II. Vektorbündel

II.1. Definition und elementare Konstruktionen. Unter einem *Vektorbündel* über einer glatten Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine glatte Abbildung $p : E \to M$ zusammen mit einer reellen Vektorraumstruktur auf jeder *Faser* $E_x := p^{-1}(x)$, $x \in M$, die *lokal trivial* in folgendem Sinn sind. Zu jedem Punkt $x_0 \in M$ existiert eine offene Umgebung U von x_0, ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum V und ein Diffeomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times V$ mit $p_1 \circ \varphi = p$, der faserweise linear ist, dh. $\varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \to \{x\} \times V = V$ ist ein linearer Isomorphismus, für jedes $x \in U$.[3] In diesem Fall werden M als *Basis*, E als *Totalraum* und p als *kanonische Projektion* des Vektorbündels bezeichnet. Jedes φ wie oben wird eine *lokale Trivialisierung* oder *Vektorbündelkarte* von E genannt. Beachte, dass die Projektion eines Vektorbündels stets surjektiv ist, denn jede Faser enthält zumindest das Nullelement eines Vektorraums.

Unter dem *Rang* des Vektorbündels bei $x \in M$ verstehen wir die Dimension der Faser E_x, dh. $\operatorname{rank}_x(E) := \dim(E_x)$. Offensichtlich ist der Rang lokal konstant in x, für zusammenhängende Basen M ist er daher konstant. Hat jede Faser die gleiche Dimension k dann sprechen wir von einem Vektorbündel vom Rang k und schreiben $\operatorname{rank}(E) = k$. Ein Vektorbündel vom Rang 1 wird auch als *Linienbündel* bezeichnet.

Unter einem *orientierten Vektorbündel* verstehen wir ein Vektorbündel $p : E \to M$ zusammen mit einer Orientierung auf jeder Faser E_x, $x \in M$, die lokal trivial in folgendem Sinn sind. Zu jedem $x_0 \in M$ existiert ein orientierter endlich dimensionaler reeller Vektorraum V und eine faserweise orientierungserhaltende Vektorbündelkarte $\varphi : p^{-1}(U) \to U \times V$ mit $x_0 \in U$, dh. für jedes $x \in U$ ist der lineare Isomorphismus $\varphi_x : E_x \to \{x\} \times V = V$ orientierungsbewahrend. Ein Vektorbündel wird *orientierbar* genannt, falls es eine Orientierung besitzt.

Es sei E ein orientiertes Vektorbündel über M und $\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times V_i$ eine Atlas aus orientierungsbewahrenden Vektorbündelkarten, dh. $\bigcup_i U_i = M$. Ist auch M orientiert, dann bewahren die Vektorbündelkartenwechsel $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times V_i \to (U_i \cap U_j) \times V_j$ die Produktorientierung, diese definieren daher eine Orientierung des Totalraums E. Wir bezeichnen diese Orientierung der Mannigfaltigkeit E als die *induzierte Orientierung* des Totalraums.

Unter einem *Schnitt* eines Vektorbündels $p : E \to M$ verstehen wir eine Abbildung $s : M \to E$, sodass $p \circ s = \mathrm{id}_M$. Die Menge der *glatten Schnitte* bezeichnen wir mit

$$\Gamma(E) := \big\{ s \in C^\infty(M, E) \bigm| p \circ s = \mathrm{id}_M \big\}.$$

[3] Da jeder endlich dimensionale Vektorraum zu $\mathbb{R}^k$ isomorph ist, wird dies oft äquivalent wie folgt formuliert. Zu jedem Punkt $x_0 \in M$ existiert eine offene Umgebung U von x_0, $k \in \mathbb{N}_0$ und ein Diffeomorphismus $\varphi : p^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times \mathbb{R}^k$ mit $p_1 \circ \varphi = p$, der faserweise linear ist, dh. $\varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \to \{x\} \times \mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k$ ist ein linearer Isomorphismus, für jedes $x \in U$.

Schnitte von E können punktweise addiert und mit Funktionen multipliziert werden, $(s_1 + s_2)(x) := s_1(x) + s_2(x)$, $(fs)(x) := f(x)s(x)$. Für glatte Schnitte $s_1, s_2, s \in \Gamma(E)$ und $f \in C^\infty(M)$ sind auch $s_1 + s_2$ und fs glatte Schnitte von E, die Glattheit von $s_1 + s_2$ und fs lässt sich leicht mit Hilfe lokaler Trivialisierungen von E zeigen. Dadurch wird $\Gamma(E)$ also ein Modul über $C^\infty(M)$. Insbesondere besitzt jedes Vektorbündel einen kanonischen glatten Schnitt, den sogenannten *Nullschnitt*, $o \in \Gamma(E)$, der jedem $x \in M$ das Nullelement im Vektorraum E_x zuordnet, $o(x) = 0$. Das Bild des Nullschnitts ist eine zu M diffeomorphe Teilmannigfaltigkeit von E, o und die Einschränkung von p liefern zueinander inverse Diffeomorphismen $M \cong o(M) \subseteq E$. Unter dem Träger eines Schnittes $s \in \Gamma(E)$ verstehen wir die Teilmenge $\operatorname{supp}(s) = \overline{\{x \in M \mid s(x) \neq 0\}}$.

II.1.1. Beispiel. Ist M eine glatte Mannigfaltigkeit und V ein endlich dimensionaler Vektorraum, dann ist $E := M \times V$ zusammen mit der kanonischen Projektion $p : E \to M$ ein Vektorbündel über M, $\operatorname{rank}(E) = \dim(V)$. Jedes solche Vektorbündel wird als *triviales Vektorbündel* bezeichnet, seine Schnitte können in kanonischer Weise mit den V-wertigen glatten Funktionen auf M identifiziert werden, $\Gamma(E) = C^\infty(M, V)$. Wir bezeichnen das triviale Vektorbündel $M \times \mathbb{R}^k \to M$ mit ξ^k. Insbesondere können wir $C^\infty(M)$ als Schnitte des trivialen Linienbündels ξ^1 verstehen, und allgemeiner $C^\infty(M, \mathbb{R}^k) = \Gamma(\xi^k)$.

II.1.2. Beispiel. Das *Tangentialbündel* $p : TM \to M$ einer glatten Mannigfaltigkeit ist ein Vektorbündel, $\operatorname{rank}(TM) = \dim(M)$, siehe [**3**, Abschnitt 2.9]. Ist $M \supseteq U \xrightarrow{u} u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, dann bildet $Tu : TU \to u(U) \times \mathbb{R}^n$ eine Vektorbündelkarte von TM. Die Schnitte des Tangentialbündels können in kanonischer Weise mit den Vektorfeldern auf M identifiziert werden, $\Gamma(TM) = \mathfrak{X}(M)$, siehe [**3**, Abschnitt 2.10]. Eine Mannigfaltigkeit M ist genau dann orientierbar wenn das Tangentialbündel $TM \to M$ orientierbar ist, und eine Orientierung von M ist nichts anderes als eine Orientierung des Vektorbündels $TM \to M$, vgl. [**3**, Abschnitt 4.5].

Es seien $p : E \to M$ und $q : F \to M$ zwei Vektorbündel über M. Eine glatte Abbildung $\varphi : E \to F$ mit $q \circ \varphi = q$ wird *Vektorbündelhomomorphismus (über M)* genannt, falls sie faserweise linear ist, dh. für jedes $x \in M$ ist $\varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \to F_x$ eine lineare Abbildung. Beachte, dass die Komposition von Vektorbündelhomomorphismen wieder ein Vektorbündelhomomorphismus ist. Zwei Vektorbündel E und F über M werden *isomorph* genannt, falls Vektorbündelhomomorphismen $\varphi : E \to F$ und $\psi : F \to E$ mit $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_E$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_F$ existieren. In diesem Fall werden φ und ψ als zueinander inverse *Vektorbündelisomorphismen* bezeichnet und wir schreiben $E \cong F$. Ein Vektorbündel wird *trivialisierbar* genannt, wenn es isomorph zu einem trivialen Vektorbündel ist.

Es seien $p : E \to M$ und $q : F \to N$ zwei Vektorbündel und $f : M \to N$ glatt. Unter einem *Vektorbündelhomomorphismus über f* verstehen wir eine glatte

Abbildung $\varphi : E \to F$ mit $q \circ \varphi = f \circ p$, die faserweise linear ist, dh. für jedes $x \in M$ ist $\varphi_x := \varphi|_{E_x} : E_x \to F_{f(x)}$ eine lineare Abbildung.

II.1.3. Beispiel. Das Tangentialbündel des Kreises TS^1 ist trivialisierbar. Jedes Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(S^1)$ ohne Nullstelle liefert einen Vektorbündelisomorphismus $\xi^1 \cong TS^1$, $(x, \lambda) \mapsto \lambda \cdot X(x)$, wobei $\xi^1 = S^1 \times \mathbb{R}$ das triviale Linienbündel über S^1 bezeichnet, siehe auch Proposition II.1.5.

II.1.4. Beispiel. Das Tangentialbündel einer Sphäre gerader Dimension TS^{2n}, $n \geq 1$, ist nicht trivialisierbar, denn es besitzt keinen nirgendwo verschwindenden Schnitt, siehe Korollar I.6.7.

II.1.5. Proposition. *Es sei $\varphi : E \to F$ ein Vektorbündelhomomorphismus über M, sodass $\varphi_x : E_x \to F_x$ für jedes $x \in M$ ein linearer Isomorphismus ist. Dann ist φ ein Vektorbündelisomorphismus und daher $E \cong F$.*

Beweis. Offensichtlich ist $\varphi : E \to F$ eine glatte Bijektion. Es genügt zu zeigen, dass die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : F \to E$ glatt ist, sie ist dann ebenfalls faserweise linear und liefert daher einen zu φ inversen Vektorbündelhomomorphismus. Da Glattheit eine lokale Eigenschaft ist, dürfen wir o.B.d.A. $E = U \times V$, $F = U \times V$ und $p = p_1 = q$ annehmen, $U \subseteq M$ offen, V ein Vektorraum. Der Vektorbündelhomomorphismus φ ist dann von der Form

$$\varphi : U \times V \to U \times V, \qquad \varphi(x, v) = (x, \tilde{\varphi}(x) \cdot v),$$

für eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\tilde{\varphi} : U \to \mathrm{GL}(V)$. Für die Umkehrabbildung gilt offensichtlich

$$\varphi^{-1} : U \times V \to U \times V, \qquad \varphi(x, v) = \big(x, \tilde{\varphi}(x)^{-1} \cdot v\big),$$

wobei $\tilde{\varphi}(x)^{-1} \in \mathrm{GL}(V)$ die zu $\tilde{\varphi}(x) \in \mathrm{GL}(V)$ inverse lineare Abbildung bezeichnet. Aufgrund der Glattheit der Inversion $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$, $A \mapsto A^{-1}$, ist also auch φ^{-1} glatt, vgl. Aufgabe 30. $\square$

Ist $p : E \to M$ ein Vektorbündel und $U \subseteq M$ offen, dann bildet die *Einschränkung* $p : E|_U \to U$ ein Vektorbündel über U, wobei $E|_U := p^{-1}(U)$. Etwas allgemeiner ist für jede Teilmannigfaltigkeit $S \subseteq M$ die Einschränkung $p : E|_S \to S$ ein Vektorbündel über S, $E|_S := p^{-1}(S)$. Ist E orientiert, dann erbt $E|_S$ in kanonischer Weise eine Orientierung.

Es sei $p : E \to N$ ein Vektorbündel und $f : M \to N$ glatt. Beachte, dass p und f transversal sind, denn die Projektion eines Vektorbündels ist stets submersiv. Nach Satz I.7.3 ist also

$$f^*E := \big\{(x, e) \in M \times E \mid f(x) = p(e)\big\} \subseteq M \times E$$

eine Teilmannigfaltigkeit. Es bezeichnen $q : f^*E \to M$ und $\tilde{f} : f^*E \to E$ die Einschräkungen der beiden kanonischen Projektionen von $M \times E$. Insbesondere sind q und $\tilde{f}$ also glatt. Jede Faser von q ist in kanonischer Weise mit einer Vektorraumstruktur versehen, denn $q^{-1}(x) = \{x\} \times E_{f(x)} = E_{f(x)}$, für jedes $x \in M$.

Ist $\varphi = (p, \varphi_2) : E|_U \to U \times V$ eine lokale Trivialisierung von E, dann bildet $(q, \varphi_2 \circ \tilde{f}) : (f^*E)|_{f^{-1}(U)} \to f^{-1}(U) \times V$ eine lokale Trivialisierung von f^*E, somit ist $q : f^*E \to M$ also ein Vektorbündel, $\operatorname{rank}_x(f^*E) = \operatorname{rank}_{f(x)}(E)$. Wir bezeichnen f^*E als das mittels f zurückgezogene Vektorbündel, oder auch als *Pullback Bündel.* Beachte auch, dass $\tilde{f} : f^*E \to E$ ein Vektorbündelhomomorphismus über f ist, der jede Faser $(f^*E)_x$ linear isomorph auf die Faser $E_{f(x)}$ abbildet. Ist E orientiert, dann existiert auf f^*E genau eine Orientierung, sodass $\tilde{f}$ faserweise orientierungserhalten wird, wir bezeichnen diese als die *induzierte Orientierung* von f^*E. Für die Schnitte des Pullback Bündels erhalten wir eine kanonische Identifikation

$$\Gamma(f^*E) = \{\sigma \in C^\infty(M, E) \mid p \circ \sigma = f\}, \qquad s \mapsto \sigma := \tilde{f} \circ s.$$

Ist F ein weiteres Vektorbündel über M und $\psi : F \to E$ ein Vektorbündelhomomorphismus über f, dann existiert ein eindeutiger Verktorbündelhomomorphismus $\tilde{\psi} : F \to f^*E$ über M mit $\tilde{f} \circ \tilde{\psi} = \psi$, nämlich $\tilde{\psi} = (q, \psi) : F \to f^*E \subseteq M \times E$. Dies wird als *universelle Eigenschaft* des Pullback Bündels bezeichnet. Ist darüber hinaus ψ faserweise ein linearer Isomorphismus, dann ist $\tilde{\psi} : F \to f^*E$ ein Vektorbündelisomorphismus, siehe Proposition II.1.5. Ist $g : P \to M$ eine weitere glatte Abbildung, so erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $(f \circ g)^*E \cong g^*f^*E$ über P. Bezeichent $\iota : S \to N$ die Inklusion einer Teilmannigfaltigkeit, so erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $E|_S \cong \iota^*E$, die Pullback Konstruktion kann daher als Verallgemeinerung der Einschränkung verstanden werden.

