenhängende orientierbare Mannigfaltigkeit besitzt daher genau zwei Orientierungen, \mathfrak{o} und $-\mathfrak{o}$.

IV.12.9. SATZ (Brouwer, Invarianz des Randes). *Es seien $U, V \subseteq \mathbb{R}_+^n$ zwei offene Teilmengen und $\varphi : U \xrightarrow{\cong} V$ ein Homöomorphismus. Für $x \in U$ gilt dann $x \in \dot{\mathbb{R}}_+^n \Leftrightarrow \varphi(x) \in \dot{\mathbb{R}}_+^n$.*

BEWEIS. Nach Lemma IV.12.4 gilt $H_*(U, U \setminus \{x\}) \cong H_*(\mathbb{R}_+^n, \mathbb{R}_+^n \setminus \{x\})$, für jedes $x \in U$. Aus Proposition IV.12.5 erhalten wir daher folgende Charakterisierung der Punkte in $U \cap \dot{\mathbb{R}}_+^n$

$$\forall x \in U : x \in \dot{\mathbb{R}}_+^n \Leftrightarrow H_*(U, U \setminus \{x\}) = 0.$$

Ebenso gilt $\forall y \in V : y \in \dot{\mathbb{R}}_+^n \Leftrightarrow H_*(V, V \setminus \{y\}) = 0$. Der Homöomorphismus φ liefert einen Homöomorphismus von Paaren $\varphi : (U, U \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} (V, V \setminus \{\varphi(x)\})$, also $H_*(U, U \setminus \{x\}) \cong H_*(V, V \setminus \{\varphi(x)\})$. Für beliebiges $x \in U$ folgt daher

$$x \in \dot{\mathbb{R}}_+^n \Leftrightarrow H_*(U, U \setminus \{x\}) = 0 \Leftrightarrow H_*(V, V \setminus \{\varphi(x)\}) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \in \dot{\mathbb{R}}_+^n. \quad \square$$

IV.12.10. BEMERKUNG. Nach Satz IV.12.9 ist der Rand einer topologischen Mannigfaltigkeit mit Rand ein wohldefiniertes Konzept. Unter einer *topologischen Mannigfaltigkeit mit Rand* verstehen wir einen parakompakten Hausdorffraum M , sodass jeder Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung U besitzt die zu einer offenen Teilmenge V von \mathbb{R}_+^n homöomorph ist. Jeder solche Homöomorphismus $U \cong V$ wird eine Karte von M um x genannt. Wird x durch eine Karte nach $\dot{\mathbb{R}}_+^n$ abgebildet, dann muss dies auch für jede andere Karte um x gelten, siehe Satz IV.12.9. Unter dem Rand von M verstehen wir die Teilmenge $\partial M \subseteq M$ der Punkte die durch eine (und dann alle) Karten um x nach $\dot{\mathbb{R}}_+^n$ abgebildet werden. Diese lassen sich auch wie folgt charakterisieren, $\partial M = \{x \in M : H_*(M, M \setminus \{x\}) = 0\}$. Jeder Punkt des Randes $x \in \partial M$ besitzt dann eine offene Umgebung U mit $(U, U \cap \partial M) \cong (\mathbb{R}_+^n, \dot{\mathbb{R}}_+^n)$. Der Rand ∂M ist daher eine topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand. Unter dem Inneren von M verstehen wir die Teilmenge $\text{Int}(M) := M \setminus \partial M$, dies ist eine topologische Mannigfaltigkeit ohne Rand.

Wir wollen nun einen Abbildungsgrad für stetige Abbildungen $f : S^n \rightarrow S^n$ definieren. Nach Satz IV.9.5 ist $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ und f induziert einen Homomorphismus $f_* : \tilde{H}_n(S^n) \rightarrow \tilde{H}_n(S^n)$. Es gibt daher genau eine Zahl $\deg(f) \in \mathbb{Z}$, sodass $f_*(\alpha) = \deg(f)\alpha$, für alle $\alpha \in \tilde{H}_n(S^n)$. Diese Zahl $\deg(f)$ wird der *Abbildungsgrad von f* genannt. In Bemerkung IV.12.14 unten werden wir sehen, dass dies im Fall $n = 1$ mit dem Abbildungsgrad aus Abschnitt I.4 übereinstimmt. Beachte, dass die obige Definition mittels Homologiegruppen wesentlich einfacher ist als die Definition über die Fundamentalgruppe, da wir nicht auf Basispunkte Rücksicht nehmen müssen.

IV.12.11. SATZ. Für stetige Abbildungen $f, g : S^n \rightarrow S^n$ gilt:

- (i) $f \simeq g \Rightarrow \deg(f) = \deg(g)$.
- (ii) $\deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$.
- (iii) $\deg(\text{id}_{S^n}) = 1$.
- (iv) $\deg(Sf) = \deg(f)$.³⁷
- (v) $\deg(f_U) = \det(U)$, wobei $U \in \text{O}_{n+1}$ und $f_U : S^n \rightarrow S^n$, $f_U(x) := Ux$.
- (vi) $\deg(A) = (-1)^{n+1}$, wobei $A : S^n \rightarrow S^n$, $Ax := -x$.

BEWEIS. Behauptung (i) folgt aus Korollar IV.7.5. Aus $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ erhalten wir sofort (ii), und wegen $(\text{id}_{S^n})_* = \text{id}_{\tilde{H}_n(S^n)}$ gilt auch (iii).

Nun zur Behauptung (iv): Es bezeichne $\varphi : \Sigma S^n \xrightarrow{\cong} S^{n+1}$ den oben erwähnten Homöomorphismus. Nach Definition von Sf gilt $Sf \circ \varphi = \varphi \circ \Sigma f$ und daher $(Sf)_* \circ \varphi_* = \varphi_* \circ (\Sigma f)_*$. Zusammen mit Beispiel IV.9.4 erhalten wir daher ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) & \xleftarrow[\cong]{\varphi_*} & \tilde{H}_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow[\cong]{\delta} & \tilde{H}_n(S^n) \\ \downarrow (Sf)_* & & \downarrow (\Sigma f)_* & & \downarrow f_* \\ \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1}) & \xleftarrow[\cong]{\varphi_*} & \tilde{H}_{n+1}(\Sigma S^n) & \xrightarrow[\cong]{\delta} & \tilde{H}_n(S^n) \end{array}$$

Da alle horizontalen Pfeile Isomorphismen sind, erhalten wir $\deg(Sf) = \deg(f)$.

