Übungsaufgaben

Proseminar zu Algebraische Topologie

Sommersemester 2009

zusammengestellt von Stefan Haller[1]

32. Aufgabe. Betrachte die Gruppe $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ mit Multiplikation

$$(k_1, l_1) \cdot (k_2, l_2) := (k_1 + (-1)^{l_1} k_2, l_1 + l_2),$$

$k_i, l_i \in \mathbb{Z}$, vgl. Beispiel I.7.3. Zeige, dass $(k, l) \cdot (x, y) := (k + (-1)^l x, l + y)$ eine stetige Linkswirkung von $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}^2$ definiert, vgl. Beispiel II.2.9. Zeige, dass diese Wirkung strikt diskontinuierlich ist und schließe daraus, dass die Quotientenabbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ eine Überlagerung ist. Zeige weiters, dass der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ zur Kleinschen Flasche homöomorph ist. Verwende dies um die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche zu bestimmen. *Hinweis:* Wir erhalten die Kleinsche Flasche indem wir die Kanten des Einheitsquadrats entsprechend identifizieren, $K = I^2/\sim$. Zeige nun, dass die Inklusion $I^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Bijektion $I^2/\sim \to \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ induziert.

33. Aufgabe. Es seien $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}$, sodass p und q_i teilerfremd sind, für alle $i = 1, \ldots, n$. Bezeichne den damit assozierten Linsenraum mit $L := L(p; q_1, \ldots, q_n)$, und bezeichne die Kleinsche Flasche durch K. Zeige $[L, K] = 0$, dh. je zwei stetige Abbildungen $L \to K$ sind homotop. *Hinweis:* Zeige, dass jeder Homomorphismus $\pi_1(L) \to \pi_1(K)$ trivial sein muss, und verwende die Überlagerung $\mathbb{R}^2 \to K$.

34. Aufgabe. Es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung und (Y, y_0) ein einfach zusammenhängender, lokal wegzusammenhängender punktierter Raum. Zeige, dass die Abbildung $p_* : [(Y, y_0), (\tilde{X}, \tilde{x}_0)] \to [(Y, y_0), (X, x_0)]$, $p_*([\tilde{f}]) := [p \circ \tilde{f}]$, eine Bijektion ist. Schließe, dass die zwei-fache Überlagerung $p : S^k \to \mathbb{R}\mathrm{P}^k$ eine Bijektion $p_* : [(S^n, y_0), (S^k, \tilde{x}_0)] \xrightarrow{\cong} [(S^n, y_0), (\mathbb{R}\mathrm{P}^k, x_0)]$ induziert, $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dabei sind $y_0 \in S^n$, $\tilde{x}_0 \in S^k$ beliebig und $x_0 := p(\tilde{x}_0) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^k$.

35. Aufgabe. Es bezeichne Σ die orientierbare Fläche mit Geschlecht 2. Wir erinnern uns, dass $\pi_1(\Sigma) \cong \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \rangle$, siehe Korollar I.7.4. Bestimme die Anzahl der Isomorphieklassen zwei-blättriger Überlagerungen von Σ. Wieviele davon sind zusammenhängend. *Hinweis:* Zähle die Äquivalenzklassen der Darstellungen von $\pi_1(\Sigma)$ auf der Menge $\{1, 2\}$.

36. Aufgabe. Es bezeichne $L = S^{2n-1}/\mathbb{Z}_p$ einen Linsenraum. Wir erinnern uns, dass $\pi_1(L) \cong \mathbb{Z}_p$. Bestimme die Anzahl der Isomorphieklassen zusammenhängender (punktierter) Überlagerungen von L. *Hinweis:* Untergruppen zyklischer Gruppen sind zyklisch.

[1] Weitere Beispiele laufend unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/AT09.html`

37. Aufgabe. Es seien $\mu : (X, e) \times (X, e) \to (X, e)$ und $\tilde{\mu} : (\tilde{X}, \tilde{e}) \times (\tilde{X}, \tilde{e}) \to (\tilde{X}, \tilde{e})$ zwei wegzusammenhängende H-Räume und es sei $p : (\tilde{X}, \tilde{e}) \to (X, e)$ eine punktierte Überlagerung, sodass $p \circ \tilde{\mu} = \mu \circ (p \times p)$.

(i) Der H-Raum (X, e) heißt kommutative falls die beiden Abbildungen $\mu \circ \tau$ und μ homotop relative Basispunkt sind. Dabei bezeichnet $\tau : X \times X \to X \times X$ die Abbildung $\tau(x, y) := (y, x)$. Zeige, dass in dieser Situation auch $(\tilde{X}, \tilde{e})$ kommutative ist. *Hinweis:* Lifte die Homotopie.