Es seien E und F zwei Vektorbündel über M. Wir werden nun ein Vektorbündel $E \oplus F \to M$ mit Fasern $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$, $x \in M$, konstruieren. Die dem Totalraum $E \oplus F$ zugrundeliegende Menge sei $E \oplus F := \bigsqcup_{x \in M} E_x \oplus F_x$ und $p : E \oplus F \to M$ bezeichne die offensichtliche Projektion. Sind $\varphi : E|_U \to U \times V$ und $\psi : F|_U \to U \times W$ Vektorbündelkarten von E und F, so erhalten wir eine faserweise lineare Bijektion

$$(E \oplus F)|_U = \bigsqcup_{x \in U} E_x \oplus F_x \xrightarrow{\rho := \bigsqcup_{x \in U} \varphi_x \oplus \psi_x} \bigsqcup_{x \in U} V \oplus W = U \times (V \oplus W).$$

Es gibt nun auf $E \oplus F$ genau eine glatte Struktur, sodass dieses ρ, für jedes Paar von Trivialisierungen φ und ψ wie oben, ein Diffeomorphismus ist.[4] Versehen wir

[4] Um die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf $E \oplus F$ einzusehen betrachten wir weitere lokale Trivialisierungen $\bar{\varphi} : E|_U \to U \times V$ von E und $\bar{\psi} : F|_U \to U \times W$ von F. Die Vektorbündelkartenwechsel sind dann von der Form

$$\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : U \times V \to U \times V, \qquad (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})(x, v) = (x, \tilde{\varphi}(x) \cdot v)$$
$$\bar{\psi} \circ \psi^{-1} : U \times W \to U \times W, \qquad (\bar{\psi} \circ \psi^{-1})(x, w) = (x, \tilde{\psi}(x) \cdot w)$$

für eindeutig bestimmte glatte Abbildungen $\tilde{\varphi} : U \to \mathrm{GL}(V)$ und $\tilde{\psi} : U \to \mathrm{GL}(W)$. Für die oben konstruierten $\rho = \bigsqcup_{x \in U} \varphi_x \oplus \psi_x$ und $\bar{\rho} = \bigsqcup_{x \in U} \bar{\varphi}_x \oplus \bar{\psi}_x$ gilt offenbar,

$$\bar{\rho} \circ \rho^{-1} : U \times (V \oplus W) \to U \times (V \oplus W), \quad (\bar{\rho} \circ \rho^{-1})(x, (v, w)) = (x, (\tilde{\varphi}(x) \cdot v, \tilde{\psi}(x) \cdot w)),$$

$E \oplus F$ mit dieser glatten Struktur, so wird $p : E \oplus F \to M$ zu einem Vektorbündel über M, $\operatorname{rank}(E \oplus F) = \operatorname{rank}(E) + \operatorname{rank}(F)$. Sind E und F orientiert, dann definieren wir die davon *induzierte Orientierung* von $E \oplus F$ indem wir die Fasern $(E \oplus F)_x = E_x \oplus F_x$ mit der Produktorientierung versehen.

Wir haben kanonische faserweise injektive Vektorbündelhomomorphismen $\iota_E : E \to E \oplus F$ und $\iota_F : F \to E \oplus F$ sowie kanonische faserweise surjektive Vektorbüdelhomomorphismen $\pi_E : E \oplus F \to E$ und $\pi_F : E \oplus F \to F$. Diese genügen den Relationen

$$\pi_E \circ \iota_E = \mathrm{id}_E, \quad \pi_F \circ \iota_F = \mathrm{id}_F, \quad \pi_E \circ \iota_F = 0 = \pi_F \circ \iota_E.$$

Für die Schnitte von $E \oplus F$ erhalten wir daraus eine kanonische Identifikation

$$\Gamma(E \oplus F) = \Gamma(E) \times \Gamma(F), \qquad s \mapsto (\pi_E \circ s, \pi_F \circ s).$$

Ist G ein weiteres Vektorbündel und sind $\psi_E : G \to E$ sowie $\psi_F : G \to F$ zwei Vektorbündelhomomorphismen über M, dann existiert ein eindeutiger Vektorbündelhomomorphismus $\psi : G \to E \oplus F$ mit $\psi_E = \pi_E \circ \psi$ und $\psi_F = \pi_F \circ \psi$, nämlich $\psi = \iota_E \circ \psi_E + \iota_F \circ \psi_F$. Die Whitney Summe hat daher die universelle Eigenschaft eines Produkts. Sie besitzt aber auch die universelle Eigenschaft der direkten Summe, sind $\rho_E : E \to G$ und $\rho_F : F \to G$ zwei Vektorbündelhomomorphismen, dann existiert ein eindeutiger Vektorbündelhomomorphismus $\rho : E \oplus F \to G$ mit $\rho \circ \iota_E = \rho_E$ und $\rho \circ \iota_F = \rho_F$, nämlich $\rho = \rho_E \circ \pi_E + \rho_F \circ \pi_F$.

Beachte, dass kanonische Vektorbündelisomorphismen $E \oplus (F \oplus G) = (E \oplus F) \oplus G$, $E \oplus \xi^0 = E$, $f^*(E \oplus F) = f^*E \oplus f^*F$ und $E \oplus F \cong F \oplus E$ existieren, wobei der letzte i.A. nicht orientierungsbewahrend ist.

II.1.6. Beispiel. Für das Tangentialbündel der Sphäre existiert ein Isomorphismus $TS^n \oplus \xi^1 \cong T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n} = \xi^{n+1}$, also ist $TS^n \oplus \xi^1$ trivialisierbar, wobei $\xi^k = S^n \times \mathbb{R}^k$ das triviale Vektorbündel über S^n bezeichnet. Beachte dazu, dass die Tangentialabbildung der Inklusion $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ einen faserweise injektiven Vektorbündelhomomorphismus $\iota_1 : TS^n \to T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n}$ liefert. Ist weiters $\nu : S^n \to T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n}$ ein Einheitsnormalenfeld für S^n, so erhalten wir einen faserweise injektiven Vektorbündelhomomorphismus $\iota_2 : \xi^1 \to T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n}$, $(x, \lambda) \mapsto \lambda \cdot \nu(x)$. Zusammen induzieren ι_1 und ι_2 einen Vektorbündelhomomorphismus $TS^n \oplus \xi^1 \to T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n}$. Nach Konstruktion ist dieser faserweise bijektiv und daher ein Isomorphismus, siehe Proposition II.1.5.

II.1.7. Bemerkung. Es seien $p : E \to M$ und $q : F \to M$ zwei Vektorbündel. Dann ist offensichtlich $p \times q : E \times F \to M \times M$ ein Vektorbündel über $M \times M$ mit Fasern $(E \times F)_{(x,y)} = E_x \times F_y$. Bezeichnet $\delta : M \to M \times M$, $\delta(x) := (x, x)$, die Diagonalabbildung so erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $E \oplus F = \delta^*(E \times F)$, siehe Aufgabe 32. Dies kann als alternative Definition der Whitney Summe verwendet werden. Andererseits lässt sich auch $E \times F$ mit Hilfe

---

also sind die Vektorbündelkartenwechsel $\bar\rho \circ \rho^{-1}$ glatt. Daraus folgt nun sofort die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf $E \oplus F$.

der Whitney Summe darstellen, $E \times F \cong p_1^* E \oplus p_2^* F$, wobei $p_i : M \times M \to M$ die beiden Projektionen bezeichnen, $i = 1, 2$.

Es sei $p : E \to M$ ein Vektorbündel. Eine Teilmenge $F \subseteq E$ wird *Teilbündel* von E genannt, falls zu jedem $x \in M$ eine lokale Trivialisierung $\varphi : E|_U \to U \times V$ von E existiert, sodass $x \in U$ und $\varphi(F \cap E|_U) = U \times W$ für einen linearen Teilraum $W \subseteq V$. Zusammen mit der Einschränkung $p : F \to M$ wird F dann offensichtlich selbst zu einem Vektorbündel. Zudem ist die kanonisches Inklusion $F \to E$ ein faserweise injektiver Vektorbündelhomomorphismus.

Wir nennen zwei Teilbündel $F, G \subseteq E$ komplementär, falls F_x und G_x für jedes $x \in M$, komplemantäre Teilräume von E_x sind, dh. $F_x \cap G_x = 0$ und $F_x + G_x = E_x$. In diesem Fall induzieren die kanonischen Inklusionen $F \to E$ und $G \to E$ einen Isomorphismus $F \oplus G \cong E$, siehe Proposition II.1.5. Die kanonischen Inklusionen $\iota_E : E \to E \oplus G$ und $\iota_G : G \to E \oplus G$ erlauben es umgekehrt E und G als komplementäre Teilbündel von $E \oplus G$ aufzufassen.

II.1.8. Lemma. *Es sei $p : E \to M$ ein Vektorbündel und $\iota : F \to E$ die kanonische Inklusion eines Teilbündels. Dann existieren (faserweise surjektive) Vektorbündelhomomorphismen $\pi : E \to F$ mit $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_F$.*

Beweis. Es seien $\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times V_i$ Vektorbündelkarten mit $\varphi_i(F \cap E|_{U_i}) = U_i \times W_i$ und $\bigcup_i U_i = M$, wobei $W_i \subseteq V_i$ Teilräume sind. Für jedes i wählen wir eine lineare Projektion $\tilde{\pi}_i : V_i \to W_i$ mit $\tilde{\pi}_i|_{W_i} = \mathrm{id}_{W_i}$. Mit Hilfe der Karten $\varphi_i : E|_{U_i} \to U_i \times V_i$ und deren Einschränkungen $\varphi_i : F|_{U_i} \to U_i \times W_i$ erhalten wir Vektorbündelhomomorphismen $\pi_i : E|_{U_i} \to F|_{U_i}$ mit $\pi_i \circ \iota|_{F_{U_i}} = \mathrm{id}_{F_{U_i}}$, für jedes i. Sei nun λ_i eine der offenen Überdeckung $\{U_i\}$ untergeordnete Partition der Eins, $\lambda_i \in C^\infty(M)$, $\mathrm{supp}(\lambda_i) \subseteq U_i$ und $\sum_i \lambda_i = 1$. Beachte, dass sich die Vektorbündelhomomorphismen $\lambda_i \pi_i : E|_{U_i} \to F|_{U_i}$ durch Null zu global definierten glatten Vektorbündelhomomorphismen $E \to F$ ausdehnen lassen. Es ist daher $\pi := \sum_i \lambda_i \pi_i : E \to F$ ein Vektorbündelhomomorphismus für den $\pi \circ \iota = \sum_i \lambda_i \pi_i \circ \iota = \sum_i \lambda_i \, \mathrm{id}_F = \mathrm{id}_F$ gilt. $\square$

Es sei E ein Vektorbündel über M und $F \subseteq E$ ein Teilbündel. Wir konstruieren nun ein *Quotientenbündel* E/F über M mit Fasern $(E/F)_x = E_x/F_x$. Genauer, die dem Totalraum von E/F zugrunde liegende Menge sei $\bigsqcup_{x \in M} E_x/F_x$, und $p : E/F \to M$ bezeichne die offensichtliche Projektion. Ist $\varphi : E|_U \to U \times V$ eine Trivialisierung von E mit $\varphi(F \cap E|_U) = U \times W$, $W \subseteq V$ ein Teilraum, so erhalten wir eine faserweise lineare Bijektion

$$(E/F)|_U = \bigsqcup_{x \in U} E_x/F_x \xrightarrow{\rho := \bigsqcup_{x \in U} \varphi_x} \bigsqcup_{x \in U} V/W = U \times V/W.$$

Es gibt nun auf E/F genau eine glatte Struktur, sodass ρ, für jede Trivialisierung φ, ein Diffeomorphismus ist.[5] Versehen wir E/F mit dieser glatten Struktur,

[5] Um die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf E/F einzusehen betrachten wir eine weitere lokale Trivialisierung $\bar{\varphi} : E_U \to U \times V$ von E mit $\bar{\varphi}(F \cap E|_U) = U \times W$. Dann

dann wird $\tilde{p} : E/F \to M$ also zu einem Vektorbündel über M, $\operatorname{rank}(E/F) = \operatorname{rank}(E) - \operatorname{rank}(F)$. Zudem ist die kanonische Projektion $\pi : E \to E/F$ ein faserweise surjektiver Vektorbündelhomomorphismus, und wir erhalten eine (faserweise) kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln

$$0 \to F \xrightarrow{\iota} E \xrightarrow{\pi} E/F \to 0.$$

Sind E und F orientiert, dann definieren wir die davon *induzierte Orientierung* auf E/F wie folgt. Eine Basis $b_1, b_2, \dots$ von $(E/F)_x = E_x/F_x$ ist positiv orientiert, falls für eine (und dann jede) positiv orientierte Basis $f_1, f_2, \dots$ von F_x und eine (und dann jede) Wahl von $e_1, e_2, \dots \in E_x$ mit $\pi e_i = b_i$ die Basis $f_1, f_2, \dots, e_1, e_2, \dots$ von E_x positiv orientiert ist, vgl. Aufgabe 35.

Das Quotientenbündel hat folgende universelle Eigenschaft. Ist G ein weiters Vektorbündel über M und $\psi : E \to G$ ein Vektorbündelhomomorphismus mit $\psi \circ \iota = 0$, dann existiert ein eindeutiger Vektorbündelhomomorphismus $\bar{\psi} : E/F \to G$, sodass $\bar{\psi} \circ \pi = \psi$. Beachte auch, dass $\bar{\psi}$ faserweise injektiv ist.

Nach Lemma II.1.8 existiert ein Vektorbündelhomomorphismus $\rho : E \to F$ mit $\rho \circ \iota = \mathrm{id}_F$. Da $(\mathrm{id}_E - \iota \circ \rho) \circ \iota = \iota - \iota = 0$, faktorisiert $\mathrm{id}_E - \iota \circ \rho : E \to E$ zu einem Vektorbündelhomomorphimus $\sigma : E/F \to E$ mit $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{E/F}$. Die Homomorphismen ι und σ induzieren einen Isomorphismus $F \oplus E/F \cong E$, dessen Inverser von ρ und π induziert wird. Beachte jedoch, dass dieser Isomorphismus nicht kanonisch ist, er hängt von der Wahl von σ bzw. ρ ab. Unsere Orientierungskonventionen sind so, dass der eben konstruierte Isomorphismus $F \oplus E/F \cong E$ für jede Wahl von ρ bzw. σ orientierungserhaltend ist. Wir halten fest:

II.1.9. Proposition. *Jedes Teilbündle $F \subseteq E$ besitzt komplementäre Teilbündel $G \subseteq E$, dh. $F \oplus G = E$, und für jedes solche G gilt $G \cong E/F$.*

II.1.10. Proposition. *Es sei $\varphi : E \to F$ ein Vektorbündelhomomorphismus über M mit lokal konstantem Rang, dh. $\operatorname{rank}(\varphi_x : E_x \to F_x)$ ist lokal konstant für $x \in M$. Dann ist $\operatorname{img}(\varphi) := \bigcup_{x \in M} \operatorname{img}(\varphi_x)$ ein Teilbündel von F und $\ker(\varphi) := \bigcup_{x \in M} \ker(\varphi_x)$ ist ein Teilbündel von E. Zudem induziert φ einen Vektorbündelisomorphismus $E/\ker(\varphi) \cong \operatorname{img}(\varphi)$.*

Beweis. Da Teilbündel zu sein eine lokale Eigenschaft ist, dürfen wir o.B.d.A. $E = U \times V$ und $F = U \times W$ annehmen, $U \subseteq M$ offen, V und W Vektorräume.