Widmen wir uns nun Behauptung (v). Ist $\sigma : I \rightarrow \text{O}_{n+1}$ ein Weg von $\sigma(0) = U_0$ nach $\sigma(1) = U_1$ dann definiert $H : S^n \times I \rightarrow S^n$, $H(x, t) := f_{\sigma(t)}(x) = \sigma(t)x$, eine Homotopie von $H_0 = f_{U_0}$ nach $H_1 = f_{U_1}$. Wegen (i) gilt daher $\deg(f_{U_0}) = \deg(f_{U_1})$. Da auch $\det(U_0) = \det(U_1)$ genügt es die fragliche Formel für je eine Matrix in jeder der beiden Wegzusammenhangskomponenten von O_{n+1} zu verifizieren, vgl. Proposition I.6.12. Für $I_{n+1} \in \text{SO}_{n+1}$ folgt dies aus (iii), denn $f_{I_{n+1}} = \text{id}_{S^n}$. Die Matrix $J_{n+1} := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in \text{O}_{n+1}$ liegt in der anderen Wegzusammenhangskomponente, denn $\det(J_{n+1}) = -1$. Beachte, $f_{J_{n+1}} = S(f_{J_n})$ für $n \geq 1$, nach (iv) genügt es daher $\deg(f_{J_1}) = -1$ zu zeigen, dies ist aber trivial. Schließlich folgt (vi) sofort aus (v), denn $A = f_{-I_{n+1}}$ und $\det(-I_{n+1}) = (-1)^{n+1}$. \square

IV.12.12. BEMERKUNG. Für stetige Abbildungen $f, g : S^n \rightarrow S^n$ gilt sogar $f \simeq g \Leftrightarrow \deg(f) = \deg(g)$, vgl. Satz IV.12.11(i), dh. der Abbildungsgrad liefert eine Bijektion $[S^n, S^n] \cong \mathbb{Z}$. Im Fall $n = 1$ haben wir dies bereits gesehen, siehe Satz I.4.1(i), in höheren Dimensionen können wir dies mit den bisherigen Methoden noch nicht zeigen.

³⁷Wir erinnern uns an die Suspension von Räumen und Abbildungen aus Beispiel III.2.7. Die stetige Abbildung $S^n \times [-1, 1] \rightarrow S^{n+1}$, $(x, t) \mapsto ((1 - t^2)^{1/2}x, t)$, faktorisiert zu einem Homöomorphismus $\varphi : \Sigma S^n \xrightarrow{\cong} S^{n+1}$. Dieser Homöomorphismus erlaubt es die Suspension $\Sigma f : \Sigma S^n \rightarrow \Sigma S^n$ einer stetigen Abbildung $f : S^n \rightarrow S^n$ als eine stetige Abbildung $Sf := \varphi \circ \Sigma f \circ \varphi^{-1} : S^{n+1} \rightarrow S^{n+1}$ aufzufassen. Es lässt sich leicht eine explizite Formel dafür angeben $(Sf)(x, t) = ((1 - t^2)^{1/2}f((1 - t^2)^{-1/2}x), t)$.

IV.12.13. BEMERKUNG. Für eine Homotopieäquivalenz $f : S^n \rightarrow S^n$ gilt $\deg(f) = \pm 1$. Ist nämlich $g : S^n \rightarrow S^n$ mit $g \circ f \simeq \text{id}_{S^n}$, dann gilt nach Satz IV.12.11 $1 = \deg(\text{id}_{S^n}) = \deg(g \circ f) = \deg(g) \deg(f)$, also $\deg(f) = \pm 1$. Umgekehrt lässt sich zeigen, dass jede stetige Abbildung $f : S^n \rightarrow S^n$ mit $\deg(f) = \pm 1$ eine Homotopieäquivalenz sein muss, vgl. Bemerkung IV.12.12.

IV.12.14. BEMERKUNG. Der oben definierte Abbildungsgrad stimmt im Fall $n = 1$ mit dem Abbildungsgrad aus Abschnitt I.4 überein. Sei dazu $f : S^1 \rightarrow S^1$ eine stetige Abbildung. Da jede solche Abbildung homotop zu einer Basispunkt erhaltenden Abbildung ist, dürfen wir o.B.d.A. $f(1) = 1$ annehmen, siehe Satz IV.12.11(i) sowie Satz I.4.1(i). Aus Proposition IV.11.2 erhalten wir ein nebenstehendes kommutatives Diagramm. Nach Satz IV.11.3 sind die beiden horizontalen Pfeile Isomorphismen. Daraus folgt sofort, dass der in Abschnitt I.4 definierte Abbildungsgrad mit dem Abbildungsgrad der Homologie übereinstimmt. Aus Satz I.4.1(iii) und Satz IV.12.11(iv) folgt nun, dass zu jedem $k \in \mathbb{Z}$ Abbildungen $f : S^n \rightarrow S^n$ mit $\deg(f) = k$ existieren, $n \geq 1$. Wir erhalten daher eine surjektive Abbildung $\deg : [S^n, S^n] \rightarrow \mathbb{Z}$, falls $n \geq 1$. Im Fall $n = 0$ kann der Abbildungsgrad nur die Werte $-1, 0, 1$ annehmen.

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow[\cong]{h_1} & H_1(S^1) \\ \downarrow f_* & & \downarrow f_* \\ \pi_1(S^1, 1) & \xrightarrow[\cong]{h_1} & H_1(S^1) \end{array}$$

Analog zu Proposition I.4.2 gilt

IV.12.15. PROPOSITION. *Eine stetige Abbildung $f : S^n \rightarrow S^n$ mit $\deg(f) \neq 0$ muss surjektiv sein.*

BEWEIS. Wir nehmen an $f : S^n \rightarrow S^n$ ist nicht surjektiv. Dann existiert $P \in S^n$, sodass f eine stetige Abbildung $\tilde{f} : S^n \rightarrow S^n \setminus \{P\}$ definiert, $\tilde{f}(x) := f(x)$. Bezeichnet $\iota : S^n \setminus \{P\} \rightarrow S^n$ die kanonische Inklusion, dann gilt also $f = \iota \circ \tilde{f}$. Da $S^n \setminus \{P\}$ kontrahierbar ist haben wir $\tilde{H}_*(S^n \setminus \{P\}) = 0$ und es folgt $f_* = (\iota \circ \tilde{f})_* = \iota_* \circ \tilde{f}_* = 0$, also $\deg(f) = 0$. \square

Analog zu Proposition I.4.4 und Proposition I.4.5 haben wir folgendes Resultat.

