Übungsaufgaben

Proseminar zu Algebraische Topologie

Sommersemester 2009

zusammengestellt von Stefan Haller[1]

1. Aufgabe. Es bezeichne $I := [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ das kompakte Einheitsintervall. Auf $I \times I$ betrachte die von $(x,0) \sim (x,1)$, $x \in I$, und $(0,y) \sim (1,y)$, $y \in I$, erzeugte Äquivalenzrelation, und den damit assozierten Quotientenraum $X := (I \times I)/{\sim}$. Weiters bezeichne $p : I \times I \to X$ die kanonische Projektion. Zeige, dass die Abbildung $f : I \times I \to S^1 \times S^1$, $f(x,y) := \big(e^{2\pi\mathbf{i}x}, e^{2\pi\mathbf{i}y}\big)$, zu einem Homöomorphismus $X \cong S^1 \times S^1$ faktorisiert, dh. es existiert eine stetige Abbildung $\bar f : X \to S^1 \times S^1$ mit $\bar f \circ p = f$, und $\bar f$ ist ein Homöomorphismus. Dabei bezeichnet $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ den Einheitskreis.

2. Aufgabe. Es seien $R > r > 0$. Betrachte den durch

$$T := \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \big(\sqrt{x^2+y^2} - R\big)^2 + z^2 = r^2\Big\}$$

gegebenen Teilraum (Fläche) des $\mathbb{R}^3$. Fertige eine Skizze von T an, und konstruiere einen Homöomorphismus zwischen T und $S^1 \times S^1$.

3. Aufgabe. Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ die Einheitssphäre. Auf $S^n \times [-1,1]$ betrachte die von $(x,1) \sim (y,1)$ und $(x,-1) \sim (y,-1)$ erzeugte Äquivalenzrelation, $x,y \in S^n$. Zeige, dass der Quotientenraum $(S^n \times [-1,1])/{\sim}$ homöomorph zu S^{n+1} ist. Fertige Skizzen für $n = 0,1$ an!

4. Aufgabe. Es seien (X,x_0) und (Y,y_0) zwei punktierte Räume. Weiters sei $\pi_1(Y,y_0) = 0$. Zeige, dass die Projektion $p : X \times Y \to X$, $p(x,y) := x$, und die Inklusion $\iota : X \to X \times Y$, $\iota(x) := (x,y_0)$, zueinander inverse Gruppenisomorphismen $p_* : \pi_1\big(X \times Y, (x_0,y_0)\big) \to \pi_1(X,x_0)$ und $\iota_* : \pi_1(X,x_0) \to \pi_1\big(X \times Y, (x_0,y_0)\big)$ induzieren.

5. Aufgabe. Es seien $g,h : I \to X$ zwei Wege von $x_0 := g(0) = h(0)$ nach $x_1 := g(1) = h(1)$. Zeige, dass die Isomorphismen $\beta_g : \pi_1(X,x_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X,x_0)$ und $\beta_h : \pi_1(X,x_1) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X,x_0)$ genau dann übereinstimmen, wenn $[g\bar h]$ im Zentrum von $\pi_1(X,x_0)$ liegt.

6. Aufgabe. Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ wird sternförmig genannt, falls $z \in X$ mit folgender Eigenschaft existiert: $x \in X,\ t \in [0,1] \Rightarrow (1-t)x + tz \in X$, d.h. wenn die affine Strecke von x nach z zur Gänze in X liegt, für jedes $x \in X$. Jedes solche z wird ein Zentrum von X genannt. Zeige, dass sternförmige Teilmengen einfach zusammenhängend sind. Schließe, dass die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$ einfach zusammenhängend ist.

[1]Weitere Beispiele laufend unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/AT09.html`

7. Aufgabe. Es sei $P \in S^n$. Zeige:

(i) Für $Q \in S^n$, $Q \neq P$, ist $S^n \setminus \{P, Q\}$ zu $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ homöomorph.
(ii) Die abgeschlossene Hemisphäre $H := \{x \in S^n : \langle x, P\rangle \geq 0\}$ ist zur abgeschlossenen Scheibe $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ homöomorph.

8. Aufgabe. Es bezeichne $\mathrm{SO}_2 := \{U \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) : U^t U = I, \det(U) = 1\}$ die Gruppe der orthogonalen (2×2)-Matrizen mit Determinante 1, versehen mit der von $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4$ induzierten Teilraumtopologie. Zeige, dass

$$f : S^1 \to \mathrm{SO}_2, \qquad f(x, y) := \left(\begin{smallmatrix} y & x \\ -x & y \end{smallmatrix}\right)$$

einen Homöomorphismus $S^1 \cong \mathrm{SO}_2$ definiert. Schließe $\pi_1(\mathrm{SO}_2) \cong \mathbb{Z}$, und gib eine Schleife in SO_2 an die einen Erzeuger von $\pi_1(\mathrm{SO}_2)$ repräsentiert.

9. Aufgabe. Es bezeichne $\mathrm{SU}_2 := \{U \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) : U^* U = I, \det(U) = 1\}$ die Gruppe der unitären (2×2)-Matrizen mit Determinante 1, versehen mit der von $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^4$ induzierten Teilraumtopologie. Weiters betrachte die Sphäre $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ als Teilraum von $\mathbb{C}^2$. Zeige, dass

$$f : S^3 \to \mathrm{SU}_2, \qquad f(z, w) := \left(\begin{smallmatrix} \bar{w} & z \\ -\bar{z} & w \end{smallmatrix}\right)$$

einen Homöomorphismus $S^3 \cong \mathrm{SU}_2$ definiert. Schließe, dass SU_2 einfach zusammenhängend ist.

10. Aufgabe. Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein affiner Teilraum der Kodimension $k := n - \dim(A)$. Zeige, dass $\mathbb{R}^n \setminus A$ einfach zusammenhängend ist, falls $k \geq 3$. Im Fall $k = 2$ zeige weiters, dass $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \mathbb{Z}$, and gib eine Schleife in $\mathbb{R}^n \setminus A$ an, die einen Erzeuger von $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus A)$ repräsentiert. Hinweis: Konstruiere einen Homöomorphismus $\mathbb{R}^n \setminus A \cong (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{\dim(A)}$.

11. Aufgabe. Zeige, dass jede stetige Abbildung $f : I^2 \to I^2$ mindestens einen Fixpunkt besitzt, wobei $I^2 := I \times I$. Hinweis: Konstruiere einen Homöomorphismus $I^2 \cong D^2$, wobei $D^2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitsscheibe bezeichnet.