---

ist der Vektorbündelkartenwechsel von der Form

$$\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1} : U \times V \to U \times V, \qquad (\bar{\varphi} \circ \varphi^{-1})(x, v) = (x, \tilde{\varphi}(x) \cdot v)$$

für eine eindeutig bestimmte glatte Abbildung $\tilde{\varphi} : U \to \mathrm{GL}(V)$. Da auch $\tilde{\varphi}(x)(W) = W$, für alle $x \in U$, induziert $\tilde{\varphi}$ eine glatte Abbildungen $\tilde{\rho} : U \to \mathrm{GL}(V/W)$, vgl. Aufgabe 33. Für die oben konstruierten $\rho := \bigsqcup_{x \in U} \varphi_x$ und $\bar{\rho} := \bigsqcup_{x \in U} \bar{\varphi}_x$ gilt offenbar

$$\bar{\rho} \circ \rho^{-1} : U \times V/W \to U \times V/W, \quad (\bar{\rho} \circ \rho^{-1})(x, \bar{v}) = (x, \tilde{\rho}(x) \cdot \bar{v}),$$

also sind die Vektorbündelkartenwechsel $\bar{\rho} \circ \rho^{-1}$ glatt. Daraus folgt nun sofort die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf E/F.

Nach Voraussetzung können wir durch Verkleinern von U auch erreichen, dass der Rang von $\varphi_x : V \to W$ konstant ist, $x \in U$.

Sei nun $x_0 \in U$, und betrachte die Teilräume $V_0 := \ker(\varphi_{x_0}) \subseteq V$ sowie $W_0 := \operatorname{img}(\varphi_{x_0}) \subseteq W$. Wähle komplementäre Teilräume $V_0' \subseteq V$, dh. $V_0 \oplus V_0' = V$, und $W_0' \subseteq W$, dh. $W_0 \oplus W_0' = W$. Da $\varphi_{x_0} : V_0' \to W_0$ ein Isomorphismus ist, existiert eine lineare Abbildung $\sigma : W \to V$, mit $\sigma \circ \varphi_{x_0}|_{V_0'} = \mathrm{id}_{V_0'}$, $\varphi_{x_0} \circ \sigma|_{W_0} = \mathrm{id}_{W_0}$ und $\ker(\sigma) = W_0'$. Weiters bezeichne $\pi : V \to V_0$ die Projektion auf V_0 längs V_0', dh. $\pi|_{V_0} = \mathrm{id}_{V_0}$, $\ker(\pi) = V_0'$, und $\pi' : W \to W_0'$ die Projektion auf W_0' längs W_0, dh. $\pi'|_{W_0'} = \mathrm{id}_{W_0'}$ und $\ker(\pi') = W_0$. Nach Konstruktion gilt daher $\sigma \circ \varphi_{x_0} + \pi = \mathrm{id}_V$ und $\varphi_{x_0} \circ \sigma + \pi' = \mathrm{id}_W$.

Betrachte nun die beiden Vektorbündelhomomorphismen

$$\begin{aligned} \psi : U \times V \to U \times V, &\qquad \psi(x, v) := (x, (\sigma \circ \varphi_x + \pi) \cdot v), \\ \rho : U \times W \to U \times W, &\qquad \rho(x, w) := (x, (\varphi_x \circ \sigma + \pi') \cdot w). \end{aligned}$$

Beachte $\psi_{x_0} = \mathrm{id}_V$ und $\rho_{x_0} = \mathrm{id}_W$. Da $\mathrm{GL}(V)$ eine offene Teilmenge von $L(V, V)$ bildet, können wir durch Verkleinern von U erreichen, dass ψ ein Isomorphismus ist. Nach Konstruktion gilt $\psi(\ker(\varphi)) \subseteq U \times V_0$, und aus Dimensionsgründen daher $\psi(\ker(\varphi)) = U \times V_0$. Dies zeigt, dass $\ker(\varphi)$ ein Teilbündel von E bildet. Analog können wir durch Verkleinern von U auch erreichen, dass ρ ein Isomorphismus wird. Nach Konstruktion gilt $\rho(U \times W_0) \subseteq \operatorname{img}(\varphi)$ und aus Dimensionsgründen daher $\rho(U \times W_0) = \operatorname{img}(\varphi)$. Damit ist auch $\operatorname{img}(\varphi)$ als Teilbündel von F nachgewiesen, denn $\rho^{-1}(\operatorname{img}(\varphi)) = U \times W_0$.

Der Vektorbündelhomomorphismus $\varphi : E \to \operatorname{img}(\varphi)$ faktorisiert zu einem Vektorbündelhomomorphismus $\bar\varphi : E/\ker(\varphi) \to \operatorname{img}(\varphi)$. Nach Konstruktion ist $\bar\varphi$ faserweise ein linearer Isomorphismus, aus Proposition II.1.5 folgt daher, dass $\bar\varphi$ ein Vektorbündelisomorphismus ist. □

II.1.11. Beispiel (Normalenbündel einer Teilmannigfaltigkeit). Bezeichnet $\iota : S \to M$ die Inklusion einer Teilmannigfaltigkeit, dann ist $T\iota : TS \to TM$ ein faserweise injektiver Vektorbündelhomomorphismus, und wir können TS als Teilbündel von $TM|_S = \iota^*TM$ auffassen. Das Quotientenbündel $T^\perp S := TM|_S/TS$ wird als *Normalenbündel* von S in M bezeichent. Sind M und S orientiert, dann erhalten wir eine *induzierte Orientierung* auf dem Normalenbündel $T^\perp S$.

II.1.12. Beispiel (Vertikales Bündel). Ist $p : E \to M$ ein Vektorbündel, dann bildet die Tangentialabbildung $Tp : TE \to TM$ einen Vektorbündelhomomorphismus über $p : E \to M$, und induziert daher einen faserweise surjektiven Vektorbündelhomomorphismus $TE \to p^*TM$. Sein Kern $VE := \{X \in TE : Tp \cdot X = 0\}$ ist ein Teilbündel von $TE \to E$, das als *vertikales Bündel* von E bezeichnet wird. Wir erhalten somit eine kanonische kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln über E,

$$0 \to VE \to TE \xrightarrow{Tp} p^*TM \to 0.$$

Insbesondere erhalten wir einen kanonischen Isomorphismus $TE/VE = p^*TM$. Nach Proposition II.1.9 gilt weiters $TE \cong VE \oplus p^*TM$. Zudem existiert ein kanonischer Vektorbündelisomorphismus über E,

$$p^*E = VE, \qquad (v, w) \mapsto \tfrac{d}{dt}|_{t=0}(v + tw),$$

wobei $p^*E = \{(v, w) \in E \times E \mid p(v) = p(w)\}$. Durch Zurückziehen mittels des Nullschnitts $o : M \to E$ erhalten wir eine kanonische kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln $0 \to E \to o^*TE \to TM \to 0$ über M, denn $o^*VE = o^*p^*E = (p \circ o)^*E = \operatorname{id}_M^* E = E$ und $o^*p^*TM = (p \circ o)^*TM = \operatorname{id}_M^* TM = TM$. Der Nullschnitt erlaubt es aber auch TM als Teilbündel von o^*TE aufzufassen, $To : TM \to o^*TE$, also bilden TM und E komplementäre Teilbündel von o^*TE, und wir erhalten somit einen kanonischen Isomorphismus $o^*TE = TM \oplus E$ über M. Ist E ein orientiertes Vektorbündel und M orientiert, dann ist dieser Isomorphismus orientierungsbewahrend. Identifizieren wir das Bild des Nullschnitts $o(M) \subseteq E$ mit M, und fassen also M als Teilmannigfaltigkeit von E auf, so folgt $TE|_M = TM \oplus E$. Für das Normalenbündel von M in E erhalten wir daraus einen kanonischen Isomorphismus $T^\perp M = E$. Ist E ein orientiertes Vektorbündel und M orientiert, dann ist dieser Isomorphismus orientierungsbewahrend.

II.1.13. Proposition. *Es sei $S \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit und $f : M \to N$ transversal zu S. Dann induziert die Tangentialabbildung $Tf : TM \to TN$ einen Vektorbündelisomorphismus $T^\perp(f^{-1}(S)) \cong f^*(T^\perp S)$. Sind M, N und S orientiert, dann existiert genau eine Orientierung auf $f^{-1}(S)$, sodass dieser Isomorphismus orientierungsbewahrend wird.*

Beweis. Wir erinnern uns, dass $\Sigma := f^{-1}(S)$ eine Teilmannigfaltigkeit von M bildet, siehe Satz I.7.3. Die Einschränkung der Tangentialabbildung von f liefert einen Vektorbündelhomomorphismus $Tf : TM|_\Sigma \to TN|_S$ über $f|_\Sigma : \Sigma \to S$, der $T\Sigma$ nach TS abbildet und daher zu einen Vektorbündelhomomorphismus $T^\perp\Sigma = TM|_\Sigma/T\Sigma \to TN|_S/TS = T^\perp S$ über $f|_\Sigma : \Sigma \to S$ faktorisiert. Da f und S transversal sind, ist dieser Homomorphismus faserweise bijektiv und induziert daher einen Isomorphismus $T^\perp\Sigma \cong f^*T^\perp S$. Sind N und S orientiert, dann erhalten wir eine induzierte Orientierung des Normalenbündels $T^\perp S$ und diese induziert eine Orientierung des Vektorbündels $T^\perp\Sigma \cong f^*T^\perp S$. Es gibt daher genau eine Orientierung des Vektorbündels $T\Sigma$, die zusammen mit der Orientierung auf M, diese Orientierung auf $T^\perp\Sigma = TM|_\Sigma/T\Sigma$ induziert, vgl. Aufgabe 36. $\square$

II.1.14. Bemerkung. Die induzierte Orientierung von $\Sigma := f^{-1}(S)$ in Proposition II.1.13 kann wie folgt beschrieben werden. Eine Basis $X_1, \dots, X_{m-n+k}$ von $T_x\Sigma$, $x \in M$, ist genau dann positiv orientiert wenn folgendes gilt. Ist $Y_1, \dots, Y_k$ eine positiv orientierte Basis von $T_{f(x)}S$ und $Z_1, \dots, Z_{n-k} \in T_xM$, sodass die Vektoren $Y_1, \dots, Y_k, T_xf \cdot Z_1, \dots, T_xf \cdot Z_{n-k}$ eine postiv orientierte Basis von $T_{f(x)}N$ bilden, dann ist $X_1, \dots, X_{m-n+k}, Z_1, \dots, Z_{n-k}$ eine positiv orientierte Basis von T_xM.

II.1.15. Bemerkung. Es bezeichnen $\iota_1 : S_1 \to M$ und $\iota_2 : S_2 \to M$ die Inklusionen zweier transversaler orientierter Teilmannigfaltigkeiten einer orientierten Mannigfaltigkeit M. Aus Proposition II.1.13 erhalten wir eine induzierte Orientierung der Teilmannigfaltigkeit $S_1 \cap S_2 = \iota_2^{-1}(S_1) \subseteq S_2$, wir bezeichnen diese als die *induzierte Orientierung des Durchschnitts* $S_1 \cap S_2$. Eine Basis $X_1, \dots$ von $T_x(S_1 \cap S_2)$ ist genau dann positiv orientiert, wenn folgendes gilt: ergänzen wir X_i zu einer positiv orientierten Basis $X_1, \dots, Y_1, \dots$ von T_xS_1 und und zu einer positiv orientierten Basis $X_1 \dots, Z_1, \dots$ von T_xS_2 dann bildet $X_1, \dots, Y_1, \dots, Z_1, \dots$ eine positiv orientierte Basis von T_xM.

Mit Hilfe der Geometrie von Geodäten werden wir im nächsten Kapitel folgendes Resultat beweisen, das die Bedeutung des Normalenbündels verdeutlicht.

II.1.16. Satz (Tubuläre Umgebung). *Es sei $S \subseteq M$ eine abgeschlossenen Teilmannigfaltigkeit mit Normalenbündel $T^\perp S := TM|_S/TS$. Dann existiert eine offene Umgebung U von S in M und ein Diffeomorphismus $\varphi : T^\perp S \cong U$, sodass $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$ und $T\varphi|_S = \mathrm{id}_{T^\perp S} : T^\perp S \to T^\perp S$, wobei wir S mit dem Bild des Nullschnitts in $T^\perp S$ identifizieren, vgl. Beispiel II.1.12. Jedes solche φ wird als* tubuläre Umgebung *von S in M bezeichnet. Zudem kann U beliebig klein gewählt werden, dh. ist V eine offene Umgebung von S in M, dann können φ und U so gewählt werden, dass $U \subseteq V$.*

II.1.17. Bemerkung. Sind in der Situation von Satz II.1.16 die Mannigfaltigkeiten M und S orientiert, dann ist jede tubuläre Umgebung $\varphi : T^\perp S \cong U \subseteq M$ orientierungsbewahrend. Aus $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$ und $T\varphi|_S = \mathrm{id}_{T^\perp S} : T^\perp S \to T^\perp S$ folgt nämlich, dass der Vektorbündelisomorphismus

$$TS \oplus T^\perp S = T(T^\perp S)|_S \to TM|_S \cong TS \oplus T^\perp S, \qquad T\varphi|_S = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{TS} & * \\ 0 & \mathrm{id}_{T^\perp S} \end{pmatrix}$$

orientierungsbewahrend ist. Da jeder Punkt $v \in T^\perp S$ durch eine glatte Kurve mit einem Punkt in S verbunden werden kann, muss aus Stetigkeitsgründen $T_v\varphi : T_v(T^\perp S) \to T_{\varphi(v)}M$ bei jedem $v \in T^\perp S$ orientierungsbewahrend sein.

