Übungsaufgaben

Proseminar zu Algebraische Topologie

Sommersemester 2009

zusammengestellt von Stefan Haller[1]

12. Aufgabe. Zeige $CS^{n-1} \cong D^n$, siehe Beispiel I.3.18.

13. Aufgabe. Zeige $D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

14. Aufgabe. Es seien X, Y_1, Y_2 topologische Räume, und es bezeichne $p_i : Y_1 \times Y_2 \to Y_i$ die kanonische Projektion, $i = 1, 2$. Zeige, dass die von den beiden Abbildungen $(p_i)_* : [X, Y_1 \times Y_2] \to [X, Y_i]$, $i = 1, 2$, bestimmte Abbildung

$$[X, Y_1 \times Y_2] \xrightarrow{\cong} [X, Y_1] \times [X, Y_2]$$

eine Bijektion ist. *Hinweis:* Siehe Bemerkung I.3.6 sowie den Beweis von Proposition I.1.17.

15. Aufgabe. Zeige, dass eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ genau dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn stetige Abbildungen $g : Y \to X$ und $h : Y \to X$ existieren, sodass $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ h \simeq \mathrm{id}_Y$.

16. Aufgabe. Es sei $Z := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, und betrachte den Teilraum

$$X := \big(Z \times I\big) \cup \big(I \times \{0\}\big) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Weiters seien $P := (0, 0) \in X$, $Q := (0, 1) \in X$ und $A := I \times \{0\} \subseteq X$. Zeige:

(i) A ist Deformationsretrakt von X.
(ii) $\{P\}$ ist Deformationsretrakt von X.
(iii) X ist kontrahierbar.
(iv) Die Inklusion $\{Q\} \to X$ ist eine Homotopieäquivalenz.
(v) $\{Q\}$ ist nicht Deformationsretrakt von X.

Anleitung zu (v): Indirekt angenommen $H : X \times I \to X$ wäre eine retrahierende Deformation auf $\{Q\}$, dh. $H_0 = \mathrm{id}_X$, $H_1(x) = Q$ für alle $x \in X$, und $H_t(Q) = Q$ für alle $t \in I$. Zeige, dass zu jeder Umgebung U von Q eine Umgebung V von Q existiert, sodass $H(V \times I) \subseteq U$. Schließe, dass jeder Punkt in V durch einen stetigen Weg in U mit Q verbunden werden kann. Wähle nun U so klein, dass dies zu einem Widerspruch führt.

17. Aufgabe. Zeige, dass eine stetige Abbildung $f : S^1 \to S^1$ genau dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn $\deg(f) = \pm 1$.

[1]Weitere Beispiele laufend unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/AT09.html`

18. Aufgabe. Beweise folgende Verallgemeinerung von Proposition I.4.3. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta := e^{2\pi\mathbf{i}/n} \in S^1$. Weiters sei $f : S^1 \to S^1$ eine stetige Abbildung, sodass $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in S^1$. Dann gilt $\deg(f) \equiv 0 \mod n$. *Hinweis:* Betrachte $q : S^1 \to S^1$, $q(z) := z^n$, und zeige, dass eine stetige Abbildung $g : S^1 \to S^1$ mit $f = g \circ q$ existiert.

19. Aufgabe. Beweise folgende Verallgemeinerung von Satz I.4.7. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $\zeta := e^{2\pi\mathbf{i}/n} \in S^1$. Weiters sei $f : S^1 \to S^1$ eine stetige Abbildung, sodass $f(\zeta z) = \zeta f(z)$ für alle $z \in S^1$. Dann gilt $\deg(f) \equiv 1 \mod n$, insbesondere ist f nicht nullhomotop falls $n \geq 2$. *Hinweis:* die Rolle der Antipodalabbildung A im Beweis von Satz I.4.7 übernimmt nun die Rotation $R : S^1 \to S^1$, $R(z) := \zeta z$.

