Übungsaufgaben

Proseminar zu Algebraische Topologie

Sommersemester 2009

zusammengestellt von Stefan Haller[1]

25. Aufgabe. Für $x, y \in S^3 \subseteq \mathbb{H}$ betrachte die Abbildung $\lambda_{x,y} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $\lambda_{x,y}(z) := xz\bar{y}$. Zeige, dass jedes $\lambda_{x,y}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Isometrie bezüglich des Euklidischen inneren Produkts auf $\mathbb{H}$ ist, vgl. Aufgabe 22. Schließe, dass wir eine stetige Abbildungn $\lambda : S^3 \times S^3 \to \mathrm{SO}_4$ erhalten. Zeige, dass λ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern $\ker(\lambda) = \{(1,1),(-1,-1)\} \cong \mathbb{Z}_2$ ist. Zeige, dass λ zu einem Homöomorphismus $(S^3 \times S^3)/\ker(\lambda) \cong \mathrm{SO}_4$ faktorisiert. *Hinweis um die Surjektivität von λ zu zeigen:* Zu $A \in \mathrm{SO}_4$ finde $x \in S^3$ mit $(\lambda_{x,1} \circ A)(1) = 1$ und verwende Aufgabe 24.

26. Aufgabe. Es sei M eine n-Mannigfaltigkeit,[2] $U \subseteq M$ offen, $0 \le k < n$ und $\psi : S^k \times \mathbb{R}^{n-k} \xrightarrow{\cong} U$ ein Homöomorphismus. Setze $\dot{M} := M \setminus \psi(S^k \times B^{n-k})$ $A := S^k \times S^{n-k-1} \subseteq D^{k+1} \times S^{n-k-1}$, $\varphi := \psi|_A : A \to \dot{M}$, und

$$M_\psi := \dot{M} \cup_\varphi (D^{k+1} \times S^{n-k-1}).$$

Weiters sei $\dot{U} := \dot{M} \cap U$ und $U_\psi := \dot{U} \cup_\varphi (D^{k+1} \times S^{n-k-1})$. Beachte, dass U_ψ eine offene Teilmenge von M_ψ ist. Betrachte weiters den Homöomorphismus

$$\rho : (\mathbb{R}^{k+1} \setminus B^{k+1}) \times S^{n-k-1} \xrightarrow{\cong} S^k \times (\mathbb{R}^{n-k} \setminus B^{n-k}), \quad \rho(x,y) := (x/\|y\|, \|x\| \cdot y).$$

Zeige, dass der Homöomorphismus $\psi \circ \rho : (\mathbb{R}^{k+1} \setminus B^{k+1}) \times S^{n-k-1} \xrightarrow{\cong} \dot{U}$ und die Identität $\mathrm{id} : D^{k+1} \times S^{n-k-1} \xrightarrow{\cong} D^{k+1} \times S^{n-k-1}$ zusammen einen Homöomorphismus $\psi' : \mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1} \xrightarrow{\cong} U_\psi$ definieren. Schließe daraus, dass M_ψ wieder eine n-Mannigfaltigkeit ist. Wir sagen "M_ψ entsteht aus M durch Chirurgie längs $\psi(S^k \times \{0\})$."

27. Aufgabe. Es seien M_1 und M_2 zwei zusammenhängende topologische n-Mannigfaltigkeiten, $n \ge 1$. Wähle offene Teilmengen $U_i \subseteq M_i$ und Homöomorphismen $\psi_i : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} U_i$. Betrachte $U := U_1 \sqcup U_2$, und den Homöomorphismus $\psi := \psi_1 \sqcup \psi_2 : S^0 \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} U$. Unter der zusammenhängenden Summe $M_1 \sharp M_2$ von M_1 und M_2 verstehen wir den in Aufgabe 26 konstruierten Raum $M_1 \sharp M_2 := M_\psi$ (der Fall $k = 0$). Fertige Skizzen für $n = 2$ an. Zeige, dass $M_1 \sharp M_2$ eine zusammenhängende n-Mannigfaltigkeit ist. Für $n \ge 3$ zeige weiters $\pi_1(M_1 \sharp M_2) \cong \pi_1(M_1) * \pi_1(M_2)$. *Hinweis:* van Kampen Satz und Aufgabe 26.

---

[1]Weitere Beispiele laufend unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/AT09.html`

[2]Ein parakompakter Hausdorffraum M wird topologische n-Mannigfaltigkeit genannt, falls jeder Punkt in M eine zu $\mathbb{R}^n$ homöomorphe offene Umgebung besitzt.

28. Aufgabe. Es seien $n \geq 3$ und $k \geq 0$. Konstruiere eine zusammenhängende kompakte n-Mannigfaltigkeit mit $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$ (freies Produkt mit k Faktoren). *Hinweis:* Verwende Aufgabe 27.

29. Aufgabe. Wir verwenden die Notation aus Aufgabe 25, setzen nun aber M zusammenhängend und $1 \leq k \leq n-2$ voraus. Weiters sei $V := M \setminus \psi(S^k \times \{0\})$. Dann sind U, V, $U \cap V$, $\dot{M}$ und M_ψ zusammenhängend. Zeige:

(i) Gilt $1 \leq k < n-2$, dann induziert die Inklusion einen Isomorphismus $\pi_1(\dot{M}) \xrightarrow{\cong} \pi_1(M)$. *Hinweis:* Wende den van Kampen Satz auf $M = U \cup V$ an und zeige, dass die Inklusionen Isomorphismen $\pi_1(U \cap V) \xrightarrow{\cong} \pi_1(U)$ sowie $\pi_1(\dot{M}) \xrightarrow{\cong} \pi_1(V)$ induzieren ($\dot{M}$ ist Deformationsretrakt von V).

