ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

24. Zeige, dass $\mathbb{R}\mathrm{P}^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\!\sim$ tatsächlich ein kompakter metrisierbarer und separabler topologischer Raum ist, vgl. Abschnitt 2.5 im Skriptum.

25 (Torus)**.** Es seien $0 < r < R$. Zeige, dass

$$M := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; \big(\sqrt{x^2 + y^2} - R\big)^2 + z^2 = r^2\Big\}$$

eine kompakte, 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist. Fertige eine Skizze an! Zeige weiters, dass M diffeomorph zu der 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit $T := S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ ist.

26 (Klein'sche Flasche)**.** Betrachte die glatten Abbildungen $\rho : S^1 \to S^1$, $\rho(x, y) := (-x, -y)$, und $\sigma : S^1 \to S^1$, $\sigma(x, y) := (x, -y)$. Betrachte weiters die Mannigfaltigkeit $T := S^1 \times S^1$ und zeige, dass $\nu : T \to T$, $\nu(z_1, z_2) := (\rho(z_1), \sigma(z_2))$ eine glatte Abbildung definiert, die $\nu\circ\nu = \mathrm{id}_T$ erfüllt. Zeige, dass

$$z \sim z' \quad :\Leftrightarrow \quad z = z' \text{ oder } \nu(z) = z'$$

eine Äquivalenzrelation auf T definiert. Es bezeichne $K := T/\!\sim$ den Quotientenraum und $p : T \to K$ die kanonische Projektion. Zeige, dass K mit der Struktur einer abstrakten Mannigfaltigkeit versehen werden kann, die p zu einem lokalen Diffeomorphismus macht.

27. Zeige, dass

$$f : S^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}), \qquad f(x, y, u, w) := \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^u & w \\ 0 & e^{-u} \end{pmatrix}$$

ein Diffeomorphismus ist.

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.