20. Aufgabe. Es sei p ein komplexes Polynom das keine Nullstellen in S^1 besitzt. Es bezeichne m die Anzahl der Nullstellen von p, die in D^2 liegen, mit Vielfachheit gezählt. Zeige $m = \deg(f)$, wobei $f : S^1 \to S^1$, $f(z) := \frac{p(z)}{|p(z)|}$. *Anleitung:* Sind $\xi_1, \dots, \xi_m$ die Nullstellen von p in D^2, dann existiert ein Polynom q, sodass $p(z) = q(z) \prod_{i=1}^m (z - \xi_i)$, und q hat keine Nullstelle in D^2. Verwende dies um eine Homotopie $H : S^1 \times I \to S^1$ von $H_0(z) = cz^m$ nach $H_1 = f$ zu konstruieren, $c = \frac{q(0)}{|q(0)|} \in S^1$.

21. Aufgabe. Zeige, dass die kanonische Abbildung aus Beispiel I.5.3,

$$\bigoplus_{\alpha \in A} G_\alpha^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\cong} \Big(\mathop{*}_{\alpha \in A} G_\alpha \Big)^{\mathrm{ab}},$$

ein Gruppenisomorphismus ist. Dabei bezeichnet $G^{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$ die Abelisierung der Gruppe G.

22. Aufgabe (Hamiltons Quaternionen). Es bezeichne $\mathbb{H}$ die Menge aller komplexen (2×2)-Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{smallmatrix}\right)$, $z, w \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $\mathbb{H}$ bezüglich Addition und Multiplikation von Matrizen alle Körperaxiome bis auf die Kommutativität der Multiplikation erfüllt ($\mathbb{H}$ ist Schiefkörper). Setze

$$1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{i} := \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{j} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \mathbf{k} := \left(\begin{smallmatrix} 0 & \mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Zeige, dass $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ eine Basis des $\mathbb{H}$ zugrundeliegenden reellen Vektorraums bildet. Verifiziere auch $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ sowie

$$\mathbf{ij} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{ji} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{kj} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{ik} = -\mathbf{j}.$$

Wir verwenden die Algebrahomomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbb{R} \to \mathbb{H}$, $a \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)$, um $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ als Teilalgebren von $\mathbb{H}$ aufzufassen. Die zu $x \in \mathbb{H}$ konjugierte Quaternion wird durch $\bar{x} := x^*$ definiert, wobei x^* die konjugiert Transponierte der Matrix x bezeichnet. Etwa ist $\bar{1} = 1$, $\bar{\mathbf{i}} = -\mathbf{i}$, $\bar{\mathbf{j}} = -\mathbf{j}$ and $\bar{\mathbf{k}} = -\mathbf{k}$. Zeige $\bar{\bar{x}} = x$, $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$ und $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$ für alle $x, y \in \mathbb{H}$, sowie $\overline{ax} = a\bar{x}$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{H}$. Zeige weiters $\bar{x} = x$ genau dann, wenn $x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$. Der Realteil von $x \in \mathbb{H}$ ist durch $\mathrm{Re}(x) := (x + \bar{x})/2 = \mathrm{tr}(x)/2 \in \mathbb{R}$ definiert, etwa gilt $\mathrm{Re}(1) = 1$ und $\mathrm{Re}(\mathbf{i}) = \mathrm{Re}(\mathbf{j}) = \mathrm{Re}(\mathbf{k}) = 0$. Zeige $\mathrm{Re}(xy) = \mathrm{Re}(yx)$

für alle $x, y \in \mathbb{H}$. Zeige, dass $\langle x, y\rangle := \operatorname{Re}(x\bar{y})$ ein Euklidisches inneres Produkt auf $\mathbb{H}$ definiert bezüglich dem $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ eine Orthonormalbasis bildet. Verifiziere $\langle xy, z\rangle = \langle y, \bar{x}z\rangle$, $\langle yx, z\rangle = \langle y, z\bar{x}\rangle$ sowie $\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle = \langle x, y\rangle$, für alle $x, y, z, \in \mathbb{H}$. Zeige, dass für die assozierte Norm $|x|^2 := \langle x, x\rangle = x\bar{x} = \bar{x}x$ gilt $|xy| = |x||y|$. Schließe, dass sich die Multiplikation in $\mathbb{H}$ zu einer Gruppenstruktur auf $S^3 = \{x \in \mathbb{H} : |x| = 1\}$ einschränkt. Beachte, dass diese Gruppe mit SU_2 übereinstimmt, vgl. Aufgabe 9.