IV.12.16. PROPOSITION. *Für stetiges $f : S^n \rightarrow S^n$ gilt:*

- (i) *Ist f Antipodalpunkt-frei, dh. $f(x) \neq -x$ für alle $x \in S^n$, dann ist f homotop zur identischen Abbildung id_{S^n} , es gilt daher $\deg(f) = 1$.*
- (ii) *Ist f Fixpunkt-frei, dh. $f(x) \neq x$ für alle $x \in S^n$, dann ist f homotop zur Antipodalabbildung, es gilt daher $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.*

BEWEIS. Wir beginnen mit (IV.12.16): Sei also $f : S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung, sodass $f(x) \neq -x$, für alle $x \in S^n$. Dann ist

$$H : S^n \times I \rightarrow S^n, \quad H(x, t) := \frac{(1-t)f(x) + tx}{|(1-t)f(x) + tx|}$$

eine wohldefinierte Homotopie von $H_0 = f$ nach $H_1 = \text{id}_{S^n}$. Nach Satz IV.12.11 gilt daher $\deg(f) = 1$. Nun zur Behauptung (ii). Sei also $f : S^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung ohne Fixpunkt, und es bezeichne $A : S^n \rightarrow S^n$, $A(x) := x$, die Antipodalabbildung, $A^2 = \text{id}_{S^n}$. Dann ist die Abbildung $A \circ f : S^n \rightarrow S^n$ Antipodalpunkt-frei, aus (i) folgt daher $A \circ f \simeq \text{id}_{S^n}$. Durch Komposition mit A erhalten wir $f \simeq A$ und daher $\deg(f) = (-1)^{n+1}$ nach Satz IV.12.11. \square

IV.12.17. SATZ. *Jede stetige Abbildung $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ besitzt einen Fixpunkt oder eine Antipodalpunkt, dh. es existiert $x \in S^{2n}$ mit $f(x) = x$ oder $f(x) = -x$.*

BEWEIS. Wäre $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ eine Fixpunkt- und Antipodalpunkt-freie stetige Abbildung, dann würden wir aus Proposition IV.12.16 den Widerspruch $1 = \deg(f) = (-1)^{2n+1} = -1$ erhalten. \square

Unter einem stetigen *Vektorfeld auf S^n* verstehen wir eine stetige Abbildung $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, sodass $f(x) \perp x$ für alle $x \in S^n$.

IV.12.18. SATZ (Satz vom Igel). *Jedes stetige Vektorfeld auf S^{2n} besitzt mindestens eine Nullstelle.*

BEWEIS. Wir nehmen indirekt an $f : S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1} \setminus \{0\}$ ist eine stetige Abbildung mit $f(x) \perp x$ für alle $x \in S^{2n}$. Betrachte nun die stetige Abbildung $g : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$, $g(x) := \frac{f(x)}{|f(x)|}$. Da $f(x) \perp x$ gilt $g(x) \neq x$ und $g(x) \neq -x$ für alle $x \in S^{2n}$. Dies widerspricht aber Satz IV.12.17. \square

IV.12.19. BEMERKUNG. Auf den Sphären ungerader Dimension gibt es sehr wohl Vektorfelder ohne Nullstellen. Fassen wir $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$ auf, dann ist etwa $f : S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $f(z) := \mathbf{i}z$, so ein Vektorfeld. Auf $S^3 \subseteq \mathbb{H}$ existieren sogar drei Vektorfelder $f_1, f_2, f_3 : S^3 \rightarrow \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, sodass $\{f_1(x), f_2(x), f_3(x)\}$ bei jedem Punkt $x \in S^3$ linear unabhängig sind, etwa $f_1(x) := \mathbf{i}x$, $f_2(x) := \mathbf{j}x$, $f_3(x) := \mathbf{k}x$. Auf S^7 gibt es sogar sieben punktweise linear unabhängige Vektorfelder. Definieren wir

$$\rho_n := \{k \in \mathbb{N}_0 \mid \text{es existieren } k \text{ punktweise l.u. Vektorfelder auf } S^{n-1}\}$$

dann gilt aus Dimensionsgründen $0 \leq \rho_n \leq n - 1$, und Satz IV.12.18 besagt gerade $\rho_{2n+1} = 0$. Nach obigen Bemerkungen gilt auch $\rho_{2n} \geq 1$ sowie $\rho_4 = 3$ und $\rho_8 = 7$. Nach einem tiefen Resultat von Adams (1962) ist $\rho_n = 2^b + 8c - 1$, wobei a, b, c die durch n eindeutig bestimmten Zahlen mit $n = a2^{b+4c}$, a ungerade, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ und $c \in \mathbb{N}_0$ bezeichnen. Für kleine n erhalten wir daher:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ρ_n	1	0	3	0	1	0	7	0	1	0	3	0	1	0	7

Insbesondere ist $\rho_n = n - 1$ nur für $n = 2, 4, 8$ möglich, dh. die einzigen Sphären die einen globalen Rahmen besitzen sind S^1 , S^3 und S^7 .

IV.12.20. SATZ. *Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}P^{2n} \rightarrow \mathbb{R}P^{2n}$ besitzt mindestens einen Fixpunkt.*

BEWEIS. Wir betrachten die zweiblättrige Überlagerung $p : S^{2n} \rightarrow \mathbb{RP}^{2n}$, siehe Beispiel II.1.12. Da S^{2n} einfach zusammenhängend ist, lässt sich $f \circ p : S^{2n} \rightarrow \mathbb{RP}^{2n}$ zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f} : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ liften, $p \circ \tilde{f} = f \circ p$, siehe Satz II.4.5. Nach Satz IV.12.17 existiert $\tilde{x} \in S^{2n}$ mit $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{x}$ oder $\tilde{f}(\tilde{x}) = -\tilde{x}$. In jedem Fall ist $x := p(\tilde{x}) \in \mathbb{RP}^{2n}$ der gesuchte Fixpunkt von f , denn $f(x) = f(p(\tilde{x})) = p(\tilde{f}(\tilde{x})) = p(\pm\tilde{x}) = x$. \square

IV.12.21. SATZ. *Ist G eine nicht-triviale Gruppe die frei auf S^{2n} wirkt, dann gilt $G \cong \mathbb{Z}_2$.*