II.1.18. Lemma. *Der Rang eines Vektorbündelhomomorphismus $\varphi : E \to F$ über M kann lokal nicht fallen, dh. jeder Punkt $x_0 \in M$ besitzt eine Umgebung U, sodass $\mathrm{rank}(\varphi_x : E_x \to F_x) \geq \mathrm{rank}(\varphi_{x_0} : E_{x_0} \to F_{x_0})$ für alle $x \in U$.*

Beweis. Die Kartendarstellungen von φ sind von der Form $U \times \mathbb{R}^k \to U \times \mathbb{R}^l$, $(x, v) \mapsto (x, \tilde\varphi(x) \cdot v)$ mit $\tilde\varphi : U \to M_{k,l}(\mathbb{R})$ glatt. Es gibt daher einen $(r \times r)$-Minor $\mu : M_{k,l}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $\mu(\tilde\varphi(x_0)) \neq 0$, wobei $r := \mathrm{rank}(\varphi_{x_0})$. Wegen der Stetigkeit von μ folgt $\mu(\tilde\varphi(x)) \neq 0$ und somit $\mathrm{rank}(\varphi_x) \geq r$, für x nahe x_0. □

II.1.19. Proposition. *Es sei $\pi : E \to E$ ein Vektorbündelhomomorphismus über M mit $\pi \circ \pi = \pi$. Dann sind $\mathrm{img}(\pi)$ und $\ker(\pi)$ komplementäre Teilbündel von E und daher $\mathrm{img}(\pi) \oplus \ker(\pi) = E$.*

Beweis. Beachte, dass für den Vektorbündelhomomorphismus $\rho := \mathrm{id}_E - \pi : E \to E$ die Relationen $\rho \circ \rho = \rho$, $\pi + \rho = \mathrm{id}_E$ und $\pi \circ \rho = 0 = \rho \circ \pi$ gelten, dh. π und ρ sind faserweise komplementäre Projektionen. Nach Lemma II.1.18 können die Ränge von π und ρ lokal nicht fallen. Da aber $\operatorname{rank}(\pi) + \operatorname{rank}(\rho) = \operatorname{rank}(E)$ lokal konstant ist, muss daher der Rang von π (und auch der von ρ) lokal konstant sein. Aus Proposition II.1.10 folgt nun, dass $\operatorname{img}(\pi)$ und $\ker(\pi)$ beides Teilbündel von E sind. □

II.1.20. Proposition. *Zu jedem Vektorbündel E existiert ein Vektorbündel F, sodass $E \oplus F$ trivialisierbar ist.*

Beweis. Sei also $p : E \to M$ ein Vektorbündel. O.b.d.A. dürfen wir M zusammenhängend voraussetzen, $k = \operatorname{rank}(E)$. Wir geben den Beweis nur für kompakte Basen M. In diesem Fall existieren endlich viele Vektorbündel Karten $(p, \varphi_i) : E|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{R}^k$, $i = 1, \dots, N$, mit $\bigcup_i U_i = M$. Wähle eine der Überdeckung $\{U_i\}_{1 \leq i \leq N}$ untergeordnete Partition der Eins, $\varphi_i \in C^\infty(M)$, $\operatorname{supp}(\varphi_i) \subseteq U_i$ und $\sum_i \varphi_i = 1$. Wir dehnen die glatten Abbildungen $(\lambda_i \circ p)\varphi_i : E|_{U_i} \to \mathbb{R}^k$ durch Null zu global definierten glatten Abbildung $\tilde\varphi_i : E \to \mathbb{R}^k$ aus, $1 \leq i \leq N$. Da $\tilde\varphi_i$ faserweise linear ist, erhalten wir einen Vektorbündelhomomorphismus

$$\psi : E \to \xi^{kN} = M \times \mathbb{R}^{kN} = M \times \mathbb{R}^k \times \cdots \times \mathbb{R}^k, \qquad \psi := (p, \tilde\varphi_1, \dots, \tilde\varphi_N).$$

Nach Konstruktion ist ψ faserweise injektiv, denn zu $x \in M$ existiert i mit $\lambda_i(x) \neq 0$ und daher ist $\tilde\varphi_i : E_x \to \mathbb{R}^k$ injektiv. Nach Proposition II.1.10 ist $\operatorname{img}(\psi)$ daher ein Teilbündel von ξ^{kN} und ψ induziert einen Isomorphismus $E \cong \operatorname{img}(\psi)$. Nach Proposition II.1.9 existiert ein zu $\operatorname{img}(\psi)$ komplementäres Teilbündel $F \subseteq \xi^{kN}$, $\operatorname{img}(\psi) \oplus F = \xi^{kN}$, und wir erhalten $E \oplus F \cong \xi^{kN}$. □

II.1.21. Bemerkung. Für jedes Vektorbündel E ist der $C^\infty(M)$-Modul $\Gamma(E)$ *projektiv.* Aus Proposition II.1.20 folgt nämlich, dass $\Gamma(E)$ ein direkter Summand des freien $C^\infty(M)$-Modules $\Gamma(\xi^N) = C^\infty(M)^N$ ist. Umgekehrt tritt jeder endlich erzeugte projektive $C^\infty(M)$-Modul so auf. Diese Tatsache ist als Serre–Swan Theorem bekannt.

II.1.22. Beispiel (Tautologisches Linienbündel über $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$). Wir erinnern uns an den reellen projektive Raum,

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^n := \{\text{1-dimensionale Teilräume von } \mathbb{R}^{n+1}\},$$

und betrachten das triviale Vektorbüdel $\xi^{n+1} = \mathbb{R}\mathrm{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ über $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$. Für $l \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ bezeichne $\pi_l : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ die orthogonale Projektion auf den eindimensionalen Teilraum $l \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dies definiert einen Vektorbündelhomomorphismus $\pi : \xi^{n+1} \to \xi^{n+1}$, $\pi(l, v) = (l, \pi_l(v))$, mit $\pi \circ \pi = \pi$. Nach Proposition II.1.19 sind daher

$$\gamma := \operatorname{img}(\pi) = \big\{(l, v) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \bigm| v \in l\big\}$$
$$\gamma^\perp := \ker(\pi) = \big\{(l, v) \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \times \mathbb{R}^{n+1} \bigm| v \perp l\big\}$$

komplementäre Teilbündel, $\gamma \oplus \gamma^\perp = \xi^{n+1}$. Das Linienbündel $\gamma \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ wird als das *tautologische Linienbündel über* $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ bezeichnet. Beachte, dass die Einschränkung $\gamma|_{\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}}$ in natürlichwer Weise zu dem tautologischen Linienbündel über $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ isomorph ist. Für $n \geq 1$ ist γ nicht trivialisierbar und nicht orientierbar, siehe Aufgabe 37. Der Totalraum des tautologischen Linienbündels $\gamma \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \cong S^1$ ist zum Möbiusband diffeomorph.

II.1.23. Proposition. *Ist $p : L \to M$ ein Linienbündel, dann existiert eine Zahl N und eine glatte Abbildung $f : M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N$, sodass $L \cong f^*\gamma$.*

Beweis. Nach Proposition II.1.20 dürfen wir $L \subseteq \xi^{N+1} = M \times \mathbb{R}^{N+1}$ annehmen. Für jedes $x \in M$ bildet daher die Faser $L_x \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ einen eindimensionalen Teilraum. Wir erhalten somit eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N$, $f(x) := L_x$. Ein Blick auf die Kartendarstellung zeigt, dass f glatt ist. Offensichtlich ist $\tilde{\psi} := (f \circ p, p_2) : L \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N \times \mathbb{R}^{N+1}$ ein faserweise injektiver Vektorbündelhomomorphimus über $f : M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N$. Nach Konstruktion hat $\tilde{\psi}$ Werte im tautologischen Bündel $\gamma \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^N \times \mathbb{R}^{N+1}$ und liefert daher einen Vektorbündelhomomorphismus $\tilde{\psi} : L \to \gamma$ über $f : M \to \mathbb{R}\mathrm{P}^N$, der faserweise bijektiv ist. Folglich induziert $\tilde{\psi}$ einen Vektorbündelisomorphismus $\psi : L \to f^*\gamma$ über M. □

II.1.24. Bemerkung. Aufgrund des vorangehenden Resultats wird γ auch als *universelles Linienbündel* bezeichnet. Hat M Dimension n, dann genügt es in Proposition II.1.23 $N \geq n$ vorauszusetzen, siehe etwa [**4**, Theorem 3.4 in Chapter 4]. Unter der Gassmannmannigfaltigkeit $\mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})$ verstehen wir die Menge aller k-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{R}^n$. Diese Menge kann in natürlicher Weise zu einer glatten $k(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit gemacht werden. Wie oben lässt sich zeigen, dass

$$\gamma^k := \big\{(V, v) \in \mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n \,\big|\, v \in V\big\} \subseteq \mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$$

ein Teilbündel vom Rang k bildet, das sogenannte *tautologische Vektorbündel* über $\mathrm{Gr}_{k,n}(\mathbb{R})$. Beachte $\mathrm{Gr}_{1,n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-1}$ und $\gamma^1 = \gamma$. Wie oben lässt sich zeigen, dass zu jedem Vektorbündel $E \to M$ vom Rang k eine Zahl N und eine glatte Abbildung $f : M \to \mathrm{Gr}_{k,N}(\mathbb{R})$ existiert, sodass $E \cong f^*\gamma^k$. Aus diesem Grund wird γ^k auch als das *universelle Vektorbündel* von Rang k bezeichnet, siehe Aufgabe 39. In diesem Fall genügt es $N \geq n + k$ vorauszusetzen, siehe etwa [**4**, Theorem 3.4 in Chapter 4].

Es seien E und F zwei Vektorbündel über M. Wir definieren nun ein Vektorbündel $\hom(E, F)$ über M mit Fasern $\hom(E, F)_x = L(E_x, F_x)$, $x \in M$, wobei $L(V, W)$ den Vektorraum der lineren Abbildungen von V nach W bezeichnet. Genauer, die dem Totalraum $\hom(E, F)$ zugrundeliegende Menge ist $\hom(E, F) := \bigsqcup_{x \in M} L(E_x, F_x)$ und $p : \hom(E, F) \to M$ bezeichnet die offensichtliche Projektion. Sind $\varphi : E|_U \to U \times V$ und $\psi : F|_U \to U \times W$ zwei

Vektorbündelkarten von E und F, so erhalten wir eine faserweise lineare Bijektion

$$\hom(E,F)|_U = \bigsqcup_{x\in U} L(E_x,F_x) \xrightarrow{\rho:=\bigsqcup_{x\in U}(\varphi_x^{-1})^*(\psi_x)_*} \bigsqcup_{x\in U} L(V,W) = U\times L(V,W),$$

wobei $(\varphi_x^{-1})^*(\psi_x)_* : L(E_x,F_x)\to L(V,W)$, $\lambda\mapsto\psi_x\circ\lambda\circ\varphi_x^{-1}$. Es gibt nun auf $\hom(E,F)$ genau eine glatte Struktur, sodass diese ρ, für jedes Paar von Vektorbündelkarten φ und ψ wie oben, ein Diffeomorphismus wird.[6] Versehen wir $\hom(E,F)$ mit dieser glatten Struktur, so wird $p:\hom(E,F)\to M$ zu einem Vektorbündel über M, $\operatorname{rank}(\hom(E,F)) = \operatorname{rank}(E)\cdot\operatorname{rank}(F)$. Die Schnitte $\Gamma(\hom(E,F))$ können in natürlicher Weise mit Vektorbündelhomomorphismen $E\to F$ über M identifiziert werden. Beachte, dass kanonische Isomorphismen $f^*\hom(E,F) = \hom(f^*E,f^*F)$, $\hom(E,F\oplus G) = \hom(E,F)\oplus\hom(E,G)$ und $\hom(E\oplus F,G) = \hom(E,G)\oplus\hom(F,G)$ existeren. Im Fall $E=F$ schreiben wir $\operatorname{end}(E) := \hom(E,E)$.

Unter dem *dualen Bündel* verstehen wir das Vektorbündel $E' := \hom(E,\xi^1)$, wobei $\xi^1 = M\times\mathbb{R}$ das triviale Linienbündel bezeichnet. Die Fasern des dualen Bündels E' sind daher die Dualräume der Fasern von E, dh. $E'_x = (E_x)'$. Es gibt kanonische Isomorphismen $(E\oplus F)' = E'\oplus F'$, $f^*(E') = (f^*E)'$ und $E = E''$.

II.1.25. Beispiel. Für das Tangentialbündel des projektiven Raums haben wir $T\mathbb{R}\mathrm{P}^n \cong \hom(\gamma,\gamma^\perp)$, siehe Beispiel II.1.22 und Aufgabe 38.

II.1.26. Proposition. *Die kanonische Abbildung*

$$\Gamma(\hom(E,F)) \to L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E),\Gamma(F)), \qquad \varphi\mapsto(s\mapsto\varphi\circ s),$$

ist ein $C^\infty(M)$-linearer Isomorphismus. Dabei bezeichnet $L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E),\Gamma(F))$ den $C^\infty(M)$-Modul der $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\phi:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$, dh. $\phi(fs) = f\phi(s)$ für alle $f\in C^\infty(M)$ und $s\in\Gamma(E)$.

Beweis. Die Abbildung oben ist offensichtlich wohldefiniert und $C^\infty(M)$-linear, denn $\varphi(fs) = f(\varphi(s)) = (f\varphi)(s)$, $\varphi\in\Gamma(\hom(E,F))$, $s\in\Gamma(E)$, $f\in C^\infty(M)$. Auch die Injektivität ist leicht einzusehen. Sei dazu $\varphi\in\Gamma(\hom(E,F))$

[6] Um die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf $\hom(E,F)$ einzusehen betrachten wir weitere lokale Trivialisierungen $\bar\varphi : E|_U\to U\times V$ von E und $\bar\psi : F|_U\to U\times W$ von F. Die Vektorbündelkartenwechsel sind dann von der Form

$$\bar\varphi\circ\varphi^{-1} : U\times V\to U\times V, \qquad (\bar\varphi\circ\varphi^{-1})(x,v) = (x,\tilde\varphi(x)\cdot v)$$
$$\bar\psi\circ\psi^{-1} : U\times W\to U\times W, \qquad (\bar\psi\circ\psi^{-1})(x,w) = (x,\tilde\psi(x)\cdot w)$$

für eindeutig bestimmte glatte Abbildungen $\tilde\varphi : U\to\mathrm{GL}(V)$ und $\tilde\psi : U\to\mathrm{GL}(W)$. Für die oben konstruierten $\rho = \bigsqcup_{x\in U}(\varphi_x^{-1})^*(\psi_x)_*$ und $\bar\rho = \bigsqcup_{x\in U}(\bar\varphi_x^{-1})^*(\bar\psi_x)_*$ gilt offenbar,

$$\bar\rho\circ\rho^{-1} : U\times L(V,W)\to U\times L(V,W), \quad (\bar\rho\circ\rho^{-1})(x,\lambda) = (x,\tilde\psi(x)\cdot\lambda\cdot\tilde\varphi(x)^{-1}).$$

Da die Abbildung $\mathrm{GL}(W)\times L(V,W)\times\mathrm{GL}(W)\to L(V,W)$, $(A,\lambda,B)\mapsto A\cdot\lambda\cdot B^{-1}$ glatt ist, sind also die Vektorbündelkartenwechsel $\bar\rho\circ\rho^{-1}$ glatt. Daraus folgt nun sofort die Existenz und Eindeutigkeit der glatten Struktur auf $\hom(E,F)$.

und $x \in M$ mit $0 \neq \varphi_x \in L(E_x, F_x)$. Es existiert daher $v \in E_x$ mit $\varphi_x(v) \neq 0$. Mit Hilfe einer Vektorbündelkarte lässt sich leicht ein Schnitt $s \in \Gamma(E)$ mit $s(x) = v$ konstruieren, und für diesen gilt dann $(\varphi \circ s)(x) = \varphi_x(s(x)) = \varphi_x(v) \neq 0$, also $\varphi \circ s \neq 0$.