23. Aufgabe. Wir betrachten $\mathbb{H}^n := \mathbb{H} \times \cdots \times \mathbb{H}$ als links $\mathbb{H}$-Modul, dh. für $\lambda \in \mathbb{H}$ and $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n$ setzen wir $\lambda(x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$. Zeige, dass $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{H} : \lambda x = y$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiert. Zeige, dass der Quotientenraum $\mathbb{HP}^n := \big(\mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}\big)/\!\sim$ ein kompakter Hausdorffraum ist. Konstruiere eine stetige Abbildung $\varphi : S^{4n-1} \to \mathbb{HP}^{n-1}$, sodass

$$\mathbb{HP}^n \cong \mathbb{HP}^{n-1} \cup_\varphi D^{4n}.$$

Schließe, dass $\mathbb{HP}^n$ einfach zusammenhängend ist, $n \geq 0$. Beobachte auch, dass daraus $\mathbb{HP}^1 \cong S^4$ folgt, vgl. Beispiel 13. *Hinweis:* Gehe wie beim komplexen projektiven Raum $\mathbb{CP}^n$ vor.

24. Aufgabe. Betrachte $S^3 := \{x \in \mathbb{H} : |x| = 1\}$ sowie

$$\mathbb{I} := 1^\perp = \{x \in \mathbb{H} : \bar{x} = -x\} = \{x \in \mathbb{H} : \operatorname{Re}(x) = 0\} \cong \mathbb{R}^3,$$

siehe Aufgabe 22. Zeige, dass für $x \in S^3$ und $y \in \mathbb{I}$ der Ausdruck $\lambda_x(y) := xy\bar{x}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\lambda_x : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ definiert. Zeige, dass λ_x bezüglich der Einschränkung des Euklidischen inneren Produkts auf $\mathbb{H}$ eine Isometrie ist, dh. $|\lambda_x(y)| = |y|$ für alle $x \in S^3$ und $y \in \mathbb{I}$. Schließe, dass wir eine stetige Abbildung $\lambda : S^3 \to \mathrm{SO}_3$ erhalten. Zeige, dass λ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit $\ker(\lambda) = \{\pm 1\}$ ist. Zeige, dass λ durch die kanonische Projektion $S^3 \to \mathbb{RP}^3$ zu einem Homöomorphismus $\mathbb{RP}^3 \cong \mathrm{SO}_3$ faktorisiert. *Hinweis zur Surjektivität von λ:* Für $x \neq \pm 1 \in S^3$ ist die Isometrie λ_x eine Rotation um die von $x - \bar{x}$ aufgespannte Achse um den Winkel $2\arccos(\operatorname{Re}(x))$. Um dies einzusehen verifiziere:

(i) Die Punkte auf dem von $x - \bar{x}$ aufgespannten Teilraum sind Fixpunkte von λ_x.

(ii) Für $y \in \mathbb{I}$ mit $\langle y, x - \bar{x}\rangle = 0$ haben wir $\langle y, x\rangle = 0$, also $y\bar{x} = xy$ und daher $2\langle \lambda_x(y), y\rangle = x^2 y\bar{y} + y\bar{y}\bar{x}^2 = 2\big(2(\operatorname{Re}(x))^2 - 1\big)|y|^2$.

(iii) Verwende die Relation $\arccos(2t^2 - 1) = 2\arccos(t)$, $0 \leq t \leq 1$, um zu zeigen, dass der Winkel zwischen $\lambda_x(y)$ und y mit $2\arccos(\operatorname{Re}(x))$ übereinstimmt.

Verwende schließlich, dass sich jedes Element von SO_3 als Produkt von Rotationen schreiben lässt, siehe lineare Algebra Vorlesung.