BEWEIS. Für $g \in G$ bezeichne $f_g : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$, $f_g(x) := g \cdot x$, und definiere $d(g) \in \mathbb{Z}$ durch $d(g) := \deg(f_g)$. Für $g_1, g_2 \in G$ gilt dann $d(g_1 g_2) = \deg(f_{g_1 g_2}) = \deg(f_{g_1} \circ f_{g_2}) = \deg(f_{g_1}) \deg(f_{g_2}) = d(g_1) d(g_2)$, siehe Satz IV.12.11. Bezeichnet $e \in G$ das neutrale Element, dann ist $f_e = \text{id}_{S^{2n}}$, also $1 = d(e) = d(g g^{-1}) = d(g) d(g^{-1})$ und daher $d(g) = \pm 1$. Somit definiert

$$d : G \rightarrow \{-1, 1\}, \quad d(g) := \deg(f_g) \quad (\text{IV.46})$$

einen Gruppenhomomorphismus. Für $e \neq g \in G$ hat f_g keinen Fixpunkt, denn die Wirkung von G auf S^{2n} ist frei, aus Proposition IV.12.16(i) folgt somit $d(f_g) = (-1)^{2n+1} = -1$. Daher ist der Kern von (IV.46) trivial, der Homomorphismus daher injektiv. Nach Voraussetzung ist $G \neq \{e\}$, also muss (IV.46) ein Isomorphismus sein. \square

IV.12.22. PROPOSITION. *Ist $X \subseteq S^n$ und $X \cong D^k$ für ein $k \geq 0$, dann gilt $\tilde{H}_*(S^n \setminus X) = 0$. Insbesondere ist $S^n \setminus X$ wegzusammenhängend.*

BEWEIS. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach k . Für $k = 0$ ist die Aussage trivial, denn $S^n \setminus \{P\}$ ist kontrahierbar, siehe Beispiel I.1.25 und Korollar IV.7.8. Für den Induktionsschritt sei nun $k \geq 1$. Beachte, dass $D^k \cong I^k$, nach Voraussetzung existiert daher ein Homöomorphismus $\varphi : I^k \rightarrow X$. Sei nun $[\alpha] \in \tilde{H}_q(S^n \setminus X)$, wobei $\alpha \in Z_q(S^n \setminus X)$. Es ist $[\alpha] = 0 \in \tilde{H}_q(S^n \setminus X)$ zu zeigen. Wir werden zunächst folgende Behauptung beweisen: Jedes $t \in I$ besitzt eine Umgebung U , sodass für den von der Inklusion $\iota_U : S^n \setminus X \rightarrow S^n \setminus \varphi(I^{k-1} \times U)$ induzierten Homomorphismus $(\iota_U)_* : \tilde{H}_q(S^n \setminus X) \rightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus \varphi(I^{k-1} \times U))$ gilt $(\iota_U)_*[\alpha] = 0$. Beachte, dass dies dann für jede kleinere Umgebung von t richtig bleibt. Nun zur Konstruktion dieser Umgebung U . Für $t \in I$ bezeichne $X_t := \varphi(I^{k-1} \times \{t\})$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$\tilde{H}_*(S^n \setminus X_t) = 0, \quad (\text{IV.47})$$

denn $X_t \cong D^{k-1}$. Bezeichnet $j_t : S^n \setminus X \rightarrow S^n \setminus X_t$ die kanonische Inklusion, dann gilt also $(j_t)_*[\alpha] = 0 \in \tilde{H}_q(S^n \setminus X_t)$. Daher existiert $\beta \in C_{q+1}(S^n \setminus X_t)$ mit $\alpha = \partial_{q+1} \beta$. Da X_t kompakt ist, existiert eine Umgebung U von t , sodass $\beta \in C_{q+1}(S^n \setminus \varphi(I^{k-1} \times U))$. Es gilt daher $(\iota_U)_*[\alpha] = 0$, also ist U die gesuchte Umgebung.

Da I kompakt ist, existieren $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$, sodass für die von den Inklusionen $\iota_i : S^n \setminus X \rightarrow S^n \setminus A_i$, wobei $A_i := \varphi(I^{k-1} \times [t_{i-1}, t_i])$, induzierten Homomorphismen $(\iota_i)_* : \tilde{H}_q(S^n \setminus X) \rightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus A_i)$ gilt

$$(\iota_i)_*[\alpha] = 0 \in \tilde{H}_q(S^n \setminus A_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{IV.48})$$

Es genügt daher zu zeigen, dass der Homomorphismus

$$\begin{aligned} \tilde{H}_*(S^n \setminus X) &\xrightarrow{\cong} \tilde{H}_*(S^n \setminus A_1) \oplus \dots \oplus \tilde{H}_*(S^n \setminus A_N) \\ \sigma &\mapsto ((\iota_1)_*\sigma, \dots, (\iota_N)_*\sigma) \end{aligned} \quad (\text{IV.49})$$

ein Isomorphismus ist, denn zusammen mit (IV.48) folgt dann $[\alpha] = 0$.

Um dies einzusehen werden wir zeigen, dass für jedes $1 \leq l \leq N$ die Inklusionen $S^n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_l) \rightarrow S^n \setminus A_i$, $1 \leq i \leq l$, einen Isomorphismus

$$\tilde{H}_*(S^n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_l)) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_*(S^n \setminus A_1) \oplus \dots \oplus \tilde{H}_*(S^n \setminus A_l) \quad (\text{IV.50})$$

induzieren. Für $l = N$ erhalten wir dann (IV.49), denn $S^n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_N) = S^n \setminus X$.

Wir führen den Beweis von (IV.50) mittels Induktion nach l . Der Fall $l = 1$ ist trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $2 \leq l \leq N$. Betrachte nun die offenen Teilmengen $V_1 := S^n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{l-1})$ und $V_2 := S^n \setminus A_l$ von $S^n \setminus X_{t_{l-1}}$. Offensichtlich ist $V_1 \cup V_2 = X_{t_{l-1}}$ also $\tilde{H}_*(V_1 \cup V_2) = 0$, siehe (IV.47). Aus der mit V_1 und V_2 assoziierten Mayer–Vietoris Sequenz, siehe Korollar IV.10.4, folgt daher, dass die Inklusionen einen Isomorphismus $\tilde{H}_*(V_1 \cap V_2) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_*(V_1) \oplus \tilde{H}_*(V_2)$ induzieren. Zusammen mit $V_1 \cap V_2 = S^n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_l)$ und der Induktionsvoraussetzung $\tilde{H}_*(V_1) = \tilde{H}_*(S^n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{l-1})) \cong \tilde{H}_*(S^n \setminus A_1) \oplus \dots \oplus \tilde{H}_*(S^n \setminus A_{l-1})$ erhalten wir nun (IV.50).