Um auch die Surjektivität einzusehen, sei nun $\phi \in L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), \Gamma(F))$. Wir zeigen zunächst, dass ϕ ein lokaler Operator ist, dh. für jede offene Teilmenge $U \subseteq M$ und jeden Schnitt $s \in \Gamma(E)$ mit $\operatorname{supp}(s) \subseteq U$ gilt auch $\operatorname{supp}(\phi(s)) \subseteq U$. Für jedes $x \in U$ existiert nämlich $\lambda \in C^\infty(M)$ mit $\operatorname{supp}(\lambda) \subseteq U$ und $\lambda(x) = 1$. Insbesodere folgt $\lambda s = 0 \in \Gamma(E)$, und mittels der $C^\infty(M)$-Linearität von ϕ daher $0 = \phi(\lambda s)(x) = (\lambda\phi(s))(x) = \lambda(x)(\phi(s)(x)) = \phi(s)(x)$, also $\operatorname{supp}(\phi(s)) \subseteq U$.

Es sei nun $x \in M$ und $s \in \Gamma(E)$ mit $s(x) = 0$. Wir zeigen nun, dass daraus auch $\phi(s)(x) = 0$ folgt. Aufgrund der Lokalität von ϕ dürfen wir o.B.d.A. $M = \mathbb{R}^n$, $x = 0$, $E = \mathbb{R}^n \times V$ und $F = \mathbb{R}^n \times W$ annehmen. Indentifizieren wir $\Gamma(E) = C^\infty(\mathbb{R}^n, V)$ und $\Gamma(F) = C^\infty(\mathbb{R}^n, W)$, so erhalten wir eine $C^\infty(\mathbb{R}^n)$-lineare Abbildung $\phi : C^\infty(\mathbb{R}^n, V) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, W)$, sowie $s \in C^\infty(\mathbb{R}^n, V)$ mit $s(0) = 0$. Zu zeigen ist $\phi(s)(0) = 0$. Die entscheidende Beobachtung ist nun

$$s(y) = s(y) - s(0) = \int_0^1 \tfrac{\partial}{\partial t} s(ty)\, dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n y^i \tfrac{\partial s}{\partial y^i}(ty)\, dt = \sum_{i=1}^n y^i \int_0^1 \tfrac{\partial s}{\partial y^i}(ty)\, dt,$$

wobei $y^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Koordinatenprojektionen bezeichnen. Es gilt daher $s = \sum_{i=1}^n y^i s_i$, wobei $s_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n, V)$, $s_i(y) := \int_0^1 \frac{\partial s}{\partial y^i}(ty)\, dt$. Aus der $C^\infty(M)$-Linearität von ϕ erhalten wir damit $\phi(s) = \sum_{i=1}^n y^i \phi(s_i)$ und somit $\phi(s)(0) = 0$.

Wir sehen daher, dass $\phi(s)(x) \in F_x$ nur von $s(x) \in E_x$ abhängt. Es existieren daher $\varphi_x \in L(E_x, F_x)$, sodass $\phi(s)(x) = \varphi_x(s(x))$ für alle $s \in \Gamma(E)$ und $x \in M$. Diese φ_x, $x \in M$, definieren einen Schnitt φ des Bündels $\hom(E, F)$, es bleibt nur noch zu zeigen, dass dieser Schnitt auch glatt ist. Sei dazu $U \subseteq M$ offen, $E|_U \cong U \times V$ und $F|_U \cong U \times W$ Vektorbündelkarten und $\hom(E, F)|_U \cong U \times L(V, W)$ die entsprechende lokale Trivialisierung von $\hom(E, F)$. In diesen Karten ist $\phi : C^\infty(U, V) \to C^\infty(U, W)$ von der Form $\phi(s)(x) = \tilde\varphi(x) \cdot s(x)$, $s \in C^\infty(U, V)$, $x \in U$, für eine Abbildung $\tilde\varphi : U \to L(V, W)$. Betrachten wir $v \in V$ als konstante Abbildung $v \in C^\infty(U, V)$ so folgt $\tilde\varphi(x) \cdot v = \phi(v)(x)$, also ist $\tilde\varphi(x) \cdot v$ für fixes v glatt in x. Folglich ist $\tilde\varphi : U \to L(V, W)$ glatt, siehe Aufgabe 40, woraus nun die Glattheit von φ folgt. $\square$

Aus Proposition II.1.26 erhalten wir insbesondere einen $C^\infty(M)$-linearen Isomorphismus $\Gamma(E') = L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E), C^\infty(M))$, dh. Schnitte von E' können in kanonischer Weise mit $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\Gamma(E) \to C^\infty(M)$ identifiziert werden. Mittels $E'' = E$ erhalten wir aber auch $\Gamma(E) = L_{C^\infty(M)}(\Gamma(E'), C^\infty(M))$, dh. Schnitte von E können als $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\Gamma(E') \to C^\infty(M)$ aufgefasst werden.

II.1.27. Beispiel. Unter dem *Kotangentialbündel* einer glatten Mannigfaltigkeit M verstehen wir das Vektorbündel $T^*M := (TM)'$, $\operatorname{rank}(T^*M) = \dim(M)$, seine Schnitte können in kanonischer Weise mit den 1-Formen auf M identifiziert werden, $\Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$. Aus Proposition II.1.26 sehen wir, dass $\Omega^1(M)$ in kanonischer Weise mit den $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ identifiziert werden kann, vgl. [**3**, Abschnitt 4.1]. Wir können aber auch $\mathfrak{X}(M)$ mit $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen $\Omega^1(M) \to C^\infty(M)$ identifizieren.

Es seien E und F zwei glatte Vektorbündel über M. Das *Tensorprodukt* von E und F ist ein glattes Vektorbündel $E\otimes F$ über M mit Fasern $(E\otimes F)_x = E_x \otimes F_x$. Genauer, die dem Totalraum zugrundeliegende Menge ist $E\otimes F := \bigsqcup_{x\in M} E_x \otimes F_x$, und $E\otimes F \to M$ bezeichnet die offensichtliche Projektion. Sind $\varphi : E|_U \to U\times V$ und $\psi : F|_U \to U \times W$ lokale Trivialisierungen, so erhalten wir eine faserweise lineare Bijektion

$$(E\otimes F)|_U = \bigsqcup_{x\in U} E_x \otimes F_x \xrightarrow{\rho:=\bigsqcup_{x\in U}\varphi_x\otimes\psi_x} \bigsqcup_{x\in U} V\otimes W = U\times (V\otimes W).$$

Analog zu den vorangehenden Konstruktionen lässt sich zeigen, dass auf $E\otimes F$ genau eine glatte Struktur existiert, sodass dieses ρ ein Diffeomorphismus wird, für alle Paare lokaler Trivialisierungen φ und ψ wie oben. Versehen wir nun $E\otimes F$ mit dieser glatten Struktur, so wird $E\otimes F$ zu einem glatten Vektorbündel über M, $\operatorname{rank}(E\otimes F) = \operatorname{rank}(E)\cdot\operatorname{rank}(F)$. Ist $s\in\Gamma(E)$ und $t \in \Gamma(F)$ so schreiben wir $s\otimes t \in \Gamma(E\otimes F)$ für den entsprechenden Schnitt von $E\otimes F$, dh. $(s\otimes t)_x = s_x \otimes t_x$, $x\in M$. Beachte auch die kanonischen Isomorphismen $(E\otimes F)\otimes G = (E\otimes F)\otimes G$, $E\otimes\xi^1 = E$, $E\otimes F \cong F\otimes E$, $f^*(E\otimes F) = f^*E\otimes f^*F$, $E\otimes(F\oplus G) = E\otimes F\oplus E\otimes G$, $\hom(E,F) = F\otimes E'$, $\operatorname{end}(E) = E\otimes E'$, $(E\otimes F)' = E'\otimes F'$ und

$$\hom(E\otimes F, G) = \hom(E, \hom(F,G)).$$

Zusammen mit Proposition II.1.26 sehen wir daraus, dass Schnitte des Vektorbündels $\hom(E\otimes F, G)$ in natürlicher Weise mit $C^\infty(M)$-bilinearen Abbildungen $\Gamma(E)\times\Gamma(F)\to\Gamma(G)$ identifiziert werden können.

Ist E ein Vektorbündel dann definieren wir

$$\otimes_k^l E := \underbrace{E'\otimes\cdots\otimes E'}_{k\text{ Faktoren}} \otimes \underbrace{E\otimes\cdots\otimes E}_{l\text{ Faktoren}}.$$

Aus den Beobachtungen oben folgt nun, dass $\Gamma(\otimes_k^l E)$ in natürlicher Weise mit den $C^\infty(M)$-multilinearen Abbildungen

$$\underbrace{\Gamma(E)\times\cdots\times\Gamma(E)}_{k\text{ Faktoren}} \times \underbrace{\Gamma(E')\times\cdots\times\Gamma(E')}_{l\text{ Faktoren}} \to C^\infty(M)$$

identifiziert werden kann.

II.1.28. Beispiel. Tensorfelder aus $\mathcal{T}_k^l(M)$ können als glatte Schnitte des Vektorbündels

$$\otimes_k^l TM = \underbrace{T^*M\otimes\cdots\otimes T^*M}_{k\text{ Faktoren}} \otimes \underbrace{TM\otimes\cdots\otimes TM}_{l\text{ Faktoren}}$$

aber auch als $C^\infty(M)$-multilineare Abbildungen

$$\underbrace{\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)}_{k \text{ Faktoren}}\times\underbrace{\Omega^1(M)\times\cdots\times\Omega^1(M)}_{l \text{ Faktoren}}\to C^\infty(M)$$

verstanden werden, vgl. [**3**, Abschnitt 4.2].

Für jedes Vektorbündel E haben wir einen Vektorbündelhomomorphismus $\operatorname{tr}:\operatorname{end}(E)\to\xi^1$, der als *kanonische Kontraktion* oder *Spur* bezeichnet wird. Faserweise ist $\operatorname{tr}_x:\operatorname{end}(E)_x=\operatorname{end}(E_x)\to\xi^1_x=\mathbb{R}$ die übliche Spur. Für Schnitte erhalten wir daraus eine $C^\infty(M)$-lineare Abbildung $\operatorname{tr}:\Gamma(\operatorname{end}(E))\to C^\infty(M)$, $\operatorname{tr}(\varphi)(x)=\operatorname{tr}(\varphi_x)$. Analog definiert die faserweise Komposition von Endomorphismen einen Vektorbündelhomomorphismus $\operatorname{end}(E)\otimes\operatorname{end}(E)\to\operatorname{end}(E)$. Auch liefert die faserweise Evaluation einen kanonischen Vektorbündelhomomorphismus $\hom(E,F)\otimes E\to F$, bzw. $\operatorname{end}(E)\otimes E\to E$.

Es sei E ein Vektorbündel über M und $\otimes^k E=E\otimes\cdots\otimes E$. Für jede Permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ bezeichne $\phi_\sigma:\otimes^k E\to\otimes^k E$ den Vektorbündelisomorphismus der die Faktoren entsprechend permutiert, $\phi_\sigma(e_1\otimes\cdots\otimes e_k)=e_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes e_{\sigma(k)}$. Betrachte nun den Vektorbündelhomomorphismus

$$\operatorname{alt}:\otimes^k E\to\otimes^k E,\qquad \operatorname{alt}:=\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}\operatorname{sign}(\sigma)\phi_\sigma.$$

Da $\phi_{\sigma\tau}=\phi_\sigma\circ\phi_\tau$ und $\operatorname{sign}(\sigma\tau)=\operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\tau)$, $\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_k$, folgt sofort $\operatorname{alt}\circ\operatorname{alt}=\operatorname{alt}$. Nach Proposition II.1.10 ist daher $\Lambda^k E:=\operatorname{img}(\operatorname{alt})$ ein Teilbündel von $\otimes^k E$ mit Fasern $(\Lambda^k E)_x=\Lambda^k(E_x)$. Beachte, dass wir dieses Vektorbündel auch als Quotient von $\otimes^k E$ verstehen können, denn alt induziert einen kanonischen Isomorphismus $\Lambda^k E=\otimes^k E/\ker(\operatorname{alt})$. Glatte Schnitte von $\Lambda^k E$ können daher mit $C^\infty(M)$*-multilinearen alternierenden* Abbildungen $\Gamma(E')\times\cdots\times\Gamma(E')\to C^\infty(M)$ identifiziert werden. Analog, können wir glatte Schnitte von $\Lambda^k E'$ mit $C^\infty(M)$-multilinearen alternierenden Abbildungen $\Gamma(E)\times\cdots\times\Gamma(E)\to C^\infty(M)$ identifizieren. Beachte die kanonischen Isomorphismen $f^*(\Lambda^k E)=\Lambda^k(f^*E)$, $\Lambda^k E'=(\Lambda^k E)'$, und

$$\Lambda^k(E\oplus F)=\bigoplus_{p+q=k}\Lambda^p E\otimes\Lambda^q E.$$

Das Faserweise Hack Produckt liefert einen Vektorbündelhomomorphismus $\Lambda^p E\otimes\Lambda^q E\to\Lambda^{p+q}E$, die davon induzierte Abbildung $\Gamma(\Lambda^p E)\times\Gamma(\Lambda^q E)\to\Gamma(\Lambda^{p+q}E)$ macht $\bigoplus_k\Gamma(\Lambda^k E)=\Gamma(\bigoplus_k\Lambda^k E)$ zu einer assotiativen und graduiert kommutativen Algebra.

II.1.29. Beispiel. Aus obigen Überlegungen sehen wir nun, dass $\Omega^k(M)$ einerseits mit $\Gamma(\Lambda^k T^*M)$ und andererseits mit dem Modul der $C^\infty(M)$-multilineare alternierende Abbildungen $\mathfrak{X}(M)\times\cdots\times\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ in kanonischer Weise identifiziert werden können.

