ÜBUNGSAUFGABEN
PROSEMINAR ZU DIFFERENTIALGEOMETRIE 1

ZUSAMMENGESTELLT VON STEFAN HALLER

39. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine Hyperfläche, g die induzierte Riemannmetrik und ∇ die entsprechende kovariante Ableitung (Levi–Civita Konnexion) auf M. Ausgehend von der Definition der Riemannkrümmung

$$R(X,Y)(Z) := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

zeige direkt aus den Eigenschaften von ∇ (siehe 3.6 im Skriptum), dh. ohne Verwendung der zweiten Fundamentalform, dass

$$R(fX,Y)(Z) = R(X,fY)(Z) = R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)(Z),$$

für alle $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ gilt. Schließe daraus, dass R als Tensorfeld interpretiert werden kann, genauer $R \in \mathcal{T}^1_3(M)$.

40. Wie in Aufgabe 39, dh. ohne Verwendung der zweiten Fundamentalform, verifiziere die folgenden algebraischen Symmetrien der Riemannkrümmung, $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$:

(a) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$
(b) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$
(c) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$
(d) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

41. Es seien M, g und ∇ wie oben. Weiters sei (U,u) eine Karte von M, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathfrak{X}(U)$ die damit assoziierten Vektorfelder, und es bezeichnen $\Gamma^k_{i,j} \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ die durch $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma^k_{i,j}\partial_k$ eindeutig bestimmten Funktionen (Christoffel-Symbole). Weiters sei $c : I \to U$ eine glatte Kurve, und $(u \circ c)(t) = (u^1(t),\dots,u^n(t))$ die Komponenten der Kartendarstellung von c. Zeige, dass die Geodätengleichung $\nabla_{c'}c' = 0$ äquivalent zu folgendem System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung ist:

$$\frac{d^2}{dt^2}u^k(t) + \sum_{i,j=1}^{n}(\Gamma^k_{i,j} \circ u^{-1})(u^1(t),\dots,u^n(t))\frac{d}{dt}u^i(t)\frac{d}{dt}u^j(t) = 0,$$

$k = 1,\dots,n = \dim(M)$. Schließe daraus, das es zu jedem $\xi \in T_xM$ genau eine Geodäte c mit $c(0) = x$ und $c'(0) = \xi$ gibt.

Weitere Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/DGI2010.html`.