Damit ist der Beweis von $\tilde{H}_*(S^n \setminus X) = 0$ abgeschlossen. Der Wegzusammenhang von $S^n \setminus X$ folgt nun aus Bemerkung IV.5.20. \square

IV.12.23. PROPOSITION. *Ist $X \subseteq S^n$ und $X \cong S^k$ mit $0 \leq k < n$, dann gilt:*

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n - k - 1 \\ 0 & \text{falls } q \neq n - k - 1 \end{cases}$$

BEWEIS. Wir führen den Beweis durch Induktion nach k . Im Fall $k = 0$ besteht X aus zwei Punkten, also $S^n \setminus X \cong S^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq S^{n-1}$, siehe Beispiel I.1.25, daher $\tilde{H}_*(S^n \setminus X) \cong \tilde{H}_*(S^{n-1})$, und die Aussage der Proposition folgt aus Satz IV.9.5. Für den Induktionsschritt sei nun $k \geq 1$ und $\varphi : S^k \rightarrow X$ ein Homöomorphismus. Es bezeichnen $D^\pm := \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \in S^k : \pm x_k \geq 0\}$ die beiden abgeschlossenen Hemisphären von S^k , dh. $D^+ \cup D^- = S^k$, $D^+ \cap D^- \cong S^{k-1}$ und $D^\pm \cong D^k$. Setze $U := S^n \setminus \varphi(D^+)$, $V := S^n \setminus \varphi(D^-)$ und $S := \varphi(D^+ \cap D^-) \cong S^{k-1}$. Dann sind U und V offene Teilmengen von

$S^n \setminus S$ und es gilt $U \cup V = S^n \setminus S$ sowie $U \cap V = S^n \setminus X$. Nach Proposition IV.12.22 gilt $\tilde{H}_*(U) = \tilde{H}_*(V) = 0$. Also liefert der Einhängungshomomorphismus der mit U und V assoziierten Mayer–Vietoris Sequenz einen Isomorphismus $\tilde{H}_{*+1}(S^n \setminus S) \cong \tilde{H}_*(S^n \setminus X)$, siehe Korollar IV.10.4. Zusammen mit der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\tilde{H}_q(S^n \setminus X) \cong \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q + 1 = n - (k - 1) - 1 \\ 0 & \text{falls } q + 1 \neq n - (k - 1) - 1 \end{cases} \quad \square$$

IV.12.24. BEISPIEL. Ist sei $K \subseteq S^3$ und $K \cong S^1$ dann gilt:

$$H_q(S^3 \setminus K) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0 \text{ oder } q = 1 \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

Dies folgt sofort aus Proposition IV.12.23, siehe auch Proposition IV.5.18. Die Homologiegruppen des Knotenkomplements helfen daher nicht Knoten voneinander zu unterscheiden.

IV.12.25. SATZ (Jordanscher Kurvensatz). *Ist $n \geq 1$, $X \subseteq S^n$ und $X \cong S^{n-1}$, dann hat $S^n \setminus X$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten und beide sind azyklisch. Bezeichnen U und V die beiden Wegzusammenhangskomponenten von $S^n \setminus X$, dann gilt weiters $\dot{U} = \dot{V} = X$.³⁸*

BEWEIS. Aus Proposition IV.12.23 und Proposition IV.5.18 erhalten wir:

$$H_q(S^n \setminus X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{falls } q = 0 \\ 0 & \text{falls } q \neq 0 \end{cases}$$

Daher hat $S^n \setminus X$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, siehe Proposition IV.5.17, und beide sind azyklisch, siehe Proposition IV.5.13. Damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt.

Es bezeichnen nun U und V die beiden Wegzusammenhangskomponenten von $S^n \setminus X$. Aus Symmetriegründen genügt es $\dot{U} = X$ zu zeigen. Wegen der Kompaktheit von X ist $S^n \setminus X$ eine offene Teilmenge von S^n und daher lokal wegzusammenhängend. Die Wegzusammenhangskomponenten von $S^n \setminus X$ sind daher offene Teilmengen von $S^n \setminus X$. Also sind U und V offene Teilmengen von S^n . Betrachte nun die Zerlegung

$$U \sqcup V \sqcup X = S^n. \tag{IV.51}$$

Da U offen ist gilt $\dot{U} = U$, also $\dot{U} \cap U = (\bar{U} \setminus \dot{U}) \cap U = (\bar{U} \setminus U) \cap U = \emptyset$. Da $U \subseteq S^n \setminus V$ folgt aus der Offenheit von V nun $\bar{U} \subseteq S^n \setminus V$, also $\dot{U} \cap V \subseteq \bar{U} \cap V = \emptyset$ und daher $\dot{U} \cap V = \emptyset$. Zusammen mit (IV.51) erhalten wir $\dot{U} \subseteq X$.

³⁸Ist A eine Teilmenge eines topologischen Raums Y , dann schreiben wir $\dot{A} := \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap \overline{Y \setminus A}$ für den Rand von A . Dies ist eine abgeschlossene Teilmenge von Y die oft auch mit ∂A bezeichnet wird. Ein Punkt aus Y liegt genau dann in \dot{A} wenn jede seiner Umgebungen Punkte aus A sowie Punkte aus $Y \setminus A$ enthält.

Es verbleibt daher $X \subseteq \dot{U}$ zu zeigen. Sei dazu $x \in X$ und N eine Umgebung von x in S^n . Es genügt $\dot{U} \cap N \neq \emptyset$ zu zeigen, denn wenn in jeder Umgebung von x Punkte aus \dot{U} liegt, dann muss x im Abschluss von \dot{U} enthalten sein, dieser stimmt aber mit \dot{U} überein, denn \dot{U} ist eine abgeschlossene Teilmenge von S^n . Da $X \cong S^{n-1}$ finden wir Teilmengen D^+ und D^- von X , mit $D^+ \cong D^{n-1} \cong D^-$, $D^+ \cup D^- = X$ und $x \in D^+ \subseteq N$. Nach Proposition IV.12.22 ist $S^n \setminus D^-$ wegzusammenhängend, also existiert ein Weg $\omega : I \rightarrow S^n \setminus D^-$ mit $\omega(0) \in U$ und $\omega(1) \in V$. Betrachte $t_0 := \sup\{t \in I : \omega(t) \in U\}$. Auf Grund der Stetigkeit von ω ist $\omega^{-1}(\bar{U})$ abgeschlossen in I , also $t_0 \in \omega^{-1}(\bar{U})$ und damit $\omega(t_0) \in \bar{U}$. Ebenso ist $\omega^{-1}(\dot{U})$ offen in $[0, 1)$, also $t_0 \notin \omega^{-1}(\dot{U})$ und daher $\omega(t_0) \notin \dot{U}$. Wir erhalten daher $\omega(t_0) \in \bar{U} \setminus \dot{U} = \dot{U} \subseteq X = D^+ \cup D^-$, also auch $\omega(t_0) \in D^+ \subseteq N$. Insgesamt folgt $\omega(t_0) \in \dot{U} \cap N$, also ist $\dot{U} \cap N \neq \emptyset$. \square