(ii) Der H-Raum (X, e) wird assotiativ genannt, falls die beiden Abbildungen $\mu \circ (\mu \times \mathrm{id}_X)$ und $\mu \circ (\mathrm{id}_X \times \mu)$ homotop relative Basispunkt sind. Zeige, dass in dieser Situation auch $(\tilde{X}, \tilde{e})$ assotiativ ist. *Hinweis:* Lifte die Homotopie.

(iii) Es sei $\nu : (X, e) \to (X, e)$, sodass $\mu \circ (\nu, \mathrm{const}_e) \simeq \mathrm{id}_X$ und $(\nu, \mathrm{const}_e) \circ \mu \simeq \mathrm{id}_X$ relativ Basispunkt (Inverse bis auf Homotopie). Weiters sei nun X auch lokal wegzusammenhängend. Zeige, dass eine Abbildung $\tilde{\nu} : (\tilde{X}, \tilde{e}) \to (\tilde{X}, \tilde{e})$ existiert, sodass $\tilde{\mu} \circ (\tilde{\nu}, \mathrm{const}_{\tilde{e}}) \simeq \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ und $(\tilde{\nu}, \mathrm{const}_{\tilde{e}}) \circ \mu \simeq \mathrm{id}_{\tilde{X}}$ relativ Basispunkt *Hinweis:* Gehe wie in Proposition II.8.2 vor.

38. Aufgabe. Es sei C_* ein endlich erzeugter Kettenkomplex mit $C_q = 0$ für alle $q < 0$. Es bezeichne $c_q := \mathrm{rank}(C_q)$ und $b_q := \mathrm{rank}(H_q(C))$ die q-te Bettizahl. Leite die sogenannten Morse Ungleichungen her,

$$\begin{aligned} b_0 &\leq c_0 \\ b_1 - b_0 &\leq c_1 - c_0 \\ b_2 - b_1 + b_0 &\leq c_2 - c_1 + c_0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

dh. für jedes $q_0 \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(-1)^{q_0} \sum_{q \leq q_0} (-1)^q b_q \leq (-1)^{q_0} \sum_{q \leq q_0} (-1)^q c_q.$$

Hinweis: Gehe wie in Proposition IV.4.19 vor, dh. verwende die Relationen

$$\mathrm{rank}(B_q) + \mathrm{rank}(B_{q-1}) + b_q = c_q,$$

summiere nun aber bloß über alle $q \leq q_0$.

39. Aufgabe. Es sei A eine abelsche Gruppe, und es bezeichne

$$A_{\mathrm{tor}} := \{a \in A \mid \exists 0 \neq n \in \mathbb{Z} : na = 0\}$$

die Teilmenge aller Elemente endlicher Ordnung. Zeige:

(i) A ist eine Untergruppe von A, die sogenanne Torsionsuntergruppe.
(ii) Jeder Homomorphismus $\varphi : A \to B$ bildet A_{tor} nach B_{tor} ab.
(iii) A/A_{tor} ist torsionsfrei, dh. $(A/A_{\mathrm{tor}})_{\mathrm{tor}} = 0$.

(iv) Jeder Homomorphismus $\varphi : A \to B$ induziert einen Homomorphismus $\bar\varphi : A/A_{\mathrm{tor}} \to B/B_{\mathrm{tor}}$. Für jeden weiteren Homomorphismus $\psi : B \to C$ gilt $\overline{\psi \circ \varphi} = \bar\psi \circ \bar\varphi$. Wir erhalten daher einen Funktor von der Kategorie der abelschen Gruppen in die Kategorie der torsionsfreien abelschen Gruppen.

(v) Ist F eine torsionsfreie abelsche Gruppe, dh. $F_{\mathrm{tor}} = 0$, und $\varphi : A \to F$ ein Homomorphismus, dann existiert genau ein Homomorphismus $\tilde\varphi : A/A_{\mathrm{tor}} \to F$, sodass $\tilde\varphi \circ \pi = \varphi$, wobei $\pi : A \to A/A_{\mathrm{tor}}$ den kanonischen Homomorphismus bezeichnet. Dies liefert eine natürliche Bijektion $\mathrm{Hom}(A/A_{\mathrm{tor}}, F) = \mathrm{Hom}(A, F)$, für jede abelsche Gruppe A und jede torsionsfreie abelsche Gruppe F.