Analog zum alternierenden Fall lässt sich zeigen, dass für den Vektorbündelhomomorphismus

$$\mathrm{sym} : \otimes^k E \to \otimes^k E, \qquad \mathrm{sym} := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \phi_\sigma,$$

$\mathrm{sym} \circ \mathrm{sym} = \mathrm{sym}$ gilt, und daher $S^k E := \mathrm{img}(\mathrm{sym}) \subseteq \otimes^k E$ ein Teilbündel mit Fasern $(S^k E)_x = S^k(E_x)$ bildet, das wir auch als Quotient $S^k E = \otimes^k E/\ker(\mathrm{sym})$ verstehen können. Glatte Schnitte von $S^k E$ entsprechen nun $C^\infty(M)$-*multilinearen symmetrischen* Abbildungen $\Gamma(E') \times \cdots \times \Gamma(E') \to C^\infty(M)$. Analog können wir $\Gamma(S^k E')$ mit dem Modul der $C^\infty(M)$-multilinearen symmetrischen Abbildungen $\Gamma(E) \times \cdots \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$ identifizieren. Beachte auch, dass die Fasern $(S^k E')_x = S^k E'_x$ mit den homogenen Polynomen vom Grad k auf E_x identifiziert werden können. Wieder haben wir kanonische Identifikationen $f^*(S^k E) = S^k(f^* E)$ und $S^k(E') = (S^k E)'$. Für uns werden vor Allem Schnitte $b \in \Gamma(S^2 E')$ interessant sein, so ein Schnitt liefert eine symmetrische Bilinearform b_x auf jeder Faser E_x, und diese hängen glatt von x ab. Alternativ können wir b als eine symmetrische $C^\infty(M)$-bilineare Abbildung $b : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to C^\infty(M)$ auffassen.

II.1.30. Bemerkung. Unter einem *Rahmen* eines Vektorbündels E über M verstehen wir Schnitte $s_1, \dots, s_k \in \Gamma(E)$, sodass $s_{1,x}, \dots, s_{k,x}$ eine Basis der Faser E_x bildet, für jedes $x \in M$. Unter einem *lokalen Rahmen* verstehen wir einen Rahmen von $E|_U$, wobei $U \subseteq M$ offen ist. Ein Vektorbündel vom Rang k besitzt genau dann einen Rahmen, wenn es trivial ist, jeder Rahmen s_i von E liefert einen Isomorphismus $M \times \mathbb{R}^k \cong E$, $(x, t^1, \dots, t^k) \mapsto t^1 s_{1,x} + \cdots + t^k s_{k,x}$, siehe Proposition II.1.5. I.A. wird ein Vektorbündel daher keinen Rahmen besitzen, lokale Rahmen exisistieren jedoch immer. Jeder lokale Rahmen $s_i \in \Gamma(E|_U)$ liefert eine Vektorbündelkarte $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$, die den Schnitt s_i auf die durch den i-ten Einheitsvektor von $\mathbb{R}^k$ definierte konstante Abbildung $U \to \mathbb{R}^k$ abbildet.

Unter dem (lokalen) *dualen Korahmen* verstehen wir jene eindeutig bestimmten Schnitte $\sigma^1, \dots, \sigma^k \in \Gamma(E'|_U)$ für die $\sigma^j(s_i) = \delta_i^j$ gilt, dh. in jeder Faser ist $\sigma_x^1, \dots, \sigma_x^k$ die zu $s_{1,x}, \dots, s_{k,x}$ duale Basis, $x \in U$. Ein beliebige Schnitt $t \in \Gamma(E)$ lässt sich lokal in einem Rahmen entwickeln,

$$t|_U = \sum_{i=1}^k t^i s_i, \qquad t^i = \sigma^i(t|_U) \in C^\infty(U).$$

Bezüglich eines lokalen Rahmens lässt sich ein Schnitt daher durch einen Spaltenvektor $\mathbf{t} = (t^1, \dots, t^k)^t \in C^\infty(U)^k = C^\infty(U; \mathbb{R}^k)$ von Koeffizientenfunktionen darstellen. Bilden $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k \in \Gamma(E|_U)$ einen weiteren lokalen Rahmen von E, dann gilt

$$s_i = \sum_{j=1}^k h_i^j \tilde{s}_j, \qquad h_i^j = \tilde{\sigma}^j(s_i) \in C^\infty(U).$$

Fassen wir diese h_i^j als $(k \times k)$-Matrix $\mathbf{h} = (h_i^j)$ mit Eintragungen in $C^\infty(U)$ auf, dann bildet also $\mathbf{h}_x$ die Matrix zum Basiswechsel von $s_{i,x}$ nach $\tilde{s}_{i,x}$. Für die Koeffizienten der Entwicklung $t|_U = \sum_{i=1}^k \tilde{t}^i \tilde{s}_i$ im Rahmen $\tilde{s}_i$ gilt daher

$$\tilde{t}^j = \sum_{i=1}^k h_i^j t^i$$

oder in Matrixschreibweise $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{h}\,\mathbf{t}$.

Ist $s_1^E, \dots, s_k^E \in \Gamma(E|_U)$ ein lokaler Rahmen von E und $s_1^F, \dots, s_l^F \in \Gamma(F|_U)$ ein lokaler Rahmen von F, dann bilden $s_1^E, \dots, s_k^E, s_1^F, \dots, s_l^F$ einen lokalen Rahmen von $E \oplus F$, und $s_i^E \otimes s_j^F$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$ ist ein lokaler Rahmen von $E \otimes F$. Insbesondere bildet also

$$\sigma^{i_1} \otimes \cdots \otimes \sigma^{i_q} \otimes s_{j_1} \otimes \cdots \otimes s_{j_p}, \qquad 1 \leq i_l, j_l \leq k,$$

einen lokalen Rahmen von $\otimes_q^p E$ und

$$s_{j_1} \wedge \cdots \wedge s_{j_p}, \qquad 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq k,$$

ist ein lokaler Rahmen von $\Lambda^p E$.

II.1.31. Beispiel. Ist $M \supseteq U \xrightarrow{u} \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, dann bilden die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^n} \in \mathfrak{X}(U) = \Gamma(TM|_U)$ einen lokalen Rahmen des Tangentialbündels TM und $du^1, \dots, du^n \in \Omega^1(U) = \Gamma(T^*M|_U)$ ist der duale Korahmen von T^*M. Wir erhalten einen lokalen Rahmen von $\otimes_q^p TM$,

$$du^{i_1} \otimes \cdots \otimes du^{i_q} \otimes \tfrac{\partial}{\partial u^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \tfrac{\partial}{\partial u^{j_p}}, \qquad 1 \leq i_l, j_l \leq n,$$

und

$$du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_q}, \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leq n,$$

bildet einen lokalen Rahmen von $\Lambda^q T^*M$.

II.2. Thom Isomorphismus. Es sei $p : E \to M$ ein Vektorbündel und $o \in \Gamma(E)$ der Nullschnitt. Offensichtlich ist $p \circ o = \mathrm{id}_M$, es gilt aber auch $o \circ p \simeq \mathrm{id}_E$, denn $h : E \times I \to E$, $h(v,t) := tv$, ist eine Homotopie von $o \circ p$ nach id_E. Die Vektorbündelprojektion ist also eine Homotopieäquivalenz und induziert daher für jedes q einen Isomorphismus $p^* : H^q(M) \cong H^q(E)$, deren Inverser vom Nullschnitt induziert wird, siehe Korollar I.2.10. Beachte auch, dass jeder Schnitt $s \in \Gamma(E)$ homotop zum Nullschnitt ist, denn $M \times I \to E$, $(x,t) \mapsto h(s(x),t)$, ist eine Homotopie von o nach s.

II.2.1. Satz. *Es sei $p : E \to M$ ein orientiertes Vektorbündel vom Rank k über einer geschlossenen glatten n-Mannigfaltigkeit M. Dann existiert eine eindeutige Klasse $\phi_E \in H_c^k(E)$, die sogenannte* Thom Klasse *von E, sodass $\int_{E_x} \iota_x^* \phi_E = 1$ für alle $x \in M$, wobei $\iota_x : E_x \to E$ die Inklusion der Faser bezeichnet. Für die Thom Klasse gilt weiters:*

(a) Die Abbildung $H^q(M) \to H_c^{q+k}(E)$, $a \mapsto p^*a \wedge \phi_E$, ist für jedes q ein Isomorphismus, der sogenannte Thom Isomorphismus.

(b) *Ist M orientiert und der Totalraum von E mit der induzierten Orientierung versehen, dann gilt $\int_M o^* b = \int_E b \wedge \phi_E$, für alle $b \in H^n(E)$, dh. ϕ_E is Poincaré Dual zum Nullschnitt.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur im orientierbaren Fall, sei also M orientiert und der Totalraum E mit der induzierten Orientierung versehen. Betrachte nun die Isomorphismen, siehe Satz I.5.9,

$$H_c^{q+k}(E)' \underset{\cong}{\xleftarrow{D^E}} H^{n-q}(E) \underset{\cong}{\xleftarrow{p^*}} H^{n-q}(M) \underset{\cong}{\xrightarrow{D^M}} H_c^q(M)' = H^q(M)'.$$

Da M kompakt ist sind alle Kohomologien endlich dimensional, siehe Korollar I.3.26. Es existiert daher ein eindeutiger Isomorphismus $\psi : H_c^{q+k}(E) \xrightarrow{\cong} H^q(M)$, sodass

$$\int_E p^* a \wedge b = \int_M a \wedge \psi(b), \qquad \text{für alle } a \in H^{n-q}(M). \tag{II.1}$$

Insbesondere ist die Klasse $\phi_E := \psi^{-1}([1]) \in H_c^k(E)$ durch

$$\int_E p^* a \wedge \phi_E = \int_M a, \qquad \text{für alle } a \in H^n(M), \tag{II.2}$$

eindeutig charakterisiert. Aus der definierenden Gleichung für ψ, siehe (II.1), folgt sofort $\psi(p^*a \wedge b) = a \wedge \psi(b)$, und daher $p^* a \wedge \phi_E = \psi^{-1}(a)$, für alle $a \in H^n(M)$. Dies zeigt (a). Für $b \in H^n(E)$ erhalten wir aus (II.2) auch $\int_M o^* b = \int_E (p^* o^* b) \wedge \phi_E = \int_E b \wedge \phi$, denn $o^* : H^n(E) \to H^n(M)$ ist inverse zu $p^* : H^n(M) \to H^n(E)$. Damit ist auch (b) gezeigt.

Es bleibt daher nur noch zu zeigen, dass ϕ_E durch $\int_{E_x} \iota_x^* \phi_E = 1$ eindeutig charakterisiert ist. Wir nehmen dazu o.B.d.A. M zusammenhängend an. Weiters sei $x \in S$ und $U \subseteq M$ eine zu $\mathbb{R}^n$ diffeomorphe Umgebung von x, über der E trivialisierbar ist. Wähle $\alpha \in \Omega^n(M)$ mit $\operatorname{supp}(\alpha) \subseteq U$ und $\int_M \alpha = 1$. Da die von α repräsentierte Klasse $H^n(M)$ erzeugt, ist die ϕ_E definierende Relation (II.2) zu $\int_{p^{-1}(U)} p^* \alpha \wedge \phi_E = 1$ äquivalent. Wir wählen eine orientierungsbewahrende Vektorbündelkarte $E|_U \cong U \times E_x$ und eine orientierte Karte $U \cong \mathbb{R}^n$, die x auf $0 \in \mathbb{R}^n$ abbildet. Dies liefert einen Isomorphismus $E|_U \cong \mathbb{R}^n \times E_x$, $\tilde{\alpha} \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\alpha} = 1$, und $\tilde{\phi}_E \in \Omega^k(\mathbb{R}^n \times E_x)$, $d\tilde{\phi}_E = 0$ und $\operatorname{supp}(\tilde{\phi}_E) \cap \operatorname{supp}(p_1^* \tilde{\alpha})$ ist kompakt. Die ϕ_E definierende Relation (II.2) ist nun zu $\int_{\mathbb{R}^n \times E_x} p_1^* \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\phi}_E = 1$ äquivalent. Beachte, dass $\mathbb{R}^n \times E_x \times I \to \mathbb{R}^n \times E_x$, $(y, v, t) \mapsto (ty, v)$, eine Homotopie von $\iota_x \circ p_2$ nach $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n \times E_x}$ definiert. Nach Satz I.2.5 existiert daher $\beta \in \Omega^{k-1}(\mathbb{R}^n \times E_x)$ mit $\tilde{\phi}_E = p_2^* \iota_x^* \phi_E + d\beta$. Für das im Beweis von Satz I.2.5 konstruierte β ist zudem $\operatorname{supp}(\beta) \cap \operatorname{supp}(p_1^* \alpha)$ kompakt. Mit Bemerkung I.4.16 erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}^n \times E_x} p_1^* \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\phi}_E = \int_{\mathbb{R}^n \times E_x} p_1^* \tilde{\alpha} \wedge p_2^* \iota_x^* \phi_E = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\alpha} \cdot \int_{E_x} \iota_x^* \phi_E = \int_{E_x} \iota_x^* \phi_E,$$

also ist die ϕ_E definierende Bedingung (II.2) zu $\int_{E_x} \iota_x^* \phi_E = 1$ äquivalent. □

II.2.2. Definition. Unter der *Euler Klasse* eines orientierten Vektorbündels E von Rank k über einer geschlossenen glatten Mannigfaltigkeit M verstehen wir die Klasse $e_E := o^*\phi_E \in H^k(M)$, wobei $\phi_E \in H^k_c(E)$ die Thom Klasse und $o \in \Gamma(E)$ den Nullschnitt von E bezeichnen.

II.2.3. Beispiel. Es sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit, V ein k-dimensionaler orientierter Vektorraum und es bezeichne $E := M \times V$ das triviale Vektorbündel. Weiters sei $\phi \in \Omega^k_c(V)$ mit $\int_V \phi = 1$. Dann repräsentiert $p_2^*\phi$ die Thom Klasse von E, wobei $p_2 : M \times V \to V$ die kanonische Projektion bezeichnet. Insbesondere verschwindet die Euler Klasse jedes trivialisierbaren Vektorbündels mit Rang $k \geq 1$, denn $o^*p_2^*\phi = (p_2 \circ o)^*\phi = 0$ da ja $p_2 \circ o : M \to V$ konstant ist.