IV.12.26. BEMERKUNG. Ist $n \geq 3$, $X \subseteq S^n$ und $X \cong S^{n-1}$, dann müssen die Wegzusammenhangskomponenten des Komplements $S^n \setminus X$ nicht unbedingt kontrahierbar sein. Etwa ist für *Alexanders gehörnte Sphäre* eine dieser Wegzusammenhangskomponenten nicht einfach zusammenhängend, siehe [4, page 170]. Im Fall $n = 2$ gilt jedoch der Satz von Schönflies. Ist $X \subseteq S^2$ und $X \cong S^1$ dann existiert ein Homöomorphismus $\varphi : S^2 \rightarrow S^2$ mit $\varphi(X) = S^1 \subseteq S^2$, wobei wir S^1 als Äquator von S^2 auffassen. Im Fall $n = 2$ sind daher beide Wegzusammenhangskomponenten des Komplements sogar homöomorph zu $B^2 \cong \mathbb{R}^2$.

IV.12.27. KOROLLAR. *Es sei $n \geq 2$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $X \cong S^{n-1}$. Dann hat $\mathbb{R}^n \setminus X$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Eine davon, U , ist beschränkt, die andere, V , ist unbeschränkt.³⁹ Weiters ist U azyklisch, und es gilt $\tilde{H}_{n-1}(V) \cong \mathbb{Z}$ sowie $\tilde{H}_q(V) = 0$ für $q \neq n - 1$. Schließlich haben wir $\dot{U} = X = \dot{V}$.*

BEWEIS. Wir fixieren einen Punkt $\infty \in S^n$ und fassen \mathbb{R}^n als Teilraum von S^n auf, dh. $\mathbb{R}^n = S^n \setminus \{\infty\}$. Dadurch wird auch X ein Teilraum von S^n . Nach Satz IV.12.25 hat $S^n \setminus X$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Es bezeichne \tilde{V} jene Wegzusammenhangskomponente die ∞ enthält, und U die andere. Beachte $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Setzen wir $V := \tilde{V} \setminus \{\infty\}$ erhalten wir eine disjunkte Zerlegung $\mathbb{R}^n \setminus X = U \sqcup V$. Da \tilde{V} eine offene Teilmenge von S^n ist, existiert eine Umgebung von ∞ die zur Gänze in \tilde{V} liegt, also muss U beschränkt in \mathbb{R}^n sein, und V ist unbeschränkt in \mathbb{R}^n . Aus Satz IV.12.25 folgt auch sofort $\dot{U} = X = \dot{V}$, sowie $\tilde{H}_*(U) = 0 = \tilde{H}_*(\tilde{V})$. Daher liefert der Einhängungshomomorphismus der langen exakten Sequenz des Paares $(\tilde{V}, V) = (\tilde{V}, \tilde{V} \setminus \{\infty\})$ einen Isomorphismus $\delta : \tilde{H}_*(\tilde{V}, \tilde{V} \setminus \{\infty\}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{*-1}(V)$. Aus Lemma IV.12.4 und Proposition IV.12.5(i) folgt daher

$$\tilde{H}_q(V) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } q = n - 1 \\ 0 & \text{falls } q \neq n - 1 \end{cases}$$

³⁹Die beschränkte Wegzusammenhangskomponente U wird das *Innere* von X genannt, die unbeschränkte Wegzusammenhangskomponente V heißt das *Äußere* von X .

Da $n \geq 2$, gilt insbesondere $\tilde{H}_0(V) = 0$, also ist V wegzusammenhängend. Somit sind U und V die beiden Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus X$. \square

IV.12.28. SATZ (Brouwer, Invarianz des Gebiets). *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offenen Teilmenge und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine injektive stetige Abbildung. Dann ist $f(U)$ offen in \mathbb{R}^n .*

BEWEIS. Wir wählen einen Punkt $\infty \in S^n$ und identifizieren $\mathbb{R}^n = S^n \setminus \{\infty\}$, vgl. Beispiel I.1.25. Fassen wir nun f als stetige Abbildung $f : U \rightarrow S^n$ auf, dann genügt es zu zeigen, dass $f(U)$ eine offene Teilmenge von S^n ist, denn \mathbb{R}^n ist offen in S^n . Sei dazu $x \in U$. Wegen der Offenheit von U existiert $\varepsilon > 0$, sodass für $D := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \varepsilon\} \cong D^n$ gilt $D \subseteq U$. Weiters setzen wir $S := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| = \varepsilon\} \cong S^{n-1}$. Wegen der Injektivität von f haben wir eine disjunkte Zerlegung $f(D) = f(S) \sqcup f(D \setminus S)$, also auch

$$S^n \setminus f(S) = (S^n \setminus f(D)) \sqcup f(D \setminus S). \quad (\text{IV.52})$$

Da D kompakt ist muss die bijektive stetige Abbildung $f|_D : D \xrightarrow{\cong} f(D)$ ein Homöomorphismus sein. Einschränkung von f liefert daher Homöomorphismen $S \cong f(S)$ und $D \setminus S \cong f(D \setminus S)$. Also ist $f(D \setminus S)$ wegzusammenhängend, $S^n \setminus f(D)$ ist wegzusammenhängend, siehe Proposition IV.12.22, und $S^n \setminus f(S)$ hat genau zwei Wegzusammenhangskomponenten, siehe Satz IV.12.25. Aus (IV.52) schließen wir nun, dass $S^n \setminus f(D)$ und $f(D \setminus S)$ die beiden Wegzusammenhangskomponenten von $S^n \setminus f(S)$ sind. Insbesondere ist $f(D \setminus S)$ offen in S^n und damit $f(x)$ innerer Punkt von $f(U)$. Da $x \in U$ beliebig war, ist also $f(U)$ eine offene Teilmenge von S^n , der Beweis daher vollständig. \square

