ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

12. Leite eine Formel für die Krümmung der Kurve aus Aufgabe 9 her, und charakterisiere ihre Flach- und Wendepunkte.

13. Leite eine Formel für die Krümmung der Kurve aus Aufgabe 11 her, und charakterisiere ihre Flach- und Wendepunkte.

14. Bestimme die Krümmung der *Archimedische Spirale* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (t \cos t, t \sin t)$ sowie alle Flachpunkte, Wendepunkte und Scheitel. Fertige eine Skizze an, und berechne die Tangente von c bei $c(0)$. Für $0 < a < b$ bestimme weiters die Bogenlänge $L_a^b(c)$.

15. Bestimme die Krümmung der *logarithmische Spirale* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := (e^t \cos t, e^t \sin t)$, sowie alle Flachpunkte, Wendepunkte und Scheitel. Fertige eine Skizze an. Für $a < b$ berechne die Bogenlänge $L_a^b(c)$ sowie eine Bogenlägenparametrisierung von c. Bestimme auch die Evolute von c.

16. Bestimme die Krümmung der *Kardioide (Herzkurve)* $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) := ((1 + \cos t) \cos t, (1 + \cos t) \sin t)$, sowie alle Flachpunkte, Wendepunkte und Scheitel. Besitzt die Kurve nahe $t = \pi$ eine reguläre Parametrisierung? Für $a < b$ bestimme weiters die Bogenlänge $L_a^b(c)$. Berechne auch eine Bogenlängenparametrisierung und die Evolute der Einschränkung $c|_{(-\pi,\pi)}$.

17. Betrachte die Abbildung $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $p(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$, aus der Vorlesung. Weiters sei $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Einschränkung

$$p : \mathbb{R}^+ \times (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\lambda(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \mid \lambda \leq 0\}$$

ein Diffeomorphismus ist, vgl. Abschnitt 1.8 im Skriptum.

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.