40. Aufgabe. Es sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $\varphi : A \to A$ ein Homomorphismus. Definiere eine Spur $\mathrm{tr}(\varphi) \in \mathbb{Z}$ wie folgt:

- Sei zunächst A frei abelsch. Dann existiert eine endliche Basis S von A und eindeutig bestimmte ganze Zahlen $n_{s,t} \in \mathbb{Z}$ mit $\varphi(s) = \sum_{t \in S} n_{s,t} t$, für alle $s \in S$. Zeige, dass $\mathrm{tr}(\varphi) := \sum_{s \in S} n_{s,s} \in \mathbb{Z}$ wohldefiniert ist, dh. nicht von der Wahl der Basis S abhängt.
- Sei nun A eine beliebige endlich erzeugte abelsche Gruppe. Dann ist A/A_{tor} eine freie abelsche Gruppe, und wir erhalten einen induzierten Homomorphismus $\bar\varphi : A/A_{\mathrm{tor}} \to A/A_{\mathrm{tor}}$, siehe Aufgabe 39. Wir definieren die Spur nun durch $\mathrm{tr}(\varphi) := \mathrm{tr}\big(\bar\varphi : A/A_{\mathrm{tor}} \to A/A_{\mathrm{tor}}\big)$.

Zeige, dass diese Spur die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{rank}(A)$.
(ii) $\mathrm{tr}(\varphi + \psi) = \mathrm{tr}(\varphi) + \mathrm{tr}(\psi)$, für je zwei Homomorphismen $\varphi, \psi : A \to A$.
(iii) $\mathrm{tr}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{tr}(\psi \circ \varphi)$, für je zwei Homomorphismen $\varphi, \psi : A \to A$.
(iv) Ist

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm endlich erzeugter abelscher Gruppen mit exakten Zeilen, dann gilt $\mathrm{tr}(\varphi) + \mathrm{tr}(\rho) = \mathrm{tr}(\psi)$.

41. Aufgabe. Es sei A_* eine endlich erzeugte graduierte abelsche Gruppe und $\varphi : A_* \to A_*$ ein Homomorphismus vom Grad 0. Definiere die graduierte Spur von φ durch $\mathrm{str}(\varphi) := \sum_q (-1)^q \,\mathrm{tr}(\varphi_q : A_q \to A_q)$. Zeige, dass diese graduierte Spur die folgenden Eigenschaften besitzt:

(i) $\mathrm{str}(\mathrm{id}_{A_*}) = \sum_q (-1)^q \,\mathrm{rank}(A_q)$.
(ii) $\mathrm{str}(\varphi + \psi) = \mathrm{str}(\varphi) + \mathrm{str}(\psi)$, für Homomorphismen $\varphi, \psi : A_* \to A_*$.
(iii) $\mathrm{str}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{str}(\psi \circ \varphi)$, für Homomorphismen $\varphi, \psi : A_* \to A_*$.

(iv) Ist

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_* \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & B_* \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & C_* \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_* \arrow[r] & B_* \arrow[r] & C_* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm graduierter abelscher Gruppen mit exakten Zeilen, dann gilt $\operatorname{str}(\varphi) + \operatorname{str}(\rho) = \operatorname{str}(\psi)$.

Hinweis: Dies folgt unmittelbar aus Aufgabe 40.

42. Aufgabe. Es sei C_* ein endlich erzeugter Kettenkomplex, $\varphi : C_* \to C_*$ eine Kettenabbildung und $\varphi_* : H_*(C) \to H_*(C)$ der induzierte Homomorphismus. Zeige

$$\operatorname{str}\bigl(\varphi : C_* \to C_*\bigr) = \operatorname{str}\bigl(\varphi_* : H_*(C) \to H_*(C)\bigr).$$

Was erhalten wir für $\varphi = \mathrm{id}_{C_*}$? *Hinweis:* Wende Aufgabe 41(iv) auf

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & B_* \arrow[r] \arrow[d, "\varphi|_{B_*}"] & Z_* \arrow[r] \arrow[d, "\varphi|_{Z_*}"] & H_*(C) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_*"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_* \arrow[r] & Z_* \arrow[r] & H_*(C) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z_* \arrow[r] \arrow[d, "\varphi|_{Z_*}"] & C_* \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\varphi"] & (\Sigma B)_* \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma\varphi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z_* \arrow[r] & C_* \arrow[r, "\partial"] & (\Sigma B)_* \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

an, wobei $(\Sigma B)_q := B_{q-1}$.