IV.12.29. KOROLLAR. *Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und gilt $U \cong V$, dann ist auch V eine offene Teilmenge von \mathbb{R}^n .*

BEWEIS. Wir können einen Homöomorphismus $U \xrightarrow{\cong} V$ als injektive stetige Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $f(U) = V$ auffassen. Nach Satz IV.12.28 muss daher auch V offen in \mathbb{R}^n sein. \square

IV.12.30. KOROLLAR. *Jede injektive stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen topologischen n -Mannigfaltigkeiten M und N ist offen.⁴⁰ Insbesondere ist $f(M)$ offen in N , und $f : M \xrightarrow{\cong} f(M)$ ist ein Homöomorphismus.*

BEWEIS. Sei also \mathcal{O} eine offene Teilmenge von M und $x \in \mathcal{O}$. Es genügt zu zeigen, dass $f(x)$ innerer Punkt von $f(\mathcal{O})$ ist. Da M und N beides n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeiten sind, finden wir eine offene Umgebung U von x und einen Homöomorphismus $\varphi : U \xrightarrow{\cong} \tilde{U}$ auf eine offene Teilmenge $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, sowie

⁴⁰Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen heißt offen, falls sie offene Teilmengen von X auf offene Teilmengen von Y abbildet. Offensichtlich liefert eine injektive stetige und offene Abbildung $f : X \rightarrow Y$ einen Homöomorphismus von X auf die offene Teilmenge $f(X)$.

eine offene Umgebung V von $f(x)$ und einen Homöomorphismus $\psi : V \xrightarrow{\cong} \tilde{V}$ auf eine offene Teilmenge $\tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. Wegen der Stetigkeit von f ist $\mathcal{O} \cap f^{-1}(V)$ eine offene Umgebung von x . Durch Einschränken von φ dürfen wir daher o.B.d.A. $U \subseteq \mathcal{O} \cap f^{-1}(V)$ annehmen. Es ist dann $\psi \circ f|_U \circ \varphi^{-1} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine wohldefinierte, injektive und stetige Abbildung. Aus Satz IV.12.28 folgt, dass ihr Bild $\psi(f(U))$ offen in \mathbb{R}^n ist. Somit ist $f(U)$ eine offene Umgebung von $f(x)$ in N . Da $f(U) \subseteq f(\mathcal{O})$ ist $f(x)$ also innerer Punkt von $f(\mathcal{O})$. \square

IV.12.31. KOROLLAR. *Es sei $f : M \rightarrow N$ eine injektive stetige Abbildung zwischen topologischen n -Mannigfaltigkeiten M und N . Weiters sei M nicht-leer und kompakt, und N sei zusammenhängend. Dann ist $f : M \xrightarrow{\cong} N$ ein Homöomorphismus.*

BEWEIS. Wegen der Kompaktheit von M ist $f(M)$ kompakt und daher abgeschlossen in N . Nach Korollar IV.12.30 ist $f(M)$ aber auch offen in N . Aus dem Zusammenhang von N folgt daher $f(M) = N$. Mit Hilfe von Korollar IV.12.30 sehen wir nun, dass $f : M \rightarrow N$ ein Homöomorphismus sein muss. \square

IV.12.32. KOROLLAR. *Es gibt keine injektive stetige Abbildung $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

BEWEIS. Dies folgt aus Korollar IV.12.31, denn S^n und \mathbb{R}^n können nicht homöomorph sein, da ja S^n kompakt, \mathbb{R}^n aber nicht kompakt ist. \square

IV.12.33. KOROLLAR. *Ist $f : M \rightarrow N$ eine injektive stetige Abbildung von einer nicht-leeren topologischen m -Mannigfaltigkeit M in eine topologische n -Mannigfaltigkeit N , dann gilt $n \geq m$.*

BEWEIS. Nehmen wir indirekt $n < m$ an. Dann definiert $M \rightarrow N \times \mathbb{R}^{m-n}$, $x \mapsto (f(x), 0)$, eine injektive stetige Abbildung zwischen m -dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten, deren Bild keine offene Teilmenge von $N \times \mathbb{R}^{m-n}$ sein kann. Dies steht im Widerspruch zu Korollar IV.12.30. \square

Unter einer Algebra (über \mathbb{R}) verstehen wir einen \mathbb{R} -Vektorraum A zusammen mit einer bilinearen Abbildung $A \times A \rightarrow A$, $(a, b) \mapsto ab$. Diese Abbildung wird als die *Multiplikation* der Algebra bezeichnet. Auf Grund der Bilinearität gelten also die Distributivgesetze $(a_1 + a_2)b = a_1b + a_2b$ und $a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2$ sowie skalare Assoziativität, $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$, für alle $a, a_i, b, b_i \in A$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir nennen A eine *Divisionsalgebra* falls die beiden linearen Abbildungen $A \rightarrow A$, $x \mapsto ax$, und $A \rightarrow A$, $x \mapsto xa$, für jedes $0 \neq a \in A$ surjektiv sind, dh. für $0 \neq a \in A$ und $b \in A$ besitzen die beiden Gleichungen $ax = b$ und $xa = b$ stets eine Lösung $x \in A$. Für endlich dimensionales A ist dies äquivalent zu der Forderung, dass die beiden Abbildungen $A \rightarrow A$, $x \mapsto ax$, und $A \rightarrow A$, $x \mapsto xa$ für jedes $a \neq 0$ injektiv sind. Dies bedeutet gerade, dass A keine Nullteiler besitzt, aus $ab = 0$ folgt stets $a = 0$ oder $b = 0$. Eine Divisionsalgebra wird assoziativ genannt, falls $a(bc) = (ab)c$, für alle $a, b, c \in A$. Sie heißt kommutativ, falls $ab = ba$ für alle $a, b \in A$. Die Körper \mathbb{R} und \mathbb{C} sind assoziative, kommutative

Divisionsalgebren. Hamiltons Quaternionen \mathbb{H} bilden eine 4-dimensionale assoziative aber nicht kommutative Divisionsalgebra. Cayleys Oktonionen \mathbb{O} bilden eine 8-dimensionale nicht assoziative und nicht kommutative Divisionsalgebra. Alle diese Beispiele sind Divisionsalgebren mit Eins, dh. es existiert $e \in A$ mit $ae = a = ea$ für alle $a \in A$.

