ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

33. Zeige, dass auf dem Möbiusband kein globales Einheitsnormalenfeld existiert.

34. Es seien $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ zwei reelle $(n \times n)$-Matrizen und $a, b \in \mathbb{R}^n$. Betrachte die beiden Vektorfelder $X(x) := Ax + a$ und $Y(x) := Bx + b$ auf $\mathbb{R}^n$ und bestimme ihre Lieklammer $[X, Y]$.

35. Es sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine reelle $(n \times n)$-Matrix und $X(x) := Ax$ das entsprechende lineare Vektorfeld auf $\mathbb{R}^n$. Bestimme den Fluss von X.

36. Es sei $f : M \to N$ ein Diffeomorphismus zwischen Teilmannigfaltigkeiten. Zeige $f^*[X, Y] = [f^*X, f^*Y]$, für je zwei Vektorfelder X, Y auf N, vgl. 2.15 im Skriptum.

37. Es sei $c = (r, h) : I \to (0, \infty) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve und betrachte die Rotationsfläche

$$M := \Big\{ \big(r(t)\cos\phi, r(t)\sin\phi, h(t)\big) \Bigm| t \in I, \phi \in \mathbb{R} \Big\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Für die Gaußkrümmung K, mittlere Krümmung H und Hauptkrümmungen κ_1, κ_2 zeige:

$$K = -\frac{r''}{r}, \quad H = \frac{rh'' + r'h'}{2rr'}, \quad \kappa_1 = \frac{h'}{r}, \quad \kappa_2 = h''r' - h'r''.$$

Bestimme auch die Hauptkrümmungrichtungen sowie die Krümmungslinien.

38. Finde eine Fläche in $\mathbb{R}^3$ mit konstanter Gaußkrümmung $K = -1$. *Hinweis: Aufgabe 37.*

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.