II.2.4. Satz (Lokalisationsprinzip). *Es bezeichne $\iota : S \to M$ die kanonische Inklusion einer geschlossenen orientierten k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit einer geschlossenen orientierten n-Mannigfaltigkeit M. Dann existiert zu jeder offenen Umgebung U von S in M ein Repräsentant des Poincaré Duals $\eta_S \in H^{n-k}(M)$ der Träger in U hat. Versehen wir das Normalenbündel $T^\perp S$ mit der induzierten Orientierung dann gilt weiters $e_{T^\perp S} = \iota^*\eta_S \in H^{n-k}(M)$.*

Beweis. Durch Verkleinern von U dürfen wir o.B.d.A. annehmen, dass eine tubuläre Umgebung $\varphi : T^\perp S \xrightarrow{\cong} U$ wie in Satz II.1.16 existiert, dh. φ ist orientierungsbewahrend und es gilt $\varphi|_S = \mathrm{id}_S$. Bezeichnen $j : U \to M$ und $\iota : S \to M$ die kanonischen Inklusionen und $o \in \Gamma(T^\perp S)$ den Nullschnitt, dann gilt also $\iota = j \circ \varphi \circ o$. Es bezeichne $\phi \in H^{n-k}_c(T^\perp S)$ die Thom Klasse von $T^\perp S$, siehe Satz II.2.1, und $\eta := j_*(\varphi^{-1})^*\phi \in H^{n-k}_c(M) = H^{n-k}(M)$. Nach Konstruktion hat η einen Repräsentanten mit Träger in U, es genügt daher zu zeigen, dass η Poincaré Dual zu S ist. Für jedes $a \in H^k(M)$ gilt jedoch, siehe Satz II.2.1(b),

$$\int_M a \wedge \eta = \int_M a \wedge j_*(\varphi^{-1})^*\phi = \int_U j^*a \wedge (\varphi^{-1})^*\phi$$
$$= \int_{T^\perp S} \varphi^*j^*a \wedge \phi = \int_S o^*\varphi^*j^*a = \int_S (j \circ \varphi \circ o)^*a = \int_S \iota^*a,$$

und somit $\eta = \eta_S$. Daraus erhalten wir nun auch $\iota^*\eta_S = \iota^*\eta = \iota^*j_*(\varphi^{-1})^*\phi = o^*\phi = e_{T^\perp S}$. $\square$

II.2.5. Proposition (Natürlichkeit der Thom und Euler Klassen). *Es sei $f : M \to N$ ein glatte Abbildung zwischen geschlossenen Mannigfaltigkeiten und E ein orientiertes Vektorbündel vom Rang k über N. Versehen wir das Pullback Bündel f^*E mit der induzierten Orientierung, dann gilt $\phi_{f^*E} = \tilde f^*\phi_E \in H^k_c(f^*E)$ und $e_{f^*E} = f^*e_E \in H^k(M)$, wobei $\tilde f : f^*E \to E$ den kanonischen Vektorbündelhomomorphismus über f bezeichnet.*

Beweis. Für jedes $x \in M$ ist $\tilde f_x : (f^*E)_x \to E_{f(x)}$ ein orientierungsbewahrender linearer Isomorphismus und daher $\int_{(f^*E)_x} \tilde f^*\phi_E = \int_{E_{f(x)}} \phi_E = 1$. Da diese

Eigenschaft die Thom Klasse von f^*E charakterisiert folgt $\tilde{f}^*\phi_E = \phi_{f^*E}$. Bezeichnet $o : N \to E$ den Nullschnitt von E und $\tilde{o} : M \to f^*E$ den Nullschnitt von f^*E, dann gilt offenbar $\tilde{f} \circ \tilde{o} = o \circ f : M \to E$ und somit $e_{f^*E} = \tilde{o}^*\phi_{f^*E} = \tilde{o}^*\tilde{f}^*\phi_E = (\tilde{f} \circ \tilde{o})^*\phi_E = (o \circ f)^* = f^*o^*\phi_E = f^*e_E$. □

II.2.6. Proposition (Thom und Euler Klasse einer Whitney Summe). *Es seien E und F zwei orientierte Vektorbündel vom Rang k bzw. l über einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M. Versehen wir $E \oplus F$ mit der induzierten Orientierung, dann gilt $\phi_{E\oplus F} = \pi_1^*\phi_E \wedge \pi_2^*\phi_F \in H_c^{k+l}(E \oplus F)$ und $e_{E\oplus F} = e_E \wedge e_F \in H^{k+l}(M)$, wobei $\pi_1 : E \oplus F \to E$ und $\pi_2 : E \oplus F \to F$ die beiden kanonischen Vektorbündelhomomorphismen bezeichnen.*

Beweis. Für jedes $x \in M$ induzieren die faserweisen Projektionen $(\pi_1)_x : (E \oplus F)_x \to E_x$ und $(\pi_2)_x : (E \oplus F)_x \to F_x$ einen orientierungsbewahrenden Isomorphismus $(E \oplus F)_x = E_x \times F_x$. Es folgt somit

$$\int_{(E\oplus F)_x} (\iota_x^{E\oplus F})^*\big(\pi_1^*\phi_E \wedge \pi_2^*\phi_F\big) = \int_{E_x\times F_x} (\pi_1)_x^*(\iota_x^E)^*\phi_E \wedge (\pi_2)_x^*(\iota_x^F)^*\phi_F$$
$$= \int_{E_x} (\iota_x^E)^*\phi_E \cdot \int_{F_x} (\iota_x^F)^*\phi_F = 1 \cdot 1 = 1.$$

Da diese Eigenschaft die Thom Klasse von $E \oplus F$ charakterisiert erhalten wir die gewünschte Relation $\phi_{E\oplus F} = \pi_1^*\phi_E \wedge \pi_2^*\phi_F$. Bezeichnet $o : M \to E \oplus F$ den Nullschnitt, dann ist offenbar $o_1 := \pi_1 \circ o : M \to E$ der Nullschnitt in E und $o_2 := \pi_2 \circ o : M \to F$ der Nullschnitt in F. Somit erhlaten wir auch $e_{E\oplus F} = o^*\phi_{E\oplus F} = o^*\big(\pi_1^*\phi_E \wedge \pi_2^*\phi_F\big) = o^*\pi_1^*\phi_E \wedge o^*\pi_2^*\phi_F = (\pi_1 \circ o)^*\phi_E \wedge (\pi_2 \circ o)^*\phi_F = o_1^*\phi_E \wedge o_2^*\phi_F = e_E \wedge e_F$. □

II.2.7. Beispiel. Besitzt ein Vektorbündel E einen nirgendwo verschwindenden Schnitt, dann gilt $e_E = 0$. Ein Schnitt $s \in \Gamma(E)$ ohne Nullstelle definiert nämlich einen faserweise injektiven Vektorbündelhomomorphismus $\xi^1 \to E$, dessen Bild ein Teilbündel von E bildet. Bezeichnet F ein komplementäres Teilbündel, so folgt $E \cong \xi^1 \oplus F$ und mit Proposition II.2.6 daher $e_E = e_{\xi^1} \wedge e_F = 0$, denn $e_{\xi^1} = 0$ nach Beispiel II.2.3. Fassen wir $S^{2n-1} \subseteq \mathbb{C}^n$ auf, dann definiert $X(x) := \mathbf{i}x$ ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(TS^{2n-1}) = \Gamma(TS^{2n-1})$ ohne Nullstelle, es folgt daher $e(TS^{2n-1}) = 0$, $n \geq 1$.

II.2.8. Satz. *Ist M eine orientierte geschlossene n-Mannigfaltigkeit, dann gilt*

$$\int_M e_{TM} = \chi(M).$$

Beweis. Aus Korollar I.7.23, Satz II.2.4 und Proposition II.2.5 folgt

$$\chi(M) = \int_\Delta \eta_\Delta = \int_\Delta e_{T^\perp\Delta} = \int_M \delta^* e_{T^\perp\Delta} = \int_M e_{\delta^*T^\perp\Delta},$$

wobei $\delta : M \xrightarrow{\cong} \Delta \subseteq M \times M$, $\delta(x) = (x, x)$. Es genügt daher $\delta^* T^\perp \Delta \cong TM$ zu zeigen. Beachte hierfür, dass $TM \to T(M \times M)|_\Delta$, $X \mapsto (0, X)$, einen Vektorbündelhomomorphismus über δ definiert, der einen faserweise bijektiven und orientierungserhaltenden Homomorphismus $TM \to T^\perp \Delta$ über δ induziert, und daher einen orientierungsbewahrenden Isomorphismus $TM \cong \delta^* T^\perp \Delta$ liefert. $\square$

II.2.9. Satz. *Es seien M und N zwei orientierte geschlossenen Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n. Weiters sei $S \subseteq N$ eine geschlossene orientierte k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von N und $f : M \to N$ transversal zu S. Versehen wir die geschlossene Teilmannigfaltigkeit $f^{-1}(S) \subseteq M$ mit der induzierten Orientierung, siehe Proposition II.1.13, dann gilt für ihr Poincaré Dual*

$$\eta_{f^{-1}(S)} = f^* \eta_S.$$

Beweis. Es bezeichne $\Sigma := f^{-1}(S) \subseteq M$. Weiters seien $\varphi : T^\perp \Sigma \cong U \subseteq M$ und $\psi : T^\perp S \cong V \subseteq N$ tubuläre Umgebungen von Σ bzw. S, sodass $f(U) \subseteq V$, siehe Satz II.1.16. Betrachte $F := \psi^{-1} \circ f|_U \circ \varphi : T^\perp \Sigma \to T^\perp S$. Wähle eine kompakte Umgebung K von $S \subseteq N$, sodass $f^{-1}(K) \subseteq V$. Es bezeichne $\phi_S \in \Omega^k(T^\perp S)$ einen Repräsentanten der Thom Klasse von $T^\perp S$ mit $\operatorname{supp}(\phi_S) \subseteq \psi^{-1}(K)$. Nach Satz II.2.4 genügt es zu zeigen, dass $F^* \phi_S \in \Omega^k_c(T^\perp \Sigma)$ die Thom Klasse von $T^\perp \Sigma$ repräsentiert. Sei dazu $x \in \Sigma$. Wegen der Charakterisierung der Thom Klasse in Satz II.2.1 genügt es $\int_{T^\perp_x \Sigma} F^* \phi_S = 1$ zu zeigen. Nach Proposition II.2.5 gilt $\int_{T^\perp_x \Sigma} \tilde{f}^* \phi_S = 1$, wobei $\tilde{f}$ den Vektorbündelhomomorphismus $Tf|_\Sigma : T^\perp \Sigma \to T^\perp S$ über $f|_\Sigma : \Sigma \to S$ bezeichnet, siehe Proposition II.1.13. Mit einem Homotopieargument lässt sich schließlich $\int_{T^\perp_x \Sigma} \tilde{f}^* \phi_S = \int_{T^\perp_x \Sigma} F^* \phi_S$ zeigen. $\square$

II.2.10. Bemerkung. Als Spezialfall von Satz II.2.9 erhalten wir die Formel für den Abbildungsgrad in Satz I.6.3. Ist nämlich $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen nicht-leeren zusammenhängenden orientierten geschlossenen n-Mannigfaltigkeiten und $y \in M$ ein regulärer Wert von f, so folgt für das Poincaré Dual der 0-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit $f^{-1}(y) \subseteq M$ aus Satz II.2.9 sofort $\eta_{f^{-1}(y)} = f^* \eta_y$, wobei $\eta_y \in H^n(N)$ das Poincaré Dual der einpunktigen Teilmannigfaltigkeit $\{y\} \subseteq N$ bezeichnet. Da $\int_N \eta_y = 1$ folgt mit (I.37)

$$\deg(f) = \deg(f) \int_N \eta_y = \int_M f^* \eta_y = \int_M \eta_{f^{-1}(y)} = \int_{f^{-1}(y)} 1 = \sum_{f(x)=y} \varepsilon(x)$$

wobei $\varepsilon(x) \in \{\pm 1\}$ wie in Satz I.6.3 gegeben ist, denn die induzierte Orientierung von $x \in f^{-1}(y)$ ist genau dann positiv wenn $T_x f$ orientierungsbewahrend ist.

II.2.11. Korollar. *Es seien S_1 und S_2 zwei transversale orientierte geschlossene Teilmannigfaltigkeiten einer orientierten geschlossenen Mannigfaltigkeit M. Versehen wir die geschlossenen Teilmannigfaltigkeit $S_1 \cap S_2 \subseteq M$ mit der induzierten Orientierung, siehe Bemerkung II.1.15, dann gilt für ihr Poincaré Dual*

$$\eta_{S_1 \cap S_2} = \eta_{S_1} \wedge \eta_{S_2}.$$

Beweis. Es bezeichne $\iota_2 : S_2 \to M$ die kanonische Inklusion. Wir versehen $S_1 \cap S_2 = \iota_2^{-1}(S_1) \subseteq S_2$ mit der induzierten Orientierung, vgl. Bemerkung II.1.15. Nach Satz II.2.9 gilt daher $\eta_{\iota_2^{-1}(S_1)} = \iota_2^*\eta_{S_1}$. Für jedes $a \in H^*(M)$ folgt somit

$$\int_{S^1\cap S^2} a = \int_{\iota_2^{-1}(S_1)} a = \int_{S^2} a \wedge \eta_{\iota_2^{-1}(S_1)} = \int_{S_2} a \wedge \iota_2^*\eta_{S_1} = \int_M a \wedge \eta_{S_1} \wedge \eta_{S_2},$$

also $\eta_{S_1\cap S_2} = \eta_{S_1} \wedge \eta_{S_2}$. □

II.2.12. Beispiel. Es sei $M = S^n \times S^m$, $n, m \geq 1$, und $(x_0, y_0) \in S^n \times S^m$. Betrachte die beiden Teilmannigfaltigkeiten $\Sigma_1 := S^n \times \{y_0\}$ und $\Sigma_2 := \{x_0\} \times S^m$ von M und bezeichne ihre Poincaré Duale mit $a_1 := \eta_{\Sigma_1} \in H^m(M)$ bzw. $a_2 := \eta_{\Sigma_2} \in H^n(M)$. Beachte, dass Σ_1 und Σ_2 transversal sind, und sich nur in einem Punkt schneiden. Aus Korollar II.2.11 folgt daher $0 \neq a_1 \wedge a_2 \in H^{n+m}(M)$. Sei nun $y_0 \neq y_0' \in S^m$ und $\Sigma_1' := S^n \times \{y_0'\}$. Da die Inklusionen $S^n \cong \Sigma_1 \subseteq M$ und $S^n \cong \Sigma_1' \subseteq M$ homotop sind gilt auch $a_1 = \eta_{\Sigma_1'}$ und aus Korollar II.2.11 folgt $a_1 \wedge a_1 = 0$, denn $\Sigma_1 \cap \Sigma_1' = \emptyset$. Analog lässt sich die Relation $a_2 \wedge a_2 = 0$ geometrisch verstehen.

II.2.13. Beispiel. Ist Σ eine zusammenhängende geschlossene orientierte Fläche vom Geschlecht g, dann existieren 1-dimensionale zu S^1 diffeomorphe Teilmannigfaltigkeiten $A_1, \dots, A_g$ und $B_1, \dots, B_g$ von Σ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $A_i \cap A_j = \emptyset$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ und $A_i \cap B_j = \emptyset$ für alle $i \neq j$.
(b) A_i und B_i schneiden sich in genau einem Punkt transversal.
(c) Es existiert eine zu A_i homotope Teilmannigfaltigkeit A_i' mit $A_i \cap A_i' = \emptyset$.
(d) Es existiert eine zu B_i homotope Teilmannigfaltigkeit B_i' mit $B_i \cap B_i' = \emptyset$.