IV.12.34. SATZ. *Ist A eine endlich dimensionale kommutative Divisionsalgebra⁴¹ über \mathbb{R} , dann gilt $\dim(A) \leq 2$.*

BEWEIS. Wir nehmen indirekt an es gibt $n \geq 3$, sodass \mathbb{R}^n eine kommutative Divisionsalgebra ist. Betrachte die stetige Abbildung

$$f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}, \quad f(x) := \frac{1}{\|x^2\|} x^2.$$

Beachte, dass wegen der Nullteilerfreiheit $x^2 \neq 0$, für alle $x \in S^{n-1}$. Offensichtlich ist $f(-x) = f(x)$, also faktorisiert f zu einer stetigen Abbildung $\bar{f} : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, dh. $\bar{f} \circ p = f$, wobei $p : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ die kanonische Projektion bezeichnet. Wir werden nun zeigen, dass $\bar{f} : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ injektiv ist. Seien dazu $x, y \in S^{n-1}$ mit $f(x) = f(y)$. Dann gilt $x^2 = \alpha^2 y^2$ mit $\alpha := \|x^2\|^{1/2} \|y^2\|^{-1/2}$. Aus der Kommutativität erhalten wir $(x - \alpha y)(x + \alpha y) = x^2 - \alpha^2 y^2 = 0$. Wegen der Nullteilerfreiheit folgt $x = \pm \alpha y$. Insbesondere erhalten wir $1 = \|x\| = \|\pm \alpha y\| = |\alpha| \|y\| = |\alpha|$, also $\alpha = \pm 1$. Somit ist $x = \pm y$, und daher $p(x) = p(y)$. Dies zeigt, dass \bar{f} injektiv ist. Aus Korollar IV.12.31 schließen wir, dass $\bar{f} : \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ ein Homöomorphismus sein muss. Da $n \geq 3$ ist $\pi_1(S^{n-1}) = 0$, siehe Satz I.1.26, und $\pi_1(\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathbb{Z}_2$, siehe Proposition I.5.18, also können S^{n-1} und $\mathbb{R}P^{n-1}$ nicht homöomorph sein, ein Widerspruch. Also kann es auf \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, keine kommutative Divisionsalgebrenstruktur geben. \square

IV.12.35. BEMERKUNG. Bis auf Isomorphie sind \mathbb{R} und \mathbb{C} die einzigen endlich dimensional kommutativen Divisionsalgebren mit Eins. Um dies einzusehen, sei also A eine endlich dimensionale kommutative Divisionsalgebra mit Einselement $e \in A$, dh. $ea = a = ae$ für alle $a \in A$. Nach Satz IV.12.34 ist $\dim(A) \leq 2$. Im Fall $\dim(A) = 1$ folgt sofort $A \cong \mathbb{R}$. Sei also o.B.d.A. $\dim(A) = 2$. Wähle $j \in A$, sodass $\{e, j\}$ eine Basis von A bildet. Dann existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $j^2 = \alpha e + \beta j$. Definieren wir $k := j - \frac{1}{2}\beta e$ dann ist auch $\{e, k\}$ eine Basis von A und es gilt $k^2 = (\alpha + \frac{1}{4}\beta^2)e$. Es muss $\alpha + \frac{1}{4}\beta^2 < 0$ sein, denn andernfalls existiert $\gamma := (\alpha + \frac{1}{4}\beta^2)^{1/2} \in \mathbb{R}$ mit $(k - \gamma e)(k + \gamma e) = k^2 - \gamma^2 e = 0$ woraus wegen der Nullteilerfreiheit $k = \pm \gamma e$ folgt, also wäre $\{e, k\}$ keine Basis von A . Setzen wir $i := (-\alpha + \frac{1}{4}\beta^2)^{-1/2} k$, dann ist $\{e, i\}$ eine Basis von A und es gilt $i^2 = -e$. Daraus folgt nun $A \cong \mathbb{C}$.

IV.12.36. BEMERKUNG. Wir werden später zeigen, dass die Dimension einer endlich dimensional Divisionsalgebra A eine Potenz von 2 sein muss, $\dim(A) =$

⁴¹Assoziativität wird nicht gefordert!

2^k für $k \in \mathbb{N}_0$. Nach einem tiefen Resultat von Bott–Milnor und Kervair (1958) gilt sogar $\dim(A) \in \{1, 2, 4, 8\}$, ein Beweis mittels K-Theorie findet sich in [5]. Oben haben wir schon die Beispiele \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} und \mathbb{O} gesehen, es gibt aber noch weitere.

Literatur

- [1] R. Bott und L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics **82**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [2] A. Dold, *Lectures on Algebraic Topology*. Reprint of the 1972 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [3] S. Eilenberg and N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton Mathematical Series **15**, Princeton University Press, 1952.
- [4] A. Hatcher, *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Frei erhältlich unter <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html>
- [5] A. Hatcher, *Vector Bundles and K-theory*. Unvollständige Vorabversion frei erhältlich unter <http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html>
- [6] P.J. Hilton and U. Stammach, *A Course in Homological Algebra*. Graduate Texts in Mathematics **4**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.
- [7] D. Husemoller, *Fibre Bundles*. Third edition. Graduate Texts in Mathematics **20**. Springer-Verlag, New York, 1994.
- [8] K. Jänich, *Topologie*. Dritte Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [9] S. Lang, *Algebra*. Second edition. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, 1984.
- [10] W.B.R. Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*. Graduate Texts in Mathematics **175**. Springer-Verlag, New York, 1997.
- [11] S. MacLane, *Categories for the working mathematician*. Graduate Texts in Mathematics **5**, Springer-Verlag, 1971.
- [12] S. MacLane, *Homology*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **114**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
- [13] J.P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.
- [14] H. Schubert, *Topologie. Eine Einführung*. Vierte Auflage. Mathematische Leitfäden. B.G. Teubner, Stuttgart, 1975.
- [15] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*. Corrected reprint. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1989.
- [16] L.A. Steen and J.A. Seebach, *Counterexamples in Topology*. Reprint of the second (1978) edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1995.
- [17] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*. Reprint of the 1957 edition. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.
- [18] R. Stöcker und H. Zieschang, *Algebraische Topologie. Eine Einführung*. Mathematische Leitfäden, B.G. Teubner, Stuttgart, 1988.
- [19] G.W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*. Graduate Texts in Mathematics **61**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.