(ii) Gilt $1 < k = n-2$, so induziert die Inklusion einen Isomorphismus $\pi_1(\dot{M})/\mathcal{N}([\alpha]) \xrightarrow{\cong} \pi_1(M)$. Dabei bezeichnet $\mathcal{N}([\alpha])$ den vom Standarderzeuger $\alpha : I \to \psi(S^k \times S^1) \subseteq \dot{M}$ erzeugten Normalteiler.

(iii) Für $1 < k < n-2$ gilt $\pi_1(M_\psi) \cong \pi_1(M)$. *Hinweis:* Wende (i) einmal auf $\psi : S^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to U$ und einmal auf $\psi' : \mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1} \to U_\psi$ an und beachte $\dot{M} = \dot{M}_\psi$.

(iv) Für $1 = k < n-2$ gilt $\pi_1(M_\psi) \cong \pi_1(M)/\mathcal{N}([\beta])$. Dabei bezeichnet $[\beta]$ das Bild des Standarderzeugers von $\pi_1(S^1)$ unter der Einschränkung $\psi : S^1 \times \{0\} \to M$. *Hinweis:* Wende (i) auf $\psi : S^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to U$ und (ii) auf $\psi' : \mathbb{R}^{k+1} \times S^{n-k-1} \to U_\psi$ an und beachte wieder $\dot{M} = \dot{M}_\psi$.

30. Aufgabe. Es sei $G \xrightarrow{\varphi} H$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, und $S \subseteq G$ eine Teilmenge mit $\ker(\varphi) = \mathcal{N}(S)$, wobei $\mathcal{N}(S)$ den von S erzeugten Normalteiler bezeichnet. Zeige, dass auch der zwischen den Abelisierungen induzierte Homomorphismus $\varphi^{\mathrm{ab}} : G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$ surjektiv ist und es gilt $\ker(\varphi^{\mathrm{ab}}) = \langle p_G(S) \rangle$. Dabei bezeichnet $p_G : G \to G^{\mathrm{ab}}$ den kanonischen Homomorphismus und $\langle p_G(S) \rangle$ die von $p_G(S)$ erzeugte Untergruppe. *Hinweis:* Die Einschränkung auf die Kommutatoruntergruppen $\varphi|_{[G,G]} : [G, G] \to [H, H]$ ist surjektiv.

31. Aufgabe. Es seien U und V zwei offene Teilmengen eines topologischen Raums $X = U \cup V$, sodass dass U, V und $U \cap V$ wegzusammenhängend sind. Fixiere einen Punkt $x_0 \in U \cap V$ und betrachte alle folgenden Fundamentalgruppen bezüglich dieses Basispunkts. Es bezeichnen $(j_U)_* : \pi_1(U \cap V) \to \pi_1(U)$, $(j_V)_* : \pi_1(U \cap V) \to \pi_1(V)$, $(\iota_U)_* : \pi_1(U) \to \pi_1(X)$ und $(\iota_V)_* : \pi_1(V) \to \pi_1(X)$ die von den kanonischen Inklusionen induzierten Homomorphismen. Weiters bezeichnen $(j_U)_*^{\mathrm{ab}} : \pi_1(U \cap V)^{\mathrm{ab}} \to \pi_1(U)^{\mathrm{ab}}$, $(j_V)_*^{\mathrm{ab}} : \pi_1(U \cap V)^{\mathrm{ab}} \to \pi_1(V)^{\mathrm{ab}}$, $(\iota_U)_*^{\mathrm{ab}} : \pi_1(U)^{\mathrm{ab}} \to \pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$ und $(\iota_V)_*^{\mathrm{ab}} : \pi_1(V)^{\mathrm{ab}} \to \pi_1(X)^{\mathrm{ab}}$ die zwischen den abelisierten Fundamentalgruppen induzieren Homomorphismen. Betrachte nun die beiden Gruppenhomomorphismen

$$\pi_1(U \cap V)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{((j_U)_*^{\mathrm{ab}}, -(j_V)_*^{\mathrm{ab}})} \pi_1(U)^{\mathrm{ab}} \oplus \pi_1(V)^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{(\iota_U)_*^{\mathrm{ab}} + (\iota_V)_*^{\mathrm{ab}}} \pi_1(X)^{\mathrm{ab}}.$$

Zeige:

(i) $(\iota_U)_*^{\mathrm{ab}} + (\iota_V)_*^{\mathrm{ab}}$ ist surjektiv.

(ii) $\ker\big((\iota_U)_*^{\mathrm{ab}} + (\iota_V)_*^{\mathrm{ab}}\big) = \operatorname{img}\big(((j_U)_*^{\mathrm{ab}}, -(j_V)_*^{\mathrm{ab}})\big)$.

(iii) $\pi_1(X)^{\mathrm{ab}} \cong \big(\pi_1(U)^{\mathrm{ab}} \oplus \pi_1(V)^{\mathrm{ab}}\big) / \operatorname{img}\big(((j_U)_*^{\mathrm{ab}}, -(j_V)_*^{\mathrm{ab}}))\big)$.

Hinweis: Satz von Seifert und van Kampen sowie Aufgaben 30 und 21.