Es bezeichne $a_i \in H^1(\Sigma)$ das Poincaré Dual von A_i und $b_j \in H^1(\Sigma)$ das Poincaré Dual von B_j. Aus Korollar I.5.23 folgt nun

$$a_i \wedge a_j = 0 = b_i \wedge b_j, \qquad a_i \wedge b_j = \delta_{ij}$$

für geeignete Wahlen der Orientierungen von A_i und B_j. Daraus sehen wir, dass $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \in H^1(\Sigma)$ linear unabhägig sind und daher eine Basis von $H^1(\Sigma)$ bilden, denn $b_1(\Sigma) = 2g$.

II.2.14. Beispiel. Jede injektive lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ induziert eine Einbettung $\iota : \mathbb{CP}^k \to \mathbb{CP}^n$, dh. $\iota(\mathbb{CP}^k) \subseteq \mathbb{CP}^n$ ist eine Teilmannigfaltigkeit und ι ist ein Diffeomorphismus auf sein Bild. Wir zeigen zunächst, dass das Poincaré Dual dieser Teilmannigfaltigkeit nicht von φ abhängt. Sind $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{C}^{k+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ zwei injektive lineare Abbildungen, dann existiert ein linearer Isomorphismus $g : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ mit $\varphi_2 = g \circ \varphi_1$. Da $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ zusammenhängend ist, existiert eine glatte Kurve $g_t \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{C})$ von $g_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^{n+1}}$ nach $g_1 = g$. Diese induziert eine Homotopie $\mathbb{CP}^k \times I \to \mathbb{CP}^n$ von $\iota_1 : \mathbb{CP}^k \to \mathbb{CP}^n$ nach $\iota_2 : \mathbb{CP}^k \to \mathbb{CP}^n$, wobei ι_i die von φ_i induzierte Einbettung bezeichnet. Daraus folgt nun, dass $\iota_1(\mathbb{CP}^k)$ und $\iota_2(\mathbb{CP}^k)$ das selbe Poincaré Dual haben. Es bezeichne nun $a_k \in H^{2k}(\mathbb{CP}^n)$ das Poincaré Dual von $\mathbb{CP}^{n-k} \subseteq \mathbb{CP}^n$,

$0 \leq k \leq n$. Sind $0 \leq k_1, k_2$ und $k_1 + k_2 \leq n$, dann existieren injektive lineare Abbildungen $\varphi_i : \mathbb{C}^{n-k_i+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ mit $\operatorname{img}(\varphi_1) + \operatorname{img}(\varphi_2) = \mathbb{C}^{n+1}$ und $\dim(\operatorname{img}(\varphi_1) \cap \operatorname{img}(\varphi_2)) = n - k_1 - k_2 + 1$. Die davon induzierten Einbettungen $\iota_1 : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-k_1} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ und $\iota_2 : \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-k_2} \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ sind transversal und es gilt $\iota_1(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-k_1}) \cap \iota_2(\mathbb{C}\mathrm{P}^{n-k_2}) \cong \mathbb{C}\mathrm{P}^{n-k_1-k_2}$. Aus Korollar II.2.11 folgt daher $a_{k_1+k_2} = a_{k_1} \wedge a_{k_2}$. Insbesondere sind alle $a_k \neq 0$, denn $a_n \neq 0$. Mit $c := a_1 \in H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ erhalten wir auch $a_k = c^k$, vgl. Korollar I.5.23. Die graduierte Basis $\{1, c, c^2, \dots, c^n\}$ von $H^*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$ besteht daher gerade aus den Poincaré Dualen der Teilmannigfaltigkeiten $\mathbb{C}\mathrm{P}^k \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$, $0 \leq k \leq n$.

II.2.15. Satz (Fixpunktformel von Lefschetz). *Es sei M eine geschlossene orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit und $f : M \to M$ glatt, sodass alle Fixpunkte nicht-degeneriert sind, dh. für jedes $x \in M$ mit $f(x) = x$ ist* $\det(T_x f - \mathrm{id}_{T_xM}) \neq 0$. *Dann hat f nur endlich viele Fixpunkte und es gilt, siehe Definition I.7.19,*

$$\sum_{f(x)=x} \operatorname{ind}_x(f) = \lambda(f),$$

wobei $\operatorname{ind}_x(f) := \operatorname{sign}\det(\mathrm{id}_{T_xM} - T_x f)$, *für jeden Fixpunk x von f.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass die Nichtdegeneriertheitsvoraussetzung an die Fixpunkte gerade bedeutet, dass die Diagonalabbildung $\delta : M \to M \times M$ transversal zum Graphen G_f ist. Die Tangentialabbildung der Diagonalabbildung ist nämlich $T_x\delta = (\mathrm{id}_{T_xM}, \mathrm{id}_{T_xM}) : T_xM \to T_xM \times T_xM = T_{(x,x)}(M \times M)$ und die Ableitung von $(\mathrm{id}_M, f) : M \to G_f \subseteq M \times M$ bei einem Fixpunkt $x = f(x)$ ist $(\mathrm{id}_{T_xM}, T_x f) : T_xM \to T_xM \times T_xM = T_{(x,x)}(M \times M)$. Deren Bilder spannen genau dann ganz $T_{(x,x)}(M \times M)$ auf, wenn $\mathrm{id}_{T_xM} - T_x f$ ein Isomorphismus ist. Die Menge der Fixpunkte, $\delta^{-1}(G_f) = \{x \in M \mid f(x) = x\}$, ist daher eine kanonisch orientierte 0-dimensionale abgeschlossene Teilmannigfaltigkeit von M. Da M kompakt ist, kann es also nur endlich viele Fixpunkte geben. Nach Definition des Poincaré Duals folgt daher

$$\int_M \eta_{\delta^{-1}(G_f)} = \int_{\delta^{-1}(G_f)} 1 = \sum_{f(x)=x} \operatorname{ind}_x(f), \tag{II.3}$$

denn die induzierte Orientierung eines Fixpunktes $x \in \delta^{-1}(G_f)$ ist genau $\operatorname{ind}_x(f)$. Für die letzte Behauptung sei $X_1, \dots, X_n$ eine positiv orientierte Basis von T_xM. Ein Fixpunkt $x \in \delta^{-1}(G_f)$ ist genau dann positiv orientiert, wenn

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ T_x f \cdot X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ T_x f \cdot X_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ X_n \end{pmatrix},$$

eine positiv orientierte Basis von $T_{(x,x)}(M \times M) = T_xM \times T_xM$ bildet, und dies ist genau dann der Fall wenn $\det(\mathrm{id}_{T_xM} - T_x f) > 0$ gilt, denn die Basis oben definiert die gleiche Orientierung wie

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ (\mathrm{id}_{T_xM} - T_x f) \cdot X_1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ (\mathrm{id}_{T_xM} - T_x f) \cdot X_n \end{pmatrix}.$$

Nach Satz II.2.9 gilt weiters $\eta_{\delta^{-1}(G_f)} = \delta^*\eta_{G_f}$. Zusammen mit Satz I.7.22 erhalten wir daraus

$$\int_M \eta_{\delta^{-1}(G_f)} = \int_M \delta^*\eta_{G_f} = \int_\Delta \eta_{G_f} = \lambda(f).$$

Kombinieren wir dies mit (II.3), so folgt der Satz. □

II.2.16. KOROLLAR. *Es sei M eine geschlossene orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit und $f : M \to M$ glatt mit $\lambda(f) \neq 0$. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

II.2.17. BEISPIEL. Ist n gerade, dann besitzt jede glatte Abbildung $f : \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ einen Fixpunkt. Sei dazu $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha = f^* : H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) \to H^2(\mathbb{C}\mathrm{P}^n)$. Nach Bemerkung I.5.24 gilt dann $\lambda(f) = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^n = (1 - \alpha^{n+1})/(1 - \alpha)$. Da n gerade ist, folgt $\lambda(f) \neq 0$, also muss f einen Fixpunkt besitzen, siehe Korollar II.2.16.

II.2.18. SATZ. *Es sei E ein orientiertes Vektorbündel vom Rang k über einer geschlossenen orientierten glatten n-Mannigfaltigkeit M. Weiters sei $s \in \Gamma(E)$ ein Schnitt der transversal zum Nullschnitt ist. Dann ist die Nullstellenmenge $S := s^{-1}(0) = \{x \in M \mid s(x) = 0\} \subseteq M$ eine geschlossene kanonisch orientierte $(n-k)$-dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Poincaré Dual $\eta_S = e_E \in H^k(M)$.*

BEWEIS. Es bezeichne $\phi_E \in H^k_c(E)$ die Thom Klasse von E. Genau wie im Beweis von Satz II.2.9 lässt sich zeigen, dass $s^*\phi_E$ Poincaré Dual zu S ist. Da $s : M \to E$ homotop zum Nullschnitt ist, folgt $e_E = o^*\phi_E = s^*\phi_E = \eta_S$. □

Es sei E ein Vektorbündel über M. Wir erinnern uns an den kanonischen Isomorphismus $TE|_M = TM \oplus E$ und bezeichnen die Projektion auf den zweiten Summanden mit $\pi : TE|_M \to E$. Ist nun $x \in M$ eine Nullstelle eines Schnitts $s \in \Gamma(E)$, so erhalten wir eine lineare Abbildung $D_x s : T_x M \to E_x$, $D_x s := \pi_x \circ T_x s$. Spezialisieren wir dies zu $E = TM$, so erhalten wir für jede Nullstelle $x \in M$ eines Vektorfeldes $X \in \mathfrak{X}(M)$ eine lineare Abbildung $D_x X : T_x M \to T_x M$. Bezüglich einer Karte $M \supseteq U \xrightarrow{u} \mathbb{R}^n$ um x gilt $X|_U = X^1 \frac{\partial}{\partial u^1} + \cdots + X^n \frac{\partial}{\partial u^n}$, $X^j \in C^\infty(U, \mathbb{R})$, und $D_x X \cdot \frac{\partial}{\partial u^i}(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X^j}{\partial u^i}(x) \frac{\partial}{\partial u^j}(x)$, dh. die Matrixdarstellung von $D_x X$ bezüglich der Basis $\frac{\partial}{\partial u^i}(x)$ von $T_x M$ ist gerade $\frac{\partial X^j}{\partial u^i}(x)$. Eine Nullstelle $x \in M$ von $X \in \mathfrak{X}(M)$ wird *nicht-degeneriert* genannt, falls $\det(D_x X : T_x M \to T_x M) \neq 0$.

II.2.19. SATZ (Poincaré–Hopf). *Es sei M eine orientierte glatte n-Mannigfaltigkeit und $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld dessen Nullstellen alle nicht-degeneriert sind. Dann besitzt X nur endlich viele Nullstellen und es gilt*

$$\sum_{X(x)=0} \operatorname{ind}_x(X) = \chi(M),$$

wobei $\operatorname{ind}_x(X) = \operatorname{sign}\det(D_x X : T_x M \to T_x M)$.

Beweis. Es bezeichne $S := X^{-1}(0) = \{x \in M \mid X(x) = 0\}$ die Nullstellenmenge von X. Wir werden unten sehen, dass die Nichtdegeneriertheitsvoraussetzung gerade bedeutet, dass X transversal zum Nullschnitt ist. Nach Satz II.2.18 ist S daher eine kanonisch orientierte kompakte 0-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von M mit Poincaré Dual $\eta_S = e_{TM}$. Insbesondere ist S endlich, also besitzt X nur endlich viele Nullstellen. Mit Satz II.2.8 folgt nun

$$\chi(M) = \int_M e_{TM} = \int_M \eta_S = \int_S 1 = \sum_{X(x)=0} \mathrm{ind}_x(X),$$

denn die induzierte Orientierung von $x \in S$ ist gerade $\mathrm{ind}_x(X)$. Um die letzte Behauptung einzusehen, sei $\xi_1, \dots, \xi_n$ eine positiv orientierte Basis von T_xM. Bezüglich des orientierungsbewahrenden Isomorphismus $T_xTM = T_xM \oplus T_xM$ gilt $T_xX \cdot \xi_i = (\xi_i, D_xX \cdot \xi_i)$, also ist X genau dann transversal zum Nullschnitt wenn

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}\xi_n\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi_1\\D_xX\cdot\xi_1\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}\xi_n\\D_xX\cdot\xi_n\end{pmatrix} \tag{II.4}$$

eine Basis von $T_xM \oplus T_xM = T_xTM$ bildet, und dies ist genau dann der Fall, wenn $\det(D_xX) \neq 0$ gilt. Beachte auch, dass die Basis (II.4) genau dann positiv orientiert ist, wenn $\operatorname{sign}\det(D_xX) > 0$ gilt, die induzierte Orientierung von $x \in S$ ist daher genau $\mathrm{ind}_x(X)$. □

II.2.20. Beispiel. Ist $X \in \mathfrak{X}(S^{2n})$ ein Vektorfeld dessen Nullstellen alle nichtdegeneriert sind, dann muss X mindestens zwei Nullstellen besitzen. Dies folgt aus Satz II.2.19, denn $\chi(S^{2n}) = 2$.

II.2.21. Beispiel. Ist M eine orientierbare Mannigfaltigkeit mit $\chi(M) \neq 0$, dann muss jedes Vektorfeld auf M eine Nullstelle besizten.

II.3. Kovariante Ableitung und Paralleltransport. Es sei E ein Vektorbündel über M. Unter einer *kovarianten Ableitung* oder *linearen Konnexion* auf E verstehen wir eine Abbildung

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E), \qquad (X, s) \mapsto \nabla_X s,$$

sodass für alle $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $s, t \in \Gamma(E)$ und $f \in C^\infty(M)$ gilt:
(a) $\nabla_{X+Y} s = \nabla_X s + \nabla_Y s$
(b) $\nabla_{fX} s = f\nabla_X s$
(c) $\nabla_X(s + t) = \nabla_X s + \nabla_X t$
(d) $\nabla_X(fs) = f\nabla_X s + (X \cdot f)s$

Aufgrund der $C^\infty(M)$-Linearität in X kann eine kovariante Ableitung äquivalent als linearer Operator $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ aufgefasst werden, für den die Leibniz Regel $\nabla(fs) = f\nabla s + df \otimes s$ gilt, $s \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$.

Beachte weiters $\mathrm{supp}(\nabla s) \subseteq \mathrm{supp}(s)$, dh. ∇ ist ein lokaler Operator. Zu jedem $x \notin \mathrm{supp}(s)$ existiert nämlich $\lambda \in C^\infty(M)$ mit $\mathrm{supp}(\lambda) \cap \mathrm{supp}(s) = \emptyset$, $\lambda(x) = 1$ und $d\lambda(x) = 0$. Es gilt daher $\lambda s = 0$, und mit der Leibniz Regel erhalten wir